加法拉姆齐定理的 Weihrauch 度

Arno Pauly 斯旺西大学数学与计算机科学学院，英国

Cécilia Pradic
斯旺西大学数学与计算机科学学院，英国

Giovanni Soldà #
英国斯旺西大学数学与计算机科学学院 [1]

摘要

我们从 Weihrauch 度的角度刻画了某些问题的强度，这些问题与关于有理数和自然数着色的 Ramsey 类定理有关。我们主要关注的定理断言：对于满足某些由颜色集上的额外代数结构所决定的性质的有理数对或自然数对的着色，存在几乎齐次集。

在逆向数学的语境中，我们研究的大多数原理都等价于 RCA_0 上的Σ^0_2-归纳。Weihrauch 格中的相关问题则与 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$、$(\mathsf{LPO}')^*$或它们的乘积有关，具体取决于其精确的形式化方式。

2012年ACM学科分类 计算理论 → 证明论；计算理论→ 《可计算性》

关键词与短语 Weihrauch 可约性，逆向数学，加法 Ramsey， Σ^0_2-归纳。

相关版本 本文扩展了会议论文 [21]，该论文由第二和第三位作者撰写。

经费 所有作者均感谢斯旺西大学提供的支持。*Giovanni Soldà*：该作者获得了伦敦数学会早期职业研究员资助 p.

1 引言

无限拉姆齐定理指出，对于任意无限集 X上固定元数的 n-元组的着色 c，都存在一个无限子集 $H \subseteq X$，使得由 H 中的元素组成的 n-元组集合 $[H]^n$ 是齐次的。这个结论是非构造性的：即使着色 c 由一个可计算函数给出，我们也未必能找到 X的可计算齐次子集。人们曾尝试量化这个问题及其一些自然限制的不可计算程度。这又与相应定理的公理强度相关，正如逆向数学 [23] 中所研究的那样；拉姆齐定理是其中重点研究的对象 [15]。

本文致力于研究拉姆齐定理的一个变体，它受到以下限制：我们对有理数对进行着色，并要求着色具有某种额外结构，即它是可加的。类似的陈述最早出现在 [22, 定理 13]中，用以给出$(\mathbb{Q}, <)$的单子二阶逻辑可判定性的自足证明。我们还将分析一个更简单的陈述，称为洗牌原理；这是一个相关工具，在较新的可判定性证明中有所出现 [5, 引理 16]。洗牌原理指出，每个 $\mathbb{Q}$指标词（字母取自有限字母表）都包含一个凸子词，其中每个字母要么稠密出现，要么完全不出现。与拉姆齐定理中对

[1] Soldà后来转至根特大学

arXiv:2301.02833v2 [cs.LO] 4 Dec 2023

2 加法拉姆齐定理的 Weihrauch 度

有理数集 $\mathbb{N}$上的数对所施加的可加限制类似，从逆向数学的角度进行研究 [17], 后，我们得到了与 Σ^0_2-归纳（Σ^0_2-IND）之间的简洁对应关系。

▶**定理 1.** 在弱二阶算术RCA$_0$中， Σ^0_2-IND 等价于洗牌原理和自然数集上的加法拉姆齐定理。

我们在 Weihrauch 可约性的框架下进一步推进这一分析。该框架允许测量贝尔空间上一般多值函数（亦称问题）的一致强度。令 Shuffle 和 ART$_{\mathbb{Q}}$ 分别表示与洗牌原理和自然数集上的加法拉姆齐定理相对应的最显然的问题（具体定义见定义 24 和 48）。我们将它们与各种弱化形式 cShuffle、cART$_{\mathbb{Q}}$、iShuffle 和 iART$_{\mathbb{Q}}$ 联系起来；这些弱化形式只输出颜色集合或区间。我们还将这些问题与标准的（不可比较的）问题 TC$_{\mathbb{N}}$ 和 LPO′联系起来。此外，我们还考察有序拉姆齐原理 ORT$_{\mathbb{Q}}$：其中颜色 k 带有偏序 $\preceq$，而着色 $\alpha: [\mathbb{Q}]^2 \to k$ 满足：若 $q_1 \leq r_1 < r_2 \leq q_2$，则 $\alpha(r_1, r_2) \preceq \alpha(q_1, q_2)$。Shuffle 的一种弱化形式是原理 $(\eta)^1_{<\infty}$，该原理在 [12]中提出：我们只要求找到一个区间，使某种颜色在其中稠密；相应地，也可以要求找到一种在某处稠密的颜色。

▶定理2。我们有以下等价关系：Shuffle $\equiv_{\mathrm{W}}$ ART$_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathrm{W}}$ TC$^*_{\mathbb{N}}$ $\times$(LPO′)*cShuffle $\equiv_{\mathrm{W}}$ cART$_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathrm{W}}$ (LPO′)*iShuffle $\equiv_{\mathrm{W}}$ iART$_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathrm{W}}$ $(\eta)^1_{<\infty} \equiv_{\mathrm{W}}$ i$(\eta)^1_{<\infty} \equiv_{\mathrm{W}}$ TC$^*_{\mathbb{N}}$ ORT$_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathrm{W}}$ LPO*c$(\eta)^1_{<\infty} \equiv_{\mathrm{W}}$ cRT$^1_+$

最后，我们转而在 Weihrauch 可约性的框架下，对这些拉姆齐型定理进行分析。自然数集上的加法拉姆齐定理也是研究可数散序上的单子二阶逻辑的重要工具。与自然数集的情形一样，我们将问题 ART$_{\mathbb{N}}$ 和 ORT$_{\mathbb{N}}$，以及一些自然的弱化版本 cART$_{\mathbb{N}}$、cORT$_{\mathbb{N}}$、iART$_{\mathbb{N}}$ 和 iORT$_{\mathbb{N}}$，与图灵跳跃 TC$_{\mathbb{N}}$ 和 LPO′ 联系起来（这些原理的 i 变体返回的不是区间，而是某个无限齐次集前两个点的某个上界 n）。

▶**定理 3.** 我们得到以下等价关系ORT$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}}$ ART$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃$^*_{\mathbb{N}}$ $\times$(LPO′)*cORT$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}}$ cART$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}}$ (LPO′)*iORT$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}}$ iART$_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃$^*_{\mathbb{N}}$

总结我们正在研究的各种问题之间关系的图示见图 1。

2 背景

本节将介绍本文其余部分所需的背景知识，并确定我们将使用的大部分记号；与二阶算术弱子系统有关的形式化定义除外，尤其是 RCA$_0$ （由 Σ^0_1-归纳和递归概括组成）以及 RCA$_0$ + Σ^0_2-IND。关于这部分内容以及更广泛而言逆向数学中值得关注的系统，标准参考文献是 [23]。

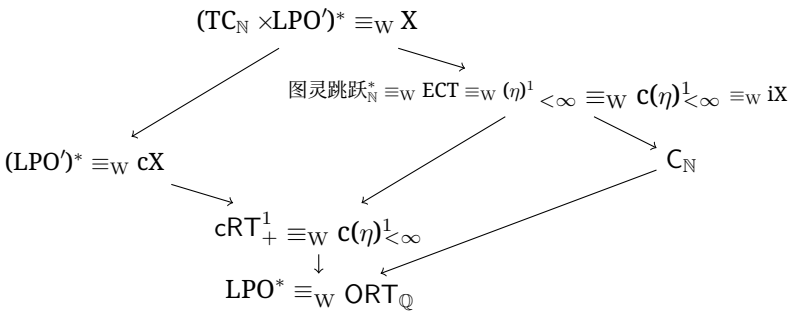


图1 定理 3 和定理 2 中研究的问题之间的归约与不可归约关系。从 A 指向 B 的箭头表示问题 B 可 Weihrauch 归约到问题 A；没有箭头则表示不存在这样的归约（由传递性可推出的情况除外）。问题 X 可以是 ART$_{\mathbb{Q}}$、ART$_{\mathbb{N}}$、Shuffle 或 ORT$_{\mathbb{N}}$。

2.1 一般记号

我们将 $k \in \mathbb{N}$ 视为有限集 $\{0, \dots, k-1\}$。对于每个线性序 $(X, <_X)$，我们将 $[X]^2$ 记作满足 $x <_X y$ 的有序对 (x, y) 组成的集合。本文中，区间 I 始终指一对 $(u, v) \in [\mathbb{Q}]^2$，并将其视为有理数集 $]u, v[$；我们从不使用端点为无理数的区间。最后，对于取自偏序集的任意元素序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，将 $\limsup(x)$ 记作 $\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} x_n$。

2.2 加法与有序着色

对于以下定义，固定一个线性序 $(X, <_X)$。对于每个偏序集 $(P, \prec_P)$，称着色 $c : [X]^2 \to P$ 为有序的，如果当 $x' \leq_X x <_X y \leq_X y'$时，有 $c(x, y) \preceq_P c(x', y')$。称其为右有序的，如果当 $x <_X y \leq_X y'$ 时，有 $c(x, y) \preceq_P c(x, y')$（特别地，右有序的限制比有序的更宽松）。如果着色 $c : [X]^2 \to S$ 满足：只要 $x <_X y <_X z$，就有 $c(x, z) = c(x, y) \cdot c(y, z)$，则称该着色关于半群结构 $(S, \cdot)$ 是可加的。若对每个满足 $x <_X y$的 $x, y \in X$，都存在 $z \in A$ 使得 $x <_X z <_X y$，则称子集 $A \subseteq X$ 在 X 中稠密。给定着色 $c : [X]^n \to k$ 和某个区间$Y \subseteq X$，如果存在将 Y 划分成有限个稠密子集 D_i 的有限划分，且每个 $[D_i]^n$ 都是单色的（即 $|c([D_i]^n)| \leq 1$），则称 Y 是 c-稠密齐次的。若 c 恰好是 $\mathbb{Q}$ 上的着色（即 $X = \mathbb{Q}$ 和 $n = 1$），则我们称这些为 c-shuffles。最后，给定着色 $c : \mathbb{Q} \to k$和区间 $I \subseteq \mathbb{Q}$，如果满足 c的 $x \in \mathbb{Q}$ 所构成的集合 $= i$ 在 I中稠密，则称颜色 $i < k$ 在 I 中稠密出现。

▶**定义 4**。 以下是二阶算术中的陈述：

- ***ORT***$_{\mathbb{Q}}$：对于每个有限偏序集 $(P, \prec_P)$ 和有序染色 c：$[\mathbb{Q}]^2 \to P$，都存在一个c-齐次区间 $]u, v[\subset \mathbb{Q}$。***Shuffle***：对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和着色 c：$\mathbb{Q} \to k$，都存在一个区间 $I =]x, y[$，使得 I 是一个 c-***Shuffle***。***ART***$_{\mathbb{Q}}$：对于每个有限半群 $(S, \cdot)$ 和加法着色 c：$[\mathbb{Q}]^2 \to S$，都存在一个区间 $I =]x, y[$，使得 I 是 c-稠密齐次的。***ORT***$_{\mathbb{N}}$：对于每个有限偏序集 $(P, \prec_P)$ 和右有序着色 c：$[\mathbb{N}]^2 \to P$，都存在一个无限的 c-齐次集。***ART***$_{\mathbb{N}}$：对于每个有限半群 $(S, \cdot)$ 和加法着色 c：$[\mathbb{N}]^2 \to S$，都存在一个无限 c-齐次集。

如前所述，Shelah 最初证明了一个与 ART$_{\mathbb{Q}}$ 类似的结果，见 [22,定理 1.3 和结论 1.4]；而 Shuffle 是分析$\mathbb{Q}$ 标记时的一个核心引理（例如参见 [5]）。我们将证明，ART$_{\mathbb{Q}}$ 和 Shuffle 等价于 RCA$_0$ 上的 Σ^0_2-归纳，而 ORT$_{\mathbb{Q}}$ 可在 RCA$_0$中证明。

我们再引入一些稍后会派上用场的术语。给定一个着色$c:\mathbb{Q}\to k$、一个集合 $C\subseteq k$ 和一个区间 $I=]u,\ v[$，若其为一个 c-shuffle，我们称 I 为颜色 C 的 c-*shuffle*，或者等价地称 I 对颜色 C 是 c-齐次的，如果还满足 $c(I)=C$。

2.3 Weihrauch 可约性的预备知识

现在，我们简要介绍问题的 Weihrauch 度，以及本文后续将用到的相关运算。需要强调的是，这里只能略述这一广阔研究领域的一隅；有关该主题的更多细节，请参阅 [3]。

我们研究部分多值函数 $f:\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\rightrightarrows\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，简称问题。我们通常根据问题的输入以及与这些输入相对应的输出来定义问题。$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的元素充当我们所关注对象（如着色）的名称。由于本文所关注对象的编码很简单，我们对此不再赘述。

若对于每个 $x\in\mathrm{dom}(f)$，都有 $F(x)\in f(x)$，则称部分函数 $F:\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 为 f的实现器，记作 $F\vdash f$。给定两个问题 f和 g，如果存在两个可计算泛函 H 和 K，使得只要 F是 f 的实现器，KFH,id 就是 g的实现器，我们就称 g Weihrauch可归约到 f，记作 $g\leq_{\mathrm{W}}f$。强Weihrauch可约性类似定义：对于任意两个问题 f 和 g，如果存在可计算泛函 H 和 K，使得$KFH\vdash g$只要 $F\vdash f$，我们就称 g 强Weihrauch可归约到 f，记作 $g\leq_{\mathrm{sW}}f$。如果两个问题 f和 g既满足 $f\leq_{\mathrm{W}}g$ 和 $g\leq_{\mathrm{W}}f$（分别满足 $f\leq_{\mathrm{sW}}g$ 和 $g\leq_{\mathrm{sW}}f$），则称它们 Weihrauch 等价（分别称为强Weihrauch等价）。我们将此记作$\equiv_{\mathrm{W}}$（分别记作 $\equiv_{\mathrm{sW}}$）。

我们将使用问题上的若干结构运算，它们与到 Weihrauch 度的商相容。首先是平行积 $f\times g$，它能够同时求解 f 的一个实例和 g 的一个实例。问题 f的有限平行化记作 f^*，能够求解f任意有限多个实例，前提是该数量作为输入的一部分给出。最后，两个问题 f和 g 的复合积记作 $f\star g$，它基本上对应于这样得到的最复杂问题：将 f 与恒等映射、某个递归函数以及g 与恒等映射进行复合（最后这一部分使我们在应用f时能够跟踪初始输入）。

现在让我们列出本文其余部分将要用到的一些最重要的问题[2]。

- $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$：$\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\rightrightarrows\mathbb{N}$（关于 $\mathbb{N}$的闭选择）是这样一个问题：输入为 $\mathbb{N}$ 的一个（真）子集的枚举e，并且对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$n\in\mathsf{C}_{\mathbb{N}}(e)$ 当且仅当$n\notin\mathrm{ran}(e)$（其中 $\mathrm{ran}(e)$ 是 e的值域）。$\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$：$\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\rightrightarrows\mathbb{N}$（关于 $\mathbb{N}$的闭选择的完全化）是这样一个问题：输入为 $\mathbb{N}$ 的任意子集的枚举 e（因此现在允许 $\mathrm{ran}(e)=\mathbb{N}$），并且对于每个 $n\in\mathbb{N}$，$n\in\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}(e)$ 当且仅当 $n\notin\mathrm{ran}(e)$ 或 $\mathrm{ran}(e)=\mathbb{N}$。

[2] 虽然 LPO 和 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 已得到广泛研究，但 $\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$ 鲜为人知（且未出现在 [3]中）：关于其性质的概述，请参阅 [19]；关于与之接近的一些原理的深入研究，请参阅 [2]。

