arXiv:2301.02799v1 [math.NA] 7 Jan 2023

二维高阶对流的 DoD 稳定化

Florian Streitbürger、Gunnar Birke、Christian Engwer、Sandra May

摘要 在切割单元网格上求解时间依赖双曲守恒律时，必须克服小单元问题：如果时间步长按照较大的背景单元选取，标准显式时间推进在小切割单元上将不稳定。依赖域（DoD）稳定化旨在间断伽辽金框架中解决这一问题。它在空间离散中加入惩罚项，从而恢复恰当的依赖域。本文介绍了用于高阶求解二维对流方程的 DoD 稳定化。我们证明，对于任意多项式次数 p，稳定化后的半离散格式具有 L^2 稳定性，并给出收敛性测试的数值结果，表明在 L^1 范数下的收敛阶为 $p+1$，在L^∞ 范数下的收敛阶介于 $p+\frac{1}{2}$ 和 $p+1$ 之间。</

1 引言

现代模拟通常需要对复杂几何体进行网格剖分。一种特别适用于此目的的方法是采用嵌入边界网格。只需从结构化背景网格中切出几何体，就会在嵌入物体的边界处形成切割单元。切割单元形状各异，而且可能变得

Sandra May、Florian Streitbürger，多特蒙德工业大学，德国多特蒙德 Vogelpothsweg 87，邮编 44227，电子邮箱：florian.streitbuerger@math.tu-dortmund.de、sandra.may@math.tu-dortmund.de；Christian Engwer、Gunnar Birke，明斯特大学，德国明斯特 Einsteinstraße 62，邮编 48149，电子邮箱：christian.engwer@ uni-muenster.de、g_birk01@uni-muenster.de。本研究部分由德国研究联合会（DFG）资助，项目编号为 439956613 （ HyperCut ），资助合同编号为 MA 7773/4-1 和 EN 1042/5-1；此外还获得德国卓越战略 EXC 2044-390685587「明斯特数学：动力学–几何–结构」项目的资助。

任意小。在求解时间依赖双曲守恒律时，这会导致小单元问题：对于标准的显式时间推进，如果时间步长是根据较大的背景单元选取的，那么该格式在小切割单元上将不稳定。

有限体积框架中现有的求解方法通常至多只能达到二阶精度，例如通量重分配方法 [6, 7], 、h-盒方法 [15, 5],、显隐式混合格式 [18], 、按维分裂方法 [17, 13], 或状态重分配（SRD）方法 [4]。一个例外是将主动通量方法扩展到切割单元网格 [16], ，该方法旨在达到三阶精度。

对于间断 Galerkin（DG）格式，实现高阶精度要容易得多。克服小单元问题的 DG 格式开发工作直到最近才刚刚开始。一些研究采用单元合并，例如 [20], ；另一些则研究算法求解方法，例如 Fu 和 Kreiss 采用的幽灵罚项 [11]，或 Giuliani 将 SRD 方法扩展到 DG 框架中 [12]。

作者此前提出的另一种方法是依赖域（DoD）稳定化。该方法在小切割单元上添加惩罚项，以恢复小切割单元邻域内正确的依赖域，从而使标准显式时间推进重新获得稳定性。在 [9] 中，我们首次将 DoD 稳定化用于一维和二维线性平流，但仅适用于线性多项式。在 [19], 中，我们将该稳定化方法扩展到一维非线性系统和高阶情形。为将其扩展到一维高阶情形，我们发现有必要在稳定化中添加一个额外项，用于调整小切割单元流入邻单元内的质量分布。借助该项，可以证明一维 [19]半离散框架（时间保持连续）的 L^2稳定性结果。

本文将 [19] 中的一维结果部分扩展到二维，通过高阶多项式求解线性平流。对于平面斜坡几何情形，我们证明了半离散框架下的 L^2 稳定性结果。我们还将提供相应的数值结果。这些结果显示，在 L^1 范数下，多项式次数为 p 时， $p+1$ 具有预期的收敛阶。在 L^∞ 范数下，我们观察到收敛性略有下降，收敛阶介于 $p+\frac{1}{2}$ 和 $p+1$之间。

2 问题设置

在本研究的范围内，我们将重点研究二维线性平流方程

$$u_t + \langle \beta, \nabla u \rangle = 0 \qquad \text{in } \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$u = g \qquad \text{on } \partial\Omega^{\text{in}} \times (0,T), \tag{2}$$

$$u = u_0 \qquad \text{on } \Omega \times \{t=0\}. \tag{3}$$

我们将 Ω 记为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开连通区域，将其边界记为 $\partial\Omega$ 。流入边界定义为 $\partial\Omega^{\text{in}} := \{x \in \partial\Omega : \langle \beta(x), n(x) \rangle < 0\}$，其中 $n \in \mathbb{R}^2$

