arXiv:2301.02860v1 [math-ph] 7 Jan 2023

具有表面张力和流动的多相流系统热力学建模

HAJIME KOBA

Abstract. 我们从能量和热力学两个视角，考察两个运动区域及一个演化曲面中黏性流体运动的控制方程。我们通过能量变分方法和热力学方法，为具有表面流的多相流建立数学模型。具体而言，我们运用能量密度、热力学第一定律和总能量守恒定律，推导具有表面张力和流动的多相流系统。我们利用表面输运定理和分部积分，研究该系统的守恒形式和守恒定律。此外，我们应用热力学恒等式，探讨模型的焓、熵、亥姆霍兹自由能和吉布斯自由能。推导表面张力和黏度的关键思路，是同时运用热力学第一定律和能量密度。

1. Introduction

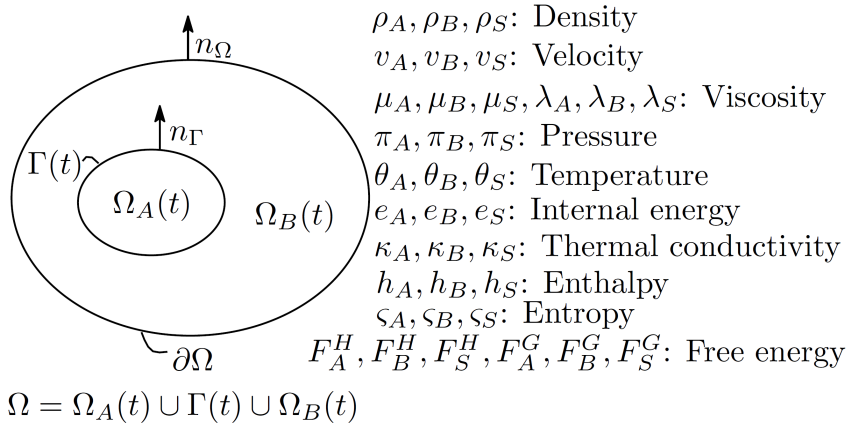

Figure 1. 运动区域、界面与符号

我们关注的是对漂浮在空气中的肥皂泡进行数学建模。当我们观察肥皂泡时，可以看到泡内的流体在流动。我们

2020 *Mathematics Subject Classification.* 80M30, 35Q79, 76-10, 80-10, 35A15.

Key words and phrases. 多相流、界面张力、界面流动、数学建模、热力学第一定律、能量变分方法。

本研究部分获得日本学术振兴会（JSPS）科研费资助编号 JP21K03326 的支持。

将泡内的流体流动称为表面流。我们可以将表面流视为演化曲面上的流体流动。为了建立漂浮在空气中的肥皂泡的数学模型，我们必须研究两个运动区域内的流体流动与表面流之间的依赖关系。我们从能量和热力学视角出发，考虑两个运动区域及曲面上黏性流体运动的控制方程。更确切地说，我们应用热力学第一定律和能量密度，推导出具有表面张力和流动的多相流系统。

首先介绍一些基本符号。令 $t \geq 0$ 为时间变量， $x(= {}^t(x_1, x_2, x_3)) \in \mathbb{R}^3$ 为空间变量。固定 $T > 0$。令 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域。符号 $n_\Omega = n_\Omega(x) = {}^t(n_1^\Omega, n_2^\Omega, n_3^\Omega)$ 表示 Ω $x \in \partial$处的单位外法向量。令 $\Omega_A(t)(=\{\Omega_A(t)\}_{0\leq t<T})$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个有界区域，其边界 $\Gamma(t)$ 随时间变化。假设 $\Gamma(t)(=\{\Gamma(t)\}_{0\leq t<T})$ 是一个光滑演化曲面，且是一个闭黎曼二维流形。符号 $n_\Gamma = n_\Gamma(x,t) = {}^t(n_1^\Gamma, n_2^\Gamma, n_3^\Gamma)$ 表示 $x \in \Gamma(t)$处的单位外法向量。对于每个 $t \in [0,T)$，假设 $\Omega_A(t) \Subset \Omega$。设 $\Omega_B(t) = \Omega \setminus \Omega_A(t)$。显然， $\Omega = \Omega_A(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_B(t)$（见图 1）。设

$$\Omega_{A,T} = \bigcup_{0<t<T} \{\Omega_A(t) \times \{t\}\},\ \Omega_{B,T} = \bigcup_{0<t<T} \{\Omega_B(t) \times \{t\}\},$$
$$\Gamma_T = \bigcup_{0<t<T} \{\Gamma(t) \times \{t\}\},\ \Omega_T = \Omega \times (0,T),\ \partial\Omega_T = \partial\Omega \times (0,T).$$

