arXiv:2301.02842v1 [math.AG] 7 Jan 2023

n 点希尔伯特概形上的分层丛

Saurav Holme Choudhury

Abstract. 设 k 是特征为 $p > 3$ 的代数闭域， S 是定义在 k 上的光滑射影曲面，且带有一个 k-有理点 x。对于 $n \geq 2$，记 $S^{[n]}$ 为 S上 n 个点的希尔伯特概形。本文计算由 $S^{[n]}$上的分层丛坦纳卡范畴定义的基本群概形 $\pi^{\mathrm{alg}}(S^{[n]}, n\tilde{x})$。

1. Introduction

对于定义在 $\mathbb{C}$上的代数簇 X，有经典的基本群概念 $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x)$，它是利用 X上的解析拓扑定义的。在任意基域 k上，还有若干以代数几何信息为基础定义的基本群类比概念。

在 [SGA1], 中，Grothendieck 根据 X 的有限 étale 覆盖，引入了 ´étale 基本群 $\pi^{\text{ét}}(X, x)$ 的概念，其中 X 是一个概形， x 是 X 的一个几何点。在 [N76], 中，Nori 通过对 X 上本质有限向量丛范畴进行坦纳克重构，定义了 Nori 基本群概形 $\pi^N(X, x)$，其中 X 是完美域 k 上一个连通、约化且完备的概形， x 是一个 k-有理点。在 [N82] 中， $\pi^N(X, x)$ 的定义被推广到连通且约化的 k-概形情形。Langer 在 [Lan11] 和 [Lan12] 中引入并研究了另一种类似物——S-基本群概形 $\pi^S(X, x)$，其适用于代数闭域 k 上的光滑射影簇 X。它通过对 X 上数值平坦向量丛范畴进行坦纳克重构来定义。关于代数闭域 k 上光滑射影曲线 C 的 S-基本群概形， [BPS06] 已对其进行了引入和研究。

本注记中至关重要的基本群概形变体是代数基本群 $\pi^{\mathrm{alg}}(X, x)$。在 [Gie75], Gieseker 将 $\pi^{\mathrm{alg}}(X, x)$ 定义为与 $\mathcal{D}_X$-模的坦纳卡范畴相对应的基本群概形，其中 $\mathcal{D}_X$ 是X上的微分算子层。对于在正特征域上光滑的 X， Gieseker 引入了分层丛的概念，并证明 $\mathcal{D}_X$-模的范畴与X上的分层丛范畴张量等价。分层丛在 [dS07] 和 [BHdS21] 中得到进一步研究。精确定义和陈述将在下一节给出。

设 S 是定义在 k 上的光滑射影曲面。对于 $n \geq 2$，令 $S^{[n]}$ 表示 S 上 n 个点的希尔伯特概形。众所周知， $S^{[n]}$ 是一个维数为 $2n$ 的光滑射影代数簇。在 [PS20], 中，作者证明对于 char $k > 3$ 和 $n \geq 2$，存在一个定义在 k 上的仿射群概形同构

$$\pi^{\dagger}(S, x)_{\mathrm{ab}} \to \pi^{\dagger}(S^{[n]}, n\tilde{x})$$

其中 $\dagger = S$、N 或 ´等。

I在本文中，我们将他们的结果推广到 π^{alg} 的情形，并证明以下定理 .

定理。设 char $k > 3$ 且 $n \geq 2$。存在一个定义在 k 上的仿射群概形之间的同构

$$f : \pi^{alg}(S, x)_{ab} \to \pi^{alg}(S^{[n]}, n\tilde{x})$$

第2节回顾分层丛的定义及其一些基本性质。第3节回顾坦纳克重构的形式体系，并用它定义代数基本群$\pi^{\mathrm{alg}}(X, x)$。

第4节介绍光滑射影曲面上 n 点的希尔伯特概形的几何性质。第5节证明了一个关于分层丛下降的结果，并通过定义相应的坦纳范畴函子来定义同态f。最后，第6节通过证明 f 是一个同构，确立了主定理。

致谢。我们感谢 Indranil Biswas 和 Ronnie Sebastian 对本文早期稿件提出的意见。

2. Stratified bundles

设 k 是一个特征为 p 的域， X 是定义在 k 上的诺特概形。 X 上的分层丛是由 X 上的凝聚层组成的序列，并满足无限次弗罗贝尼乌斯下降。更确切地说， X 上的分层丛范畴记作 $\mathcal{S}(X)$，其对象由以下内容组成：

- 对象 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 是凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{E}_i, i \in \mathbb{N}$ 组成的序列，并附有同构 s

$$\alpha_i : F^*\mathcal{E}_{i+1} \to \mathcal{E}_i$$

对所有 $i \in \mathbb{N}$，其中 F 是 X 上的绝对弗罗贝尼乌斯。

- 态射 $\phi : (\mathcal{E}_i, \alpha_i) \to (\mathcal{F}_i, \beta_i)$ 是由一列 $\mathcal{O}_X$-模态射 $\phi_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{F}_i$组成的，其中 $\phi_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ F *(\phi_{i+1})$

设 $f : Y \to X$ 是一个态射，且 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 是 X上的一个分层丛。于是我们可以定义沿 f的拉回，记作 $f^*(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$，它由一列 O_Y凝聚层 f^*E_i组成，而同构由复合映射给出

$$F^*f^*\mathcal{E}_{i+1} \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{E}_{i+1}}} f^*F^*\mathcal{E}_{i+1} \xrightarrow{f^*(\alpha_i)} f^*\mathcal{E}_i$$

其中 $\gamma : F^*f^* \to f^*F^*$是函子的自然同构。

因此， $\mathcal{S}(X)$ 是关于 X的反变函子。在 $\mathcal{S}(X)$ 上还可以定义张量积，即逐项取张量积。此外， $\mathcal{S}(X)$ 是一个阿贝尔范畴 [参见 [BHdS21, 命题 4.4]。

我们回顾一些关于分层丛的著名结果 [参见 [dS07], [Gie75]]。

命题。若 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 是 X 上的分层丛，则对所有 $i \in \mathbb{N}$， $\mathcal{E}_i$ 都是局部自由的 $\mathcal{O}_X$-模。

这使我们能够定义分层丛的对偶，从而使 $\mathcal{S}(X)$ 成为一个阿贝尔刚性张量范畴。

分层丛 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 的秩定义为 $\mathcal{E}_0$ 的秩。 X 上的平凡分层丛具有如下形式： $\oplus(\mathcal{O}_X, ...; F^*, ...)$。