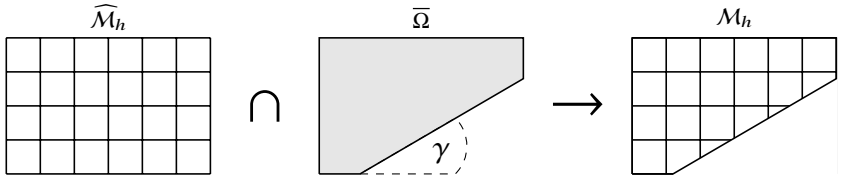

图 1 斜坡几何情况下切割单元网格 M_h 的构建：将较大矩形区域 $\widehat{\Omega} \supset \Omega$ 中的结构化背景网格 $\widehat{\ }\mathrm{M}_h$ 与区域 Ω相交。这里，Ω 具有由角度 γ描述的斜坡几何。由此，斜坡沿线产生切割单元 $E = \widehat{E} \cap \Omega$，其中 $\widehat{E} \in \widehat{\ }\mathrm{M}_h$ 是背景网格中的一个元素。

是 $\partial\Omega$上的外单位法向量。类似地，我们定义 $\partial\Omega^{\text{out}} := \{x \in \partial\Omega : \langle \beta(x),\ n(x) \rangle > 0\}$。此外，$\beta \in \mathbb{R}^2$ 是速度场，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^2$中的标准标量积。

为使表述简洁明了，本文将重点讨论具有常速度场 $\beta \in \mathbb{R}^2$的斜坡几何情形，该速度场平行于斜坡。几何设置和网格生成过程如图 1 所示。我们将网格 M_h 的内部面和外部面称为

$$\Gamma_{\text{int}} = \left\{ e_{E_1,E_2} = \partial E_1 \cap \partial E_2 \;\middle|\; E_1, E_2 \in \mathcal{M}_h \text{ and } E_1 \neq E_2 \text{ and } |e_{E_1,E_2}| > 0 \right\}, \quad (4)$$

$$\Gamma_{\text{ext}} = \{ e_E = \partial E \cap \partial\Omega \mid E \in \mathrm{M}_h \text{和 } |e_E| > 0 \}, \quad (5)$$

其中 $|e|$ 表示边 e的长度。接着，我们进一步将 Γ_{ext} 划分为$\Gamma_{\text{ext、Cart}}$ 和$\Gamma_{\text{ext、ramp}}$：$\Gamma_{\text{ext、Cart}}$ 包含所有笛卡尔边界面，而$\Gamma_{\text{ext、ramp}}$ 包含沿斜坡的边界面，这些边界面是通过裁去斜坡几何形成的。

在剖分 M_h上，我们定义离散函数空间 $\mathrm{V}^p{}_h(\mathrm{M}_h) \subset L^2(\Omega)$ 为

$$\mathcal{V}_h^p(\mathcal{M}_h) = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \mid \forall E \in \mathcal{M}_h, v_h|_E \in P^p(E) \right\}, \quad (6)$$

其中 P^p 表示次数为 p的多项式空间。

对于两个相邻单元 E_1 和 E_2之间的面 e，即 $e = \partial E_1 \cap \partial E_2$，我们定义取标量值的平均值 为

$$\{\!\{u_h\}\!\} = \frac{1}{2}(u_h|_{E_1} + u_h|_{E_2}),$$

并将跳跃 定义为取向量值：

$$[\![u_h]\!] := u_h|_{E_1} n_{E_1} + u_h|_{E_2} n_{E_2}, \quad (7)$$

其中 n_{E_i} 表示单元 E_i的外单位法向量，$i = 1, 2$。有了这些准备，我们现在可以定义用于求解 (1) 的格式。

我们采用线法：先进行空间离散，再进行时间离散。未稳定半离散格式定义如下：求 $u_h(t) \in \mathrm{V}^p{}_h(\mathrm{M}_h)$，使得

$$(d_t u_h(t), w_h)_{L^2} + a_h^{\text{upw}}(u_h(t), w_h) + l_h(w_h) = 0 \quad \forall w_h \in \mathcal{V}_h^p(\mathcal{M}_h), \quad (8)$$

with

$$a_h^{\mathrm{upw}}(u_h, w_h) := -\sum_{E\in\mathcal{M}_h}\int_E u_h \langle\beta, \nabla_h w_h\rangle \,\mathrm{d}x + \sum_{e\in\Gamma_{\mathrm{ext}}}\int_e \langle\beta, n\rangle^{\oplus} u_h w_h \mathrm{d}s + \sum_{e\in\Gamma_{\mathrm{int}}}\int_e \left(\{\!\{u_h\}\!\}\langle\beta, [\![w_h]\!]\rangle + \frac{1}{2}|\langle\beta, n_e\rangle|\langle [\![u_h]\!], [\![w_h]\!]\rangle\right)\mathrm{d}s, \tag{9}$$

$$l_h(w_h) := -\sum_{e\in\Gamma_{\mathrm{ext}}}\int_e \langle\beta, n\rangle^{\ominus} g\, w_h \mathrm{d}s. \tag{10}$$

这里，$(\cdot,\cdot)_{L^2}$ 表示 $L^2(\Omega)$中的标准标量积，$n_e \in \mathbb{R}^2$ 是面 e 上的单位法向量（取向任意但固定）。我们将 $x \in \mathbb{R}$的负部和正部分别定义为 $x^{\ominus} := \frac{|x|-x}{2}$和 $x^{\oplus} := \frac{|x|+x}{2}$。注意，$a^{\mathrm{upw}}{}_h$的定义中使用了标准迎风通量。