本文假设 $\Omega_{A,T}$、$\Omega_{B,T}$ 和 Γ_T 中的流体均为可压缩流体。下面介绍物理符号。对于 $\sharp = A, B, S$， 设 $\rho_\sharp = \rho_\sharp(x,t)$、$v_\sharp = v_\sharp(x,t) = {}^t(v_1^\sharp, v_2^\sharp, v_3^\sharp)$、$\pi_\sharp = \pi_\sharp(x,t)$、$\theta_\sharp = \theta_\sharp(x,t)$、$e_\sharp = e_\sharp(x,t)$、$\kappa_\sharp = \kappa_\sharp(x,t)$ 和 $\mu_\sharp = \mu_\sharp(x,t)$、 $\lambda_\sharp = \lambda_\sharp(x,t)$ 分别表示 $\Omega_\sharp(t)$ 中流体的密度、速度、压力、温度、内能、热导率和两种黏度，其中 $\Omega_S(t) := \Gamma(t)$。符号 $h_\sharp = h_\sharp(x,t)$、$\varsigma_\sharp = \varsigma_\sharp(x,t)$、$F_\sharp^H = F_\sharp^H(x,t)$ 和 $F_\sharp^G = F_\sharp^G(x,t)$ 分别表示 $\Omega_\sharp(t)$ 中流体的焓、熵、亥姆霍兹自由能和吉布斯自由能（见图 1）。我们称$\mu_\sharp$ 为剪切黏度，称 $\mu_\sharp + \lambda_\sharp$ 为膨胀黏度。特别地，我们常称 μ_S 为表面剪切黏度，称 $\mu_S + \lambda_S$ 为表面膨胀黏度。我们假设 $\rho_\sharp$, $v_\sharp$, $\pi_\sharp$, $\theta_\sharp$, $e_\sharp$, $\kappa_\sharp$, $\mu_\sharp$, $\lambda_\sharp$, $h_\sharp$, $\varsigma_\sharp$, $F_\sharp^H$ 和 $F_\sharp^G$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的光滑函数。

注 1.1. 我们称 v_S 为总速度，称 π_S 为总压力。总速度是指 v_S 可以分解为表面速度 u_S 和运动速度 w_S，即 $v_S = u_S + w_S$。总压力是指包含表面压力和张力的压力。本文重点研究总速度和总压力。

下面介绍若干算子和符号。对于每个 $f = f(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^4)$ 和 $V = V(x,t) = {}^t(V_1, V_2, V_3) \in [C^1(\mathbb{R}^4)]^3$, $D_t^A f := \partial_t f + (v_A \cdot \nabla) f$, $D_t^B f := \partial_t f + (v_B \cdot \nabla) f$, $D_t^S f := \partial_t f + (v_S \cdot \nabla) f$, $\mathrm{grad} f := \nabla f$, $\mathrm{div} V := \nabla \cdot V$, $\mathrm{grad}_\Gamma f := \nabla_\Gamma f$, $\mathrm{div}_\Gamma V := \nabla_\Gamma \cdot V$, $(V \cdot \nabla) f := V_1 \partial_1 f + V_2 \partial_2 f + V_3 \partial_3 f$, $(V \cdot \nabla_\Gamma) f := V_1 \partial_1^\Gamma f + V_2 \partial_2^\Gamma f + V_3 \partial_3^\Gamma f$， 其中 $\nabla := {}^t(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial_i := \partial/\partial x_i$, $\partial_t := \partial/\partial t$, $\nabla_\Gamma := {}^t(\partial_1^\Gamma, \partial_2^\Gamma, \partial_3^\Gamma)$, 且 $\partial_i^\Gamma f := \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} - n_i^\Gamma n_j^\Gamma) \partial_j f = \partial_i f - n_i^\Gamma (n_\Gamma \cdot \nabla) f$。定义正交投影