令 $\mathcal{D}_X$ 为 X 上的微分算子层。 $\mathcal{D}_X$ 模的范畴由以下对象组成

- 相干 $\mathcal{O}_X$ 模 $\mathcal{E}$，配备一个 $\mathcal{D}_X$ 作用，即一个 $\mathcal{O}_X$-代数的态射

$$\mathcal{D}_X \to \mathcal{E}\mathrm{nd}_k(\mathcal{E})$$

- 态射 $\mathcal{O}_X$与 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 线性映射，且与 $\mathcal{D}_X$ 作用相容

Katz [[Gie75], 定理 1.3] 表明，对于 X 在 k上光滑的情形， X 上的分层丛范畴与 $\mathcal{D}_X$ 模范畴彼此张量等价。

我们以如下定义结束本节：在一个带有群 G 作用的代数簇 X 上定义的 G 等变分层丛。

定义。若分层丛 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 满足以下条件，则称其为 G-等变分层丛： $\mathcal{E}_i$ 是 G-等变向量丛，且 α_i 是 G-等变 $\mathcal{O}_X$ 模态射。

3. Tannakian categories and fundamental group schemes

本节回顾坦纳范畴的定义和基本性质。接着，我们回顾 Gieseker 通过坦纳卡形式主义给出的基本群概形 π^{alg} 的定义。

3.1. 坦纳范畴与仿射群概形。坦纳范畴由 [DM82] 定义并研究，旨在形式化 Rep$_k(G)$ 的性质；后者是 G 上有限维 k-表示所构成的范畴，其中 G 是 k 上的一个仿射群概形。

定义（中性坦纳范畴）。若刚性阿贝尔张量范畴 $\mathcal{C}$ with End $\mathbb{I} = k$ 存在一个正合忠实的 k-线性张量函子 $\omega: \mathcal{C} \to$Vec$_k$，则称其为中性坦纳范畴。任何这样的函子都称为 $\mathcal{C}$ 的纤维函子。

给定中性坦纳范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, \mathbb{I})$，定义函子 Aut$^{\otimes}(\omega)$: $k-$algebra $\to$Sets，使得对于 k-代数 R，Aut$^{\otimes}(\omega)(R)$ 由族 (λ_X) 构成，其中 $X \in$ ob$(\mathcal{C})$，且 λ_X 是 R-线性自同构，满足 $X \otimes R$ $\lambda_{X_1 \otimes X_2} = \lambda_{X_1} \otimes \lambda_{X_2}$, $\lambda_{\mathbb{I}} = id_R$，并且

$$\lambda_Y \circ (\alpha \otimes 1) = (\alpha \otimes 1) \circ \lambda_X : X \otimes R \to Y \otimes R$$

对于所有态射 $\alpha: X \to Y$。

定理（中性坦纳范畴主定理，[DM82], 定理 2.11）。设 $(\mathcal{C}, \otimes)$ 是一个刚性阿贝尔张量范畴，满足 $k =$End$(\mathbb{I})$，并设 $\omega: \mathcal{C} \to$ Vec$_k$ 是一个正合忠实张量函子。则

- 函子 Aut$^{\otimes}(\omega)$（取值于 k-代数）由一个仿射群概形 G 表示。
- 函子 $\mathcal{C} \to$Rep$_k(G)$ 是张量范畴等价。

定理。设 $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, \mathbb{I})$ 和 $(\mathcal{C}', \otimes, \omega', \mathbb{I}')$ 是中性坦纳范畴，分别对应于仿射 k 群概形 G 和 G' 的表示范畴。那么，任何从 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 出发的坦纳范畴函子，都是由一个仿射 k 群概形 $G' \to G$的唯一态射诱导的。

通过考虑与概形 X 自然相关的不同坦纳范畴，这一定理使我们能够定义概形的许多不同版本的基本群 X。以下结果对于证明给定的仿射群概形之间的态射是同构非常有用。

定理（[DM82], 定理 2.21）。设 $f: G \to G'$ 是 k 上的群概形同态，且 Rep (f) : Rep (G') $\to$ Rep (G) 是相应的坦纳范畴函子。那么

- f 是忠实平坦的，当且仅当 Rep (f) 是全忠实的，且其本质像在子对象下封闭；也就是说，对于 $V' \in$Rep (G') 中的对象和子对象 $W \subset$Rep $(f)(V')$，存在 Rep (G') 中的子对象 $W' \subset V'$，使得 Rep $(f)(W') \simeq W$属于 Rep (G)
- f 是闭浸入，当且仅当 Rep (G) 中的每个对象都是 Rep (f) 的本质像中某个对象的子商。

最后，我们回顾仿射群概形的一个基本结果（详情请参阅 [PS20] 中的第4.1节）。

设 G 是 k 上的一个仿射群概形，G_{ab} 是其阿贝尔化（即 G 的最大阿贝尔商），且 $\alpha: G \to G_{\mathrm{ab}}$ 是商态射（忠实平坦）。于是我们可以定义复合态射

$$\phi : G^n \xrightarrow{\alpha^n} G_{\mathrm{ab}}^n \xrightarrow{m} G_{\mathrm{ab}}$$

其中 m 是乘法同态。由于 $\mathfrak{S}_n$ 作用于 k-群概形 G^n，我们可以为任意 k-群概形 H定义 $\mathfrak{S}_n$-不变群态射 $\psi: G^n \to H$ 的概念。

引理3.1. 设 G 和 H 是定义在 k上的两个群概形。对于整数 $n \geq 2$，$\mathfrak{S}_n$-不变群态射 $G^n \to H$ 的集合与群态射 $G_{ab} \to H$ 的集合存在双射对应；也就是说，任意 k-群概形态射 $\phi: G^n \to H$，若为 $\mathfrak{S}_n$-不变，则唯一地经由一个态射$\psi: G_{ab} \to H$ 分解，使得 $\phi = \psi \circ h$

3.2. 群概形 $\pi^{\mathbf{alg}}(X, x)$ 经典地，在 $\mathbb{C}$ 上，黎曼–希尔伯特对应将光滑连通射影簇 $X/\mathbb{C}$ 上带有可积联络的向量丛范畴，与拓扑基本群 $\pi^{\mathrm{top}}(X, x)$ 的表示范畴等同，其中选定了某个基点 x。借助 GAGA，这为拓扑基本群 $\pi(X, x)$ 的表示范畴提供了纯代数的描述。这个范畴（配备纤维函子 $(E, \nabla) \to E_x$）是一个中性坦纳范畴，并且可通过坦纳卡形式主义与表示对应起来

pr 的范畴　　拓扑基本群的代数完备化，记作 $\pi^{\mathrm{top}}(X,x)^{\mathrm{alg}}$。

设 k 是特征零的域，光滑簇 X 上的平坦联络范畴与 $\mathcal{D}_X$-模范畴张量等价。然而，在特征为 p 的域上， X 上的平坦联络范畴不如 $\mathcal{D}_X$-模范畴性质良好，因此通过坦纳卡形式主义，利用 $\mathcal{D}_X$-模范畴为 X 定义基本群概形。根据前面提到的 Katz 定理，该基本群与下文利用 $\mathcal{S}(X)$ 定义的基本群一致。

