arXiv:2301.02801v1 [math.DS] 7 Jan 2023

投稿至
AIMS期刊第 x 卷，第 0x 期，xx xx

doi:x

第 x–x 页

置换二值神经网络中的多种全局稳定周期轨道

Mikito Onuki, Kento Saka and Toshimichi Saito*

日本法政大学电气与电子工程系

Abstract. 置换二值神经网络的特点是具有全局置换连接和局部二值连接。尽管参数空间不大，这些网络却呈现出各种二值周期轨道。由于分析所有周期轨道并非易事，我们聚焦于全局稳定二值周期轨道，即几乎所有初始点都会落入其中的轨道。为提高分析效率，我们定义了标准置换连接，用以表示多个等价的置换连接。通过对七维网络进行暴力搜索，我们给出主要结果：所有全局稳定周期轨道对应的标准置换连接列表。这些结果将进一步用于对网络及其工程应用进行详细分析。

1. 引言。 离散时间循环神经网络（DT-RNNs）是模拟动力系统，其特点是具有实值连接参数和非线性激活函数（例如，Sigmoid函数）[1] [2] [3] [4]。其动力学由实状态变量的自治差分方程描述。根据参数的不同，DT-RNNs会呈现各种周期轨道、混沌 [6], 以及相关的分岔现象。其现实／潜在应用包括联想记忆[1], 组合优化问题求解器 [5], 以及储备池计算中的时间序列近似／预测 [7] [8] [9]。DT-RNNs既是非线性动力学基础研究中的重要系统，也在工程应用中发挥重要作用。然而，由于参数空间庞大且非线性现象复杂，对其动力学进行分析十分困难。各种周期轨道的稳定性分析也并非易事。

三层动态二值神经网络（DBNNs [10] [11]）是数字动力系统，其特点是采用三值连接参数和符号激活函数。其动态行为由二值状态变量的自治差分方程描述。由于状态空间由有限个二值变量组成，DBNNs 无法产生混沌 [6]。然而，根据参数和初始条件的不同，DBNNs 可以产生各种二值向量的周期轨道（二值周期轨道，简称 BPOs）。与 DT-RNNs 相比，DBNNs 更适合硬件实现。基于 FPGA 的硬件原型及其在六足步行机器人中的应用

Key words and phrases. 循环神经网络、二值神经网络、置换、二值周期轨道、稳定性。

* 通讯作者：Toshimichi Saito。

可见 [12]。我们提出了一种参数设定方法，可保证所需 BPOs 的存储与稳定性 [10]。然而，随着 BPO 周期的增加，隐神经元的数量也随之增加：参数空间变得更大，分析也更加困难。在硬件中，功耗也会增加。为了实现高效的分析与综合，缩减参数空间势在必行。

通过简化 DBNN 的连接参数，构建了置换二值神经网络（PBNN [13]）。PBNN 具有两类连接。第一类是输入层与隐藏层之间的局部二值连接，由一个符号型神经元将三个二值输入映射为一个二值输出。第二类是隐藏层与输出层之间的全局一对一连接，由置换算子定义。PBNN 的参数空间远小于 DBNN。根据置换连接的不同，PBNN 可以生成各种二值周期轨道。多个二值周期轨道可以共存，PBNN 会根据初始条件呈现其中一个二值周期轨道。

由于多个二值周期轨道的分析并不容易，本文聚焦于全局稳定二值周期轨道（GBPO），即几乎所有初始点最终都会落入其中的二值周期轨道。作为一个基本概念，我们定义了标准置换连接，用以表示多个等价的置换连接。通过对所有七维 PBNN 进行暴力搜索，我们给出主要结果：所有 GBPO 对应的标准置换连接列表。这些结果为更深入地分析 PBNN 及其应用提供了基础信息。GBPO 的现实或潜在工程应用包括时间序列近似／预测 [8] [14] [15], 开关电源变换器的控制信号 [16] [17] [18], 步行机器人的控制信号 [12] [19], 以及纠错码 [20]。这些近似值／控制信号可以具备全局稳定性和鲁棒性。本文的创新之处在于，这是首篇研究 GBPO 和标准置换连接的论文。

2. 置换二值神经网络与二值周期轨道。

本节介绍三层动态二值神经网络（DBNN, [10]）和置换二值神经网络（PBNN, [13]）。概述二值周期轨道后，我们将说明目标问题。

2.1 动态二值神经网络。

DBNN 是循环型三层网络，其特点是采用三值连接参数和符号激活函数。其动态过程由以下 N 维二值状态变量的自治差分方程描述：

$$
\begin{aligned}
&x_i^{t+1} = \mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{M} c_{ij} y_j^t + S_i\right),\ y_j^t = \mathrm{sgn}\left(\sum_{i=1}^{N} w_{ji} x_i^t - T_j\right) \\
&\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } x \geq 0, \quad i \in \{1, \cdots, N\} \\ -1 & \text{if } x < 0, \quad j \in \{1, \cdots, M\} \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中，$x_i^t \in \{-1, +1\} \equiv \boldsymbol{B}$ 是离散时间 i时的第 t 个二值状态变量，$y_j^t \in \boldsymbol{B}$ 是第 j 个二值隐变量。如图1所示，二值变量x_i^t、 y_j^t和 x_i^{t+1}分别位于输入层、隐层和输出层。M 隐神经元通过隐层三值连接（x_i^t）将 y_j^t 转换为$w_{ji} \in \{-1, 0, +1\}$。 N 输出神经元通过输出三值连接（ y_j^t）将 x_i^{t+1}转换为$c_{ij} \in \{-1, 0, +1\}$。阈值参数 S_i 和 T_j 均为整数。