所提出的稳定化方法修改了空间离散，而在时间方面，我们可以自由选择任意时间步进格式。我们将使用标准的显式强稳定保持（SSP）Runge-Kutta（RK）格式 [14]。

3 稳定化项

稳定化被设计为一个附加项 J_h，将其添加到公式（8）的半离散形式中。经过 DoD 稳定化的半离散格式为：求 $u_h(t) \in \mathrm{V}^{p}{}_h(\mathrm{M}_h)$，使得

$$(d_t u_h(t), w_h)_{L^2} + a_h^{\mathrm{upw}}(u_h(t), w_h) + J_h(u_h(t), w_h) + l_h(w_h) = 0 \qquad \forall w_h \in \mathcal{V}_h^p(\mathcal{M}_h). \tag{11}$$

稳定化项 J_h 给出为

$$J_h(u_h, w_h) = J_h^0(u_h, w_h) + J_h^1(u_h, w_h) = \sum_{E\in\mathcal{I}}\left(J_h^{0,E}(u_h, w_h) + J_h^{1,E}(u_h, w_h)\right).$$

我们将在下文详细定义 $J^{0,}{}_{E}{}_{h}$和 $J^{1,}{}_{E}{}_{h}$。集合 I 表示需要进行稳定化的小切割单元集合。对于二维平面切割，存在三边、四边和五边切割单元。在 [9], 中，我们已证明（见引理 3.5），对于所考虑的设置，仅对三角形切割单元进行稳定化就足够了。对于我们设置中的三角形切割单元 E_{cut}，每条边都具有不同的边界条件，见图2:

- 在边界边 $e$bdy上，由于流动方向与斜坡平行，因此采用无流边界条件。
- 剩余的两条边中，一条是流入边$e$in，其特征为 $\langle\beta, n_{E_{\mathrm{cut}}}\rangle < 0$。

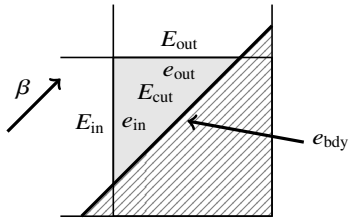

图 2 三角形切割单元

• 剩余的一条边是流出边$e$out，其特征为 $\langle \beta, n_{E_{\text{cut}}} \rangle \geq 0$。

因此，我们可以为三角形切割单元 E_{cut} 唯一确定一个流入邻单元 E_{in} 和一个流出邻居单元 E_{out}。

如果时间步长是根据较大背景单元的大小选取的，而不考虑小切割单元的大小，那么从物理上看，质量会在一个时间步长内从流入单元 E_{in} 经过小切割单元 E_{cut}，流入流出单元 E_{out}。DoD 稳定化的基本思想是，通过将进入 E_{cut} 的部分质量直接从 E_{in} 传递到流出邻居单元 E_{out}，使这一过程成为可能。这样，我们就恢复了流出邻居单元 E_{out} 的依赖域，并确保小切割单元 E_{cut} 只保留其容量所能容纳的质量。对于后者，我们将在下文定义 容量 这一概念。

为了在 E_{cut} 的流入邻单元和流出邻居单元之间建立这种信息通量，我们引入一个延拓算子：算子 $\mathrm{L}_{E'}^{\text{ext}}$ 将函数 $u_h \in \mathrm{V}^{\,p}h$ 从单元 $E' \in \mathrm{M}_h$ 延拓到整个区域 Ω。这相当于在多项式原始支撑域之外对其求值。具体而言，我们将对定义在单元 E_{in} 上的多项式解求值至 E_{cut}。为简化记号，我们将其记作 $\mathrm{L}_{E_{\text{in}}}^{\text{ext}}(u_h)(x)$，$x \in E_{\text{cut}}$，也可简记为 $u_{E_{\text{in}}}(x)$。

具备这些前提后，我们现在可以定义 J_h^0 和 J_h^1。通常，DoD 稳定化项旨在实现两个不同的目标：

• J^0h 旨在适当地在小切割单元之间 及其邻居之间重新分配质量。因此，它由单元界面项组成。

• J^1h 旨在适当地在小切割单元内部 及其邻居之间重新分配质量。因此，它由体积项组成。

项 $J^{0,E}h$ 定义为

$$J_h^{0,E}(u_h, w_h) = \eta_E \int_{e_{\text{out}}} (\mathcal{L}_{E_{\text{in}}}^{\text{ext}}(u_h) - u_h) \langle \beta, [\![w_h]\!] \rangle \, \mathrm{d}s, \tag{12}$$

其中稳定化参数 η_E 如下定义。请注意，我们只在小切割单元的流出边上重新分配质量，并且使用流入邻单元的延拓解来确定修正量的大小。项 $J^{1,E}h$ 定义为

$$J_h^{1,E}(u_h, w_h) = \eta_E \int_E (\mathcal{L}_{E_{\text{in}}}^{\text{ext}}(u_h) - u_h) \left\langle \beta, \mathcal{L}_{E_{\text{in}}}^{\text{ext}}(\nabla w_h) - \nabla w_h \right\rangle \mathrm{d}x. \tag{13}$$