LPO：$2^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$（有限全知原理）以任意无限二进制串 p 作为输入，当且仅当 $p = 0^{\mathbb{N}}$ 时输出 0。LPO′：$\subseteq 2^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$：输入（一个编码的）二进制串无限序列 $p_0, p_1, \ldots$，使得函数 $p(i) = \lim_{s\to\infty} p_i(s)$ 对每个 $i \in \mathbb{N}$都有定义，并输出 LPO(p)。以下问题相对不那么重要：C_k（关于 k的闭选择）以数字的枚举 e 作为输入，这些数字未覆盖 $\{0,1,\ldots,k-1\}$，并返回一个未被 e覆盖的数字 $j < k$。$\mathsf{cRT}^1_k : k^{\mathbb{N}} \rightrightarrows k$（单点拉姆齐定理，又称鸽巢原理）在输入 $p \in k^{\mathbb{N}}$ 且 j 在 p中无限次出现时，返回某个 $j \in k$。我们指出，$\mathsf{cRT}^1_k \equiv_{\mathrm{W}} (\mathsf{C}_k)' \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{RT}^1_k$（详情参见 [4, 8] ）：我们倾向于使用“颜色版本”或单点的 RT，因为与“集合版本”相比，这使许多论证更直接。$\mathsf{cRT}^1_+ = \bigsqcup_{k>0} \mathsf{cRT}^1_k$（在 [4]中记作 RT1,+ ）是各个 cRT^1_k的不交并：可将其视为一个问题，输入一对 (k, f)，其中 $f \in \mathbb{N}$且 $f\colon \mathbb{N} \to k$是一个着色；输出 n，使得 $f^{-1}(n)$ 是无限的。我们用 $\mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}}$ 表示颜色数不作为输入一部分提供的变体。

LPO′ 的定义是将跳跃的定义（见 [3] ）应用于 LPO 的特例。直观地说，LPO′ 对应于回答一个二进制Σ^0_2问题的能力。特别是，容易看出，LPO′ 与 IsFinite 和 IsCofinite 都（强）Weihrauch 等价；这两个问题都以一个无限二进制串 p 为输入，并在其中包含有限个（分别为余有限个）1 时输出 1，否则输出 0。本文将始终使用这一事实。

ECT 问题

另一个具有组合性质的问题，在 [7], 中引入，将对本文余下部分非常有用。

▶ **定义 5**。ECT 是这样一个问题，其实例为数对 $(n, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，满足$f\colon \mathbb{N} \to n$ 是对自然数的 n 种颜色的着色，并且对于每个实例 (n, f) 以及 $b \in \mathbb{N}$, $b \in \mathsf{ECT}(n, f)$ 当且仅当

$$\forall x > b\ \exists y > x\ (f(x) = f(y)).$$

也就是说，ECT 是这样一个问题：给定一个 f 有限值域的整数函数，输出一个 b，使得在该 b之后，所使用的颜色调色板保持不变（因此得名，即“最终恒定的调色板尾部”）。我们将把合适的 b称为函数 f 的界。

关于 ECT 的一个非常重要、且我们将在全文中使用的结果是，它与图灵跳跃 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$ 等价。

▶ **引理 6** ([7, 定理 9])。$\mathsf{ECT} \equiv_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$

关于 ECT 的另一个有趣结果如下：如果将其视为二阶算术中的一个陈述（ECT 可以看作是这样一条原理：对于每一种将整数着成有限种颜色的着色，都存在一个界），那么 ECT 与 Σ^0_2-IND 在 RCA_0 上等价（实际上，在 RCA^*_0 上等价）。

▶ **引理 7** ([7,定理 7]). 在 RCA_0, ECT 下，Σ^0_2-IND 与之等价。

因此，得益于上述结果，$\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$ 显然是 Weihrauch度中 Σ^0_2-IND 的一种自然“翻译”候选。

跟随 [19], $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}$： $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{S}$ 是如下问题：对于每个 $p \in 2^{\mathbb{N}}$，如果 p 中只包含有限多个 1，则 $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}(p) = \top$；否则，$\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}(p) = \bot$ [3]。

▶ **引理 8.** $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{ECT}$

证明。 反设存在一个归约，且由泛函见证H 和 K。我们构造一个 p 属于 $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}$ 的实例，与此矛盾。

考虑着色 $H(0^{\mathbb{N}})$，并令 $b_0 \in \mathsf{ECT}(H(0^{\mathbb{N}}))$ 为其一个界。由于 $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}(0^{\mathbb{N}}) = \top$，外部归约见证将在读取了足够长的前缀后承诺给出答案 $\top$；该前缀由 $0^{\mathbb{N}}$ 与 b_0组成，长度为 n_0。现在考虑着色$H(0^{n_0}10^{\mathbb{N}})$，以及它的一个界 $b_1 > b_0$。同样，由于 $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}(0^{n_0}10^{\mathbb{N}}) = \top$，存在一个 n_1，使得 K 在读取前缀 $0^{n_0}10^{n_1}$ 以及 b_1后，承诺给出答案 $\top$。我们无限地迭代这一过程，得到一个实例 $p = 0^{n_0}10^{n_1}10^{n_2}1\ldots$，使得 $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}(p) = \bot$。

然而，对于着色 $H(p)$，必定存在某个 b_k 是有效的界，因为序列 $b_0 < b_1 < b_2 < \ldots$ 无界。但根据构造，K 在读取 p 的足够长前缀并结合 b_k 后，会承诺选择 $\top$，从而给出错误答案。

◀

现在我们可以断言，后文用作基准的两个主要问题，即 $(\mathsf{LPO}')^*$ 和 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$，在 Weihrauch 格中不可比较。

▶ **引理 9.** $(\mathsf{LPO}')^*$ 与 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$ 在 *Weihrauch* 意义下不可比较。因此 $(\mathsf{LPO}')^* <_{\mathrm{W}} (\mathsf{LPO}')^* \times \mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$，且 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}} <_{\mathrm{W}} (\mathsf{LPO}')^* \times \mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$。

证明。$\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}} \not\leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{LPO}')^*$：为此，我们实际上证明更强的结果 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \not\leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{LPO}')^*$。反设存在一个归约，由可计算泛函 H 和 K 见证：这意味着，对于 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 的每个实例 e，$H(e)$ 都是 $(\mathsf{LPO}')^*$ 的一个实例；并且对于每个解 $\sigma \in (\mathsf{LPO}')^*(H(e))$，$K(e,\sigma)$ 都是 e 的一个解，也就是说，$K(e,\sigma) \in \mathsf{C}_{\mathbb{N}}(e)$。我们构造一个 e $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 的实例来与此矛盾。

我们先令 e 枚举空集。在某个阶段 s，根据 $(\mathsf{LPO}')^*$ 实例的定义，$H(e|_s)$ 收敛到某个 n，即归约中将要使用的 LPO' 次数。因此，无论我们如何继续构造 e，$(\mathsf{LPO}')^*(H(e))$ 至多有 2^n 个可能的取值，记为 σ_0、……、σ_{2^n-1}。现在，只需依次对它们全部进行对角化即可，具体如下。我们令 e继续枚举空集，直到某个 s_0 和 i_0使得 $K(e|_{s_0},\sigma_{i_0})$ 收敛到某个 m_0：注意，根据我们的假设，H 和 K 见证了从 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 到 $(\mathsf{LPO}')^*$ 的归约，因此这样的 i_0 必定存在。接着，我们令 e 在阶段 s_0+1枚举 m_0：这意味着 σ_{i_0} 不可能是 $H(e)$ 的有效解，否则 $K(e,\sigma_{i_0})$ 就会是 e的解。随后，我们继续令e 枚举 $\{m_0\}$，直到某些 s_1 和 i_1使得 $K(e|_{s_1},\sigma_{i_1})$ 收敛到 m_1。然后，我们令e 枚举 $\{m_0,m_1\}$，并以此方式继续构造。经过 2^n 步后，我们就对所有 σ_i完成了对角化，从而得出所需的矛盾。

$(\mathsf{LPO}')^* \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$ 是引理 8 的推论，这里用到了 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{ECT}$ 这一事实（见[7]）。要证明 $\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{LPO}'$：给定任意字符串 $p \in 2^{\mathbb{N}}$，我们考虑 LPO'的实例$\langle p_0, p_1, \ldots\rangle$，其定义如下：对于每个 i，p_i的取值为 1，直到（如果有的话）在 i中找到第 i个

[3] $\mathbb{S}$ 是谢尔宾斯基空间 $\{\top,\bot\}$，其中 $\top$ 由至少包含一个 1 的二进制串编码，而 $\bot$ 由 $0^{\mathbb{N}}$编码。$\mathsf{IsFinite}_{\mathbb{S}}$ 严格弱于 IsFinite

1 的出现；此后，它的取值为 0。于是，$\mathrm{LPO}'(\langle p_0.p_1 \dots \rangle) = 1$当且仅当 $\mathrm{IsFinite}_{\mathbb{S}}(p) = \bot$。因此，由于 $\mathrm{IsFinite}_{\mathbb{S}} \not\leq_{\mathrm{W}} \mathrm{ECT}$，我们特别得到 $(\mathrm{LPO}')^* \not\leq_{\mathrm{W}} \mathrm{TC}^*_{\mathbb{N}}$。◀

接下来，我们将说明问题 cRT^1_n 和 $\mathsf{TC}^m_{\mathbb{N}}$ 之间的关系。这回答了 Kenneth Gill 提出的一个问题，该问题与 [13]中的工作有关。

▶ **定理 10.** $\mathsf{cRT}^1_{k+1} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}^m_{\mathbb{N}}$ 当且仅当 $k \leq m$。

为了证明该定理，我们要用到一些引理。首先指出，若我们有$k+1$ 个 $\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$实例，但已知其中至少有一个非空，那么k 个 $\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$ 副本和一个 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 就足以解决该问题。

▶ **引理 11.** $\mathsf{TC}^{k+1}_{\mathbb{N}}|_{\mathcal{A}(\mathbb{N}^{k+1})\setminus\{\emptyset\}^{k+1}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}^k_{\mathbb{N}} \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$

证明。 由于我们知道其中一个实例 A_0，A_1，……，A_k 对应于 $\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$ 非空，因此我们可以使用 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 来找到某个 $(i,\ n)$ 使得 $n \in A_i$。然后，我们使用 k 个 $\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$ 副本来解决所有实例 A_j 对应于 $j \neq i$。◀

▶ **引理 12.** 若$\mathsf{cRT}^1_{k+1} \leq_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃$^{m+1}_{\mathbb{N}}$，则$\mathsf{cRT}^1_k \leq_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃$^m_{\mathbb{N}}$。

证明。考虑输入 k^ω 到 cRT^1_{k+1}。对于 $\mathsf{cRT}^1_{k+1} \leq_{\mathrm{W}}$图灵跳跃$^{m+1}_{\mathbb{N}}$ 的外部归约见证，在读入 k^ω 的足够长前缀 k^ℓ 以及图灵跳跃$^{m+1}_{\mathbb{N}}$返回的某个元组 $(a_0, \dots, a_m)$ 后，必须输出 k 。现在考虑任意形如$k^\ell p$ 的输入，其中 $p \in \mathrm{k}^\omega$。由于 k 是错误答案，内部归约见证必须为图灵跳跃$^{m+1}_{\mathbb{N}}$生成一个实例 $(A_0, \dots, A_m)$，且该实例不能是 $(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)$——否则，图灵跳跃$^{m+1}_{\mathbb{N}}$就能输出 $(a_0, \dots, a_m)$，从而导致错误答案 k。

结合引理 11，我们得到一个归约 $\mathsf{cRT}^1_k \leq_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃$^m_{\mathbb{N}} \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$。由于 cRT^1_k 是一个闭分形，我们可以根据 [18, 定理24]去掉 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$。由此得到所述结论。◀

定理 10 的证明。 如果 $k > m$，我们就可以反复使用引理 12，得出$\mathsf{cRT}^1_2 \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_{1+k-m} \leq_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃$^0_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}}$ 恒等映射，但这显然荒谬。反过来，我们有 $\mathsf{cRT}^1_{k+1} \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{cRT}^1_2)^k \leq_{\mathrm{W}}$图灵跳跃$^k_{\mathbb{N}}$。◀

WKL 的有限部分′

在第3.4小节中，我们将使用 Weihrauch 度的有限部分 这一概念，以避开一些棘手的组合学问题。Weihrauch 度的 [6]，k-有限部分（记作 $\mathrm{Fin}_k(f)$）是陪域为k 且 Weihrauch可归约到 f 的问题中最大的 Weihrauch 度。我们也记 $\mathrm{Fin}(f) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fin}_n(f)$。这一概念类似于研究得更为深入的 Weihrauch 度的一阶部分 [10, 25, 14]。

这里我们将计算 $\mathsf{C}'_{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ 的 k-有限部分，我们将其视为这样一个问题：“给定一个无限二叉树的枚举，找出一条穿过它的路径”。$\mathsf{C}'_{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ 的另一个代表是“给定一个碰巧为有限分支的无限树 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ 的特征函数，找出一条穿过它的路径”，这就是与 König引理相关联的计算任务。成立的是 $\mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{C}'_{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$。因此，$\mathsf{C}'_{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}$ 的 k-有限部分是 cRT^1_m 的 k-有限部分的上界，我们将在下面的推论15中利用这一点。

▶ **定理13。** $\mathrm{Fin}_k(\mathsf{C}'_{\mathbf{2}^{\mathbb{N}}}) \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_k$

证明。假设 $f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathsf{k}$ 满足 $f \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{C}'_{2^{\mathbb{N}}}$，通过 ϕ 和 Ψ。输入 $x \in \mathrm{dom}(f)$ 时，$\phi(x)$ 枚举一棵树 T_x。我们按如下方式构造 cRT^1_k 的一个输入 p_x：每当我们找到某个 $w \in T_x$ 使得 $\Psi(x, w) = i$ 时，就向 p 添加一个 i。现在我们声称，若某个 i 在 p_x 中无限次出现，那么 i 就是 $f(x)$ 的一个正确输出。由于 $\Psi(x, \cdot)$ 必须在经过 T_x 的每条无限路径上停机，紧致性论证表明，对除有限多个 $w \in T_x$ 之外的所有情况，$\Psi(x, w)$ 都有定义。此外，若 $\Psi(x, w)$ 有定义，则对所有扩展 wu，$\Psi(x, wu) = \Psi(x, w)$。因此，若对于无限多个 w，$\Psi(x, w) = i$，那么考察由那些 w 以及有限多个满足 $T(x, v)$ 无定义的 v 所得到的 T_x 的无限子树，我们会发现存在一条经过 T_x 的无限路径，它有一个前缀 w，使得 $\Psi(x, w) = i$。这就证明了该断言。◀

▶ **推论14**。$\mathrm{Fin}(\mathsf{C}'_{2^{\mathbb{N}}}) \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_+$ ▶ **推论15**。
$\mathrm{Fin}_k(\mathsf{cRT}^1_m) \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_{\min\{k,m\}}$

顺序复合与并行复合

我们使用一项技术性结果，该结果表明，$\mathsf{LPO}' \times \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}$ 在 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$之后的顺序复合，实际上可以通过 LPO'、$\mathsf{TC}^n_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$的平行积来计算。按照惯例，对于每个问题 P，我们用 P^n 表示 $\mathsf{P} \times \cdots \times \mathsf{P}$（$n$ 个）。为说明该引理确实适用于 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$次，我们指出 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \leqslant \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$，其中 $\min \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 是 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 的强化版本，要求给出最小的有效解。

▶ **引理16**。对于所有 a、$b \in \mathbb{N}$ 以及每个单值问题 $\mathsf{P} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 若 $\mathsf{P} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$，则有 $((\mathsf{LPO}')^a \times \mathsf{TC}^b_{\mathbb{N}}) \star \mathsf{P} \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{LPO}')^a \times \mathsf{TC}^b_{\mathbb{N}} \times \mathsf{P}$。

证明。对图灵跳跃$^*_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{ECT}$ 在 [7, 定理 9] 中的证明实际上表明 图灵跳跃$^b_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{ECT}_{b+1}$，其中 ECT_{b+1} 是 ECT 对使用 $b+1$ 种颜色的着色所作的限制。因此，我们可以改为证明以下结论：

$$((\mathsf{IsFinite})^a \times \mathsf{ECT}_b) \star \mathsf{P} \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{IsFinite})^a \times \mathsf{ECT}_b \times \mathsf{P}$$