设 $x \in X(k)$ 是一个 k-有理点。那么，阿贝尔刚性张量范畴 $\mathcal{S}(X)$ 可由纤维函子中性化

$$T_x : \mathcal{S}(X) \to Vec_k$$

由中性坦纳范畴 $(\mathcal{S}(X) \otimes, T_x, (\mathcal{O}_X, F^*))$ 定义的基本群概形称为以 x 为基点的 X 的代数基本群，记作 $\pi^{\mathrm{alg}}(X,x)$。

π^{alg} 的以下基本性质众所周知。

- （基点无关性）设 X 是几何连通的光滑射影 k-概形。那么对所有的 $x_1, x_2 \in X(k)$，有

$$\pi^{\mathrm{alg}}(X,x_1) \simeq \pi^{\mathrm{alg}}(X,x_2)$$

- （乘积公式）对于 X_1, X_2 ，它们在 k 上几何连通且光滑，并且 $x_i \in X_i(k)$，存在一个同构

$$\pi^{\mathrm{alg}}(X_1,x_1) \times \pi^{\mathrm{alg}}(X_2,x_2) \to \pi^{\mathrm{alg}}(X_1 \times X_2, (x_1,x_2))$$

- 对于 X 光滑且 $U \xrightarrow{i} X$ 为开浸入，并且 U 在 X 中的补集的余维为≥ 2 ，且 $x \in U(k)$，则同态

$$\pi^{\mathrm{alg}}(U,x) \to \pi^{\mathrm{alg}}(X,x)$$

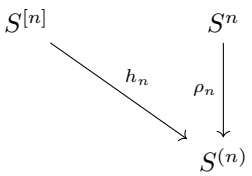
与限制函子 i^* : $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(U)$ 相关联的是一个同构。

4. Geometry of Hilbert Scheme of points

设 S 是一个定义在 k上的光滑射影曲面。我们采用如下记号

- S^n 表示 S 与其自身的 n 重笛卡尔积。
- $S_{(n)}$ 表示 S 的第 n 个对称积，定义为商空间 $S^n/\mathfrak{S}_n$，其中 $\mathfrak{S}_n$ 表示作用于 n 个字母上的对称群。
- $S^{[n]}$ 表示 S 上 n 个点的希尔伯特概形。

设 $\rho : S^n \to S^{(n)}$ 为商映射， h: $S^{[n]} \to S^{(n)}$ 为希尔伯特–周映射。我们将 $S^{(n)}_\circ$ 记为 $S^{(n)}$ 中由互异点组成的开子集，其中 $S^{[n]}_\circ := h^{-1}(S^{(n)}_\circ)$ 且 $S^n_\circ := \rho^{-1}(S^{(n)}_\circ)$。映射 $h_{n,\circ} : S^{[n]}_\circ \to S^{(n)}_\circ$ 是一个同构。我们有如下图表:



一般而言，射影簇上的点的希尔伯特概形会呈现许多病态特征。但在[Fog68] 中，作者证明了，对于光滑射影曲面 S， $S^{[n]}$ 是光滑射影簇。因此，在这种情况下，希尔伯特–周映射 $h : S^{[n]} \to S^{(n)}$ 是奇点消解。

可以将 $S^{(n)}$ 视为 $S^{(n)}$上次数为 n 的有效零循环集合。在这种情况下，很容易看出$S^{(n)}$ 可按类型分层，其中次数为 n 的零循环 y的类型是一个元组（$n_1, \ldots, n_r$），其中 y可写为

$$y = \Sigma_{j=1}^{r} n_j x_j$$

其中 x_j 是互异的nct 个点，重数为 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$，其中 n_j 是正整数。

令 $C(n_1, \ldots, n_r)$ 表示 $S^{(n)}$ 中由类型为 $(n_1, \ldots, n_r)$ 的点组成的子集。令 $S_*^{(n)} = C(1, \ldots, 1) \bigcup C(2, \ldots, 1)$ 表示 $S^{(n)}$ 中由类型为 $(1, \ldots, 1)$ 和 $(2, \ldots, 1)$ 的点组成的开子集。令 $S_*^{[n]}$ 和 S_*^n 分别表示 $S_*^{(n)}$ 在 h 和 ρ 下的原像。

下面回顾一些我们稍后会用到的基本性质（详情参见 [Fog68], [PS20] ）。

- 子集 $C(n_1, \ldots, n_r)$ 是光滑的，其维数为 $2r$。
- 闭子集 $S_{(n)} \setminus S_{(n)*}$ 在 $S_{(n)}$中的余维为 ≥ 2。
- 闭子集 $S^{[n]} \setminus S_*^{[n]}$在 $S^{[n]}$中的余维为 2。
- 闭子集 $S^n \setminus S_*^n$在 S^n中的余维为 ≥ 4。
- 闭子集 $S_{(n)*} \setminus S_{(n)}$。在 $S_{(n)}$中的余维为 2。
- 当 $k \neq 2$ 的特征为 $y \in C(2, 1, \ldots, 1)$ 时，概形论纤维 $h^{-1}(y)$ 同构于 $\mathbb{P}^1_k$。事实上， $S_*^{[n]}$是沿着 $(2, 1, \ldots, 1)$ 对 $S_{(n)*}$ 进行的膨胀。

本节最后回顾 Fogarty 的一个结果（[Fog77], 命题 3.6）。

命题。若 L 是 $\mathfrak{S}_n$-不变线丛 S^n 上的线丛，则存在 $S^{(n)}$ 上的线丛 L'，使得 $h^*L' \simeq L$。

因此，命题中的 L' 同构于 $\sigma_*(L)^{\mathfrak{S}_n}$

5. The functor between Tannakian categories

设 S 是 k 上的光滑射影曲面，且 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 是 $S^{[n]}$ 上的分层丛。限制到 $S_*^{[n]}$ 上可得到一个函子

$$i^* : \mathcal{S}(S^{[n]}) \to \mathcal{S}(S_*^{[n]})$$

这是一个范畴等价，因为 S_*^n 是 $S^{[n]}$ 中$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$个余维 2 闭子集的补集。

接下来，我们证明分层丛 $S_*^{[n]}$ 可以沿 h 推前，从而得到 $S_*^{(n)}$ 上的分层丛。首先，我们从关于沿态射 h 进行向量丛下降的一个结果开始： $S_*^{[n]} \to S_*^{(n)}$。 [Ish83] 和 [PS20] 中的作者也已证明了类似结果。