P_Γ 到切空间的

$$P_\Gamma = P_\Gamma(x,t) = I_{3\times 3} - n_\Gamma \otimes n_\Gamma = \begin{pmatrix} 1-n_1^\Gamma n_1^\Gamma & -n_1^\Gamma n_2^\Gamma & -n_1^\Gamma n_3^\Gamma \\ -n_2^\Gamma n_1^\Gamma & 1-n_2^\Gamma n_2^\Gamma & -n_2^\Gamma n_3^\Gamma \\ -n_3^\Gamma n_1^\Gamma & -n_3^\Gamma n_2^\Gamma & 1-n_3^\Gamma n_3^\Gamma \end{pmatrix},$$

以及沿 H_Γ 方向的平均曲率 n_Γ 乘以 $H_\Gamma = H_\Gamma(x,\ t) = -\mathrm{div}_\Gamma n_\Gamma$，其中 $I_{3\times 3}$是 3×3单位矩阵，而 $\otimes$表示张量积。容易验证， $P_\Gamma n_\Gamma = {}^t(0,\ 0,\ 0)$ 且 $P_\Gamma \nabla f = \nabla_\Gamma f$。

下面说明边界 $\partial\Omega_T$ 和 Γ_T上的关键限制。我们假设

$$(1.1)\qquad \begin{cases} v_B = {}^t(0,0,0) & \text{on } \partial\Omega_T, \\ v_A\cdot n_\Gamma = v_B\cdot n_\Gamma = v_S\cdot n_\Gamma & \text{on } \Gamma_T, \\ P_\Gamma v_A = P_\Gamma v_B = rP_\Gamma v_S & \text{on } \Gamma_T, \end{cases} \begin{cases} (n_\Omega\cdot\nabla)\theta_B = 0 & \text{on } \partial\Omega_T, \\ \theta_A = \theta_B = \theta_S & \text{on } \Gamma_T, \end{cases}$$

其中 $r\in\{0,1\}$。若满足 $r=1$，则称 $P_\Gamma v_A = P_\Gamma v_B = rP_\Gamma v_S$ 为滑移边界条件；若满足 $r=0$，则称为无滑移边界条件。请注意，本文不考虑相变。

本文有三个目的。第一个目的是推导以下具有表面张力和流动的多相流系统:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} D_t^A\rho_A + (\mathrm{div}v_A)\rho_A = 0 & \text{in } \Omega_{A,T}, \\ D_t^B\rho_B + (\mathrm{div}v_B)\rho_B = 0 & \text{in } \Omega_{B,T}, \\ D_t^S\rho_S + (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\rho_S = 0 & \text{on } \Gamma_T, \end{cases}$$

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \rho_A D_t^A e_A + (\mathrm{div}v_A)\pi_A = \mathrm{div}q_A + e_{D_A} & \text{在 } \Omega_{A,T}, \\ \rho_B D_t^B e_B + (\mathrm{div}v_B)\pi_B = \mathrm{div}q_B + e_{D_B} & \text{在 } \Omega \text{ 中}_{B,\ T}, \\ \rho_S D_t^S e_S + (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S = \mathrm{div}_\Gamma q_S + e_{D_S} + q_B\cdot n_\Gamma - q_A\cdot n_\Gamma & \text{在 } \Gamma_T, \end{cases}$$

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \rho_A D_t^A v_A = \mathrm{div}\mathcal{T}_A & \text{in } \Omega_{A,T}, \\ \rho_B D_t^B v_B = \mathrm{div}\mathcal{T}_B & \text{in } \Omega_{B,T}, \\ \rho_S D_t^S v_S = \mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S + \widetilde{\mathcal{T}}_B n_\Gamma - \widetilde{\mathcal{T}}_A n_\Gamma & \text{on } \Gamma_T, \end{cases}$$

其中

$$(1.5)\qquad \begin{cases} q_A = q_A(\theta_A) := \kappa_A \mathrm{grad}\theta_A, \\ q_B = q_B(\theta_B) := \kappa_B \mathrm{grad}\theta_B, \\ q_S = q_S(\theta_S) := \kappa_S \mathrm{grad}_\Gamma\theta_S, \end{cases}$$