我们注意到，对于任意 $w \in \{0,1\}^*$，$\mathsf{IsFinite}(p) = \mathsf{IsFinite}(wp)$；并且，若对于某个$w \in \{0, 1, \ldots, b-1\}^*$，$n \in \mathsf{ECT}_b(wp)$ 成立，则 $n \in \mathsf{ECT}(p)$ 也成立。换言之，这两个原理都具有这样的性质：在输入前添加任意前缀不会造成问题。由于我们假设 $\mathsf{P} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$，因此存在一个有限的心变更计算来求解 P。

在 $((\mathsf{IsFinite})^a \times \mathsf{ECT}_b) \star \mathsf{P}$ 中，我们可以运行这个有限的心变更计算，以获得 isFinite 和 ECT_b-实例的输入。由于如上所述前缀无关紧要，心变更不会造成任何问题。因此，我们实际上可以并行应用 IsFinite 和 ECT_b，从而得到所需的归约到 $(\mathsf{IsFinite})^a \times \mathsf{ECT}_b \times \mathsf{P}$。

P 的单值性确保在并行执行中，我们从 P 得到相同的 e
解，用于计算 IsFinite 和 ECT_b 的实例。 ◀

下面说明，在引理16的陈述中，将 P 限制为单值是必要的：

▶ **命题 17**。$\mathsf{LPO}' \star \mathsf{C}_2 \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{LPO}' \times \mathsf{C}_2$

证明。问题 $\mathsf{LPO}' \star \mathsf{C}_2$ 等价于“给定 p_0、$p_1 \in 2^{\mathbb{N}}$ 和非空的 $A \in \mathsf{A}(2)$，返回某个 $i \in A$ 的 $(i, \mathsf{isFinite}(p_i))$。”我们将此问题记为 BI。我们还将在右侧使用 $\mathsf{C}_2 \times \mathsf{IsFinite}$，而不是 $\mathsf{LPO}' \times \mathsf{C}_2$。此外，我们假设 $\mathsf{A}(2)$ 由 ψ 表示：$2^{\mathbb{N}} \to \mathsf{A}(2)$，其中 $i \in \psi(p)$ 当且仅当 $\exists \ell\, p(2\ell + i) = 1$。

首先，我们论证 BI $\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{C}_2 \times$ IsFinite 会推出 BI $\leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_2 \times$IsFinite。设外部归约见证为 $K :\subseteq (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \times (2 \times 2) \to (2 \times 2)$。注意，内层归约需要生成输入，使 $\mathsf{C}_2 \times$IsFinite 能够得出全部四个值 $(i, b) \in 2 \times 2$；否则，它甚至会表明 $\mathrm{LPO}' \star \mathsf{C}_2 \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{LPO}'$，而由于基数方面的原因，已知这并不成立。因此，存在前缀 w_0、w_1 和 0^k，使得 $K(w_0, w_1, 0^k, 0, 0)$ 收敛。将 BI 限制在 w_0、w_1、0^k 的扩展上，不会改变其强 Weihrauch 度。接着，我们寻找扩展 $w_0^1 \succ w_0$、$w_1^1 \succ w_1$ 和 $0^{k+\ell}$，使得 $K(w_0^1, w_1^1, 0^{k+\ell}, 0, 1)$ 收敛，并对 2×2 的其余两个元素作同样处理。将定义域限制在这些最终前缀的扩展上后，我们便得到一个只依赖于 2×2-输入的外部归约见证，因此它见证了一个强归约。

接下来，我们证明 BI $\leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{C}_2 \times$IsFinite 不成立。外部归约见证 $K : 2 \times 2 \to 2 \times 2$必须是一个置换（因为左侧实际上出现了全部四个值）。内部归约见证必须将任何以 $0^{\mathbb{N}}$ 作为最后一个分量的实例映射为以 $0^{\mathbb{N}}$ 作为第一个分量的实例：如果某个前缀（w_0，w_1，0^k）会导向一个 $\mathsf{C}_2 \times$IsFinite 实例，且其第一个分量不是 $\{0, 1\}$，那么通过将输入限制为这类输入的扩展，我们就能得到一个归约 BI $\leq_{\mathrm{sW}}$ IsFinite。

考虑输入 $(p, p, 0^\omega)$ 上会发生什么。如上所述，这会被映射到某个 $(0^{\mathbb{N}}, q)$。我们看到，$K(i, b)$ 的第一个分量只能依赖于 b。此外，由于内部归约见证无法将含有有限个 1 的 ps 映射为含有无限多个 1 的 qs，反之亦然，我们实际上可以得出，$K(i, b)$ 的第一个分量必须是 b。鉴于 $0, 1 \in 2$ 的对称性，对于我们需要考察的外部归约见证，只剩下两个候选：K_1，K_2，即 $K_1(i, b) = (b, i)$ 和 $K_2(i, 0) = (0, i)$，$K_2(i, 1) = (1, 1 - i)$。

接下来，我们考虑如下形式的输入 $(p_0, p_1, 0^{\mathbb{N}})$，满足 IsFinite$(p_0)$ $=$ 1 –IsFinite(p_1)。如上所述，内部归约见证将生成某个实例 $(0^{\mathbb{N}}, q)$。根据 q，使用 K_1 或 K_2 作为外部归约见证，会得到答案 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$，或答案 $(1, 0)$ 和 $(1, 1)$。然而，正确答案应为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$，或 $(1, 1)$ 和 $(0, 0)$。因此，K_1 和 K_2 均不成立，由此得到了所需的矛盾。◀

2.4 Green理论

Green理论关注分析有限半群的理想结构，无论这些理想是左单侧、右单侧，还是双侧的。这为有限半群中原本颇为难以捉摸的代数性质带来了丰富的结构。我们只需要几个相关结果，它们都依赖于*Green*预序和幂等元的定义（回想一下，半群的元素 s 在 $ss = s$成立时称为幂等元）。

▶ **定义 18.** 对于半群 $(S, \cdot)$，定义如下的 Green预序：

- $s \leq_R t$ 当且仅当 $s = t$ 或 $s \in tS = \{ta : a \in S\}$ （后缀序）
- $s \leq_L t$ 当且仅当 $s = t$ 或 $s \in St = \{at : a \in S\}$ （前缀序）
- $s \leq_H t$ 当且仅当 $s \leq_R t$ 且 $s \leq_L t$
- $s \leq_J t$ 当且仅当 $s \leq_R t$ 或 $s \leq_L t$ 或 $s \in StS = \{atb : (a, b) \in S^2\}$（中缀序）

相应的等价关系记作 R、L、H、J；它们的等价类分别称为 R-类、L-类、H-类和 J-类。

我们在本节末尾列出三个技术引理，不加证明；它们将在第 4 节和第 5 节中用到。虽然这些引理最初并非在二阶算术中证明，但显然，其证明在 RCA_0 中同样成立：除了直接的代数运算外，

它们只依赖于这样一个存在性：对于每个有限半群（S，$\cdot$），都存在一个指标 $n \in \mathbb{N}$，使得s^n 对任意 $s \in S$ 都是幂等元。

▶ **引理 19** ([20, 命题 A.2.4]). 若$(S, \cdot)$ 是一个有限半群，$H \subseteq S$ 是一个 H-类，并且某些 a, $b \in H$ 满足 $a \cdot b \in H$，那么对于某个 $e \in H$，我们知道$(H, \cdot\ e)$ 是一个群。

▶ **引理 20** ([20, 推论 A.2.6]). 对于有限半群中的任意一对元素 $x, y \in S$，如果有 $x \leq_{\mathcal{R}} y$，且 x, y 在 J 等价，那么 x 和 y 也在 R 等价。

▶ **引理 21** ([20, 推论 A.2.6]). 对于每个有限半群 S，$s, t \in S$, $s \leq_{\mathcal{L}} t$ 和 s 满足 R t，则推出 s H t。

3 Shuffle 原理及相关问题

3.1 逆向数学中的 Shuffle 原理

我们首先给出洗牌原理在 $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^0_2$-IND 中的一个证明[4]，因为从某种意义上说，这能更清楚地展现本文后续所用洗牌的一些性质。

▶ **引理 22.** $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^0_2$-IND $\vdash$ Shuffle

证明。设 $c: \mathbb{Q} \to n$ 是一个将有理数着为 n 种颜色的着色。对于任意自然数k，考虑以下 Σ^0_2 公式 $\varphi(k)$：“存在一个基数为 k的有限集 $L \subseteq n$，且存在 u、$v \in \mathbb{Q}$，使得 $u < v$，并且对每个 $w \in]u$、$v[$，都有 $c(w) \in L$”。由于 $\varphi(n)$ 为真，根据 Σ^0_2 最小化原理，可知存在一个最小的 k，使得$\varphi(k)$ 成立。考虑 u、$v \in \mathbb{Q}$ 以及对应于这个最小 k的颜色集合 L。现在只需证明 $]u$、$v[$ 是一个 c-洗牌，即可得出结论。

设对于某个 $x \in]u, v[$，有 $a = c(x)$。我们需要证明 a 在 $]u, v[$ 中稠密出现。任取 $x, y \in]u, v[$，使得 $x < y$。只需证明存在某个 $w \in]x, y[$，使得 $c(w) = a$，即可得证。因此，假设不存在这样的 w。考虑颜色集 $L \setminus \{a\}$ 显然，$\varphi(|L \setminus \{a\}|)$ 成立。然而，$|L \setminus \{a\}| < |L| = k$，这与 k 的选取矛盾，因为 k 是使得 $\varphi(k)$ 成立的最小数。

◀

上述证明展示了 Shuffle 的一个重要特征：给定某个区间 $]u, v[$，其中颜色数最少的任意子区间都是一个 Shuffle。有趣的是，上述蕴含关系可以反向成立，因此我们得到以下等价关系。

▶**定理 23.** 在 RCA_0，上，Shuffle 等价于 Σ^0_2-IND。

这里我们不提供逆向结论的证明；可以借鉴我们证明引理 32 时采用的论证，轻松得出该证明。

有了这一等价关系，我们现在介绍与 Shuffle 对应的 Weihrauch 问题，先从较强的那个问题开始。

▶ **定义 24.** 我们将 Shuffle 视为一个问题，其实例为 $(k, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，满足$c$：$\mathbb{Q} \to k$ 是对有理数的 k 颜色着色，并且对于每个实例(k, c)、每一对 $(u, v) \in [\mathbb{Q}]^2$ 以及每个 $C \subseteq k$, $(u, v, C) \in$ Shuffle(k, c) 当且仅当 $]u, v[$ 是 C中这些颜色的一个 *c-shuffle*。

[4] 摘自 Leszek A. Kołodziejczyk 的个人通信。

注意，Shuffle 的输出包含两个无法轻易相互计算的分量。根据我们希望给出的解的类型，将这些原理拆分成若干个问题是很自然的：一个问题会输出 shuffle 的颜色，另一个则会输出区间。正如我们将看到的，同一原理的这两个版本在一致强度上有着截然不同的表现。

▶**定义 25.** iShuffle （*"i"*代表"区间"）与Shuffle 是同一个问题，区别在于有效输出只包含区间 $]u, v[$，该区间是一个 c-*shuffle*。与之相对应，cShuffle （*"c"*代表"颜色"）是这样一个问题：它只输出 c-*shuffle* 所取颜色的一个可能集合。

我们首先分析较弱的问题 cShuffle 和 iShuffle，并证明它们分别等价于 $(\mathrm{LPO}')^*$ 和 $\mathrm{TC}^*_{\mathbb{N}}$。这也将意味着 Shuffle 强于 $(\mathrm{LPO}')^* \times \mathrm{TC}^*_{\mathbb{N}}$，但反向结论则需要完全不同的证明。

我们的定义将颜色数量作为输入的一部分。我们将在第 6 节讨论颜色数量未知但仍为有限值的变体与本文重点研究的版本之间的关系。

3.2 较弱 Shuffle 问题的 Weihrauch 复杂度

我们先汇集几个引理，对 cShuffle 进行分类。第一个引理也适用于 iShuffle 和 Shuffle。

▶ **引理 26.** $\mathrm{cShuffle}^* \equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{cShuffle}$，$\mathrm{iShuffle}^* \equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{iShuffle}$ 和 $\mathrm{Shuffle}^* \equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{Shuffle}$。

证明。在不失一般性的前提下，我们来证明 $\mathrm{cShuffle} \times \mathrm{cShuffle} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{cShuffle}$、$\mathrm{iShuffle} \times \mathrm{iShuffle} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{iShuffle}$ 和 $\mathrm{Shuffle} \times \mathrm{Shuffle} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{Shuffle}$。考虑两个输入着色的配对。具体而言，设 (n_0, f_0) 和 (n_1, f_1) 是 Shuffle 的实例。固定一个可计算双射 $\cdot, \cdot : n_0 \times n_1 \to n_0 n_1$，并定义着色 f：$\mathbb{Q} \to n_0 n_1$，使得对每个 $x \in \mathbb{Q}$，都有 $f(x) = f_0(x)\ f_1(x)$。因此，$(n_0 n_1, f)$ 是 Shuffle 的一个有效实例。

令 $C \in \mathrm{cShuffle}(n_0 n_1,\ f)$：这表示存在一个区间 I，它是关于 C 的颜色的一个 f-shuffle。对于 $i < 2$，令 $C_i := \{j : \exists c \in C (j = \pi_i(j))\}$，其中 π_i 是到第 i 个分量的投影。于是，$C_i \in \mathrm{cShuffle}(n_i f_i)$，见证为区间 I。

用同样的推理，若 $I \in \mathrm{iShuffle}(n_0 n_1,\ f)$，则 $I \in \mathrm{iShuffle}(n_0,\ f_0)$ 且 $I \in \mathrm{iShuffle}(n_1,\ f_1)$。最后，若 $(I,\ C) \in \mathrm{Shuffle}(n_0 n_1,\ f)$，则 $(I,\ C_0) \in \mathrm{Shuffle}(n_0,\ f_0)$ 且 $(I,\ C_1) \in \mathrm{Shuffle}(n_1,\ f_1)$。

为了从 $\mathrm{Shuffle}^* \equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{Shuffle}$ 推出 $\mathrm{Shuffle} \times \mathrm{Shuffle} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{Shuffle}$，我们只需注意到 Shuffle 有一个可计算的实例；cShuffle 和 iShuffle 也同样如此。

◀

令 $\mathrm{cShuffle}_n$ 表示 cShuffle 在 n-着色上的限制。以下引理源于一位匿名审稿人的建议：

▶ **引理 27.** $(\mathrm{LPO}')^n \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{cShuffle}_{n+1}$，但 $(\mathrm{LPO}')^n \not\leq_{\mathrm{W}} \mathrm{cShuffle}_n$。

证明。我们将证明 $(\mathrm{IsFinite})^n \leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{cShuffle}_{n+1}$。给定 $(\mathrm{IsFinite})^n$ 的一个输入 $(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$，我们定义有理数的一个着色 c：$\mathbb{Q} \to (n+1)$，令 $c(\frac{k}{nm+\ell}) = \ell$ 当且仅当 ~~$p_\ell(m) = 1$~~，且 $c(\frac{k}{nm+\ell}) = n$ 当 ~~$p_\ell(m) = 0$~~，其中 $\gcd(k, nm+\ell) = 1$ 且 $\ell < n$。令 C 为应用 $\mathrm{cShuffle}_{n+1}$ 得到的结果。我们发现，$\ell \in C$ 当且仅当 p_ℓ 含有无穷多个 1——因为某个颜色 $\ell < n$ 要么只出现有限多次，要么在每个区间内都稠密。颜色 n 仅用作中性色，除此之外不予考虑。

12 关于加法拉姆齐定理的 Weihrauch度

为了证明 $(\mathsf{LPO}')^n \not\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cShuffle}_n$，我们依据可能输出的基数。对于 $(\mathsf{LPO}')^n$，有 2^n 种不同的输出，并且每个有限前缀都可以扩展为这样的实例：其中任意一种输出都是唯一正确答案。另一方面，$\mathsf{cShuffle}_n$ 的可能答案只有 n 的非空子集，也就是说，可能的答案只有 $2^n - 1$ 种。◀