此项旨在主要调整小切割单元 E 内的质量分布，其次调整其邻单元内的质量分布。请注意，我们对流入邻单元 E_{in} 的离散解和检验函数都应用了延拓算子。在 [9], 中，我们仅考虑分片线性多项式，并提出了 $J^{1,E}\ h$ 的另一种表达式，其中不包含项 $\mathrm{L}_{E_{\text{in}}}^{\text{ext}}(\nabla w_h)$。在一维情形下 [19], ，我们发现，升至更高阶时，若没有这一额外项，可能会出现不稳定性。此外，采用这一扩展后的 $J^{1,E}\ h$ 定义，我们能够证明该半离散格式的稳定性结果 L^2，下文将给出这一结果。

两个稳定化项均按稳定化参数 η_E 缩放。我们令$\eta_E = 1 - \alpha_{E,\ 1/(2p+1)}$ 其中容量为 $\alpha_{E,\ \omega}$ 且 p 为离散函数空间的多项式次数。我们将切割单元 E 的容量定义为，见 [9],

$$\alpha_{E,\omega} := \min\left(\omega \frac{|E|}{\Delta t \int_{\partial E} \langle \beta, n_E \rangle^{\ominus} \mathrm{d}s}, 1\right), \quad \omega \in (0, 1]. \tag{14}$$

对于 $\omega = 1$，容量估计了允许流入切割单元 E 并留在其中而不产生过冲的流入量比例。注意，根据定义$0 \le \eta_E \le 1$。

3.1 L^2 半离散格式的稳定性

接下来，我们将给出适用于任意多项式次数 p 的稳定化半离散格式的一个 L^2 稳定性结果。一般而言，所考虑的斜坡设置的 L^2 稳定性结果受时间 $(0,\ T)$ 内穿过 $\partial\Omega^{\text{in}}$ 和 $\partial\Omega^{\text{out}}$的流入与流出影响。注意，只有笛卡尔面 $e \in \Gamma_{\text{ext}}$、$_{\text{Cart}}$ 包含在$\partial\Omega^{\text{in}} \cup \partial\Omega^{\text{out}}$ 中，因为沿斜坡的面 $e \in \Gamma_{\text{ext}}$、$_{\text{ramp}}$ 采用无流边界条件。我们的目标是证明，即使存在切割单元，稳定化格式仍满足 L^2 稳定性，而不是分析流入和流出对 L^2 稳定性的影响。因此，为简单起见，我们假设在所考虑的时间区间 $(0,\ T)$ 内，解在 $\hat{}\Omega$ 中具有紧支撑，且不与笛卡尔边界相交，即 $\mathrm{supp}(u) \cap (\partial\Omega^{\text{in}} \cup \partial\Omega^{\text{out}}) = \emptyset$；这意味着在整个时间区间 $(0,\ T)$ 内，右端项均为齐次，特别是不存在流入或流出。

定理 1。 考虑对流方程 (1)，其初始条件为斜坡，速度场为常速度场 $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$。设解 u 在所考察的时间区间$(0, T)$ 内具有紧支撑，且 $supp(u) \cap (\partial\Omega^{in} \cup \partial\Omega^{out}) = \emptyset$。设 $u_h(t)$为稳定化半离散问题(11)的解，其中$u_h(t) \in \mathcal{V}_h^p$ 对任意固定的 t成立。那么，对于所有 $t \in (0, T)$，该解满足

$$\|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

证明。 将 $w_h = u_h(t)$ 代入 (11)，并忽略关于 $\partial\Omega^{\text{in}}$ 的边界贡献，得到

$$(d_t u_h(t), u_h(t))_{L^2} + a_h^{\text{upw}}(u_h(t), u_h(t)) + J_h(u_h(t), u_h(t)) = 0.$$

对第一项关于时间积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^t (d_\tau u_h(\tau), u_h(\tau))_{L^2}\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\frac{1}{2}\|u_h(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\|u_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_h(0)\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

接下来需要证明，对于任意固定的 t

$$a_h^{\text{upw}}(u_h(t), u_h(t)) + J_h(u_h(t), u_h(t)) \geq 0.$$

我们先讨论 $a^{\text{upw}}{}_h$，然后讨论 J_h。（为简洁起见，以下省略显式的时间依赖关系。）

根据 $a^{\text{upw}}{}_h$ 的定义，并忽略跨越 $\partial\Omega^{\text{out}}$ 的流出，有

$$\begin{aligned}a_h^{\text{upw}}(u_h, u_h) = &-\sum_{E\in\mathcal{M}_h}\int_E u_h\,\langle\beta, \nabla_h u_h\rangle\,\mathrm{d}x \\ &+\sum_{e\in\Gamma_{\text{int}}}\int_e\left(\{\!\{u_h\}\!\}\,\langle\beta, [\![u_h]\!]\rangle + \frac{1}{2}\,|\langle\beta, n_e\rangle|\,\langle[\![u_h]\!], [\![u_h]\!]\rangle\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