命题 1. 假设 char $k \neq 2$。设 $\mathcal{E}$ 是 $S_*^{[n]}$上的一个向量丛，其在 h 经 $S_*^{(n)}$的纤维上的限制都是平凡向量丛。那么 $h_*\mathcal{E}$ 是一个局部自由的 $\mathcal{O}_{S_*^{(n)}}$-模。此外，自然映射

$$h^*h_*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$$

是一个同构。

证明. 设 $x \in S_*^{(n)}$是一个类型为 $(2, 1, \ldots, 1)$ 的点。那么根据假设， h 在 x 上的纤维同构于 $\mathbb{P}^1_k$。设 $\mathcal{J}$ 是闭子概形 $h^{-1}(x)$ 的理想层， $\mathcal{I}_x$ 是闭点x的理想层。我们有

$$\mathcal{J} = \mathcal{I}_x \mathcal{O}_{S_*^{[n]}}$$

对于所有的 $n \geq 1$，令 Y_n 表示对应于理想层 $\mathcal{J}^n$ 的 $S_*^{[n]}$ 的闭子概形。考虑 $S_*^{[n]}$ 上如下的层的短正合序列

$$0 \to \mathcal{J} \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}|_{Y_1} \to 0$$

沿 h 推前，得到 $S_*^{(n)}$ 上如下的层的正合序列

$$h_*\mathcal{E} \to H^0(Y_1, \mathcal{E}|_{Y_1}) \to R^1h_*(\mathcal{J} \otimes \mathcal{E})$$

我们断言， $R^1h_*(\mathcal{J} \otimes \mathcal{E})$在 $\mathcal{O}_{S_*^{(n)},x}$ 中的极大理想 m_x 处的完备化为 0。证明使用形式函数定理，该定理指出

$$(R^1h_*(\mathcal{J} \otimes \mathcal{E}))^\wedge \simeq \varprojlim H^1(Y_n, \mathcal{J} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S_*^{[n]}}/\mathcal{J}^n)$$

我们用归纳法证明 $H^1(Y_n, \mathcal{J} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S_*^{[n]}}/\mathcal{J}^n) = 0$。由于 $Y_1 \simeq \mathbb{P}^1_k$，层 $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$ 是局部自由的。这些层在 Y_1 上也是整体生成的，因为我们有如下满射

$$m_x^n/m_x^{n+1} \otimes_{\mathcal{O}_{S_*^{(n)},x}} \mathcal{O}_{S_*^{[n]}} \simeq \mathcal{I}_x^n/\mathcal{I}_x^{n+1} \otimes_{\mathcal{O}_{S_*^{(n)}}} \mathcal{O}_{S_*^{[n]}} \twoheadrightarrow \mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$$

由于 $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$ 在 $Y_1 \simeq \mathbb{P}^1_k$ 上局部自由且整体生成，因此它是若干线丛的直和，其中每个线丛的次数均为 ≥ 0。因此，根据次数的考量可得归纳法的基例，因为

$$H^1(Y_1, \mathcal{J} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{S_*^{[n]}}/\mathcal{J} = H^1(Y_1, \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes \mathcal{E}_{Y_1}) = 0$$

假设 c laim 对 n成立。那么，对 $n+1$ 的证明可由相应的上同调长正合列得到 n 上附着的上同调到 Y_{n+1} 上层的短正合列

$$0 \to \mathcal{J}^{n+1}/\mathcal{J}^{n+2} \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+2} \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1} \otimes \mathcal{E} \to 0$$

由此得到正合列

$$H^1(Y_{n+1}, \mathcal{J}^{n+1}/\mathcal{J}^{n+2} \otimes \mathcal{E}) \to H^1(Y_{n+1}, \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+2} \otimes \mathcal{E}) \to H^1(Y_{n+1}, \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1} \otimes \mathcal{E})$$

我们知道 $H^1(Y_n, \mathcal{J}^{n+1}/\mathcal{J}^{n+2} \otimes \mathcal{E}) = H^1(Y_1, \mathcal{J}^{n+1}/\mathcal{J}^{n+2} \otimes \mathcal{E}) = 0$（由次数考虑）以及 $H^1(Y_{n+1}, \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1} \otimes \mathcal{E}) = H^1(Y_n, \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1} \otimes \mathcal{E}) = 0$（由归纳假设），因此得到

$$H^1(Y_{n+1}, \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+2} \otimes \mathcal{E}) = 0$$

因此， $R^1h_*(\mathcal{J} \otimes \mathcal{E})$ 在 x 处的茎为 0。

这表明自然映射 $h_*\mathcal{E} \to H^0(Y_1, \mathcal{E}|_{Y_1})$ 在 x 的某个邻域内是满射。设 $f_1, ..., f_r$ 是 $H^0(Y_1, \mathcal{E}|_{Y_1})$ 的一组基。设 $\mathrm{Spec}(R)$ 是 x 的一个仿射邻域，在此邻域内自然映射是满射，并设 $\tilde{f}_i \in \Gamma(\mathrm{Spec}(R), h_*\mathcal{E}) = \Gamma(h^{-1}(\mathrm{Spec}(R)), \mathcal{E})$ 是 f_i 的提升。利用 $\tilde{f}_i$，可定义一个同态

$$\mathcal{O}_{S_*^{[n]}}^{\oplus r}|_{h^{-1}(\mathrm{Spec}(R))} \to \mathcal{E}$$

在 $h^{-1}(\mathrm{Spec}(R))$ 上，它在 Y_1 上是满射（因而是同构）。由于 h 是适当的，存在一个更小的仿射邻域 U，使得在 x 的邻域上存在一个同构

$$\mathcal{O}_V^{\oplus r} \simeq \mathcal{E}$$

其中 $V = h^{-1}(U)$。应用 h_*，我们得到

$$(h_*\mathcal{O}_V)^{\oplus r} \simeq h_*\mathcal{E}$$

由于 $S_*^{(n)}$ 是正规的，且 $h: S_*^{[n]} \to S_*^{(n)}$ 是双有理态射并具有连通纤维，根据扎里斯基主定理的一种形式（参见 [Har77, 推论 11.3 和 11.4], ），我们有 $h_*\mathcal{O}_V \simeq \mathcal{O}_U$，因此 $h_*\mathcal{E}$ 是局部自由的。自然态射

$$h^*h_*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$$

显然是一个同构。

□

令 $\mathbb{VB}_{S_*^{(n)}}$ 为 $S_*^{(n)}$ 上局部自由层的范畴， $\mathbb{VB}^h_{S_*^{[n]}}$ 为 $S_*^{[n]}$ 上的局部自由层范畴，其中这些层限制在 h 的纤维上时为平凡向量丛。上面的命题 1 给出了一个范畴等价。