我们还可以证明，有限多个 LPO' 副本就足以求解 $\mathsf{cShuffle}_n$。不过，我们的构造会使参数呈指数级增长。我们不知道这是否不可避免。

▶ **引理 28.** $\mathsf{cShuffle}_n \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{LPO}')^{2^n-2}$

证明。实际上，我们证明 $\mathsf{cShuffle}_n \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{IsFinite}^{2^n-1}$。设 (n, c) 是 cShuffle 的一个实例。我们的思路是，对于颜色集合 n 的每个非空真子集 C，使用一个 IsFinite 实例，以确定是否存在这样的 C，使得存在一个区间 I_C，满足 $c(I_C) \subseteq C$。随后我们将证明，任何 $\subseteq$-极小的此类 C 都是 (n, c) 的一个解。

令 C_i（其中 $i < 2^n - 2$）为 n 的非空真子集的一个枚举。令 I_j 为 $\mathbb{Q}$ 的开区间的一个枚举，并令 q_h 为 $\mathbb{Q}$ 的一个枚举。对于每个 $i < 2^n - 2$，我们并行地逐阶段构造一个 IsFinite 实例 p_i。在每个阶段 s，对于每个分量 $i < 2^n - 2$，都会有一个“当前区间” $I_{j_s^i}$ 和一个“当前点”$q_{h_s^i}$。开始构造时，将每个分量 i 的当前区间设为 I_0，当前点设为 q_0。

对于每个分量 i，在阶段 s 我们进行如下操作：

- 如果 $q_{h_s^i} \notin I_{j_s^i}$，或者如果 $c(q_{h_s^i}) \in C_i$，则令 $I_{j_{s+1}^i} = I_{j_s^i}$ 和 $q_{h_{s+1}^i} = q_{h_s+1}$。此外，令 $p_i(s) = 0$。实际上，这意味着如果当前点的颜色属于 C_i，或者当前点不在当前区间内，则无需采取特殊操作，我们可以转而考察下一个点。反之，如果 $q_{h_s^i} \in I_{j_s^i}$ 且 $c(q_{h_s^i}) \notin C_i$，则令 $I_{j_{s+1}^i} = I_{j_s+1}$ 和 $q_{h_{s+1}^i} = q_0$。此外，令 $p_i(s) = 1$。实际上，这意味着如果当前点在当前区间内，且其颜色不是 C_i 的颜色，那么我们需要转而考察列表中的下一个区间，因此将当前点重置为枚举中的第一个点。此外，我们令 $p_i(s)$ 取值 1，以记录这一事件。

我们对每个 $s \in \mathbb{N}$迭代该构造。经过无限多步后，我们得到 $\mathsf{IsFinite}^{2^n-2}$的一个实例$\langle p_0, p_1, \ldots, p_{2^n-3}\rangle$。

设 C 是一个 C_i，使得 $\mathsf{IsFinite}(p_i) = 1$，但对于所有满足$C_j \subset C_i$的 j，$\mathsf{IsFinite}(p_j) = 0$；或者，如果不存在这样的 i，则为 $C = \{0, 1, \ldots, n-1\}$。我们声称 C是 $\mathsf{cShuffle}_n$的正确答案。如果 $C = C_i$，那么针对 C_i 的构造仅有限次推进到了不同的区间。我们针对 C_i 所考虑的最后一个区间 I 中，不包含任何未在 C_i中出现的颜色。此外，我们知道，对于所有 $C_j \subset C_i$，该过程始终没有稳定下来，这意味着 I的每个子区间都包含 C_i 中出现的所有颜色。如果 $C = \{0, 1, \ldots, n-1\}$，那么每种颜色处处稠密，因此 C 是 $\mathsf{cShuffle}_n$唯一的正确答案。◀

综合前面的引理，我们得到以下结论：

▶ **定理 29.** $(\mathsf{LPO}')^* \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cShuffle}$

证明。 $(\mathsf{LPO}')^* \leq_{\mathrm{W}}\mathsf{cShuffle}$ 由引理 26 和 27 给出。对于另一个方向，注意到 $\mathsf{cShuffle} \equiv_{\mathrm{W}} \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\mathsf{cShuffle}_n$。结论随即由引理 28 得出。◀

虽然定理 29 告诉我们，对于适当选择的 m，任意有限个并行的 LPO'-实例都可归约为针对 m- 颜色的 cShuffle，反之，足够多个 LPO'- 实例也能求解针对 m- 颜色的 cShuffle，但我们证明中的一个方向

涉及参数的指数级增长。因此，在转向 iShuffle 之前，我们提出一个尚未解决的问题：能否缩小这一差距?

▶**问题 30.** 对于各个n、 $m \in \mathbb{N}$，$(\mathsf{LPO}')^n$ 与$\mathsf{cShuffle}_m$ 之间是什么关系？

▶ **引理 31.** 令$\mathsf{iShuffle}_n$ 为iShuffle 在形如(n, c)的实例上的限制。对于 $n \geq 1$，有$\mathsf{iShuffle}_n \leq_{\mathrm{sW}}$ 图灵跳跃$^{n-1}_{\mathbb{N}}$ 。

证明。 固定一个枚举 I_j，枚举 $\mathbb{Q}$中的区间；再固定一个枚举 q_h，枚举 $\mathbb{Q}$，以及一个可计算双射 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，并令 (n, c) 为一个 $\mathsf{iShuffle}_n$的实例。

这个归约的思路如下：对于图灵跳跃的第一个实例 e_{n-1}，我们寻找一个区间 I_j，使得 c 只取 $n-1$ 种颜色：如果不存在这样的区间，就意味着每种颜色在每个区间中都稠密，因此每个 I_j 都是c的有效解。于是，我们可以假设最终找到了这样一个区间：接着，我们将使用图灵跳跃的第二个实例 e_{n-2}，在 I_j 中寻找一个子区间，使得 c 只取 $n-2$ 个值。同样，我们可以假设找到了这样一个区间。我们如此进行 $n-1$ 步，最终使用图灵跳跃的最后一个实例 e_1，在一个区间I 内找到区间 I'，并且我们知道其中至多出现两种颜色：同样，我们寻找 c-单色区间：若找不到，则 I' 已经是一个 c-shuffle；若找到了，那么该区间现在就是 c的一个解，因为 c-单色区间显然是 c-shuffle。。

虽然上面的示意图没有显示这一点，但证明的一个重要部分是，我们所描述的 $n-1$ 搜索可以并行进行：之所以能够做到这一点，是因为 Shuffle 的任意子区间都是 Shuffle。更正式地说，我们按如下方式进行：定义如下 $n-1$ 个图灵跳跃实例 e_1，……，e_{n-1}。对于每个阶段 s，每个实例 e_i 都有一个“当前区间” $I_{j^i_s}$、一个“当前点” $q_{h^i_s}$ 和一个“当前颜色列表” $L_{k^i_s}$。我们通过将每个i对应的当前区间设为 I_0、当前点设为 q_0、当前点列表设为 $\emptyset$，来开始构造。

- 在阶段 s，有两种情况：如果对于每个 i，$q_{h^i_s} \notin I_{j^i_s}$ 或 $|L_{k^i_s} \cup \{c(q_{h^i_s})\}| \leq i$，我们就设定 $I_{j^i_{s+1}} = I_{j^i_s}$、$q_{h^i_{s+1}} = q_{h^i_s+1}$ 和 $L_{k^i_{s+1}} = L_{k^i_s} \cup \{c(q_{h^i_s})\}$。此外，对于每个 $a \in \mathbb{N}$，我们让每个 e_i 枚举所有形如 s, a 的数，但不包括 s, j^i_s。然后进入阶段 $s+1$。实际上，这意味着，如果截至目前所见的当前区间内各点的颜色集合的基数不大于 i，就无需采取任何特别行动，我们可以转而检查列表中的下一个点。否则：令 i' 为满足 $q_{h^i_s} \in I_{j^i_s}$ 且 $|L_{k^i_s} \cup \{c(q_{h^i_s})\}| > i$ 的最大值。然后，对于每个 $i > i'$，我们按前一种情况进行处理（即，按照上文定义当前区间、当前点、当前颜色列表和枚举）。对于其他分量，我们按如下方式处理：首先寻找满足 $I_\ell \subseteq I_{j^{i'+1}_s}$ 的最小 $\ell > j^{i'}_s$（如果$i' = n-1$，就直接取 $\ell = j^{n-1}_s + 1$）。然后，对于每个 $i \leq i'$，我们设定 $I_{j^i_{s+1}} = I_\ell$、$q_{h^i_{s+1}} = q_0$ 和 $L_{k^i_{s+1}} = \emptyset$。此外，我们让 e_i 枚举所有此前尚未枚举过的、形如 t, a 且满足 $t < s$ 的数，也枚举所有形如 s, a 的数，但不包括 s, j^i_s。然后进入阶段 $s+1$。

  实际上，这意味着，如果我们发现某个分量 i' 的当前区间包含的颜色过多，那么对于所有分量 $i \leq i'$，我们都转而考虑严格包含于分量 i' 的当前区间内的区间。

我们对每个 $s \in \mathbb{N}$ 迭代这一过程，从而得到 $\mathsf{TC}^{n-1}_{\mathbb{N}}$-实例 $\langle e_1, \ldots, e_{n-1}\rangle$。设 $\sigma \in \mathbb{N}^{n-1}$ 满足 $\sigma \in \mathsf{TC}^{n-1}_{\mathbb{N}}(\langle e_1, \ldots, e_{n-1}\rangle)$。接着，我们寻找最小的 i，使得 $I_{\pi_2(\sigma(i))} \subseteq I_{\pi_2(\sigma(i+1))} \subseteq \ldots \subseteq I_{\pi_2(\sigma(n-1))}$（用 π_i 表示在

第 i 个分量上的 $= x$ 投影，因此 $\langle \pi_1(x)\ \pi_2(x)\rangle = x$）） 。我们声称 $I_{\pi_2(\sigma(i))}$ 是一个 c-Shuffle，这足以得出 iShuffle$_n \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}^{n-1}$ 。

现在我们证明这一断言。首先，假设 e_{n-1} 枚举了 $\mathbb{N}$中的所有元素。那么，构造的第二种情况以 $i' = n-1$为条件被触发了无穷多次：因此，没有任何区间只包含 $n-1$ 种颜色；所以，正如我们在证明开头所说，这意味着每个区间都是一个 c-Shuffle。特别地，这意味着$I_{\pi_2(\sigma(i))}$ 是一个有效解。因此，我们可以假设 e_{n-1} 没有枚举 $\mathbb{N}$中的所有元素。

接下来我们注意到，对于每个 $m > 1$，如果 e_m 枚举了 $\mathbb{N}$中的所有元素，那么通过考察构造的第二种情况可知， e_{m-1}也会枚举所有元素。设 m 是使得 e_m 没有枚举 $\mathbb{N}$中所有元素的最小值。对于这样的 m，容易看出$I_{\pi_2}(\sigma(m))$是 c的一个有效解：事实上，根据构造可知， c 在$I_{pi_2}(\sigma(m))$上取 m 种颜色，而且对于包含在$I_{\pi_2}(\sigma(m))$中的任何区间， c 都不会取 $m-1$ 种颜色，这意味着$I_{\pi_2}(\sigma(m))$是一个 c-Shuffle。此外，容易看出$I_{\pi_2}(\sigma(m)) \subseteq I_{\pi_2}(\sigma(m+1)) \subseteq \ldots I_{\pi_2}(\sigma(n-1))$，这意味着 $i \leq m$。由于 c-Shuffle 的每个子区间都是 c-Shuffle，$I_{\pi_2}(\sigma(i))$ 是 c的一个有效解，正如我们所要证明的。◀

▶ **引理 32.** 令ECT$_n$ 表示将ECT 限制到形如(n, f)的实例上。成立：ECT$_n \leq_{\mathrm{sW}}$ iShuffle$_n$。

证明。令 (n, f) 为 ECT$_n$ 的一个实例。我们定义 $c\colon \mathbb{Q} \to n$，使得 $c(\frac{a}{b}) = f(b)$，其中 gcd$(a, b) = 1$。因此，根据 c，分母相同的所有点都具有相同的颜色。令 $(\frac{u}{k}, \frac{v}{\ell}) \in$ iShuffle$_n(n, c)$。令 b 满足 $\frac{1}{b} < \frac{v}{\ell} - \frac{u}{k}$。我们断言 b 是 f 的一个界。反之，若不然，则存在一种颜色 $i < n$ 和一个数 $x \in \mathbb{N}$，使得 $x > b$ 且$f(x) = i$，但对于任何 $y > x$，都不成立 $f(y) = i$。因此，所有形如 $\frac{w}{x}$ 的既约数都被赋予颜色 i，但 i 在 $\mathbb{Q}$的任何区间中都不会稠密出现。然而，根据 b 的选取，存在一个 $z \in \mathbb{Z}$，使得 $\frac{z}{b} \in \left]\frac{u}{k}, \frac{v}{\ell}\right[$，这就产生了矛盾。因此， b 是 f 的一个界。

◀

综合以上结果，我们终于得到了 iShuffle 的刻画。对于每个固定数量的颜色，我们甚至还能得到精确刻画。

▶**定理 33.** *Weihrauch* 等价如下：

ECT$_n \equiv_{\mathrm{W}}$ iShuffle$_n \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}^{n-1}$ 由此 ECT $\equiv_{\mathrm{W}}$ iShuffle $\equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}^{*}$

证明。 我们得到$\mathsf{TC}_{\mathbb{N}}^{n-1} \leq_{\mathrm{W}}$ ECT$_n$ 通过考察 [7, 定理 9]的后半部分即可。接着，引理 32 给出ECT$_n \leq_{\mathrm{W}}$ iShuffle$_n$。引理 31 通过证明 iShuffle$_n \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}^{n-1}$ ，完成了这一循环。◀

3.3 fullshuffle 问题

本节的主要结果是 Shuffle $\equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{TC}_{\mathbb{N}}^{*} \times$(LPO′)*，我们将在定理 36 中证明这一点。对于其中一个方向，只需结合较弱版本的结果：

▶ **引理 34.** 图灵跳跃$_{\mathbb{N}}^{*} \times$(LPO′)$^* \leq_{\mathrm{W}}$ Shuffle

证明。 由定理 29 和定理 33 可知，图灵跳跃$_{\mathbb{N}}^{*} \times$ (LPO′)$^* \leq_{\mathrm{W}}$ iShuffle $\times$cShuffle，并且显然 iShuffle $\leq_{\mathrm{W}}$ Shuffle 且 cShuffle $\leq_{\mathrm{W}}$ Shuffle，由引理 26 可得 图灵跳跃$_{\mathbb{N}}^{*} \times$(LPO′)$^* \leq_{\mathrm{W}}$ Shuffle。◀

另一方面，我们仍需明确说明，解决一个 Shuffle 实例时会用到多少个 TC$_{\mathbb{N}}$-实例和 (LPO′)-实例。请注意，为了获得一个合适的区间，我们将使用远多于引理 31 中所用数量的 TC$_{\mathbb{N}}$-实例。

▶ **引理 35.** 令 Shuffle$_n$ 表示对形如 (n, c) 的实例所作的 Shuffle 限制。那么，Shuffle$_n \leq_{\mathrm{W}}$ $(\mathsf{TC}_{\mathbb{N}} \times \mathsf{LPO}')^{2^n-1}$

证明。 设 (n, c) 是 Shuffle的一个实例。 Shuffle$_n \leq_{\mathrm{W}}$ (图灵跳跃$_{\mathbb{N}}$ $\times$LPO′)$^{2^n-1}$ 的证明思路，本质上是结合引理 31 和引理 28 的证明：我们想利用 图灵跳跃$_{\mathbb{N}}$ 为 C 的某个子集 n 找到一个候选区间；同时，我们利用 LPO′（或等价地，IsFinite）检查对于每个这样的集合 C，是否确实存在一个针对 c中的颜色的C -shuffle。上述思路的主要难点在于必须将这两个证明交织起来，才能同时找到一个 c-shuffle 以及其中出现的颜色集合。