$$(1.6)\qquad \begin{cases} e_{D_A} = e_{D_A}(v_A) := \mu_A|D(v_A)|^2 + \lambda_A|\mathrm{div}v_A|^2, \\ e_{D_B} = e_{D_B}(v_B) := \mu_B|D(v_B)|^2 + \lambda_B|\mathrm{div}v_B|^2, \\ e_{D_S} = e_{D_S}(v_S) := \mu_S|D_\Gamma(v_S)|^2 + \lambda_S|\mathrm{div}_\Gamma v_S|^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(v_A) := \{(\nabla v_A) + {}^t(\nabla v_A)\}/2, \\ D(v_B) := \{(\nabla v_B) + {}^t(\nabla v_B)\}/2, \\ D_\Gamma(v_S) := \{(P_\Gamma\nabla_\Gamma v_S) + {}^t(P_\Gamma\nabla_\Gamma v_S)\}/2, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_A(v_A,\pi_A) := \mu_A D(v_A) + \lambda_A(\mathrm{div} v_A) I_{3\times 3} - \pi_A I_{3\times 3},\\
\mathcal{T}_B = \mathcal{T}_B(v_B,\pi_B) := \mu_B D(v_B) + \lambda_B(\mathrm{div} v_B) I_{3\times 3} - \pi_B I_{3\times 3},\\
\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_S(v_S,\pi_S) := \mu_S D_\Gamma(v_S) + \lambda_S(\mathrm{div}_\Gamma v_S) P_\Gamma - \pi_S P_\Gamma,
\end{cases} \tag{1.7}
$$

$$
\begin{cases}
\widetilde{\mathcal{T}}_A = \widetilde{\mathcal{T}}_A(v_A,\pi_A) = \begin{cases} \mu_A n_\Gamma\cdot(n_\Gamma\cdot\nabla)v_A + \lambda_A(\mathrm{div} v_A) - \pi_A \text{ if } r=0,\\ \mathcal{T}_A(v_A,\pi_A) \text{ if } r=1, \end{cases}\\
\widetilde{\mathcal{T}}_B = \widetilde{\mathcal{T}}_B(v_B,\pi_B) = \begin{cases} \mu_B n_\Gamma\cdot(n_\Gamma\cdot\nabla)v_B + \lambda_B(\mathrm{div} v_B) - \pi_B \text{ if } r=0,\\ \mathcal{T}_B(v_B,\pi_B) \text{ if } r=1. \end{cases}
\end{cases} \tag{1.8}
$$

这里，$|D(v_A)|^2 = D(v_A)\colon\ D(v_A)$，$|D(v_B)|^2 = D(v_B)\colon\ D(v_B)$，以及 $|D_\Gamma(v_S)|^2 = D_\Gamma(v_S)\colon\ D_\Gamma(v_S)$。符号 $:$ 表示弗罗贝尼乌斯内积，即 $\mathcal{M}:\mathcal{N} = \sum_{i,j=1}^{3}[\mathcal{M}]_{ij}[\mathcal{N}]_{ij}$，其中 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是两个 3×3 矩阵，而 $[\mathcal{M}]_{ij}$ 表示矩阵 $\mathcal{M}$ 的 (i,j) 分量。我们将 q_A, q_B, q_S 称为热通量，将 $e_{D_A}, e_{D_B}, e_{D_S}$ 称为由黏度导致能量耗散的能量密度，将 $D(v_A), D(v_B)$ 称为应变率张量，将 $D_\Gamma(v_S)$ 称为表面应变张量，将 $\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B$ 称为应力张量，并将 $\mathcal{T}_S$ 称为表面应力张量。我们通常将由 Boussinesq-Scriven 定律确定的表面应力张量称为 $\mathcal{T}_S$。更准确地说，在限制条件 (1.1) 下，我们应用能量密度和热力学方法推导出 (1.2)-(1.4)。详情请参见第 4 节。

注 1.2. (i) 利用 $n_\Gamma\cdot n_\Gamma = 1$, $P_\Gamma\nabla f = \nabla_\Gamma f$、$(n_\Gamma\cdot\nabla_\Gamma)f = 0$，以及 $H_\Gamma = -$散度$_\Gamma n_\Gamma$，我们很容易验证

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_\Gamma(\pi_S P_\Gamma) &= \mathrm{grad}_\Gamma \pi_S + \pi_S H_\Gamma n_\Gamma,\\
2D_\Gamma(v_S) &= P_\Gamma\{(\nabla v_S) + {}^t(\nabla v_S)\}P_\Gamma = P_\Gamma\{(\nabla_\Gamma v_S) + {}^t(\nabla_\Gamma v_S)\}P_\Gamma.
\end{aligned}
$$