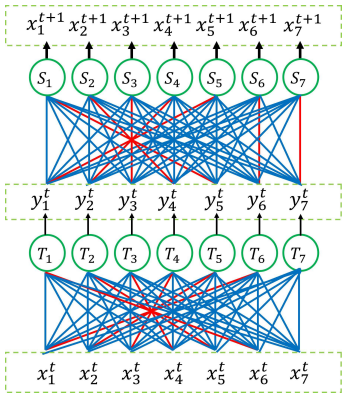

FIGURE 1. 动态二值神经网络（DBNN），红色和蓝色分支分别表示正连接和负连接。

输出 x_i^{t+1}反馈至输入层，DBNN 会生成各种二值周期轨道。参考文献[10] 给出了保证所需二值周期轨道得以存储且稳定的参数条件的理论结果。然而，随着二值周期轨道周期的增加，所需隐神经元的数量也会增加。例如，存储一个周期为 p 的二值周期轨道需要 p个隐神经元。随着 p 的增加，参数空间会变大，分析和实现也会变得更加困难。

2.2. 置换二值神经网络。PBNN由以下 N维二值状态变量的自治差分方程描述：

$$\begin{aligned} &x_i^{t+1} = y_{\sigma(i)}^t,\ y_i^t = \operatorname{sgn}\left(w_a x_{i-1}^t + w_b x_i^t + w_c x_{i+1}^t\right) \\ &\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(N) \end{pmatrix}\ i \in \{1, \cdots, N\}, N \geq 3 \end{aligned} \tag{2}$$

其中， $x_0^t \equiv x_N^t$ 和 $x_{N+1}^t \equiv x_1^t$ 表示图2所示的环型连接。当二值状态向量 $\boldsymbol{x}^t \equiv (x_1^t, \cdots, x_N^t) \in \boldsymbol{B}^N$在时刻 t输入时， $\boldsymbol{x}^t$ 通过具有局部二值连接的隐神经元转换为二值隐藏状态向量 $\boldsymbol{y}^t \equiv (y_1^t, \cdots, y_N^t) \in \boldsymbol{B}^N$。所有隐神经元具有相同的特性：使用符号激活函数，将三个二值输入转换为一个二值输出，其局部二值连接参数为（w_a, w_b, w_c） $\in \boldsymbol{B}^3$。 $\boldsymbol{y}^t$通过由置换 σ定义的一对一全局置换连接转换为 $\boldsymbol{x}^{t+1}$ 。输出向量 $\boldsymbol{x}^{t+1}$ 反馈至输入端，PBNN由此生成二值向量序列。与DBNN相比，隐连接 w_{ij} 由局部二值连接取代，输出连接 c_{ij} 由全局置换连接取代。如图3所示，局部二值连接通过连接数标识：

$$\begin{array}{lll} \text{CN0}: \boldsymbol{w}_l = (-1,-1,-1) & \text{CN1}: \boldsymbol{w}_l = (-1,-1,+1) & \text{CN2}: \boldsymbol{w}_l = (-1,+1,-1) \\ \text{CN3}: \boldsymbol{w}_l = (-1,+1,+1) & \text{CN4}: \boldsymbol{w}_l = (+1,-1,-1) & \text{CN5}: \boldsymbol{w}_l = (+1,-1,+1) \\ \text{CN6}: \boldsymbol{w}_l = (+1,+1,-1) & \text{CN7}: \boldsymbol{w}_l = (+1,+1,+1) & \end{array}$$

其中 $\boldsymbol{w}_l \equiv (w_a, w_b, w_c)$。由于将 $i \in \{1, \cdots, N\}$ 替换为 $x_i \to x_{N-i+1}$ 后，CN1（分别为CN3）与 CN4（分别为 CN6）相同，因此下文考虑除 CN4 和 CN6 之外的 6 个连接数。全局置换

连接由.....标识

$$\text{Permutation ID: } P(\sigma(1)\cdots\sigma(N)).$$

图 2 展示了 CN1 的七维 PBNN 示例。对于恒等置换 P(123456)，PBNN 呈现一个周期为 14 的二值周期轨道。应用置换 P(2613754) 后，PBNN 呈现一个周期更长、为 20 的二值周期轨道。在 DBNN 中，要实现周期 20，需要 20 个隐神经元。

2.3. 目标问题。为了直观呈现其动力学，我们引入了数字返回映射（Dmap）。PBNN 的定义域 $\boldsymbol{B}^N$ 等价于一组 2^N 个点 $L_N \equiv \{C_1, \cdots, C_{2^N}\}$，即 $C_1 \equiv (-1, \cdots, -1)$, $C_2 \equiv (+1. -1. \cdots, -1)$, $\cdots$, $C_{2^N} \equiv (+1, \cdots, +1)$。PBNN 的动力学可以整合到

$$\text{Dmap: } \boldsymbol{x}^{t+1} = f(\boldsymbol{x}^t),\ \boldsymbol{x}^t \in \boldsymbol{B}^N \equiv L_D \tag{3}$$

其中，N维二进制向量 $\boldsymbol{x}^t$ 在 Dmap 中表示为一个点 C_i。

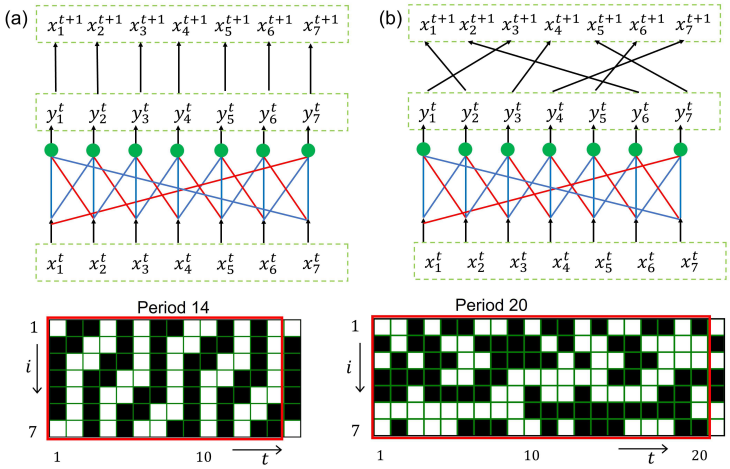

FIGURE 2. CN1 的置换二值神经网络和二值周期轨道示例，$N = 7$。红色和蓝色分支分别表示正向和负向局部二值连接。黑色分支表示全局置换连接。时空模式中的白色和黑色方格分别表示 $x_i^t = +1$ 和 $x_i^t = -1$。（a） P(1234567)。（b） P(2613754)。