我们按如下方式进行：设 C_i 是 n的非空子集的一个枚举。此外，固定 $\mathbb{Q}$中区间的某个可计算枚举 I_j 、 $\mathbb{Q}$中点的某个可计算枚举 q_h，以及一个可计算双射 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$。对于每个$C_i$，我们将按以下阶段定义 IsFinite $\times$ 图灵跳跃$_{\mathbb{N}}$ 的一个实例 $\langle p_i, e_i\rangle$ ： 在每个阶段 s，对于每个指标 i，都会有一个“当前区间” $I_{j_s^i}$ 和一个“当前点”$q_{h_s^i}$。 在阶段 0，我们将每个指标 i对应的当前区间设为 I_0 ，将当前点设为 q_0 。

在阶段 s，对于每个分量 i，有两种情况：

- 如果 $q_{h_s^i} \notin I_{j_s^i}$ ，或者如果 $c(q_{h_s^i}) \in C_i$，我们就设定 $I_{j_{s+1}^i} = I_{j_s^i}$ 和 $q_{h_{s+1}^i} = q_{h_s^i+1}$。此外，我们设定$p_i(s) = 0$ ，并令 e_i 枚举所有形如s, a的整数，但不包括s, j_{s+1}^i。然后我们进入阶段 $s+1$。通俗地说，对于每个分量 i，我们检查当前点的颜色是否属于C_i，或者当前点是否不在当前区间内：如果是这种情况，则无需采取特殊行动。反之，如果 $q_{h_s^i} \in I_{j_s^i}$ 且 $c(q_{h_s^i}) \notin C_i$，我们就设定 $I_{j_{s+1}^i} = I_{j_s^i+1}$ 和 $q_{h_{s+1}^i} = q_0$。此外，我们设定 $p_i(s) = 1$，并令 e_i 枚举所有形如t, a的数，其中 $t < s$，且这些数在先前阶段尚未被枚举过；同时还枚举所有形如s, a的数，但不包括s, j_{s+1}^i。然后我们进入阶段 $s+1$。

换言之：如果我们发现，对于某个分量 i ，当前点的颜色不属于 C_i，那么从下一个阶段开始，我们就开始考虑另一个区间，即固定枚举中的下一个区间。然后，我们将当前点重置为 q_0 （以便重新检查所有有理数），并通过令 $p_i(s) = 1$ 并改变 e_i 所枚举的点的形式来记录这一事件。

我们对每个整数 s都迭代这一过程。令 $\sigma \in (2\times\mathbb{N})^{2^n-1}$ 满足

$$\sigma \in (\mathsf{IsFinite}\times\mathsf{TC}_{\mathbb{N}})^{2^n-1}(\langle\langle p_1, e_1\rangle\ldots,\langle p_{2^n-1}, e_{2^n-1}\rangle\rangle)$$

令 k 为满足 IsFinite$(p_i) = 1$的子集 $C_i \subseteq n$ 的最小基数：注意，这样的 k 必定存在，因为 c-shuffle 存在。接着，我们声称相应的 $I_{\pi_2(\sigma(i))}$是一个 c-shuffle（我们用 π_i 表示在第 i个分量上的投影，因此 $\langle\pi_1(x)\ \pi_2(x)\rangle = x$）。如果这样做，就会立即推出 Shuffle $\leq_{\mathrm{W}}$ ((LPO′) $\times$ 图灵跳跃$_{\mathbb{N}}$)$^{2^n-1}$。

因此，现在只需证明该断言。根据 IsFinite$(p_i) = 1$这一事实，我们知道，构造的第二种情况只会被触发有限次。因此，e_i 不会枚举出 $\mathbb{N}$的全部元素，所以$I_{\pi_2(\sigma(i))}$ 是一个只包含C_i中颜色的区间。此外，根据 $|C_i|$的极小性，我们知道$I_{\pi_2(\sigma(i))}$ 的任何子区间都不包含更少的颜色，这就证明了$I_{\pi_2(\sigma(i))}$ 是一个 c-shuffle。◀

综合以上结果，我们得到如下结论。

▶ **定理 36。** Shuffle $\equiv_{\mathrm{W}}$ 图灵跳跃$^*_{\mathbb{N}}$ $\times$ (LPO′) *

3.4（η）$^{1}_{<\infty}$-问题

文献 [12] 以名称（η）$^{1}_{<\infty}$研究了洗牌原理的一个弱化版本。原理（η）$^{1}_{<\infty}$ 断言，对于 $\mathbb{Q}$ 的任意有限多颜色着色，某种颜色会在某处稠密。我们在此将其形式化如下：

▶ 定义 *37.* 原理（η）$^{1}_{<\infty}$ 以一对（k，α）作为输入，其中 $k \in \mathbb{N}$ 且 $\alpha : \mathbb{Q} \to k$是一种着色，并返回一个区间 I 和一种颜色 $n < k$，使得 $\alpha^{-1}(n)$ 在I中稠密。原理 i（η）$^{1}_{<\infty}$ 仅返回区间 I，而 c（η）$^{1}_{<\infty}$ 仅返回稠密颜色 n。令（c（η）$^{1}_{<\infty}$）$_k$ 表示 c（η）$^{1}_{<\infty}$ 在 k-着色上的限制。

需要注意上述定义的一个重要方面：我们要求在（η）$^{1}_{<\infty}$的实例中声明所用颜色数量的一个上界。第 6 节将讨论颜色数量未知、但只保证有限时会发生什么。

尽管（η）$^{1}_{<\infty}$ 也体现了这样一种模式：即使知道稠密颜色，我们也无法据此计算出合适的区间，反之亦然，但我们将看到，就 Weihrauch 度而言，求出区间与同时求出区间和颜色一样困难。不过，我们的证明并未保持颜色数量不变——这是否能够避免仍有待探讨。

▶ **命题 38.** $(\eta)^{1}_{<\infty} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{i}(\eta)^{1}_{<\infty} \equiv_{\mathrm{W}}$图灵跳跃$^{*}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{iShuffle}$

证明。 考虑到定理 33，我们只需证明 $(\eta)^{1}_{<\infty} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{iShuffle}$，并且 $\mathsf{ECT} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{i}(\eta)^{1}_{<\infty}$。对于$(\eta)^{1}_{<\infty} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{iShuffle}$，我们注意到，一个作为 Shuffle 的区间不仅包含一种稠密颜色，而且其中出现的每种颜色都是稠密的。因此，我们返回在同一着色下通过$\mathsf{iShuffle}$ 得到的区间，以及我们在该区间中发现的第一种颜色。

剩下要证明 $\mathsf{ECT} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{i}(\eta)^{1}_{<\infty}$。给定 $\mathbb{N}$ 的一个 k-着色 c，我们将计算 $\mathbb{Q}$ 的一个 2^k-着色 α。我们将这个 2^k-着色视为按 k 的子集进行的着色，也就是说，为每个有理数分配一组原始颜色。为了确定第 n 个有理数 q_n 是否应被分配颜色 $j < k$，我们考虑此前在 c 中出现颜色 j 的次数 $m_{n,j} = |\{s \mid s \leq n \wedge c(s) = j\}|$。如果 $q_n \cdot 2^{m_{n,j}}$ 的整数部分是奇数，就将颜色 j 分配给 q_n；否则不分配。

如果 j 在 c 中只出现有限次，那么 $m_{n,\,j}$ 最终会保持不变，而 j 在 α 中的分布将遵循宽度为 $2^{-m_{n,\,j}}$ 的交替区间模式（只有有限个例外）。这确保了对于 α，2^k 种颜色中没有任何一种能在宽度大于 $2^{-m_{n,\,j}}$ 的区间上稠密。随后我们发现，由 $\mathsf{i}(\eta)^{1}_{<\infty}$ 返回的含有稠密颜色的区间宽度，可作为返回给 ECT 的合适界。◀

▶**问题 39.** 对于 k-着色，限制 $((\eta)^{1}_{<\infty})_k$ 和 $(\mathsf{i}(\eta)^{1}_{<\infty})_k$ 与 图灵跳跃$^{\ell}_{\mathbb{N}}$ 相比如何？

上述命题意味着 $\mathsf{c}(\eta)^{1}_{<\infty}$ 必须弱于 $(\mathrm{LPO}')^{*}$，因为显然它可由两者计算得出：$(\eta)^{1}_{<\infty}$ 和 cShuffle。现在我们进一步给出其强度的界。

▶ **引理 40**。$(\mathsf{c}(\eta)^{1}_{<\infty})_{k+1} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^{1}_{k+1} \times (\mathsf{c}(\eta)^{1}_{<\infty})_k$

证明。 固定一个枚举 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$，枚举所有有理区间。正向归约见证的构造如下。我们跟踪一个区间索引 n 和一种颜色 c，初始值为 $n = 0$ 和 $c = 0$。我们不断将 c 当前值写入cRT^{1}_{k+1}的输入，并通过缩放着色 β来构造一种着色：$\mathbb{Q} \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$，$\alpha$

限制在 I_n 直至 $\mathbb{Q}$，同时排除 c，并从每种颜色 $d > c$中减去 1。此前我们可能已经以不同方式为有限多个点指定了 β-种颜色，这一点无关紧要。

如果我们找到了一个有理数 $q \in I_n$ 满足 $\alpha(q) = c < k$，就将 c 加一。如果找到了 $q \in I_n$满足 $\alpha(q) = c = k$，就设置 $c = 0$ 并将 n 加一。特别地，我们会一直采用任意一个特定的I_n，直到在其中找到所有不同颜色的点。

反向归约见证接收两种颜色，$c \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 和 $d \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$。如果 $d < c$，它返回 d。如果 $d \geq c$，它返回 $d+1$。

要确认该归约正确运作，先考虑每种颜色处处稠密的情形。在这种情况下，任何结果都是正确答案，因此归约显然正确。否则，必定存在某个区间 I_n 和某种颜色 c，使得 $\alpha^{-1}(c) \cap I_n = \emptyset$。在这种情况下，我们对 n 和 c 的更新最终会稳定在这样一对值上。我们从 cRT^1_{k+1} 得到的答案是 c。除了有限多个点之外，β 看起来会像是将 c 跳过后，把 α 限制到 I_n 上的结果。因此，对于 β，凡是在某处稠密的颜色 d，在 α下也会在 I_n 内某处稠密——如果 $d < c$；如果 $d \geq c$，那么 $d+1$ 将是稠密的。因此，该归约有效。◀

▶ **推论 41**。

$$\begin{aligned}(\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty})_k &\leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_k \times \mathsf{cRT}^1_{k-1} \times \ldots \times \mathsf{cRT}^1_2 \\ &\leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{cRT}^1_2)^{k-1} \times (\mathsf{cRT}^1_2)^{k-2} \times \ldots (\mathsf{cRT})^1_2 \\ &\equiv_{\mathrm{W}} (\mathsf{cRT}^1_2)^{k(k-1)/2}\end{aligned}$$

这些界使我们能够借助对 cRT_m 的 k-有限部分的考察，刻画 $(\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty})_k$ 的强度。

▶ **推论 42**。$(\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty})_k \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_k$，因此$\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_+$。

证明。推论 41 告诉我们，对于某个 $m \geq k$，有 $(\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty})_k \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_m$。由于 $(\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty})_k$ 的陪域为 k，这已经足以根据推论15得出 $(\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty})_k \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_m$。接下来我们证明 $\mathsf{cRT}^1_k \leq_{\mathrm{W}} (\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty})_k$。固定一个可计算双射 $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$。给定一个着色 $f\colon \mathbb{N} \to k$ 作为 cRT^1_k 的输入，我们通过 $\alpha_f(q) = f(\nu^{-1}(q))$ 定义颜色 $\alpha_f\colon \mathbb{Q} \to k$。显然，在 α_f 中某处稠密出现的任何颜色，都必定在 f 中出现过无穷多次。◀

我们的结果 $\mathsf{c}(\eta)^1_{<\infty} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_+$ 与 [12] 中得到的逆向数学结果形成对比。在逆向数学中，$\mathsf{RT}^1_{\mathbb{N}}$ 等价于 $\mathsf{B}\Sigma^0_2$ [16]，然而 [12, 定理 3.5] 表明，在 RCA_0 上，$\mathsf{B}\Sigma^0_2$ 并不蕴含 $(\eta)^1_{<\infty}$。

4 $\mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$ 及相关问题

现在我们分析原理 $\mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$ 的逻辑强度。与 Shuffle 的情形一样，我们先在 $\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^0_2$-IND 中证明 $\mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$。这将使我们充分了解情况，以便评估相应 Weihrauch问题 的强度。

4.1 逆向数学中的 $\mathbb{Q}$ 加法 Ramsey

作为初步步骤，我们先确定 $\mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$（关于$\mathbb{Q}$的有序 Ramsey 定理）的强度。它很容易从 RCA_0 证明出来，因此远弱于我们分析的其他大多数原理。我们可以通过考察 RCA^*_0 来进行更精确的分析；它基本上是将 RCA^*_0 弱化

而来，其中归纳仅限于 Δ^0_1 公式（关于正式定义，参见 [23, 定义 X.4.1] ）。

▶ **引理43**。 $\mathsf{RCA}_0 \vdash \mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$。此外，若将“有限偏序集 P”替换为“有界偏序集 P”，$\mathsf{RCA}^*_0 \vdash \mathsf{RCA}_0 \Rightarrow \mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$

证明。我们先证明 $\mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$ 在 RCA_0 中成立。设 $c : [\mathbb{Q}]^2 \to P$ 是一个有序的着色，其中 $(P, \prec_P)$ 是一个有限偏序集。那么，RCA_0 证明存在一个 $\prec_P$-极小的 $p \in P$，使得对于某个 $\mathbb{Q}$ 中的 $x' < y'$ ， $c(x', y') = p$ （例如，这可由有界 Σ^0_1概括公理推出：考虑集合 $\{q \in P : \exists x', y' (c(x', y') = q\}$，并取该集合中的任意一个 $\prec_P$-极小元素）。然而，无论我们如何取满足 $x' \leq x < y \leq y'$ 的 $x < y$ ，根据 p 的 $\prec_P$-极小性以及 c 的有序性，都有 $c(x, y) = p$。由此可知， $]x', y'[$ 是c-齐次的（对 $[x', y']$ 也是如此），正如我们所需。

现在我们转而证明第二个断言。需要指出的是，这个断言与本文后续内容无关，加入它只是为了完整性。还需要指出，使用“有界偏序集”而非“有限偏序集”，是因为在 RCA^*_0 中“有限”一词并没有明确定义（有关此问题的更多讨论，请参见例如 [11] ）：这并不意味着对于其他“有限性”概念，结果就不成立；我们只是选择了文献中似乎最为标准的概念。

假设 $\varphi(i)$ 是一个 Σ^0_1 公式，使得 $\forall i, j((\varphi(j) \wedge i < j) \to \varphi(i))$，并且 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\forall i(\varphi(i) \to i < n)$。我们断言存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall i(\varphi(i) \leftrightarrow i < m)$。由 [24], 的引理 2.5 可得 $\mathsf{RCA}^*_0 \vdash \mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \Sigma^0_1$-归纳。

假设 $\varphi(i)$ 是 $\exists k \theta(i, k)$，其中 θ a 是一个公式。我们将有理数对的着色 $c(x, y)$ 定义如下。对于 $x \neq y$，令 $h(x, y)$ 为满足 $|x - y| < 2^{-h}$ 的最大整数 h。对于有理数 $x < y$，令 $c(x, y)$ 为满足 $\forall k < h(x, y) \neg\theta(k, i)$ 的最小 $i \leq n$。考虑偏序集 $([0, n], \geq)$ ：于是， $c : [\mathbb{Q}]^2 \to [0, n]$ 是有序的，因为 $x' \leq x < y \leq y'$ 蕴含 $h(x, y) \geq h(x', y')$，因此，满足 $\forall k < h(x, y) \neg\theta(k, i)$ 的最小 $i \leq n$ 不可能比满足 $\forall k < h(x', y') \neg\theta(k, i)$ 的最小 $i \leq n$ 小 $\leq_{\mathbb{N}}$。