注意，$2[D_\Gamma(v_S)]_{ij} = \partial_i^\Gamma v_j^S + \partial_j^\Gamma v_i^S - n_i^\Gamma(n_\Gamma\cdot\partial_j^\Gamma v_S) - n_j^\Gamma(n_\Gamma\cdot\partial_i^\Gamma v_S)$,

$$
\nabla v_S = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1^S & \partial_2 v_1^S & \partial_3 v_1^S\\ \partial_1 v_2^S & \partial_2 v_2^S & \partial_3 v_2^S\\ \partial_1 v_3^S & \partial_2 v_3^S & \partial_3 v_3^S \end{pmatrix},\ \nabla_\Gamma v_S = \begin{pmatrix} \partial_1^\Gamma v_1^S & \partial_2^\Gamma v_1^S & \partial_3^\Gamma v_1^S\\ \partial_1^\Gamma v_2^S & \partial_2^\Gamma v_2^S & \partial_3^\Gamma v_2^S\\ \partial_1^\Gamma v_3^S & \partial_2^\Gamma v_3^S & \partial_3^\Gamma v_3^S \end{pmatrix}.
$$

我们通常称 $\pi_S H_\Gamma n_\Gamma$ 表面张力。
(ii) 如果 $\Omega_{A,T}$、$\Omega_{B,T}$, Γ_T 中的流体是正压流体，那么我们可以写成

$$
\begin{cases}
\pi_A = \pi_A(\rho_A) = \rho_A p_A'(\rho_A) - p_A(\rho_A),\\
\pi_B = \pi_B(\rho_B) = \rho_B p_B'(\rho_B) - p_B(\rho_B),\\
\pi_S = \pi_S(\rho_S) = \rho_S p_S'(\rho_S) - p_S(\rho_S).
\end{cases}
$$

这里 p_A, p_B, p_S 是三个 C^1-函数，$p' = p'(r) = dp/dr(r)$。详情请参见定理 2.4、注 2.5 和第 4 节。

第二个目的是研究系统 (1.2)-(1.4) 的守恒形式和守恒定律。事实上，若令 $D_t^N f = \partial_t f + (v_S\cdot n_\Gamma)(n_\Gamma\cdot\nabla)f$，并将总能量 $E_\sharp = E_\sharp(x,\ t)$ 记为 $E_\sharp = \rho_\sharp|v_\sharp|^2/2 + \rho_\sharp e_\sharp$，则可将该系统写成如下守恒形式：

$$
\begin{cases}
\partial_t\rho_A + \mathrm{div}(\rho_A v_A) = 0 & \text{in } \Omega_{A,T},\\
\partial_t\rho_B + \mathrm{div}(\rho_B v_B) = 0 & \text{in } \Omega_{B,T},\\
D_t^N\rho_S + \mathrm{div}_\Gamma(\rho_S v_S) = 0 & \text{on } \Gamma_T,
\end{cases} \tag{1.9}
$$

$$\begin{cases} \partial_t E_A + \operatorname{div}(E_A v_A - q_A - \mathcal{T}_A v_A) = 0 & \text{in } \Omega_{A,T}, \\ \partial_t E_B + \operatorname{div}(E_B v_B - q_B - \mathcal{T}_B v_B) = 0 & \text{in } \Omega_{B,T}, \\ D_t^N E_S + \operatorname{div}_\Gamma(E_S v_S - q_S - \mathcal{T}_S v_S) = \mathcal{E}_S & \text{on } \Gamma_T, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_A v_A) + \operatorname{div}(\rho_A v_A \otimes v_A - \mathcal{T}_A) = {}^t(0,0,0) & \text{in } \Omega_{A,T}, \\ \partial_t(\rho_B v_B) + \operatorname{div}(\rho_B v_B \otimes v_B - \mathcal{T}_B) = {}^t(0,0,0) & \text{in } \Omega_{B,T}, \\ D_t^N(\rho_S v_S) + \operatorname{div}_\Gamma(\rho_S v_S \otimes v_S - \mathcal{T}_S) = \widetilde{\mathcal{T}}_B n_\Gamma - \widetilde{\mathcal{T}}_A n_\Gamma & \text{on } \Gamma_T, \end{cases} \tag{1.11}$$

其中

$$\mathcal{E}_S := \widetilde{\mathcal{T}}_B n_\Gamma \cdot v_S - \widetilde{\mathcal{T}}_A n_\Gamma \cdot v_S + q_B \cdot n_\Gamma - q_A \cdot n_\Gamma.$$