对于积分项，我们改写为

$$-\int_E u_h\,\langle\beta, \nabla_h u_h\rangle\,\mathrm{d}x = -\int_E \nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\beta u_h^2\right)\mathrm{d}x = -\int_{\partial E}\left(\frac{1}{2}\beta u_h^2\right)\cdot n\,\mathrm{d}s.$$

首先考虑一个标准笛卡尔单元 E_1，其边如图 3 所示。那么，对于 $\beta = (\beta_1, \beta_2)^T$，有

$$-\int_{E_1} u_h\,\langle\beta, \nabla_h u_h\rangle\,\mathrm{d}x = -\int_{e_1}\frac{1}{2}\beta_1 u_h^2\,\mathrm{d}s - \int_{e_2}\frac{1}{2}\beta_2 u_h^2\,\mathrm{d}s + \int_{e_3}\frac{1}{2}\beta_1 u_h^2\,\mathrm{d}s + \int_{e_4}\frac{1}{2}\beta_2 u_h^2\,\mathrm{d}s.$$

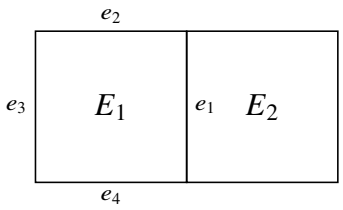

图 3 笛卡尔单元的设置

对于 $a^{\mathrm{upw}}{}_h$ 中的边项，考虑连接 E_1 和 E_2 的内部边 e_1。那么（从现在起，使用记号 $u_{E'}$ 表示我们从单元 E' 计算离散解，该单元可能位于其原始支撑集之外）

$$\begin{aligned}
&\int_{e_1} \left(\{\!\{u_h\}\!\} \langle \beta, [\![u_h]\!] \rangle + \frac{1}{2} \left| \langle \beta, n_{e_1} \rangle \right| \langle [\![u_h]\!], [\![u_h]\!] \rangle \right) \mathrm{d}s \\
&\quad = \int_{e_1} \left(\frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_1} + u_{E_2})(u_{E_1} - u_{E_2}) + \frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_1} - u_{E_2})^2 \right) \mathrm{d}s \\
&\quad = \int_{e_1} \beta_1 \left((u_{E_1})^2 - u_{E_1} u_{E_2} \right) \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

将此结果与来自单元 E_1 和 E_2 的体积项对边 e_1 的相应贡献相结合，可得

$$\begin{aligned}
&- \int_{e_1} \frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_1})^2 \, \mathrm{d}s + \int_{e_1} \frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_2})^2 \, \mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{e_1} \left(\{\!\{u_h\}\!\} \langle \beta, [\![u_h]\!] \rangle + \frac{1}{2} \left| \langle \beta, n_{e_1} \rangle \right| \langle [\![u_h]\!], [\![u_h]\!] \rangle \right) \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_{e_1} \left(\frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_1})^2 - \beta_1 u_{E_1} u_{E_2} + \frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_2})^2 \right) \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_{e_1} \frac{1}{2} \beta_1 \left(u_{E_1} - u_{E_2} \right)^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

现在加入切割单元。对于图2中记号所示的小型三角形切割单元 E_{cut}，结合 $\beta = (\beta_1, \beta_1)^T$，可得

$$- \int_{E_{\mathrm{cut}}} u_h \langle \beta, \nabla_h u_h \rangle \, \mathrm{d}x = - \int_{\partial E_{\mathrm{cut}}} \left(\frac{1}{2} \beta u_h^2 \right) \cdot n \, \mathrm{d}s = - \int_{e_{\mathrm{out}}} \frac{1}{2} \beta_2 u_h^2 \, \mathrm{d}s + \int_{e_{\mathrm{in}}} \frac{1}{2} \beta_1 u_h^2 \, \mathrm{d}s.$$

因此，同时考虑边界项 $a^{\mathrm{upw}}{}_h$ 以及来自单元 E_{in} 体积项的贡献，可得边 e_{in} 的结果

$$\begin{aligned}
&- \int_{e_{\mathrm{in}}} \frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_{\mathrm{in}}})^2 \, \mathrm{d}s + \int_{e_{\mathrm{in}}} \frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_{\mathrm{cut}}})^2 \, \mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_{e_{\mathrm{in}}} \left(\{\!\{u_h\}\!\} \langle \beta, [\![u_h]\!] \rangle + \frac{1}{2} \left| \langle \beta, n_{e_{\mathrm{in}}} \rangle \right| \langle [\![u_h]\!], [\![u_h]\!] \rangle \right) \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_{e_{\mathrm{in}}} \left(\frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_{\mathrm{in}}})^2 - \beta_1 u_{E_{\mathrm{in}}} u_{E_{\mathrm{cut}}} + \frac{1}{2} \beta_1 (u_{E_{\mathrm{cut}}})^2 \right) \mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_{e_{\mathrm{in}}} \frac{1}{2} \beta_1 \left(u_{E_{\mathrm{in}}} - u_{E_{\mathrm{cut}}} \right)^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