命题 2. 假设 char $k \neq 2$。推前函子

$$h_* : \mathbb{VB}^h_{S_*^{[n]}} \to \mathbb{VB}_{S_*^{(n)}}$$

是一个范畴等价，其逆为

$$h^* : \mathbb{VB}_{S_*^{(n)}} \to \mathbb{VB}^h_{S_*^{[n]}}$$

证明. 我们注意到，若 $\mathcal{E}' \simeq h^*(\mathcal{E})$，则 $\mathcal{E} \simeq h_*\mathcal{E}'$。这表明 h_* 本质满。自然映射

$$\mathrm{Hom}_{S_*^{(n)}}(h_*\mathcal{E}, h_*\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{S_*^{[n]}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$$

是双射。因此， h_* 是一个范畴等价。 □

推论. 对所有 $\mathcal{E} \in \mathbb{VB}^h_{S_*^{[n]}}$，自然映射

$$F^*h_*(\mathcal{E}) \to h_*F^*(\mathcal{E})$$

是 $S_*^{(n)}$ 上的同构。

证明。由于 $F^*\mathcal{E}$ 也是 $\mathbb{VB}^h_{S_*^{[n]}}$ 的一个对象，因此这两个层都是秩相同的局部自由层。因此，只需证明自然映射

$$F^*h_*(\mathcal{E}) \to h_*F^*(\mathcal{E})$$

是满射。由于 F 在 $S_*^{(n)}$ 的光滑轨迹上是忠实平坦的，因此结论在光滑轨迹上成立。设 $x \in S_*^{(n)}$ 的类型为 $(2, 1, \ldots, 1)$。那么， $F^*h_*(\mathcal{E})$ 在 x 上的限制自然同构于 $H^0(Y_1, \mathcal{E}|_{Y_1})$，而 $h_*F^*(\mathcal{E})$ 在 x 上的限制是 $H^0(Y_1, F^*(\mathcal{E}|_{Y_1}))$。自然映射在 x 上的限制是映射

$$F^* : H^0(Y_1, \mathcal{E}_1) \to H^0(Y_1, F^*\mathcal{E}_1)$$

它是满射。 □

根据 [Gie75], 的定理 2.2，我们知道 $\mathbb{P}^1_k$ 上的每个分层丛都是平凡的。因此，上述结果给出

命题 3. 假设 char $k \neq 2$。设 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 是 $S_*^{[n]}$ 上的分层丛。那么对于所有 $i \in \mathbb{N}$， $h_*(\mathcal{E}_i)$ 都是局部自由的 $\mathcal{O}_{S_*^{(n)}}$-模。此外，自然映射

$$h^*h_*(\mathcal{E}_i) \to \mathcal{E}_i$$

是同构。此外，自然映射

$$F^*h_*(\mathcal{E}_i) \to h_*F^*(\mathcal{E}_i)$$

是 $S_*^{(n)}$ 上的同构。

这使我们能够定义 $S_*^{[n]}$ 上分层丛 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 的推前。该推前记为 $h_*(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$，由以下向量丛序列给出：对于所有 $i \in \mathbb{N}$， $h_*\mathcal{E}_i$ ；同构由复合映射给出

$$F^*h_*(\mathcal{E}_{i+1}) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{E}_{i+1}}} h_*F^*(\mathcal{E}_{i+1}) \xrightarrow{h_*(\alpha_i)} h_*(\mathcal{E}_i)$$

其中 η： $F^*h_* \to h_*F^*$ 是自然变换。

因此，我们得到一个函子

$$h_*: \mathcal{S}(S_*^{[n]}) \to \mathcal{S}(S_*^{(n)})$$

h_* 是加性张量函子，因为在光滑轨迹 $S_\circ^n$ 上，我们有这些同构

$$h_*((\mathcal{E}_i, \alpha_i) \oplus (\mathcal{F}_i, \beta_i))|_{S_\circ^{(n)}} \simeq h_*(\mathcal{E}_i, \alpha_i)|_{S_\circ^{(n)}} \oplus h_*(\mathcal{F}_i, \beta_i))|_{S_\circ^{(n)}}$$

$$h_*((\mathcal{E}_i, \alpha_i) \otimes (\mathcal{F}_i, \beta_i))|_{S_\circ^{(n)}} \simeq h_*(\mathcal{E}_i, \alpha_i)|_{S_\circ^{(n)}} \otimes h_*(\mathcal{F}_i, \beta_i))|_{S_\circ^{(n)}}$$

由于余维方面的原因，这些同构可以延拓至 $S_*^{(n)}$。

下列交换图表明， $h^*h_*(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 与 $(\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 作为分层丛是同构的，该同构由自然态射 $h^*h_*\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i$ 给出。

$$\begin{array}{ccccccc}
F^*h^*h_*\mathcal{E}_{i+1} & \xrightarrow{\gamma_{h_*\mathcal{E}_{i+1}}} & h^*F^*h_*\mathcal{E}_{i+1} & \xrightarrow{h^*\eta_{\mathcal{E}_{i+1}}} & h^*h_*F^*\mathcal{E}_{i+1} & \xrightarrow{h_*h^*\alpha_i} & h^*h_*\mathcal{E}_i \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
F^*\mathcal{E}_{i+1} & & \xrightarrow{\quad=\quad} & & F^*\mathcal{E}_{i+1} & \xrightarrow{\alpha_i} & \mathcal{E}_i
\end{array}$$

考虑拉回函子

$$\rho^*: \mathcal{S}(S_*^{(n)}) \to \mathcal{S}(S_*^n)$$

其取值于 S_*^n 上的 $\mathfrak{S}_n$-等变分层丛范畴。此外，我们还有延拓函子

$$j_*: \mathcal{S}(S_*^n) \to \mathcal{S}(S^n)$$

它是一个范畴等价。将这些函子复合起来，我们得到一个函子

$$T: \mathcal{S}(S^{[n]}) \to \mathcal{S}(S^n)$$

由.....给出

$$T = j_* \circ \rho^* \circ h_* \circ i^*$$

显然， T 是一个加性张量函子。注意， h_* 是全忠实的， ρ^*: $\mathcal{S}(S_*^{(n)}) \to \mathcal{S}(S_*^n)$是全忠实的（因为 ρ: $S_\circ^n \to S_\circ^{(n)}$是有限étale的），而 j_*: $\mathcal{S}(S_*^n) \to \mathcal{S}(S^n)$是一个范畴等价（由于余维方面的原因）。因此， T 是全忠实的。

5.1. 同态。固定 n 个互不相同的 k-值点 $x_1, \ldots, x_k \in S(k)$。设 $\tilde{x} \in S^{[n]}$ 满足$h(\tilde{x}) = \sigma(x_1, \ldots, x_n) = z \in S_\circ^{(n)}$。那么，范畴 $\mathcal{S}(S^{[n]})$和 $\mathcal{S}(S^n)$分别由相应的纤维函子中性化

$$\begin{aligned}
\tau_{\tilde{x}}: \mathcal{S}(S^{[n]}) &\to \mathrm{Vec}_k \\
(\mathcal{E}_i, \alpha_i) &\mapsto (\mathcal{E}_0)_{\tilde{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{(x_1,\ldots,x_n)}: \mathcal{S}(S^n) &\to \mathrm{Vec}_k \\
(\mathcal{F}_i, \beta_i) &\mapsto (\mathcal{F}_0)_{(x_1,\ldots,x_n)}
\end{aligned}$$