根据 $\mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$，存在一个 c-齐次区间 $]x', y'[$。令 m 为使得 $]x', y'[$齐次的颜色。很容易看出，这个 m 就是我们要找的界。◀

现在我们证明洗牌原理等价于 $\mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$。因此，总体而言，与 [17], 的拉姆齐类定理类似，它们等价于 Σ^0_2-归纳。

▶ **引理44.** $\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{Shuffle} \vdash \mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$。因此，$\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^0_2\text{-IND} \vdash \mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$。

证明。 固定一个有限半群 $(S, \cdot)$ 以及一个加法着色 $c : [\mathbb{Q}]^2 \to S$。称颜色$s \in S$ 在 $X \subseteq \mathbb{Q}$ 中出现，如果存在 $(x, y) \in [X]^2$ 使得 $c(x, y) = s$。

我们分两个阶段进行：首先，找到一个区间 $]u, v[$ ，使得在 $]u, v[$ 中出现的所有颜色彼此 $\mathcal{J}$等价。然后，找到 $]u, v[$的一个子区间，将其划分为有限多个稠密齐次集。第一步，我们应用以下引理，得到 $\mathbb{Q}$ 的一个子区间 $I_1 =]u, v[$，其中所有颜色都属于同一个$\mathcal{J}$-类。

▶ **引理45.** 对于每个加法着色 c，都存在 $(u, v) \in [\mathbb{Q}]^2$ ，使得 $c\big|_{]u,v[}$ 的所有颜色彼此 J 等价。

证明. 如果我们将 c 与一个映射复合，该映射将半群元素映到其 $\mathcal{J}$-类，就得到一种有序染色。应用 $\mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$ 即可得到一个合适的区间。◀

接下来进入证明的第二阶段，我们要寻找 I_1 的一个子区间，将其划分为有限个稠密齐次集。为此，定义一个着色 $\gamma : I_1 \to S^2$ ，令 $\gamma(z) = (c(u, z)\ c(z, v))$。

根据 Shuffle，存在 $x, y \in I_1$，满足 $x < y$，使得 $]x, y[$ 是一个 γ-Shuffle。对于 $l, r \in S$，定义 $H_{l,r} := \gamma^{-1}(\{(l, r)\}) \cap]x, y[$；注意，根据有界递归理解，这确实是一个集合。显然，所有 $H_{l,r}$ 要么为空，要么在 $]x, y[$ 中稠密；此外 $]x, y[= \bigcup_{l,r} H_{l,r}$。由于只有有限多个有序对 (l, r)，我们只需证明每个非空的 $H_{l,r}$ 对于 c 都是齐次的。

设 $s = c(w, z)$，使得 $w, z \in H_{l,r}$ 且 $w < z$。由 c 的可加性以及 $H_{l,r}$ 的定义，

$$s \cdot r = c(w, z) \cdot c(z, v) = c(w, v) = r. \tag{1}$$

特别地，$r \leq_{\mathcal{R}} s$。但我们还有 $r \mathcal{J} s$，由引理 20 可得 $r \mathcal{R} s$。这说明 $H_{l,r}$ 中出现的所有颜色彼此 $\mathcal{R}$ 等价。对偶论证表明，它们也都彼此 $\mathcal{L}$ 等价，因此它们都彼此 $\mathcal{H}$ 等价。引理 19 的假设均已满足，因此它们的 $\mathcal{H}$ 等价类实际上是一个群。

剩下要证明的是，$H_{l,r}$ 中出现的任意颜色 s，实际上都是这个 $\mathcal{H}$ 等价类中（必然唯一的）幂等元。由于 $r \mathcal{R} s$，存在 a 使得 $s = r \cdot a$。但由 (1) 可得，$s \cdot s = s \cdot r \cdot a = r \cdot a = s$，因此 s 必然是幂等元。于是，所有集合 $H_{l,r}$ 都是齐次的，证毕。◀

我们通过证明上述引理中的蕴含关系也能反向成立，来结束本节，从而确定 $\mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$ 在 RCA_0 之上的精确强度。

▶ **定理 46.** $\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{ART}_{\mathbb{Q}} \vdash \mathsf{Shuffle}$。因此，$\mathsf{RCA}_0 \vdash \mathsf{ART}_{\mathbb{Q}} \leftrightarrow \Sigma^0_2\text{-IND}$。

证明。设 $f : \mathbb{Q} \to n$ 是有理数的一个着色。令 $(S_n, \cdot)$ 为由 $S_n = n$ 和 $a \cdot b = a$ 对每个 $a, b \in S_n$ 定义的有限半群。定义着色 $c : [\mathbb{Q}]^2 \to S_n$，令对每个 $x, y \in \mathbb{Q}$，$c(x, y) = f(x)$。由于对每个 $x < y < z$，c，都有 $(x, z) = f(x) = c(x, y) \cdot c(y, z)$，因此 c 是加法的。根据加法 Ramsey，存在 $]u, v[$，它是 c-稠密齐色的，因此是一个 f-Shuffle。◀

4.2 加法 Ramsey 的 Weihrauch 复杂度

现在，我们开始在 Weihrauch 可约性的背景下分析 $\mathsf{ART}_{\mathbb{Q}}$。我们将主要总结已有结果，并借助迄今建立的直觉。首先，我们确定自然数集 $\mathbb{Q}$ 上有序 Ramsey 定理的 Weihrauch 度。

▶ **定理 47。** 令 $\mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$ 表示这样一个问题：其实例是有序着色 $c : [\mathbb{Q}]^2 \to P$，其中底集是某个有限偏序集 $(P, \prec)$；对于输入 c，可能的输出是使 c 保持常值的区间。我们有 $\mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{LPO}^*$。

证明。 $\mathsf{LPO}^* \leq_{\mathrm{sW}} \mathsf{ORT}_{\mathbb{Q}}$：设 $\langle n, p_0, \dots, p_{n-1} \rangle$ 是 LPO^* 的一个实例。设 $(P, \prec)$ 是满足以下条件的偏序集：$P = 2^n$ 是 n 的子集组成的集合，且 $\prec = \supset$，即 $\prec$ 采用反向包含关系。

我们通过在各阶段作出决定来定义有序染色 $c : [\mathbb{Q}]^2 \to P$，在阶段 s，确定满足 $|x - y| > 2^{-s}$ 的所有点对 $(x, y) \in [\mathbb{Q}]^2$ 的颜色。

在阶段 0，我们对每个满足 $|x - y| > 1$ 的 $(x, y) \in [\mathbb{Q}]^2$，设定 $c(x, y) = \emptyset$。在阶段 $s > 0$，我们对每个 $i < n$（即，对每个 i，检查直到 $p_i(s-1)$ 的序列 p_i），并对每个满足 $2^{-s+1} \geq |x - y| > 2^{-s}$ 的 $(x, y) \in [\mathbb{Q}]^2$，令

$$c(x, y) = \{i < n : \exists t < s (p_i(t) = 1)\}.$$

显然，如上所定义的 c 是一种有序染色：若 $x \leq x' < y' \leq y'$，则 $|x' - y'| \leq |x - y|$，这意味着，要确定 (x', y') 的颜色，我们需要考察

p_is 的更长初始段。令 $I \in \mathrm{ORT}_{\mathbb{Q}}(P,\ c)$，并设 $\ell \in \mathbb{N}$ 为使 I 的长度大于 $2^{-\ell}$ 的最小值：由于 I 是 c-齐次的，我们知道，对每个 $i < n$，都有$\exists t(p_i(t) = 1) \Leftrightarrow \exists t < \ell(p_i(t) = 1)$。因此，对每一对点 $(x,\ y) \in [I]^2$，$c(x,\ y)$ 的颜色恰好是满足 $\mathrm{LPO}(p_i) = 1$ 的 i 的集合。

$\mathrm{ORT}_{\mathbb{Q}} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{LPO}^*$：设 (P, c) 是 $\mathrm{ORT}_{\mathbb{Q}}$ 的一个实例，其中有限偏序集为 $(P, \prec_P)$。设$<_L$ 是$\prec_P$的一个线性扩张，并注意到 $c\colon\ \mathbb{Q} \to (P, <_L)$ 仍是一个有序染色。令 $r_0 <_L r_1 <_L \cdots <_L r_{|P|-1}$为 P的元素。证明的思路是为 P的每个元素各设置一个 LPO 实例，并并行检查有理数的区间，看看它们是否对 P中相应的元素是 c-齐次的。无论如何，选择这些区间时必须谨慎：举例来说，如果我们发现某个区间 I 对$r_{|P|-1}$这个 $<_L$-极大元素不是 c-齐次的，因为我们发现了某个$x < y$，使得 $c(x, y) \neq r_{|P|-1}$，那么我们不仅通过让相应的 LPO 实例包含一个 1 来标记它，还会限制所有其他分量的搜索，使它们只查看包含于 $]x, y[$中的区间。对所有分量以类似方式进行处理后，由于 c 是有序的，我们确信最终会找到一个 c-齐次区间。

我们按阶段定义 LPO 的 $|P|$实例 $p_0, p_1, \ldots, p_{|P|-1}$如下。令 a_n为有理数集的有序对的一个枚举，即对 $[\mathbb{Q}]^2$的一个枚举，其中每项都重复无穷多次。在每个阶段 s，一些分量 i 将处于“活跃”状态，其余分量则处于“非活跃”状态：如果分量 i 处于非活跃状态，它就再也不会变为活跃状态。此外，在每个阶段 s，都有一个“当前有序对” a_{n_s} 和一个“当前区间” a_{m_s}（在本证明中，将有理数的有序对既视为有序对，又视为表示一个开区间的两个端点，会比较方便）。我们从阶段 0 开始，将当前有序对和当前区间都设为 a_0。此外，将每个分量都设为活跃状态。

在阶段 s，对于每个非活跃分量 $j < |P|$，我们令 $p_j(s) = 1$。对于每个活跃分量 i，有两种情况：

- 如果对于每个活跃分量 i, $c(a_{n_s}) \geq_L r_i$ 都成立，那么我们就寻找最小的 $\ell > n_s$，使得 $a_\ell \subseteq a_{m_s}$（也就是说，我们寻找一对包含在当前区间中的点），并设定 $a_{n_{s+1}} = a_\ell$，以及 $a_{m_{s+1}} = a_{m_s}$。我们设定 $p_i(s) = 0$，且不将任何分量设为非活跃。然后进入阶段 $s + 1$。
- 反之，假设存在一个活跃分量 i，使得 $c(a_{n_s}) <_L r_i$：令 i 为满足条件的最小 i，然后将每个 $j \geq i$ 设为非活跃（原本已是非活跃的仍保持如此），并令 $p_j(s) = 1$。接着令 $a_{m_{s+1}} = a_{n_s}$，并寻找满足 $a_\ell \subset a_{n_s}$ 的最小 $\ell > n_s$：设定 $a_{n_{s+1}} = a_\ell$，并对每个活跃分量 $k < |P|$ 设定 $p_k(s) = 0$。然后进入阶段 $s + 1$。

我们对每个整数 s 重复上述过程。

设 $\sigma \in 2^{|P|}$ 满足 $\sigma \in \mathrm{LPO}^*(\langle |P|,\ p_0,\ \ldots\ldots,\ p_{|P|-1}\rangle)$。注意，$\sigma(0) = 0$，因为没有一对点能达到颜色 $<_L$-below r_0。此外，注意到 $\sigma(i) = 0$ 当且仅当分量 i 从未被设为非活跃。因此，令 i 为满足 $\sigma(i) = 0$ 的最大值，并令 t 为这样一个状态：截至步骤 t，所有分量 $j > i$ 都已被设为非活跃。因此，在步骤 t 之后，当前区间 I 不再变化，于是我们最终会检查该区间中所有点对的颜色。由于构造的第二种情况从未触发，因此 I 是一个 c-齐次区间。因此，为了找到它，我们只需重复上述构造，直到所有索引大于 i 的分量都被设为非活跃。这证明 $\mathrm{ORT}_{\mathbb{Q}} \leq_{\mathrm{W}} \mathrm{LPO}^*$。◀

现在我们来讨论与 $\mathrm{ART}_{\mathbb{Q}}$ 对应的魏劳赫问题。

▶**定义 48**。将ART$_{\mathbb{Q}}$ 视为以下 *Weihrauch*问题：实例是形如(S, c) 的有序对，其中 S 是一个有限半群，且 c： $[\mathbb{Q}]^2 \to S$ 是 $[\mathbb{Q}]^2$ 的加法着色，并且对于 $\mathbb{Q}$ 的每个 $C \subseteq S$ 及每个区间 I，$(I, C) \in$ ART$_{\mathbb{Q}}$ 当且仅当 I 对 C 的颜色是 c-稠密齐次的。

与定义 *25* 中的做法类似，我们还引入问题 cART$_{\mathbb{Q}}$ 和 iART$_{\mathbb{Q}}$，它们分别只返回颜色集合和区间。

我们首先注意到，定理 46 的证明可以直接改编，从而证明以下结果。

▶ **引理49**。 cShuffle $\leq_{\mathrm{sW}}$ cART$_{\mathbb{Q}}$，因此 (LPO′)* $\leq_{\mathrm{W}}$ cART$_{\mathbb{Q}}$。 iShuffle $\leq_{\mathrm{sW}}$ iART$_{\mathbb{Q}}$，因此 图灵跳跃$^*_{\mathbb{N}}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ iART$_{\mathbb{Q}}$。Shuffle $\leq_{\mathrm{sW}}$ ART$_{\mathbb{Q}}$，因此 (LPO′)* ×图灵跳跃$^*_{\mathbb{N}}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ ART$_{\mathbb{Q}}$。

本节其余部分旨在为 cART$_{\mathbb{Q}}$、iART$_{\mathbb{Q}}$ 和 ART$_{\mathbb{Q}}$寻找上界。首先要做的是仔细分析引理 44的证明。对于一个加法着色c： $[\mathbb{Q}]^2 \to S$，证明可概括如下：

- 我们首先应用 ORT$_{\mathbb{Q}}$，找出一个区间 $]u, v[$，使得 $c|_{]u,v[}$ 的所有颜色都彼此 J-等价（引理45）。定义着色 γ: $\mathbb{Q} \to S^2$，并将 Shuffle 应用于该着色，从而得到区间 $]x, y[$。证明的其余部分只需说明 $]x, y[$ 是一个 c-稠密齐次区间。

因此，从一致性视角来看，这表明 ART$_{\mathbb{Q}}$ 可以通过 Shuffle 和 ORT$_{\mathbb{Q}}$ 的复合来计算。由此得到下一个定理。

▶ 定理50. cART$_{\mathbb{Q}}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ (LPO′)* ×LPO*，因此 cART$_{\mathbb{Q}}$ $\equiv_{\mathrm{W}}$ (LPO′)*。iART$_{\mathbb{Q}}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ TC$^*_{\mathbb{N}}$ ×LPO*，因此 iART$_{\mathbb{Q}}$ $\equiv_{\mathrm{W}}$ TC$^*_{\mathbb{N}}$。ART$_{\mathbb{Q}}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ (LPO′)* × TC$^*_{\mathbb{N}}$ × LPO*，因此 ART$_{\mathbb{Q}}$ $\equiv_{\mathrm{W}}$ (LPO′)* ×TC$^*_{\mathbb{N}}$。

证明。 这三个结果的证明方式相似。回顾一下，LPO* $\leq_{\mathrm{W}}$ C$_{\mathbb{N}}$并注意到LPO* 是单值的。因此，我们可以在引理16中用LPO* 代替P。

对于 x $\in$ {c，i，s} 以及任意 $n \in \mathbb{N}$，令 xART$_{\mathbb{Q},\, n}$ 为 xART$_{\mathbb{Q}}$ 在形如 (S，c) 且 S 的基数为 n 的实例上的限制。因此，根据论文正文中定理陈述之前的论述，我们有以下事实：