对于边 e_{out}，我们得到一个类似的项，其中涉及来自单元 E_{cut} 和 E_{out} 的解。因此，根据紧支撑假设，忽略跨越 $\partial\Omega^{\mathrm{in}} \cup \partial\Omega^{\mathrm{out}}$ 的边界贡献后，有

$$a_h^{\mathrm{upw}}(u_h,u_h)=\sum_{e\in\Gamma_{\mathrm{int}}}\frac{1}{2}\int_e|\langle\beta,n_e\rangle|\,\langle[\![u_h]\!],[\![u_h]\!]\rangle\,\mathrm{d}s. \tag{15}$$

因此，若不含稳定化项 J_h，则有 L^2 稳定性。

现在我们来加入稳定化项

$$J_h(u_h,u_h)=\sum_{E\in\mathcal{I}}J_h^{0,E}(u_h,u_h)+J_h^{1,E}(u_h,u_h).$$

我们仅对类型为 E_{cut} 的小型三角形单元进行稳定化。则有

$$\begin{aligned}J_h^{0,E_{\mathrm{cut}}}(u_h,u_h)&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{out}}}(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})\,\langle\beta,[\![u_h]\!]\rangle\,\mathrm{d}s\\&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{out}}}\beta_2(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})(u_{E_{\mathrm{cut}}}-u_{E_{\mathrm{out}}})\mathrm{d}s\\&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{out}}}\beta_2\left(u_{E_{\mathrm{in}}}u_{E_{\mathrm{cut}}}-u_{E_{\mathrm{in}}}u_{E_{\mathrm{out}}}-(u_{E_{\mathrm{cut}}})^2+u_{E_{\mathrm{cut}}}u_{E_{\mathrm{out}}}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

现在考虑由以下给出的 $J^{1,\,E_{\mathrm{cut}}}$

$$J_h^{1,E_{\mathrm{cut}}}(u_h,u_h)=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{E_{\mathrm{cut}}}(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})\left\langle\beta,\nabla u_{E_{\mathrm{in}}}-\nabla u_{E_{\mathrm{cut}}}\right\rangle\mathrm{d}x.$$

对于 $\beta=(\beta_1,\ \beta_2)^T$，则有

$$\begin{aligned}J_h^{1,E_{\mathrm{cut}}}(u_h,u_h)&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{E_{\mathrm{cut}}}\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\beta(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})^2\right)\mathrm{d}x\\&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{\partial E_{\mathrm{cut}}}\left(\frac{1}{2}\beta(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})^2\right)\cdot n\,\mathrm{d}s\\&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{out}}}\left(\frac{1}{2}\beta_2(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})^2\right)\mathrm{d}s-\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{in}}}\left(\frac{1}{2}\beta_1(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})^2\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

如 $0\le\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\le 1$，边 e_{in} 上的负项可由式 (15) 中来自 $a^{\mathrm{upw}}h$ 的边项 $\int_{e_{\mathrm{in}}}\beta_1\left(\frac{1}{2}(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})^2\right)\mathrm{d}s$ 补偿。对于边 e_{out}，我们汇总来自 $J^{0,\,E_{\mathrm{cut}}}$ 和 $J^{1,\,E_{\mathrm{cut}}}$ 的所有项，得到

$$\begin{aligned}&\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{out}}}\beta_2\left(u_{E_{\mathrm{in}}}u_{E_{\mathrm{cut}}}-u_{E_{\mathrm{in}}}u_{E_{\mathrm{out}}}-(u_{E_{\mathrm{cut}}})^2+u_{E_{\mathrm{cut}}}u_{E_{\mathrm{out}}}+\frac{1}{2}(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{cut}}})^2\right)\mathrm{d}s\\&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{out}}}\beta_2\left(\frac{1}{2}(u_{E_{\mathrm{in}}})^2-\frac{1}{2}(u_{E_{\mathrm{cut}}})^2-u_{E_{\mathrm{in}}}u_{E_{\mathrm{out}}}+u_{E_{\mathrm{cut}}}u_{E_{\mathrm{out}}}\right)\mathrm{d}s\\&=\eta_{E_{\mathrm{cut}}}\int_{e_{\mathrm{out}}}\frac{1}{2}\beta_2(u_{E_{\mathrm{in}}}-u_{E_{\mathrm{out}}})^2\,\mathrm{d}s-\eta_E\int_{e_{\mathrm{out}}}\frac{1}{2}\beta_2(u_{E_{\mathrm{cut}}}-u_{E_{\mathrm{out}}})^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

最后一行中的右侧项涉及边 e_{out} 上的标准跳跃（与边 e_{in}上的情形相同），可由式 (15) 求和中的对应正项补偿。最后一行中的第一项由一个新的扩展跳跃构成，其中涉及单元 E_{in} 的解与单元 E_{out}的解之差，两者均在流出边 e_{out}上求值。证明至此完成。