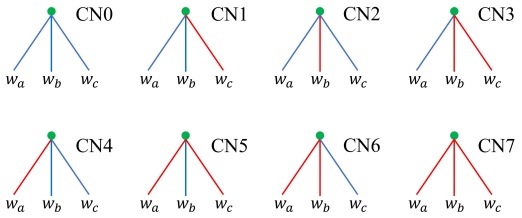

FIGURE 3. 8 局部二值连接。

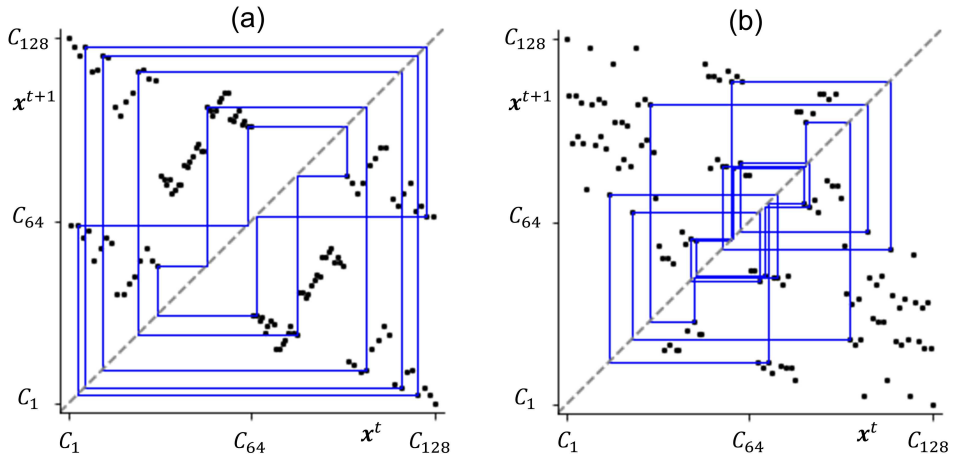

FIGURE 4. CN1 的 Dmap 示例（黑点）和二值周期轨道（蓝色轨道），$N = 7$。（a） P(1234567)（PBNN 见图2 （a））， 周期为 14 的二值周期轨道。（b） P(2613754)（PBNN 见图2 （b））， 周期为 20 的二值周期轨道。

定义 2.1. 若点 $\boldsymbol{z}_p \in L_D$ 的周期为 p，则称其为二进制周期点（BPP），条件是 $f^p(\boldsymbol{z}_p)$、$= \boldsymbol{z}_p$ 以及从 $f(\boldsymbol{z}_p)$ 到 $f^p(\boldsymbol{z}_p)$ 的各项均互不相同，其中 f^k 是 k次复合映射 f。由 BPP 构成的序列 $\{f(\boldsymbol{z}_p) \cdots、 f^p(\boldsymbol{z}_p)\}$称为周期为 p的二值周期轨道（BPO）。若点 $\boldsymbol{z}_e$ 不是 BPP，但最终进入一个 BPO，则称其为最终周期点（EPP）；也就是说，存在某个正整数 l，使得 $f^l(\boldsymbol{z}_e)$ 是一个 BPP。Dmap 中的 BPO 等价于 PBNN 时空模式中的 BPO。

图4 展示了 Dmap 中的二值周期轨道，它们对应于图2中时空模式里的二值周期轨道。随着参数（CN 和置换 ID）的变化，PBNN 会呈现出多种二值周期轨道。CN 的数量（不包括 CN4 和 CN6）为 6，而隐藏连接参数的数量 w_{ij} 为 3^{N^2}。置换 ID 的数量为 $N!$，而输出连接参数的数量 c_{ij} 为 3^{N^2}。此外，DBNN 具有 $2N$ 整数阈值参数 S_i 和 T_j。显然，由于 PBNN 是 DBNN 的子集，因此 PBNN 无法生成比 DBNN 更多样的二值周期轨道。然而，PBNN 的参数空间远小于 DBNN 的参数空间。目标问题是参数（置换 ID 和 CN）与二值周期轨道的存在性／稳定性之间的关系。

3. 全局稳定二值周期轨道。根据参数的不同，PBNN 会呈现各种二值周期轨道，并且对于初始状态，多个二值周期轨道可能共存。由于难以分析多个二值周期轨道，我们尝试分析具有代表性的二值周期轨道：全局稳定二值周期轨道（GBPO）。本节定义 GBPO 及相关概念。首先，我们指出 $\boldsymbol{B}^N$ 中的两个例外端点：

$$\boldsymbol{x}_- \equiv (-1, \cdots, -1) \in \boldsymbol{B}^N,\ \boldsymbol{x}_+ \equiv (+1, \cdots, +1) \in \boldsymbol{B}^N \tag{4}$$

这两个端点要么是不动点，要么是周期为 2 的二值周期轨道，因为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_+) = \boldsymbol{x}_+,\ f(\boldsymbol{x}_-) = \boldsymbol{x}_- \text{ if } w_a + w_b + w_c \geq +1 \\ f(\boldsymbol{x}_+) = \boldsymbol{x}_-,\ f(\boldsymbol{x}_-) = \boldsymbol{x}_+ \text{ if } w_a + w_b + w_c \leq -1 \end{aligned} \tag{5}$$