- cART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ cShuffle$_{n^2}$ ∗ORT$_{\mathbb{Q}}$，因此，根据引理 28 和定理 47，我们有 cART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ (LPO′)$^{2^{n^2}-1}$∗LPO*。根据引理16，我们有 cART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ (LPO′)$^{2^{n^2}-1}$×LPO*，由此可得结论。iART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ iShuffle$_{n^2}$ ∗ORT$_{\mathbb{Q}}$，因此，根据引理 31 和定理 47，我们有 iART$_{\mathbb{Q}}$, n $\leq_{\mathrm{W}}$ TC$^{n^2-1}_{\mathbb{N}}$ ∗LPO*。根据引理16，我们有 iART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ TC$^{n^2-1}_{\mathbb{N}}$ × LPO*，由此可得结论。ART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ Shuffle$_{n^2}$ ∗ORT$_{\mathbb{Q}}$，因此，根据引理 35 和引理16，我们有 ART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$ (LPO′ ×TC$_{\mathbb{N}}$)$^{2^{n^2}-1}$ ∗ LPO*。根据引理16，我们有 ART$_{\mathbb{Q},n}$ $\leq_{\mathrm{W}}$(LPO′ ×TC$_{\mathbb{N}}$)$^{2^{n^2}-1}$ ×LPO*，由此可得结论。

◀

5 $\mathrm{ART}_{\mathbb{N}}$ 和$\mathrm{ORT}_{\mathbb{N}}$

最后，我们讨论自然数集上的加法定理和有序定理这一情形，并证明定理 3。对于加法拉姆齐定理，我们得到的结果与自然数集上的情形完全类似。然而，与定理 47 不同，自然数集上的有序 Ramsey 定理表现出与加法拉姆齐定理相同的性质。

$\mathrm{ORT}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathrm{ART}_{\mathbb{N}}$ 这两个原理等价于 Σ^0_2-归纳，这一点已在 [17], 中确立，因此下面我们只关注 Weihrauch 度的分析。我们首先准确定义所涉及的原理，然后证明 $\mathrm{TC}^*_{\mathbb{N}}$、$(\mathrm{LPO}')^*$ 或它们的乘积可归约到这些原理。接着我们给出反向归约，先讨论与有序着色相关的原理，再处理加法着色。有序着色的证明是对 [17, 引理 4.3]的简单扩展。对于加法着色，严格来说，该论文中的对应陈述 [17, 命题 4.1], 依赖于有序版本，而在 Weihrauch 度的框架下，这相当于复合。事实证明，我们可以通过在分析中谨慎地交错这两个步骤，避免调用复合。

5.1 定义

我们已在第 2 节介绍了原理 $\mathrm{ORT}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathrm{ART}_{\mathbb{N}}$。相应的 Weihrauch问题相对清晰：输入一个着色以及有限半群或有限有序结构，输出一个无限齐次集。原理 $\mathrm{cORT}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathrm{cART}_{\mathbb{N}}$ 则只输出无限齐次集可能具有的一种颜色——这与 $\mathbb{Q}$ 的情形颇为相似。然而，原理 $\mathrm{iORT}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathrm{iART}_{\mathbb{N}}$ 还需要多加关注；此时要求一个包含该集合的区间相当没有意义。尽管如此，类似的原理也会输出一些关于齐次集可能位置的信息，而不直接给出整个集合或一个候选颜色，因此我们沿用类似的命名惯例。

▶**定义 51**。定义以下魏劳赫问题：

- $\mathit{ORT}_{\mathbb{N}}$ 的输入是一个有限偏序集 $(P, \preceq_P)$ 和一个右有序着色 $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to P$，输出一个无限 c-齐次集 $\subseteq \mathbb{N}$。$\mathit{ART}_{\mathbb{N}}$ 的输入是一个有限半群 S 和一个加法着色 $c : [\mathbb{N}]^2 \to S$，输出一个无限 c-齐次集 $\subseteq \mathbb{N}$。$\mathit{cORT}_{\mathbb{N}}$ 的输入是一个有限偏序集 $(P, \preceq_P)$ 和一个右有序着色 $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to P$，输出一种颜色 $p \in P$，使得存在一个颜色为 p 的无限 c-齐次集 $\subseteq \mathbb{N}$。$\mathit{cART}_{\mathbb{N}}$ 的输入是一个有限半群 S 和一个加法着色 $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to S$，输出一种颜色 $s \in S$，使得存在一个颜色为 s 的无限 c-齐次集 $\subseteq \mathbb{N}$。$\mathit{iORT}_{\mathbb{N}}$ 的输入是一个有限偏序集 $(P, \preceq_P)$ 和一个右有序着色 $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to P$，输出一个 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得存在一个含有两个元素 $\leq n_0$ 的无限 c-齐次集 $X \subseteq \mathbb{N}$。$\mathit{iART}_{\mathbb{N}}$ 的输入是一个有限半群 S 和一个加法着色 $c : [\mathbb{N}]^2 \to S$，输出一个 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得存在一个含有两个元素 $\leq n_0$ 的无限 c-齐次集 $X \subseteq \mathbb{N}$。
-

5.2 逆转

▶ **引理 52.** 我们有 $\mathrm{ECT} \leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{iORT}_{\mathbb{N}}$ 和 $\mathrm{ECT} \leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{iART}_{\mathbb{N}}$。

证明。令 $f\colon \mathbb{N} \to k$ 为一个 ECT 的待定实例。接着可以通过如下方式定义着色$\tilde{f}\colon [\mathbb{N}]^2 \to \mathrm{P}(k)$：当且仅当存在 n'，使得 $a \in \tilde{f}(n,m)$、 $n \leq n' \leq m$ 和$f(n') = a$时，取相应的颜色。此着色对于半群 $(\mathrm{P}(k), \cup)$ 是可加的，并且由$\subseteq$给出有序结构；它可以用于 $\mathrm{iORT}_{\mathbb{N}}$ 或 $\mathrm{iART}_{\mathbb{N}}$。令 n_0 满足：存在一个无限的 f-齐次集，其前两个元素为 $k_0 < k_1 \leq n_0$。显然，在 $\tilde{f}$中位于 n_0之后出现的每种颜色，都必须出现在 $f(k_0, k_1)$中；因此， n_0 是给定 ECT 实例的一个解。◀

▶ **引理 53.** $\mathrm{cORT}^*_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{cORT}_{\mathbb{N}}$ 与 $\mathrm{cART}^*_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathrm{cART}_{\mathbb{N}}$

证明。 非平凡的归约可以通过对有限个着色序列取逐点乘积而轻松构造；所得结果仍然具有加法或有序结构。◀

▶ **引理 54.** $\mathrm{LPO}' \leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{cORT}_{\mathbb{N}}$ 与 $\mathrm{LPO}' \leq_{\mathrm{sW}} \mathrm{cART}_{\mathbb{N}}$。

证明。我们用 IsFinite 代替 LPO′。首先输入 $f\colon \mathbb{N} \to 2$，用于 IsFinite。我们计算 $\tilde{f}\colon [\mathbb{N}]^2 \to 2$，其中 $\tilde{f}(n,m) = 1$ 当且仅当 $1 \in f^{-1}([n,m])$。这产生了一种加法且~有序的染色。任意给定的 f-齐次集的颜色表明 f 是否有无限多个 1，从而为 f回答 IsFinite。◀

5.3 将自然数集上的有序 Ramsey 定理归约到$(\mathsf{LPO}')^*$ 和E CT

现在我们说明如何界定 $\mathrm{ORT}_{\mathbb{N}}$ 及其弱化形式的 Weihrauch 度。为此，考虑一种构造，它针对给定的右有序着色 $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to P$和目标颜色 $p \in P$，近似构造可能的齐次集，这将很有帮助。利用这些参数，我们构造一个由有限集组成的递归序列 $Y^{(p)}\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$，旨在近似一个 p齐次集（当 p 可由上下文推知时，我们将简单地用 Y 代替 $Y^{(p)}$）。如果构造成功，$\limsup(Y)$将是颜色为 p的无限齐次集；否则，$\limsup(Y)$将是有限的。不过，重要的是，固定次数地调用 $(\mathrm{LPO}')^*$ 即可让我们知道构造是否成功；而 ECT 可以指出构造成功时，从哪个指标 n 开始， $Y_n \subseteq \limsup(Y)$将成立。

现在，我们来描述针对固定的 c 和 p 的这一构造。我们从 $Y_0 = \emptyset$ 开始，并将保持以下不变量：$\max(Y_n) < n$，且对于每个 $(k,\ k') \in [Y_n]^2$， $c(k,\ k') = p$。于是，对于 Y_{n+1}，我们有几种可能；

- 如果 $\min(Y_n)$ 存在，且对于任意 $\min(Y_n) \leq k < n$，都有 $p \prec_P c(k,\ n)$，那么我们令$Y_{n+1} = \emptyset$，并称该构造在阶段 n 受到损伤。否则，如果存在某个 $k' < n$ 使得 $c(k',\ n) = p$，并且对于每个 $k \in Y_n$， $k < k'$ 且 $c(k,\ k') = p$，那么我们令 $Y_{n+1} = Y_n \cup \{k\}$，并称该构造在阶段 n取得了进展。否则，令 $Y_{n+1} = Y_n$，并称该构造停滞。

显然，我们还可以定义递归序列 $\mathrm{injury}^{(p)}\colon \mathbb{N} \to 2$ 和 $\mathrm{progress}^{(p)}\colon \mathbb{N} \to 2$，用以表明构造是否受到伤害或取得进展；并且 $\limsup(Y)$ 是无限的，当且仅当 injury 中只有有限个 1，而 progress 中有无限多个 1。此外，$\limsup(Y)$ 总是 c-齐次的，且颜色为 p。

▶ **引理 55。** 对于任意有序染色 c，都存在 p，使得 $\mathrm{limsup}(Y)$ 是无限的

证明。 合适的 p 可按如下方式找到：设颜色 p 在 n 中 c 出现在 $k > m \geq n$ 之后，若存在 $c(m,k) = p$。存在一个 n_0，使得每个在 n_0 中 c出现在 $\preceq_P$之后的极大颜色都会任意远地出现。对于在 n_0之后出现的、按 n_0 -极大的这种颜色，上述构造将在阶段之后不再受到干扰，并有无穷多个取得进展的步骤（这与 [17, 引理 43]的论证完全相同）。◀

▶ **引理 56**。 我们有cORT$_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{sW}}$(LPO′)*。

证明。 给定一个输入着色 c，并行计算所有伤害$^{(p)}$ 和进展$^{(p)}$，对每种颜色 p，并将每个序列输入到一个 LPO′实例中。根据引理 55，必定存在某个 p，使得伤害次数有限而取得进展的步骤有无限多个，并且该 p 就是某个齐次集的颜色。◀

▶ **引理 57**。 我们有 ORT$_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}}$ (LPO′)* ×ECT。

证明。 给定一个输入着色 c，对每种颜色 p 并行计算所有伤害$^{(p)}$ 和进展$^{(p)}$，并将每个序列输入到一个 LPO′ 实例中，并将所有伤害$^{(p)}$ 输入 ECT。和之前一样，使用 LPO′ 找出某个 p，使得构造成功。对于该 p，ECT 将输出某个 $\bigcup_{n\geq n_0} Y_n{}^p$ n_0 $=$ ◀，使得对每个 $n \geq n_0$，伤害$_n^{(p)} = 0$ 都成立，因此特别地，lim sup$(Y_{(p)})$ $()$，它可由 . 计算得到。

▶ **引理 58.** 我们有 iORT$_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{sW}}$ECT。

证明. 给定一个输入着色 c，对于每种颜色 p，考虑序列 $u^{(p)}$: $\mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ 其定义为 $u_n^{(p)} = \min(3, |Y_n|)$。显然，它可由 c计算得到。应用 ECT 可得某个 n_p 使得

- 在 n_p 之后存在无穷多个损伤
- or $u_k^{(p)} = u_{n_p}^{(p)}$ 对于每个 $k \geq n$

p根据引理 6，一次 ECT 实例就能提供有限多个颜色所需的有限多个答案。

根据引理 55，我们甚至知道存在一个 p_0，使得 lim sup$(Y_{(p_0)})$ 是无穷大的；此外，我们以这样的方式定义了 u，从而必然有 n_{p_0} 界定 lim sup$(Y_{(p_0)})$ 中的两个元素，因为对于每个 $k \geq n_{p_0}$，我们都有 $u^{(p_0)}{}_k = 2$。因此，我们只需取所有 n_p 的最大值，就能解决我们的 iORT 实例$_{\mathbb{N}}$。◀

我们的有序 Ramsey 定理分析到此结束。

5.4 将自然数集上的加法拉姆齐定理约化为（LPO′）* 和 ECT

现在我们转向 ART$_{\mathbb{N}}$。基本思想是，给定一个加法着色 c，定义复合着色 $L \circ c$是有用的，其中 L 是从有限半群映射到其$\mathcal{L}$类的映射。 $\leq_{\mathcal{R}}$ 随后在该着色上诱导出一个右序结构。构造一个 $L \circ c$齐次集 X，并且还满足：对于每个x, $y \in X \setminus \{\min X\}$，都有 $c(\min X, x) = c(\min X, y)$，这就保证了根据引理 21， X 是 c- 齐次的。因此，我们将给出一种构造恰好满足这一条件的近似的方法，类似于上一节中的做法。

因此这一次，假设半群 S 和着色 $c : [\mathbb{N}]^2 \to S$ 固定。对于每个 $s \in S$，我们将定义一个集合的递归序列 $Y^{(s)}$: $\mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$（上下文明确时省略上标），使得 $\max(Y_n) < n$ 且 $Y_n \setminus \{\min(Y_n)\}$ 是齐次的；此外，如果 $Y_n \neq \emptyset$、 $c(\min(Y_n) k) = s$，则对 $k \in Y_n \setminus \{\min(Y_n)\}$ 成立。

- 对于 $n = 0$，我们定义 $Y_0 = \emptyset$。对于 Y_{n+1}，我们有几种选择：如果 Y_n 为空，并且存在 $k < n$ 使得 $c(k, n) = s$，且不存在满足 $c(k', n') <_{\mathcal{R}} s$的 $k \leq k' < n' \leq n$，那么令 $Y_{n+1} = \{k\}$，其中 k 取满足条件的最小值，并称构造（重新）开始。如果 Y_n 非空，且存在某个 k 使得 $\min(Y_n) \leq k < n$，并且 $c(k, n) <_{\mathcal{R}} s$，则令$Y_{n+1} = \emptyset$，并称构造在阶段 n受到干扰。

否则，如果 Y_n 非空，且有某个 $\min(Y_n) < k < n$，满足 $c(\min(Y_n), k) = s$，并且 $c(k, n) \mathcal{R} s$，则令 $Y_{n+1} = Y_n \cup \{k\}$，并称构造取得进展。否则，令 $Y_{n+1} = Y_n$，并称构造停滞。

我们可以定义辅助二进制序列 $\text{injury}^{(s)}$ 和 $\text{progress}^{(s)}$，用来见证相关事件；只要伤害只有有限次且进展无限，就能构造出一个无限齐次子集。

▶**引理 59.** 若伤害$^{(s)}$ 只有有限个 *1*，且进展$^{(s)}$ 有无限多个 *1*，那么$X =$ 上极限$(Y)|\{\min($上极限$(Y))\}$ 是一个 c-齐次无限集。此外，X 的颜色可由 s计算得到。

证明。条件足以保证 X 是无限集，这显而易见；剩下只需证明它是齐次的。注意，$\lim\sup(Y)$ 中的所有元素必然彼此 R 等价。记 $y_0 = \min(\lim\sup(Y))$。对于 $(l, m) \in [X]^2$，必然有 $s \leq_{\mathcal{L}} c(l, m)$。因此，根据引理 21，必然有 $c(l, m)$ H s。此外，我们知道它们属于一个作为群的 H-等价类，因此通过代数运算可得，$[X]^2$ 是单色的，且相应的颜色是该群的单位元。◀