如果 $T((\mathcal{E}_i, \alpha_i)) = (\mathcal{F}_i, \beta_i)$，则我们有自然同构$(\mathcal{E}_0)_{\tilde{x}} \simeq h_*(\mathcal{E}_0)_z \simeq (\mathcal{F}_0)_{(x_1,\ldots,x_n)}$。

因此我们得到一个坦纳范畴函子

$$T: (\mathcal{S}(S^{[n]}), \otimes, \tau_{\tilde{x}}, (\mathcal{O}_{S^{[n]}}, d)) \to (\mathcal{S}(S^n), \otimes, \tau_{(x_1,\ldots,x_n)}, (\mathcal{O}_{S^n}, d))$$

根据 $\mathcal{S}$ 的基点无关性导出一个坦纳范畴函子 s

$$T : (\mathcal{S}(S^{[n]}), \otimes, \tau_{n\tilde{x}}, (\mathcal{O}_{S^{[n]}}, d)) \to (\mathcal{S}(S^n), \otimes, \tau_{(x,\dots,x)}, (\mathcal{O}_{S^n}, d))$$

从而得到相关基本群概形之间的一个态射

$$\tilde{f} : \pi^{\mathrm{alg}}(S^n, (x, \dots, x)) \to \pi^{\mathrm{alg}}(S^{[n]}, n\tilde{x})$$

注意，由命题 3.2 可知

$$\pi^{\mathrm{alg}}(S^n, (x, \dots, x)) \simeq \pi^{\mathrm{alg}}(S, x)^n$$

.

As

$$T : (\mathcal{S}(S^{[n]}), \otimes, T_{n\tilde{x}}, (\mathcal{O}_{S^{[n]}}, d)) \to (\mathcal{S}(S^n), \otimes, T_{(x,\dots,x)}, (\mathcal{O}_{S^n}, d))$$

将 $S^{[n]}$ 上的分层丛映为 $\mathfrak{S}_n$-等变分层丛，而 S^n 上的一个 $\mathfrak{S}_n$-等变分层丛对应于 S^n $(S, x)^n$的一个 $\mathfrak{S}_n$-不变表示。根据 3.1， $\tilde{f}$唯一地通过

$$f : \pi^{\mathrm{alg}}(S, x)_{\mathrm{ab}} \to \pi^{\mathrm{alg}}(S^{[n]}, n\tilde{x})$$

6. Isomorphism of fundamental group schemes

在本节中，我们证明 f 是仿射群概形的一个同构。我们首先证明一个关于 S^n上的 $\mathfrak{S}_n$-等变分层线丛的结果。

命题 4. 设 (L_i, α_i) 是 $\mathfrak{S}_n$-等变分层线丛在 S^n 上。则存在一个分层线丛 $(\mathcal{L}_i, \beta_i)$，使得 $\rho^*(\mathcal{L}_i, \beta_i) \simeq (L_i, \alpha_i)$

证明. 根据上文提到的 Fogarty 定理，对于任意 $\mathfrak{S}_n$-等变线丛 L_i ，存在一个线丛 $\mathcal{L}_i \simeq \rho_* L_i^{\mathfrak{S}_n}$，使得 $\rho^*\mathcal{L}_i \simeq L_i$。 将 α_i 推前并取 $\mathfrak{S}_n$ 不变量，我们得到同构

$$\rho_*(F^* L_{i+1})^{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{\rho_*(\alpha_i)^{\mathfrak{S}_n}} \rho_*(L_i)^{\mathfrak{S}_n}$$

我们证明自然同态

$$F^*(\rho_*(L_i)^{\mathfrak{S}_n}) \to (F^*\rho_*(L_i)^{\mathfrak{S}_n}) \to (\rho_* F^*(L_i)^{\mathfrak{S}_n})$$

是一个同构。在 ρ 下拉回该态射，我们得到交换图

$$\begin{array}{ccc} \rho^* F^*((\rho_* L_i)^{\mathfrak{S}_n}) & \longrightarrow & \rho^*((\rho_* F^* L_i)^{\mathfrak{S}_n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^* L_i & \xrightarrow{=} & F^* L_i \end{array}$$

其中竖直态射是自然态射，根据 Fogarty 定理它们是同构。通过在 ρ 下推前并取 $\mathfrak{S}_n$ 不变量，我们得到

$$F^*(\rho_*(L_i)^{\mathfrak{S}_n}) \to (\rho_* F^*(L_i)^{\mathfrak{S}_n})$$

是一个同构。我们将 β_i 定义为复合同构

$$F^*(\rho_*(L_i)^{\mathfrak{S}_n}) \to (\rho_* F^*(L_i)^{\mathfrak{S}_n}) \xrightarrow{\rho_*(\alpha_i)^{\mathfrak{S}_n}} \rho_*(L_i)^{\mathfrak{S}_n}$$

该交换图还给出 $\rho^*(\mathcal{L}_i, \beta_i) \simeq (L_i, \alpha_i)$ □

6.1. 忠实平坦。接下来我们证明态射 f 是忠实平坦的

命题 5. 同态

$$f : \pi^{alg}(S, x)_{ab} \to \pi^{alg}(S^{[n]}, n\tilde{x})$$

是忠实平坦的。

证明. 根据 [[DM82] 定理 2.21]，这等价于证明函子

$$T : \mathcal{S}(S^{[n]}) \to \mathcal{S}(S^n)$$

是全忠实的，并且 T 的本质像在取子对象时封闭。我们已经知道 T是全忠实的。设 $\mathcal{E}_\bullet = (\mathcal{E}_i, \alpha_i)$ 是定义在 $S^{[n]}$ 上的一个分层丛，且 $\mathcal{F}_\bullet := T(\mathcal{E}_\bullet)$ 是对应的定义在 S^n 上的$\mathfrak{S}_n$-等变分层丛。若 $\mathcal{F}'_\bullet \subset \mathcal{F}_\bullet$ 是一个 $\mathfrak{S}_n$-等变分层子丛，则我们需要证明存在 $\mathcal{E}'_\bullet \subset \mathcal{E}_\bullet$，使得 $T(\mathcal{E}'_\bullet) = \mathcal{F}'_\bullet$。

证明通过对 $\mathcal{E}_\bullet$的秩进行归纳法来进行。若秩为 $\mathcal{E}_\bullet = 1$，结论显然。设秩为$\mathcal{E}_\bullet \geq 2$