下文省略这两个端点。GBPO 定义为

定义 3.1。如果一个二值周期轨道（BPO）是唯一的（除 $\boldsymbol{x}_-$ 和 $\boldsymbol{x}_-$ 外），且所有 EPP 都会落入该 BPO，则称其为全局稳定二值周期轨道（ GBPO ）；这里假设 EPP 存在。EPP 的数量加上 GBPO 中元素的数量为 2^N-2。

图 4（b）显示了 Dmap 中一个周期为 20 的 GBPO。在这个七维示例中，(2^7-20-2) 个 EPP 会落入 GBPO。如第 4 节所示，取决于参数（置换 ID 和 CN），七维 PBNN 会呈现多种 GBPO，且 EPP 的数量大于 $2^7/2$。EPP 体现了与二进制信号纠错[20] 相对应的全局稳定性。EPP 数量增加时，全局稳定性会增强。在 M 序列的极限情形下（例如在线性反馈移位寄存器 [21]中），周期为2^N，不存在 EPP，且系统不稳定。这类 M 序列与本文中的 GBPO 属于不同类别。从基础理论的角度来看，GBPO 的唯一性便于研究其存在性和稳定性。分析多个 BPO 较为复杂。从应用角度来看，GBPO 可作为全局稳定信号，用于近似或预测时间序列 [15] ，以及控制开关电路 [16] [17][18]。

为简便起见，我们关注 N 为素数 N_p的情况。如果整数 N 可以分解为素因数，置换连接的分类就会变得复杂。在此，为了分析全局稳定二值周期轨道，我们定义几个基本概念。

定义3.2。设 R 为一个移位算子，使得

$$\begin{aligned} &R: P_0(\sigma_0(1)\cdots\sigma_0(N_p)) \to P_1(\sigma_1(1)\cdots\sigma_1(N_p)) \\ &P_1 = R(P_0), \sigma_1(i+1) = \sigma_0(i)+1 \bmod N_p, i \in \{1,\cdots,N_p\} \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\sigma_1(N_p+1) \equiv \sigma_1(1)$。由于神经元采用环型连接，即使置换 ID 不同，置换连接 P_1 和 P_0 （P 和 R（P）） 也等价。

定义3.3。设 S 为一组能生成等价置换连接的置换 ID。集合 S 称为等价置换集（EPS）。等价置换集通过以N_p 为底数的数表示为标准排列编号 P_s（$\sigma_s(0)\cdots\sigma_s(N_p)$），该编号对应于等价置换集中最小的元素：

$$P_s(\sigma_s(1)\cdots\sigma_s(N_p)) < P_k(\sigma_k(1)\cdots\sigma_k(N_p)) \in S, k \neq s \ (\text{ base-}N_p \text{ number })$$

图 5 展示了标准置换连接及其等价置换连接的一个示例，其中 $N_p=7$。在此示例中，等价置换集为

$$\begin{aligned} S = \{&P_s(1325476), P(7243651), P(2135476), P(7324651), \\ &P(2143576), P(7325461), P(2143576)\} \end{aligned}$$

定义 3.4. 若置换 ID P_b 是移位算子的一个不动点： $R(P_b) = P_b$，则称其为基本置换标识。由于 $R(P_b) = P_b$当且仅当 $\sigma_b(i+1) = \sigma i+1$模 N_p，因此基本置换标识的数量为 N_p。基本置换标识构造出一个仅含一个元素的 EPS，并且是标准排列编号。

图 6 展示了 $N_p=7$的基本置换连接。于是有

定理3.5. 在 N_p 维 PBNN 中，标准置换 ID 的数量（即 EPS 的数量）为 $(N_p-1)!+N_p-1$，其中 $N_p \geq 3$ 是素数。

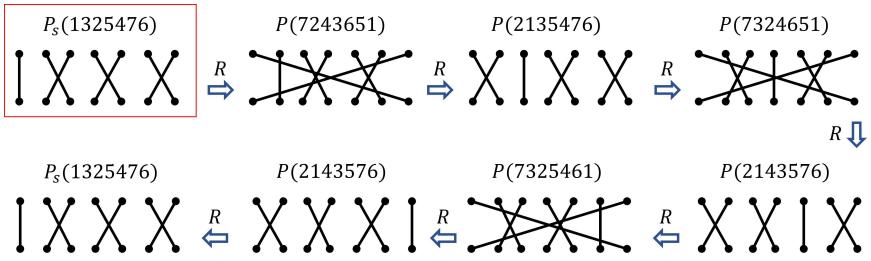

FIGURE 5. N_p =7 的等价置换连接示例。 P_s: 标准置换连接。 R: 移位算子。

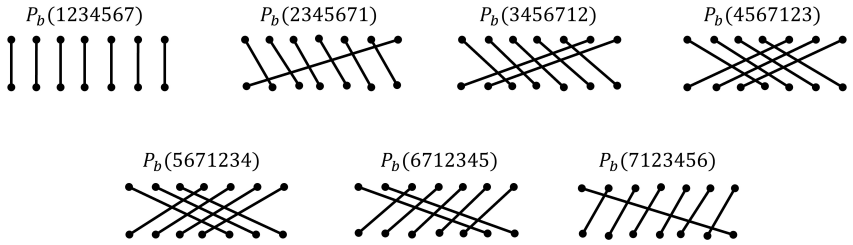

FIGURE 6. 7 $N_p = 7$ 的基本置换连接。

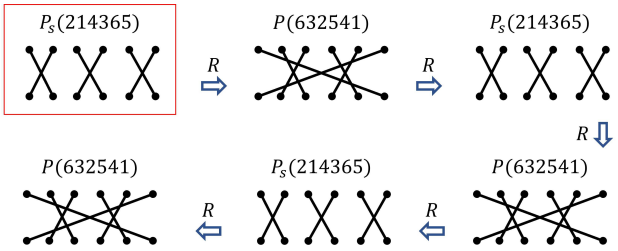

FIGURE 7. $N = 6$ 的置换连接示例，由 3 个子连接组成。

（证明）除 N_p 个基本置换外，一个标准置换 ID P_s 表示 N_p 个等价的置换 ID:

$$R^{N_p}(P_s) = P_s,\ R^k(P_s) \neq P_s \text{ for } 1 \leq k \leq N_p - 1$$

其中 $R^k(P) = R(R^{k-1}(P_s))$ 是移位算子 R 的 k 重复复合。若存在整数 l ($2 \leq l < N_p$)，使得 $R^l(P_s) = P_s$，则 P_s 的环型连接会分解为相同的子连接（例如图 7 所示的 3 个子连接 $R^{3l}(P_s) = R^{N_p}(P_s) = P_s$ ）。然而，当 N_p 为素数时，这是不可能的。因此，除基本置换外，标准置换 ID 的数量为 $(N_p! - N_p)/N_p$。加上 N_p 个基本置换 ID 后，标准置换 ID 的数量为 $(N! - N_p)/N_p + N_p = (N_p - 1)! + N_p - 1$。

4. 通过暴力搜索探索全局稳定二值周期轨道。 表 1 列出了素数 N_p 对应的标准置换 ID 数量，以及 DBNN 中隐藏层与输出层之间的全二元连接参数数量，其中 $N = M = N_p$。置换连接的数量远少于全二元连接的数量。然而，随着 N_p 增加，对全局稳定二值周期轨道的分析会变得更加困难。为方便起见，我们研究七维 PBNN 中的全局稳定二值周期轨道（$N_p = 7$）。在 $N_P = 7$的情况下，所有标准置换连接的数量为（$N_p - 1$）！ $+ N_p - 1 = 726$，初始点的数量为 2^7,，因此可以进行暴力搜索。我们可以精确确定所有全局稳定二值周期轨道的数量和周期。对七维全局稳定二值周期轨道的分析，是研究更高维全局稳定二值周期轨道及其工程应用的基础。

我们按以下步骤探索 7 维全局稳定二值周期轨道。首先，如前所述，目标连接数为 CN0、CN2、CN2、CN3、CN5 和 CN7（CN1 ≡CN4 和 CN3 ≡ CN6）。其次，应用移位算子 R，得到 726 个标准置换 ID。第三，对每个标准置换 ID 和 CN 应用暴力搜索，得到二值周期轨道及其 EPP；其中我们使用了 [22] 中的基本周期轨道计算算法。如果一个二进制周期点及其 EPP 的数量之和为 $2^7 - 2 = 126$，则将该二值周期轨道判定为全局稳定二值周期轨道。全局稳定二值周期轨道的周期与其标准置换 ID 一同存储。

在探索过程中，我们确认 CN0 和 CN7 无法产生全局稳定二值周期轨道。因此，下文不再讨论 CN0 和 CN7。图 8 展示了 CN1、CN2、CN3 和 CN5 对应的置换二值神经网络典型示例，它们分别产生周期为 42、14、26 和 14 的全局稳定二值周期轨道。图 9 以时空模式展示了这 4 个全局稳定二值周期轨道，图 10 则以 Dmaps 展示了这 4 个全局稳定二值周期轨道。

作为周期的一项判据，我们给出

定义4.1. 对于恒等置换（P_b(1234567) 对于 $N_P = 7$），二值周期轨道的周期称为基本周期。如果 PBNN 生成多个二值周期轨道，则采用其中的最大周期。

对于 CN1，图 2 (a) 中的二值周期轨道（BPO）基本周期为 14，且该轨道是全局稳定二值周期轨道（GBPO）。我们已确认，恒等置换 P_b(1234567) 无法产生 GBPO。在图 8 至 10中可以看到，通过调整置换 ID，使其偏离恒等置换 P_b(1234567)，PBNN 可以产生多种二值周期轨道，这些轨道由周期更长的 GBPO 表示。作为主要结果，表 2 至 5 列出了所有 GBPO 的标准排列编号。如定义 3.3所述，每个标准排列编号对应 7 个等价的置换 ID。下面概述 CN1、CN2、CN3 和 CN5 的列表：

TABLE 1.PBNN 中标准置换连接的数量，以及 DBNN 中隐藏层与输出层之间全二元连接的数量。

N_p	# 标准置换 ID	# 全二元连接
3	4	2^9
5	28	2^{25}
7	726	2^{49}
11	3628810	2^{121}
13	479001612	2^{169}
17	20922789888016	2^{289}

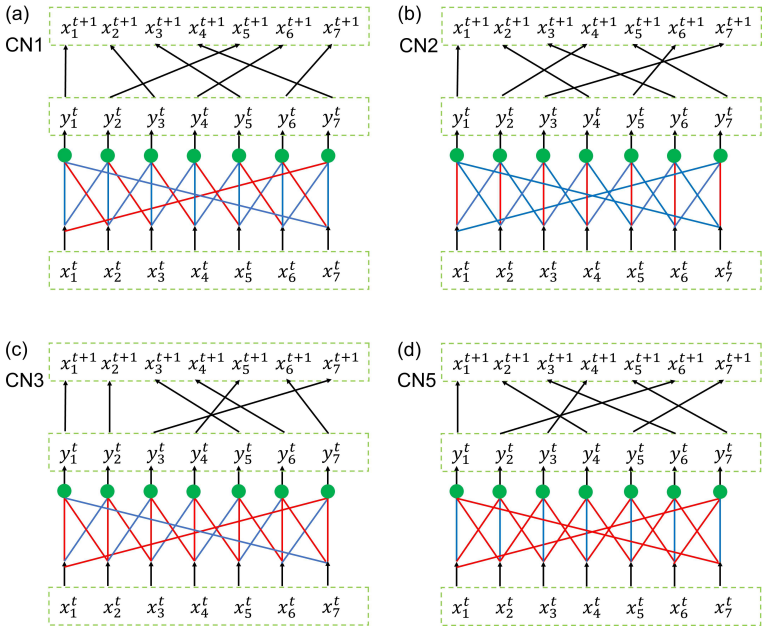

FIGURE 8. 针对 $N_p = 7$的PBNN示例（呈现全局稳定二值周期轨道）。(a)P_s(1357246)，CN1。(b) P_s(1462753)，CN2。(c) P_s(1256473)，CN3。(d) P_s(1463725)，CN5。