4 数值结果

本节展示使用高阶多项式求解二维线性平流方程的数值结果。对于上文介绍的斜坡设置，我们考虑不同的角度 γ，见图 1。我们选择 $\hat{\Omega} = (0,\ 1)^2$，并将斜坡的起始位置设为 $x = 0$。2001。定义初始数据时，我们使用一个旋转并平移后的坐标系 $(\hat{x},\ \hat{y})$，该坐标系由标准笛卡尔坐标系 $(x,\ y)$ 推导得出，方法是

$$\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ -\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x - 0.2001\\ y\end{pmatrix}. \tag{16}$$

这个新定义的坐标系使得 $\hat{x}$ 方向与斜坡平行，而 $\hat{y}$ 方向与斜坡正交。在该坐标系中，速度场 β 和光滑初始数据定义如下：

$$\beta(\hat{x},\hat{y}) = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad u_0(\hat{x},\hat{y}) = \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi\hat{x}}{1 - 0.2001}\right).$$

我们根据精确解推导 $\partial\Omega_{\text{in}}$ 上的流入边界条件。我们使用次数为 $p = 1,\ 2,\ 3$ 的多项式计算时间 $T = 0$。3 时的离散解。时间离散采用与空间离散阶数相同的 SSP RK 格式。我们通过以下公式计算时间步长 Δt：

$$\Delta t \leq 0.4\frac{1}{2p+1}\frac{h}{\|\beta\|}. \tag{17}$$

其中，$h = 1/N$ 表示在 $\hat{\Omega}$ 上，x 方向和 y 方向的单元数，其中 N 为单元总数。

该实现基于 DUNE [2, 1] 框架、切割单元间断伽辽金扩展 Dune-udg 软件包 [8, 3] 及其与 dune-pdelab 的集成。几何形状表示为离散水平集函数，并使用顶点值。基于此表示，通过 TPMC 库 [10] 构造切割单元及其相应的求积公式。

在图 4 中，我们展示了斜坡角度为 $\gamma = 25°$ 和 $\gamma = 45°$ 时，L^1 范数和 L^∞ 范数下的收敛结果。在 L^1 范数下，对于两个角度，多项式次数为 p 时，我们观察到的收敛阶约为 $p + 1$。在 L^∞ 范数下，结果介于 $p + \frac{1}{2}$ 和 $p + 1$ 之间，且偶数多项式次数对应的衰减较弱。总体而言，这与 Giuliani [12] 的发现一致：在环域测试中，对于多项式次数为 $p = 1, \ldots, 5$ 的情况，L^∞ 误差阶介于 $p + \frac{1}{2}$ 和 $p + 1$ 之间。

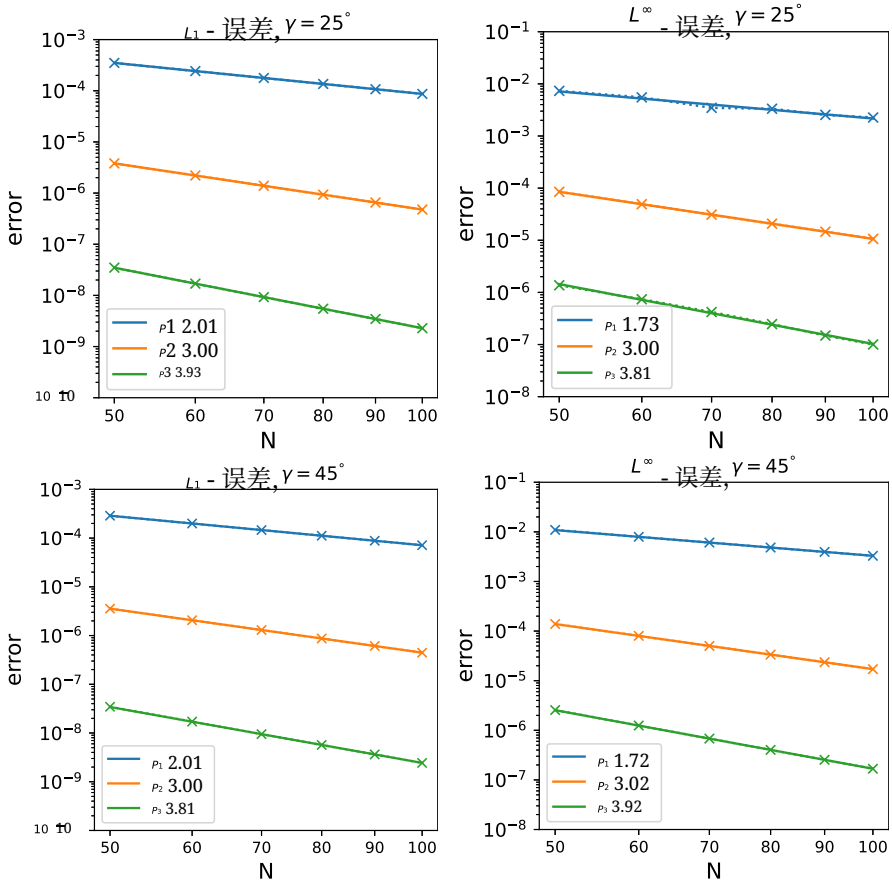

图 4 在时间 $T = 0.3$ 时，斜坡几何下不同多项式次数 $p = 1$、2、3 对误差在 L^1 和 L^∞ 范数中的收敛阶，其中 $\gamma = 25^\circ$ 和 $\gamma = 45^\circ$。