那么分层丛 $\mathcal{F}_\bullet$ 和 $\mathcal{F}'_\bullet$ 对应于表示

$$\pi^{\mathrm{alg}}(S^n, (x, \ldots, x) \to \pi^{\mathrm{alg}}(S, x)_{\mathrm{ab}} \to GL(V)$$

and

$$\pi^{\mathrm{alg}}(S^n, (x, \ldots, x) \to \pi^{\mathrm{alg}}(S, x)_{\mathrm{ab}} \to GL(V')$$

分别地。

由于 $\pi^{\mathrm{alg}}(S, x)_{\mathrm{ab}}$ 是关于 k 的阿贝尔仿射群概形，其所有不可约表示都是一维的。因此可知，$\pi^{\mathrm{alg}}(S, x)_{\mathrm{ab}}$-模 V/V' 有一个一维商 W。于是存在一个 $\pi^{\mathrm{alg}}(S, x)_{\mathrm{ab}}$-模满射 $V \to W$，使得其核包含 V'。令 $\mathcal{L}_\bullet$ 为对应于 W 的 $\mathfrak{S}_n$- 等变分层丛。因此我们有一个 $\mathfrak{S}_n$- 等变分层丛的短正合列

$$0 \to \mathcal{K}_\bullet \to \mathcal{F}_\bullet \to \mathcal{L}_\bullet \to 0$$

其中 $\mathcal{F}'_\bullet \subset \mathcal{K}_\bullet$。

根据上面的命题 1，我们知道 $L_i := \rho_* \mathcal{L}_i^{\mathfrak{S}_n}$ 是 $S^{(n)}$ 上的一个线丛，并且 $\rho^* L_i = \mathcal{L}_i$。我们断言，下面的 $S_*^{(n)}$ 上的层复形对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都是正合的

$$0 \to (\rho_* \mathcal{K}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}} \to (\rho_* \mathcal{F}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}} \to (\rho_* \mathcal{L}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}} \to 0 \tag{1}$$

只需证明 $(\rho_* \mathcal{F}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}} \to (\rho_* \mathcal{L}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}}$ 是满射。注意到 $(\rho_* \mathcal{F}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}} = h_*(\mathcal{E}_i|_{S_*^{[n]}})$。令 C 为余核

$$h_*(\mathcal{E}_i|_{S_*^{[n]}}) \to (\rho_* \mathcal{L}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}} \to C \to 0$$

沿 ρ 拉回后，我们得到 S_*^n 上的以下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\rho^* h_*(\mathcal{E}_i|_{S_*^{[n]}}) & \longrightarrow & \rho^*((\rho_* \mathcal{L}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}}) & \longrightarrow & \rho^* C & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow = & & \downarrow = & & & & \\
\mathcal{F}_i & \longrightarrow & \mathcal{L}_i|_{S_*^n} & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

各行均为正合列，因此 $\rho^*C=0$。由于 ρ 满射，这意味着 $C=0$。因此， $K_i:=(\rho_*\mathcal{K}_i)^{\mathfrak{S}_n}|_{S_*^{(n)}}$ 在 $S_*^{(n)}$ 上是局部自由的

拉回 短正合列 (1)，得到 h 上的局部自由层短正合列 $_*$]

$$0\to h^*K_i|_{S_*^{[n]}}\to\mathcal{E}_i|_{S_*^{[n]}}\to\tilde{L}_i|_{S_*^{[n]}}\to 0$$

˜其中 $L_i:=h^*L_{i\circ}$

由于 $S_*^{[n]}$ 在 $S^{[n]}$ 中的补集的余维为 ≥ 2 ，且 $\mathcal{E}_i,L$ 是局部自由的，满射态射

$$\mathcal{E}_i|_{S_*^{[n]}}\to\tilde{L}_i|_{S_*^{[n]}}$$

˜可延拓为唯一态射 $\tau_i:\ \mathcal{E}_i\to L_{i\circ}$ 这是满射，因为 L 的秩为 1，且 $\tau:=(\tau_i)$ 给出了分层丛之间的非零态射

$$\mathcal{E}_\bullet\to\tilde{L}_\bullet$$

其中 $\tilde{L}_\bullet:=h^*(\rho_*(\mathcal{L}_\bullet)^{\mathfrak{S}_n})_\circ$ 令 $\kappa_\bullet$ 为态射 $\mathcal{E}_\bullet\to\tilde{L}_\bullet$ 的核。于是 $T(\kappa_\bullet)=\mathcal{K}_\bullet$。因此，根据关于秩的归纳假设，存在一个分层子丛 $\mathcal{E}'_\bullet\subset\kappa_\bullet\subset\mathcal{E}_\bullet$ ，使得 $T(\mathcal{E}'_\bullet)=\mathcal{F}'_\bullet$。

□

6.2. 闭浸入。我们先回顾 [PS20] 中的一个结果。

设 $p\in S^{(n)}$ 是一个类型为 $(n_1,n_2,\dots,n_r)$ 的点。设 p'_i（其中 $i=1,\ 2,\ \dots m$）是纤维 $h^{-1}(p)$ 中的点。设 A 是局部环 $\mathcal{O}_{S^{(n)},\ p}$ ，而 B 是半局部环 $\mathcal{O}_{S^n}\otimes_{\mathcal{O}_{S^{(n)}}}A_\circ$ 那么 B 是一个有限 A 模，且 $B^{\mathfrak{S}_n}=A_\circ$

引理 6.1. 当 char $k>n_1$ 时，任何 $\mathfrak{S}_n$-等变的满射 B-模同态 $f:\ M\to N$ （其中 B 为有限生成模）都会下降为 $\mathfrak{S}_n$-不变量 $M^{\mathfrak{S}_n}\to N^{\mathfrak{S}_n}$ 之间的满射 A-模同态。

这使我们能够证明 [PS20] 中命题 5.3.6 的如下类比结果。

命题。设 $\mathcal{E}_\bullet=(\mathcal{E}_i,\alpha_i)$ 是 S^n 上的一个 $\mathfrak{S}_n$-等变分层丛

(1) 设 $p\in S^{(n)}$ 是一个类型为 $(n_1,n_2,\dots,n_r)$ 的点。若 char $k>n_1$，则对于所有 i，层 $\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n}$ 在 p 的某个邻域内局部自由。(2) 令 U 表示 $\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n}$ 局部自由的最大开子集，则在 $\rho^{-1}(U)$ 上，自然态射

$$\rho^*\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n}\to\mathcal{E}_i$$