- CN1：对于 P_b(1234567)，基本周期为 14。PBNN 可产生 27 个全局稳定二值周期轨道（GBPO）。如图 9 (a) 所示，当 P_s(1357246) 时，最大周期为 42。EPP 的数量为 $126-42$。

- CN2：基本周期为 2。PBNN 生成 56 个全局稳定二值周期轨道。最大周期为 14，此时 EPP 的数量为 $126-14$，例如 P_s((1462753)，如图 9(b) 所示。

- CN3：基本周期为 14。PBNN 生成 28 个全局稳定二值周期轨道。最大周期为 26，此时 EPP 的数量为 $126-26$，例如 P_s(1256473)，如图 9(c) 所示。

- CN5：基本周期为 2。PBNN 生成 62 个全局稳定二值周期轨道。最大周期为 14，此时 EPP 的数量为 $126-14$，例如 P_s(1463725)，如图 9(d) 所示。

这些表格阐明了参数（置换 ID 和 CN）与全局稳定二值周期轨道的周期之间的关系。EPP 的数量为 126 减去周期。随着参数变化，七维 PBNN 可以生成各种全局稳定二值周期轨道。这些结果为分析各种 PBNN 以及综合具有所需全局稳定二值周期轨道的 PBNN 提供了基础信息。

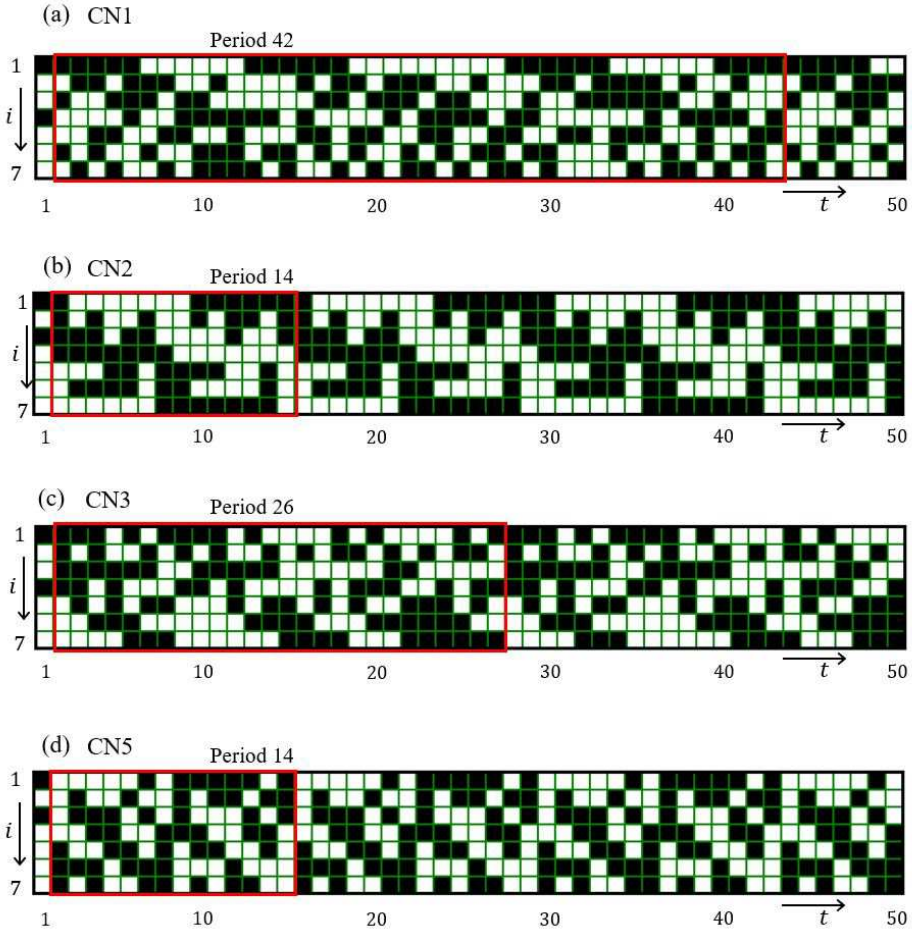

FIGURE 9. 作为时空模式的 GBPO 示例，对应 N_p =7。(a) P_s(1357246)，CN1，周期为 42 的 GBPO。(b) P_s(1462753)，CN2，周期为 14 的 GBPO。(c) P_s(1256473)，CN3，周期为 26 的 GBPO。(d) P_s(1463725)，CN5，周期为 14 的 GBPO。