▶**引理 60.** 存在某个 s，使得伤害$^{(s)}$ 中只有有限个 *1*，而进展$^{(s)}$ 中有无限多个 *1*。

证明. 考虑一个 n_0，与我们在引理 55 的证明中所做的类似，使得所有在 n_0 之后出现的$\mathcal{R}$-类都会在任意远处出现。考虑一个最小的此类$\mathcal{R}$-类 R。对于满足以下条件的最小k_0：在 k_0之后不存在严格低于 R 的$\mathcal{R}$-类，存在某个 s，使集合$\{n \mid c(k_0, n) = s\}$是无限的；但根据构造，该集合恰好是上极限$(Y_{(s)})\backslash\{k_0\}$。◀

有了这两个引理，我们便可以轻松地像上一小节那样进行类似分析。证明极为相似，因此这里不再展开，只总结结果。

▶**引理 61.** 我们有以下归约：$\text{ART}_{\mathbb{N}} \leq_{\text{W}} (\text{LPO}')$
$^*\times\text{ECT}\text{cART}_{\mathbb{N}} \leq_{\text{sW}} (\text{LPO}')^*\text{iART}_{\mathbb{N}} \leq_{\text{sW}} \text{ECT}$

5.5 总结：推导定理 3

现在让我们结合上述引理，证明定理 3 的各项内容：

- $\text{ORT}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{ART}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{TC}^*_{\mathbb{N}} \times(\text{LPO}')^*$：结合一个显而易见的观察（我们有 $\text{cART}_{\mathbb{N}} \times\text{iART}_{\mathbb{N}} \leq_{\text{W}} \text{ART}_{\mathbb{N}} \times\text{ART}_{\mathbb{N}}$）以及第 5.2 小节的所有引理，可得 $\text{TC}^*_{\mathbb{N}} \times\text{ECT} \leq_{\text{W}} \text{ART}_{\mathbb{N}}$，这便是所需等价关系的一半（回想一下，$\text{TC}^*_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{ECT}$（引理 6））。使这一关系提升为等式的逆转由引理 61 的第一项给出。$\text{TC}^*_{\mathbb{N}} \times(\text{LPO}')^*$ 与 $\text{ORT}_{\mathbb{N}}$ 之间的等价关系也可类似地证明，唯一的区别是逆转由引理 57 得出。$\text{cORT}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{cART}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} (\text{LPO}')^*$：$\text{cART}_{\mathbb{N}} \leq_{\text{W}} (\text{LPO}')^*$ 是引理 61 的结论，$\text{cORT}_{\mathbb{N}} \leq_{\text{W}} (\text{LPO}')^*$ 来自引理 56，而逆转由引理 54 给出。$\text{iORT}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{iART}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{TC}^*_{\mathbb{N}}$：同理，引理 61 和引理 52 证明了 $\text{iART}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{TC}^*_{\mathbb{N}}$，而 $\text{iORT}_{\mathbb{N}} \equiv_{\text{W}} \text{TC}^*_{\mathbb{N}}$ 之间的等价关系则由引理 58 和引理 52 证明。

6 颜色的编码方式

我们研究过的所有以某种着色作为输入的原理，也会接收有关颜色所构成的有限集／有限偏序集／有限半群的显式有限信息。这并非唯一可行的方法：对于单纯的颜色集，着色本身就包含了所用颜色数量的信息。对于颜色具有额外结构的情况，则可以通过该结构的原子图提供这些信息。这样一来，“只使用有限多个颜色”这一要求就仅仅成为一种承诺。

我们先用一个简单的例子来说明这两个版本之间的联系，即 cRT^1_+。我们将如下原理记作 $\mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}}$ ：它以一个着色$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为输入，其中 α 的值域是有限的，并输出某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\alpha^{-1}(n)$ 是无限的。

▶ **命题 62.** $\mathsf{cRT}^1_+ \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}}$

证明。我们不证明 $\mathsf{cRT}^1_+ \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}}$，而是证明 $\mathsf{cRT}^1_+ \star \mathsf{Bound} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}}$，其中 Bound 的输入是自然数集的一个有限初始段的枚举，输出则是其一个上界。下面说明如何根据 Bound 的输入 A 以及 cRT^1_+ 的部分输入序列 $(k_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$，构造 $\mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}}$ 的输入：我们寻找某个待定义的 k_{i_0}，然后开始复制 α_{i_0}，直到 i_0 被枚举进 A（如果这始终没有发生，那么 α_{i_0} 就是全函数，并成为 $\mathsf{cRT}^1_{\mathbb{N}}$ 的输入）。接着，我们寻找某个使 k_{i_1} 已定义的 $i_1 > i_0$，然后继续生成着色 $\alpha_{i_1} + k_0$；要么永远继续，要么直到 i_1 被枚举进 A。我们重复这一过程，直到达到某个永远不会被枚举进 A 的 i_ℓ（这种情况必定会发生）。

给定结果着色中一个无限次出现的颜色 c，我们可以回溯步骤并确定 i_ℓ 是什么。然后可以对 c 进行反向移位，从而得到一个在 α_{i_ℓ} 中无限次出现的颜色，进而求解 $\mathsf{cRT}^1_+ \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$。

对于反方向，我们注意到，$\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 可以根据一个有限值域着色 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，计算出某个 $k \in \mathbb{N}$，使得 α 是一个 k 着色。◀

同样的关系适用于我们所有的原理，即不提供颜色有限信息的版本，其 Weihrauch 度正好是通常版本与 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 的复合。核心思路与上面的命题相同：我们总能转而使用一个新的有限颜色集重新开始。对于区间版本，我们可能还需要多做一些工作来编码 $\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 的输出，确保所有“较大”的区间都不可能成为有效答案。作为第二个例子，我们来考察 $\mathsf{iShuffle}_{\mathbb{N}}$ 的变体：在这个版本中，颜色数量不属于输入的一部分。

▶ **命题 63.** $\mathsf{iShuffle} \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}} \equiv_{\mathrm{W}} \mathsf{iShuffle}_{\mathbb{N}}$

证明。再次，我们证明 $\mathsf{iShuffle} \star \mathsf{Bound} \leq_{\mathrm{W}} \mathsf{iShuffle}_{\mathbb{N}}$。我们将有限初始段 A 的枚举 $\mathbb{N}$ 作为 Bound 的输入，同时提供 iShuffle 的部分输入序列 $(k_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$。我们构造一个着色 $\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$，它只会用到有限种颜色。首先，我们寻找第一个能让我们得知 k_{i_0} 已定义的 i_0。我们开始将 α_i 复制到 α。如果 i_0 在阶段 t 被枚举进 A，我们就在 α 中将每个有理数 $\frac{k}{2^{-t}}$ 赋予颜色 0。我们寻找某个已定义的 $i_1 > i_0$，然后开始赋予 $\alpha(q) = \alpha_{i_1}(q) + k_{i_0}$。这一过程持续进行，直到 i_1 可能被枚举进 A，依此类推。

这个过程最终必定会停止，因为 A 是有限的。此外，最终的 i_ℓ 满足α_{i_ℓ} 是全函数。因此，我们构造出 $\mathsf{iShuffle}_{\mathbb{N}}$的一个有效输入。考察所得区间 I的长度，我们便可得到最后一次看到新

i_j 个数被枚举进 A 的时间A的上界——因为任何这样的区间都不可能包含形如 $\frac{k}{2^{-t_{\text{final}}}}$的有理数。一知道 t_{final} 的上界后，我们便能求得A的上界 k_{i_ℓ}。我们还知道，在区间 I上， α_{i_ℓ} 和 α 相差一个常数。因此， I也是 iShuffle(k_{i_ℓ}， α_{i_ℓ})的一个有效输出。

对于另一个方向，我们再次利用这样一个事实：$\mathsf{C}_{\mathbb{N}}$ 可以从有限值域的着色$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ 中计算出某个 $k \in \mathbb{N}$，使得 α 是一个 k-着色。◀

要看出这一观察已经完全刻画了通常原则与放宽原则之间的 Weihrauch 归约和不可归约情形，可以借助 [1, 18]中的（闭）分形概念。

▶ **定义 64.** 如果存在某个 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightrightarrows \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$满足 $f \equiv_{\mathrm{W}} F$，使得对于任意 $w \in \mathbb{N}^*$，要么 $w\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap \mathrm{dom}(F) = \emptyset$，要么 $F|_{w\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \equiv_{\mathrm{W}} f$，则称 ***Weihrauch*** 度 f 为一个分形。如果可以选择使 F 为全定义的，则称该 ***Weihrauch*** 度为一个闭分形。

如果 f 是一个分形且 $f \leq_{\mathrm{W}} \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} g_i$，那么必定存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $f \leq_{\mathrm{W}} g_n$。如果 f 是一个闭分形且 $f \leq_{\mathrm{W}} g \star \mathsf{C}_{\mathbb{N}}$，那么 $f \leq_{\mathrm{W}} g$已经成立。在我们的原则中，具有固定数量颜色的版本是闭分形；具有给定但不固定数量颜色的版本根本不是分形；而不包含显式颜色信息的版本是分形，但不是闭分形。由此可知，不包含显式颜色信息的版本永远不会与我们研究的原则 Weihrauch 等价；并且，不包含显式颜色信息的版本彼此等价，当且仅当它们对应的、包含显式颜色信息的版本等价。

7 结论与未来工作

总结 我们从逆向数学的角度分析了有理数集上的加性拉姆齐定理的强度，发现它等价于 Σ^0_2-归纳；随后，我们进一步将这一分析细化为与 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}} \times (\mathrm{LPO}')^*$ 的 Weihrauch 等价。我们还表明，该问题可以自然地分解：若只要求颜色集或齐次集的位置，分别得到不同的复杂度 $(\mathrm{LPO}')^*$ 和 $\mathsf{TC}^*_{\mathbb{N}}$。对于另一个同样重要、甚至可以说更为基础的洗牌原理，以及有理数集上的加法拉姆齐定理，情况也一样；后者此前已从逆向数学的角度在 [17]中得到研究。

展望 进一步研究其他已知在逆向数学中等价于 Σ^0_2-IND 的数学定理，将会很有意思：这有助于推进一项更广泛的研究工作，即在 Weihrauch 度的框架下考察已在逆向数学中分析过的原理。具体到 Σ^0_2-IND，探究此类分析需要哪些度也颇有意义。关于这一主题的更多内容，以及对 Weihrauch 度中的拉姆齐定理的更全面研究，请参见 [4]。

关于 Weihrauch 度中与 $(\eta)^1_{<\infty}$ 类似原理的两项近期研究见 [13] 和 [9]。前者研究的问题是：给定 $\mathbb{Q}$ 的着色，寻找作为线性序的 $\mathbb{Q}$ 的单色副本。后者研究的问题是：给定 $2^{<\omega}$ 的着色，寻找 $2^{<\omega}$ 的单色副本（将其视为带有“是……的前缀”谓词的结构）。不过，相应的 Weihrauch 度确实不同于本文探讨的那些。

致谢

第二作者诚挚感谢 Leszek Kołodziejczyk 提供引理 22 的证明，并感谢 Henryk Michalewski 和 Michał Skrzypczak 就一个相关项目进行了多次讨论 .

参考文献

1 Vasco Brattka、Matthew de Brecht 和 Arno Pauly。闭选择与一致低基定理。《纯粹与应用逻辑年刊》，163(8):968–1008，2012年。doi:10.1016/j.apal.2011.12.020。2 Vasco Brattka 和 Guido Gherardi。选择完备化。《纯粹与应用逻辑年刊》，172(3):102914，2021年。doi:10.1016/j.apal.2020.102914。3 Vasco Brattka、Guido Gherardi 和 Arno Pauly。《可计算分析中的 Weihrauch 复杂度》，第367–417页。Springer International Publishing，查姆，2021年。doi:10.1007/978-3-030-59234-9_11。4 Vasco Brattka 和 Tahina Rakotoniaina。论拉姆齐定理的一致计算内容。《符号逻辑杂志》，82，2015年8月。 doi:10.1017/jsl.2017.43。5 Olivier Carton、Thomas Colcombet 和 Gabriele Puppis。可数线性序上词的正则语言。载于《ICALP 2011 论文集》，第二部分，第125–136页，2011年。doi:10.1007/978-3-642-22012-8_9。6 Vittorio Cipriani 和 Arno Pauly。图的可嵌入性与 Weihrauch 度。arXiv 2305.00935，2023年。doi:10.48550/arXiv.2305.00935。7 Caleb Davis、Denis R. Hirschfeldt、Jeffry L. Hirst、Jake Pardo、Arno Pauly 和 Keita Yokoyama。等价于弱归纳的组合原理。《可计算性》，9(3-4):219–229，2020年。doi:10.3233/COM-180244。8 Damir D. Dzhafarov、Jun Le Goh、Denis. R. Hirschfeldt、Ludovic. Patey 和 Arno Pauly。拉姆齐定理与 Weihrauch 度中的乘积。《可计算性》，9(2)，2020年。doi:10.3233/COM-180203。9 Damir D. Dzhafarov、Reed Solomon 和 Manlio Valenti。Weihrauch 度中的树鸽笼原理。未发表手稿。10 Damir D. Dzhafarov、Reed Solomon 和 Keita Yokoyama。论 Weihrauch 度中问题的一阶部分。arXiv:2301.12733，2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2301.12733。11 Marta Fiori-Carones、Leszek Aleksander Kołodziejczyk 和 Katarzyna W. Kowalik。弱基理论上的拉姆齐定理较弱变体。《纯粹与应用逻辑年刊》，172(10):103028，2021年。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168007221000865、doi:10.1016/j.apal.2021.103028。12 Emanuele Frittaion 和 Ludovic Patey。逆向数学中的有理数着色。《可计算性》，6(4):319–331，2017年。 doi:10.3233/COM-160067。13 Kenneth Gill。复杂度的两项研究。博士论文，宾夕法尼亚州立大学，2023年。14 Jun Le Goh、Arno Pauly 和 Manlio Valenti。通过非良基线性序寻找下降序列。《符号逻辑杂志》，86(2)，2021年。doi:10.1017/jsl.2021.15。15 Denis R. Hirschfeldt。《切分真理》。世界科学出版社，2014年。doi:10.1142/9208。16 Jeffry L. Hirst。二阶算术子系统中的组合学。博士论文，宾夕法尼亚州立大学，1987年。17 Leszek Aleksander Kolodziejczyk、Henryk Michalewski、Cécilia Pradic 和 Michal Skrzypczak。布奇可判定性定理的逻辑强度。《计算机科学逻辑方法》，15(2)，2019年。doi:10.23638/LMCS-15(2:16)2019。18 Stéphane Le Roux 和 Arno Pauly。有限选择、凸选择与求根。《计算机科学逻辑方法》，2015年。 doi:10.2168/LMCS-11(4:6)2015。19 Eike Neumann 和 Arno Pauly。代数计算模型的拓扑观点。《复杂性杂志》，44:1–22，2018年。doi:10.1016/j.jco.2017.08.003。

20 Dominique Perrin 和 Jean-Éric Pin。无限词：自动机、半群、逻辑与博弈。《纯粹数学与应用数学》。2004年。21 Cécilia Pradic 和 Giovanni Soldà。论有理数上的加法拉姆齐定理的 Weihrauch 度。载于 Ulrich Berger、Johanna N. Y. Franklin、Florin Manea 和 Arno Pauly 编，《可计算性中的革命与新发现——第*18*届欧洲可计算性会议（*CiE 2022*），斯旺西，英国，*2022*年*7*月*11*日至*15*日，论文集》，第13359卷，收入《计算机科学讲义》，第259–271页。Springer，2022年。doi:10.1007/978-3-031-08740-0_22。22 Saharon Shelah。序的单子理论。《数学年刊（第二辑）》，102(3):379–419，1975年。23 Stephen G. Simpson。二阶算术子系统。《数学逻辑展望》。1999年。 doi:10.1007/978-3-642-59971-2。24 Stephen G. Simpson 和 Rick L. Smith。多项式因式分解与Σ^0_1 归纳。《纯粹与应用逻辑年刊》，31:289–306，1986年。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0168007286900746，doi:10.1016/0168-0072(86)90074-6。25 Giovanni Soldà 和 Manlio Valenti。问题一阶部分的代数性质。《纯粹与应用逻辑年刊》，174(7):103270，2023年。 doi:10.1016/j.apal.2023.103270。