5 结论

本文介绍了适用于高阶多项式的线性平流方程 DoD 稳定化公式。与 [9]，中仅考虑线性多项式的情形相比，我们扩展了惩罚项 $J^{1,Eh}$，使其也包含小切割单元流入邻单元的扩展测试函数。对于这一新公式，我们给出了斜坡几何下半离散稳定化格式的 L^2 稳定性结果。我们还提供了光滑测试函数的数值结果，显示多项式次数为 p 时，收敛率介于 $p + \frac{1}{2}$ 和 $p + 1$ 之间。未来，我们计划将这种稳定化方法扩展到二维非线性问题。

参考文献

1. Bastian, P., Blatt, M., Dedner, A., Engwer, C., Klöfkorn, R., Kornhuber, R., Ohlberger, M., Sander, O.：面向并行自适应科学计算的通用网格接口。第二部分：DUNE中的实现与测试。Computing **82**(2–3), 121–138 (2008年)。DOI 10.1007/s00607-008-0004-9 2. Bastian, P., Blatt, M., Dedner, A., Engwer, C., Klöfkorn, R., Ohlberger, M., Sander, O.：面向并行自适应科学计算的通用网格接口。第一部分：抽象框架。Computing **82**(2–3), 103–119 (2008年)。DOI 10.1007/s00607-008-0003-x 3. Bastian, P., Engwer, C.：一种采用间断伽辽金方法的非拟合有限元方法。国际数值方法工程杂志 **79**, 1557–1576 (2009) 4. Berger, M., Giuliani, A.：用于切割单元网格上有限体积格式的状态重分配算法。计算物理学杂志 **428** 109820 5 2021 10 1016 2020 ( )。DOI . / j.jcp. . . Berger, M., Helzel, C.：一种用于嵌入边界网格的简化 h-box 方法。SIAM科学计算杂志 **34**(2), A861–A888 (2012年) 6. Chern, I.L., Colella, P.：一种用于双曲守恒律的守恒型前沿追踪方法。技术报告，劳伦斯利弗莫尔国家实验室，利弗莫尔，加利福尼亚州 (1987年)。预印本 UCRL-97200 7. Colella, P., Graves, D.T., Keen, B.J., Modiano, D.：一种用于双曲守恒律的笛卡尔网格嵌入边界方法。计算物理学杂志 **211**(1), 347–366 (2006年) 8. Engwer, C., Heimann, F.：Dune-udg：用于非拟合间断伽辽金方法的切割单元框架。载于：DUNE进展，第89–100页。施普林格 (2012年) 9. Engwer, C., May, S., Nüßing, A., Streitbürger, F.：一种用于离散线性输运方程的稳定化 DG 切割单元方法。SIAM科学计算杂志 **42**(6), A3677–A3703 (2020年) 10. Engwer, C., Nüßing, A.：对隐式定义的曲面和区域进行带拓扑保证的几何重构。ACM数学软件汇刊 (TOMS) **44**(2), 14 (2017年) 11. Fu, P., Kreiss, G.：用于一维空间中双曲守恒律的高阶切割间断伽辽金方法。SIAM科学计算杂志 **43**(4), A2404–A2424 (2021年) 12. Giuliani, A.：曲线嵌入边界网格上的二维稳定化间断伽辽金方法 (2021 01857 13 2102)。ArXiv：. . Gokhale, N., Nikiforakis, N., Klein, R.：一种用于双曲守恒律的维度分裂笛卡尔切割单元方法。计算物理学杂志 **364**, 186–208 (2018年) 13. Gottlieb, S., Shu, C.W., Tadmor, E.：强稳定性保持高阶时间离散方法。SIAM综述 **43**(1), 89–112 (2001年) 14. Helzel, C., Berger, M., LeVeque, R.：一种用于带嵌入几何的守恒律的高分辨率旋转网格方法。SIAM科学计算杂志 **26**(3), 785–809 (2005年) 15. Helzel, C., Kerkmann, D.：一种用于切割单元网格的主动通量方法。载于：R. Klöfkorn, E. Keile-gavlen, A. Radu, J. Fuhrmann（编）复杂应用中的有限体积法 I X - 方法、理论方面与实例，第507–515页。施普林格国际出版 (2020年) 16. Klein, R., Bates, K.R., Nikiforakis, N.：大气流动的良平衡可压缩切割单元模拟。英国皇家学会哲学汇刊 A辑 **367**, 4559–4575 (2009年) 17. May, S., Berger, M.：一种用于嵌入边界网格中切割单元的显式隐式格式。科学计算杂志 **71**, 919–943 (2017年) 18. May, S., Streitbürger, F.：一维切割单元网格上非线性双曲守恒律的 DoD 稳定化。应用数学与计算 **419** (2022年) 19. Schoeder, S., Sticko, S., Kreiss, G., Kronbichler, M.：用于声学并采用局部时间步进的高阶切割间断伽辽金方法。国际数值方法工程杂志 **121**(13), 2979–3003 (2020年)