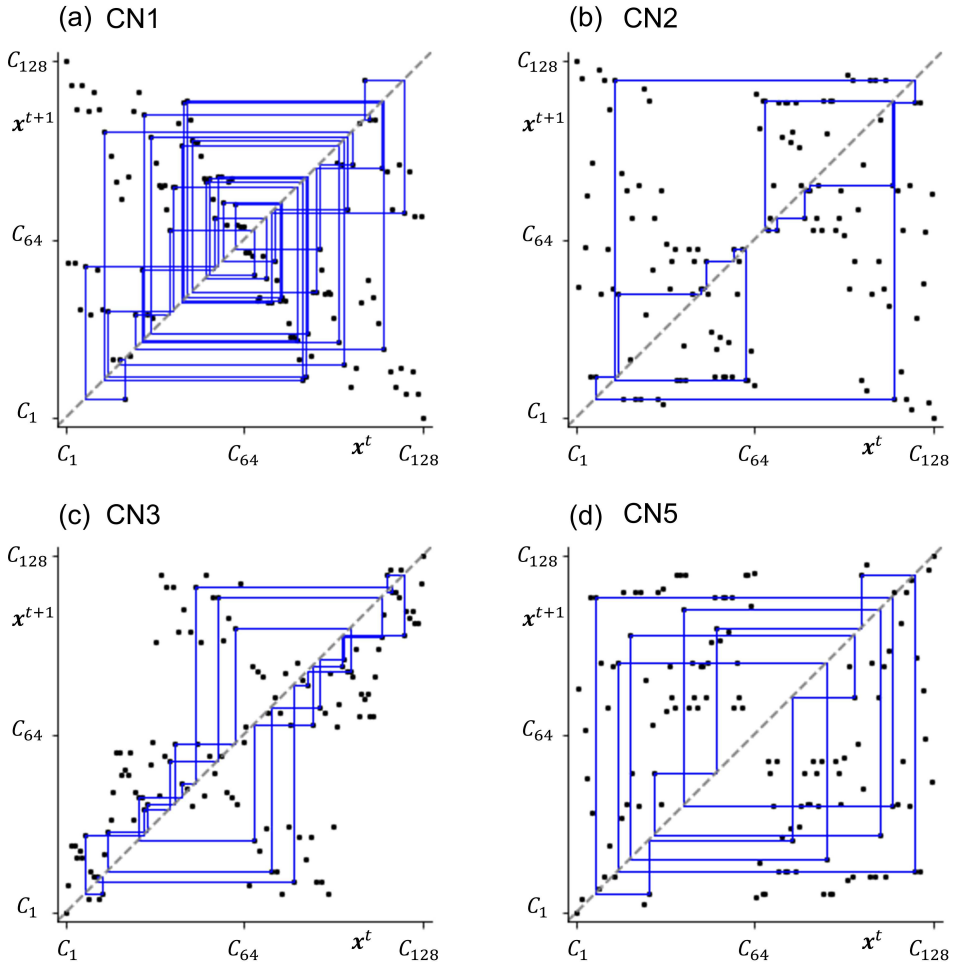

FIGURE 10. Dmaps 中的 GBPO 示例。(a) P_s(1357246)，CN1，周期为 42 的 GBPO。(b) P_s(1462753)，CN2，周期为 14 的 GBPO。(c) P_s(1256473)，CN3，周期为 26 的 GBPO。(d) P_s(1463725)，CN5，周期为 14 的 GBPO。

TABLE 2. CN1 的 GBPO 标准排列编号和周期

ID	周期	ID	周期	ID	周期
1256374	26	1625473	6	2517436	18
1257436	18	1627435	16	2576314	12
1273654	14	1657234	12	2613754	20
1352476	34	1657243	4	2615374	12
1357246	**42**	1672453	18	2675314	8
1375426	26	1672543	2	2751436	8
1526374	42	1673425	18	2763154	20
1527643	14	2175346	10	3416725	8
1576324	24	2417356	14	4671325	24

TABLE 3. CN2 的 GBPO 标准排列编号和周期

ID	周期	ID	周期	ID	周期
1367245	4	1653724	14	2641735	2
1427365	8	1674352	6	2641753	2
1436275	8	1675234	4	2671354	2
1436752	8	1732645	8	2671453	2
1457236	4	1742653	2	2761345	4
1462753	**14**	1762453	2	2761354	2
1467325	6	1762543	6	2761453	2
1476235	6	2156734	14	2763154	2
1476532	6	2167345	14	3156724	4
1527643	10	2356714	8	3176254	4
1564372	6	2361754	2	3471256	4
1567423	4	2365174	2	3517426	2
1572643	14	2367145	4	3571246	2
1627543	2	2367154	2	3576214	4
1642735	14	2461753	2	4167253	2
1643752	2	2467135	2	4173256	2
1645732	2	2467153	2	4617325	4
1647532	2	2517643	4	4712356	8
1653274	10	2571634	2		

TABLE 4. CN3 的 GBPO 标准排列编号和周期

ID	周期	ID	周期	ID	周期
1235476	14	1567243	12	2761345	2
1246753	22	1576324	24	3157426	12
1256473	**26**	1652473	10	3167425	8
1267435	26	1657243	4	3176245	10
1362754	6	2156374	22	3561724	10
1375462	2	2417635	6	3567214	24
1425376	10	2463175	20	3612745	8
1463275	6	2516374	2	3761425	12
1465273	16	2516473	8		
1476235	2	2641753	20		

TABLE 5. CN5 的 GBPO 标准排列编号和周期

ID	周期	ID	周期	ID	周期
1245673	10	1436752	8	1673452	10
1246735	2	1437526	2	1675234	4
1247635	6	1453726	6	1726543	2
1256734	10	1457236	4	1732645	8
1257346	2	1457263	10	1745326	6
1257436	6	1463275	6	1745623	10
1267345	10	**1463725**	**14**	1756243	2
1273456	10	1465723	10	1765243	6
1342765	6	1467235	2	2356714	8
1356724	10	1467523	10	2367145	4
1367245	4	1472635	14	2517643	4
1372645	6	1532764	2	2761345	4
1374265	2	1547326	6	3156724	4
1376254	6	1567423	4	3176254	4
1376452	6	1572346	10	3461725	10
1423765	6	1572364	10	3471256	4
1427365	8	1654372	2	3576214	4
1427635	6	1657342	2	3617245	10
1432675	6	1657432	6	4617325	4
1432756	6	1672435	10	4712356	8
1436275	8	1672534	10		