对于所有 $i\in\mathbb{N}$ 都是一个同构

证明。第一个断言通过对 $\mathcal{E}_\bullet$ 的秩使用归纳法证明。若 $\mathcal{E}_\bullet$ 是秩为 1 的 $\mathfrak{S}_n$-等变分层丛，则由命题 1，$\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n}$ 对于所有 i 在 $S^{(n)}$ 上局部自由。一般地，由于 $\mathcal{E}_\bullet$ 对应于阿贝尔群概形 $\pi^{\mathrm{alg}}(S,x)_{\mathrm{ab}}$ 的一个表示，存在一个 $\mathfrak{S}_n$-等变的局部自由层短正合列，其定义在 S^n 上

$$0\to\mathcal{K}_\bullet\to\mathcal{E}_\bullet\to\mathcal{L}_\bullet\to 0$$

沿 ρ 推前并取 $\mathfrak{S}_n$-不变量后，对于所有 i，得到正合列

$$0\to\rho(\mathcal{K}_i)^{\mathfrak{S}_n}\to\rho(\mathcal{E}_i)^{\mathfrak{S}_n}\to\rho(\mathcal{L}_i)^{\mathfrak{S}_n}$$

我们断言，右侧的同态在类型为（$n_1,n_2,\dots,n_r$）的点 p 的邻域内是满射。满射性可在转至 p 的形式邻域后检验，因此归结为引理 6.1。根据关于秩的归纳假设， $\rho(\mathcal{K}_i)^{\mathfrak{S}_n}$ 和 $\rho(\mathcal{L}_i)^{\mathfrak{S}_n}$ 在 p 的某个邻域内均为局部自由，因此 $\rho(\mathcal{E}_i)^{\mathfrak{S}_n}$ 也如此。

第二个断言可由以下观察得出：自然同态

$$\rho^*\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n} \to \mathcal{E}_i$$

在 $\rho^{-1}(S_\circ^{(n)})$ 上是同构，因为 $\rho\colon S_\circ^n \to S_\circ^{(n)}$是有限 étale 的。由于 $S_\circ^n$在 $\rho^{-1}(U)$ 中的补集余维为 ≥ 2，且两个层在 $\rho^{-1}(U)$ 上都是局部自由的，因此自然态射是同构。

□

命题 6. 设 char $k > 3$。同态

$$f : \pi^{alg}(S, x)_{ab} \to \pi^{alg}(S^{[n]}, \tilde{nx})$$

是忠实平坦的。

证明。根据 [[DM82], 定理 2.21]„ 只需证明函子

$$T : \mathcal{S}(S^{[n]}) \to \mathcal{S}(S^n)$$

是本质满的。因此，我们要证明，对于 S^n 上任意的 $\mathfrak{S}_n$-等变分层丛 $\mathcal{E}_\bullet$，都存在 $S^{[n]}$ 上的分层丛 $\mathcal{F}_\bullet$，使得 $T(\mathcal{F}_\bullet) = \mathcal{E}_\bullet$。

设 U 是 $S^{(n)}$ 的开子集，由类型为 (1, 1, . . . , 1)、(2, 1, . . . , 1)、(3, 1, . . . , 1) 和 (2, 1, 1, . . . , 1) 的点组成。根据 k 的特征假设以及前一命题，我们得到 $\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n}$ 在 U 上是局部自由的。此外，在 $\rho^{-1}(U)$ 上，自然态射

$$\rho^*\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n} \to \mathcal{E}_i$$

是一个同构。仿照上面的命题 1，这使我们能够在U上定义一个分层丛 $(\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n}, \beta_i)$，使得 $\rho^*(\rho_*\mathcal{E}_i^{\mathfrak{S}_n}, \beta_i) \simeq \mathcal{E}_\bullet$。将其沿 h 拉回到 $h^{-1}(U)$（其在 $S^{[n]}$ 中的补集余维为≥ 3），并延拓到 $S^{[n]}$，我们得到一个分层丛 $\mathcal{F}_\bullet$，使得 $T(\mathcal{F}_\bullet) = \mathcal{E}_\bullet$ □

由于 f 既是忠实平坦的，又是一个闭浸入，我们得到以下定理

定理 6.2。设 char $k > 3$。同态

$$f : \pi^{alg}(S, x)_{ab} \to \pi^{alg}(S^{[n]}, \tilde{nx})$$

是一个同构。

References

[BHdS 基本群概形》，载于 Huckleberry, Alan T. 和 Wolfgang Ebeling 编，《奇异簇的基本群概形》。Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona。Springer International Publishing，2021。https://doi.org/10.1007/978-3-030-65094-4。[BPS06] Biswas, Indranil, A. J. Parameswaran 和 S. Subramanian。《曲线上强半稳定主丛的单值群》。杜克数学杂志 132，第 1 期（2006）： 1–48。[DM82] Deligne, Pierre; Milne, James（1982），《坦纳范畴》，载于 Deligne, Pierre; Milne, James; Ogus, Arthur; Shih, Kuang-yen（编），《霍奇循环、动机与志村簇》，数学讲义，第 900 卷，施普林格，第 101–228 页[dS07] Dos Santos, Jo˜ao Pedro Pinto。《分层层的基本群概形》。代数杂志 317，第 2 期（2007）： 691–713。[Fog68] Fogarty, John。《代数曲面上的代数族》。美国数学杂志 90，第 2 期（1968）： 511–521。[Fog77] Fogarty, John。《簇的准对称幂上的线丛》。代数杂志 44，第 1 期（1977）： 169–180。[Gie75] Gieseker, David。《非零特征中的平坦向量丛与基本群》。比萨高等师范学校科学部年刊 2，第 1 期（1975）： 1–31。[Har77] Hartshorne, Robin。《代数几何》。第 52 卷。施普林格科学与商业媒体，2013。[Ish83] Ishimura, Sadao。《向量丛的下降问题及其应用》。京都大学数学杂志 23，第 1 期（1983）： 73–83。[Lan11] Langer, Adrian。《论 S-基本群概形》。载于《傅里叶研究所年刊》，第 61 卷，第 5 期，第 2077–2119 页。2011。[Lan12] Langer, Adrian。《论 S-基本群概形。II》。朱西厄数学研究所杂志 11，第 4 期（2012）： 835–854。[N76] Nori, Madhav V.《基本群表示》。数学汇刊 33，第 1 期（1976）： 29–41。[N82] Nori, Madhav V.《基本群概形》。数学科学学报 91，第 2 期（1982）： 73–122。[PS20] Paul, Arjun 和 Ronnie Sebastian。《光滑射影曲面上 n 个点的希尔伯特概形的基本群概形》。数学科学通报 164（2020）： 102898。

[SGA1] Grothendieck, Alexander 和 Michele Raynaud。《étales 覆盖与基本群（SGA 1）》。arXiv 预印本 math/0206203（2002）。

The Institute of Mathematical Sciences, (HBNI), Chennai 600113.
Email address: sauravhc@imsc.res.in