5. 结论。本文研究了 PBNN 的基本动力学。PBNN 以全局置换连接和局部二值连接为特征。尽管其参数空间远小于现有的递归型神经网络，PBNN 仍能表现出多种 BPO。为了实现精确分析，我们聚焦于 GBPO，并定义了标准置换连接。通过对七维 PBNN 进行暴力搜索，我们给出了完整列表，阐明了参数与 GBPO 周期之间的关系。即使在七维情况下，PBNN 也表现出多种 GBPO。这表明，更高维的 PBNN 将呈现极其丰富的 BPO/EPP。未来的研究中仍有许多问题有待解决：

- 生成 GBPO 的机制。
- 各种 BPO 的分类与稳定性分析。除 GBPO 外，PBNN 还会根据参数和初始条件表现出多种 BPO。
- 有效的进化算法 [23] [24] 用于分析无法通过暴力攻击求解的高维二值周期轨道。

- 用于综合具有所需二值周期轨道的置换二值神经网络的有效进化算法。
- 适用于工程应用的高效硬件实现，包括开关电路鲁棒控制信号以及时间序列近似／预测。置换二值神经网络非常适合基于 FPGA 的硬件实现，可在应用中将二值周期轨道转换为电信号。

利益冲突声明。作者声明，他不存在可能影响本文所报告研究的已知财务利益冲突或个人关系。

参考文献

[1] J. J. Hopfield，具有涌现集体计算能力的神经网络与物理系统，《美国国家科学院院刊》79（1982）2554-2558。[2] F. Pasemann，神经环网络中周期吸引子的表征，《神经网络》8(3)（1995）421-429。[3] M. Adachi，K. Aihara，混沌神经网络中的联想动力学，《神经网络》10(1)（1997）83-98。[4] G. Tanaka，R. Nakane，T. Takeuchi，T. Yamane，D. Nakano，Y. Katayama，A. Hirose，面向能效联想记忆的空间排列稀疏递归神经网络，《IEEE神经网络与学习系统汇刊》31(1)（2020）24-38。[5] J. J. Hopfield，D. W. Tank，优化问题决策的“神经”计算，《生物控制论》52（1985）141-152。[6] E. Ott，《Chaos in Dynamical Systems》，第二版。剑桥大学出版社（2002）[7] L. Appeltant，M. C. Soriano，G. Van der Sande，J. Danckaert，S. Massar，J. Dambre，B. Schrauwen，C. R. Mirasso，I. Fischer，利用单个动力学节点作为复杂系统进行信息处理，《自然通讯》2:468；doi: 10.1038/ncomms1476（2011）[8] G. Tanaka，T. Yamane，J. B. H´eroux，R. Nakane，N. Kanazawa，S. Takeda，H. Numata，D. Nakano，A. Hirose，物理储备池计算的最新进展：综述。《神经网络》115（2019）100-123。[9] J. Dong，E. B¨orve，M. Rafayelyan，M. Unser，储备池计算中的渐近稳定性，载于：IJCNN论文集，2022，3774。[10] S. Koyama，T. Saito，在三层动态二值神经网络中保证期望二值周期轨道的存储与稳定，《神经计算》416（2020）12-18。[11] S. Anzai，T. Suzuki，T. Saito，具有时变参数和期望周期轨道切换功能的动态二值神经网络，《神经计算》457（2021）357-364。[12] T. Suzuki，T. Saito，用于控制六足步行机器人的三层动态二值神经网络综合，载于：IEEE/CNNA论文集（2021），doi: 10.1109/CNNA49188.2021.9610809

[13] H. Udagawa，T. Okano，T. Saito，置换二值神经网络：周期轨道分析及其应用，《离散与连续动力系统：B辑》28(1)（2023）748-764。[14] W. Wada，J. Kuroiwa，S. Nara，利用元胞自动机对数字声音数据进行完全可复现的描述，《物理学快报 A》306（2002）110-115。[15] H. Uchida，Y. Oishi 和 T. Saito，一个简单的数字脉冲神经网络：同步与脉冲序列逼近，《离散与连续动力系统：S辑》14（2021）1479-1494。[16] W. Holderbaum，神经网络在具有二值输入的混合系统中的应用，《IEEE神经网络汇刊》18(4)（2007）1254-1261。[17] B. K. Bose，神经网络在电力电子与电机驱动中的应用——导论与展望，《IEEE工业电子学汇刊》54（2007）14-33。[18] P. W. Wheeler，J. Rodriguez，J. C. Clare，L. Empringham，A. Weinstein，矩阵变换器：技术综述，《IEEE工业电子学汇刊》49(2)（2002）276-288。[19] M. Lodi，A. L. Shilnikov，M. Storace，具有预设节律的中央模式发生器设计原则，《IEEE神经网络与学习系统汇刊》31(9)（2020）3658-3669。[20] D. R. Chowdhury，S. Basu，I. S. Gupta，P. P. Chaudhuri，CAECC——基于元胞自动机的纠错码设计，《IEEE计算机汇刊》43(6)（1994）759-764。[21] A. Poorghanad，A. Sadr，A. Kashanipour，使用进化方法生成高质量伪随机数，载于：IEEE/CIS论文集，9（2008）331-335。[22] N. Horimoto，T. Saito，基于分岔神经元的数字尖峰映射分析，《NOLTA，IEICE》3(4)（2012）596–605。[23] Q. Zhang，L. Hui，MOEA/D：一种基于分解的多目标进化算法，《IEEE进化计算汇刊》11(6)（2007）712-731。[24] X. Ma，Y. Yu，X. Li，Y. Qi，Z. Zhu，基于分解的多目标进化算法的权重向量调整方法综述，《IEEE进化计算汇刊》24(4)（2020）636-649。*E-mail address*: tsaito@hosei.ac.jp