此外，系统（1.1）-（1.4）的任意解均满足：对于 $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_A(t_2)} \rho_A(x,t_2)\, dx + \int_{\Omega_B(t_2)} \rho_B(x,t_2)\, dx + \int_{\Gamma(t_2)} \rho_S(x,t_2)\, d\mathcal{H}_x^2 \\ &\quad = \int_{\Omega_A(t_1)} \rho_A(x,t_1)\, dx + \int_{\Omega_B(t_1)} \rho_B(x,t_1)\, dx + \int_{\Gamma(t_1)} \rho_S(x,t_1)\, d\mathcal{H}_x^2, \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_A(t_2)} E_A\, dx + \int_{\Omega_B(t_2)} E_B\, dx + \int_{\Gamma(t_2)} E_S\, d\mathcal{H}_x^2 \\ &\quad = \int_{\Omega_A(t_1)} E_A\, dx + \int_{\Omega_B(t_1)} E_B\, dx + \int_{\Gamma(t_1)} E_S\, d\mathcal{H}_x^2, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_A(t_2)} \frac{1}{2}\rho_A|v_A|^2\, dx + \int_{\Omega_B(t_2)} \frac{1}{2}\rho_B|v_B|^2\, dx + \int_{\Gamma(t_2)} \frac{1}{2}\rho_S|v_S|^2\, d\mathcal{H}_x^2 \\ &+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_A(t)} e_{D_A}\, dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_B(t)} e_{D_B}\, dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma(t)} e_{D_S}\, d\mathcal{H}_x^2 dt \\ &= \int_{\Omega_A(t_1)} \frac{1}{2}\rho_A|v_A|^2\, dx + \int_{\Omega_B(t_1)} \frac{1}{2}\rho_B|v_B|^2\, dx + \int_{\Gamma(t_1)} \frac{1}{2}\rho_S|v_S|^2\, d\mathcal{H}_x^2 \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_A(t)} (\operatorname{div} v_A)\pi_A\, dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_B(t)} (\operatorname{div} v_B)\pi_B\, dxdt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma(t)} (\operatorname{div}_\Gamma v_S)\pi_S\, d\mathcal{H}_x^2 dt. \end{aligned} \tag{1.14}$$

这里， $d\mathcal{H}_x^2$ 表示二维豪斯多夫测度。在某些假设下（见定理 2.8），系统（1.1）-（1.3）的任意解均满足：对于 $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_A(t_2)} \rho_A v_A\, dx + \int_{\Omega_B(t_2)} \rho_B v_B\, dx + \int_{\Gamma(t_2)} \rho_S v_S\, d\mathcal{H}_x^2 \\ &\quad = \int_{\Omega_A(t_1)} \rho_A v_A\, dx + \int_{\Omega_B(t_1)} \rho_B v_B\, dx + \int_{\Gamma(t_1)} \rho_S v_S\, d\mathcal{H}_x^2. \end{aligned} \tag{1.15}$$

我们通常将 (1.12)、(1.13)、(1.14) 和 (1.15) 分别称为质量守恒定律、总能量守恒定律、系统的能量定律和动量守恒定律。详情请参见定理 2.8 和第 5 节。

注 1.3. 由 $D_t^S f = D_t^N f + (v_S \cdot \nabla_\Gamma) f$ 对于 $f \in C^1(\mathbb{R}^4)$，我们可知

$$D_t^N(\rho_S f) + \mathrm{div}_\Gamma(\rho_S f v_S) = \rho_S D_t^S f,$$
$$D_t^N(\rho_S v_S) + \mathrm{div}_\Gamma(\rho_S v_S \otimes v_S) = \rho_S D_t^S v_S.$$

由于本文中 $\rho_S, v_S \in C^1(\mathbb{R}^4)$，我们可以为 ρ_S, $\rho_S v_S$定义 D_t^N。

第三个目的是研究流体在 $\Omega^\sharp(t)$ 中的热力学势，例如焓 $h_\sharp$、熵 $\varsigma_\sharp$、亥姆霍兹自由能 $F_\sharp^H$ 和吉布斯自由能 $F_\sharp^G$，其中 $\sharp = A, B, S$。假设 $(\rho_\sharp, \theta_\sharp)$ 是正函数。令焓 $h_\sharp$ 为 $h_\sharp = e_\sharp + \pi_\sharp/\rho_\sharp$。那么

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_A h_A) + \mathrm{div}(\rho_A h_A v_A - q_A) = e_{D_A} + D_t^A \pi_A, \\ \partial_t(\rho_B h_B) + \mathrm{div}(\rho_B h_B v_B - q_B) = e_{D_B} + D_t^B \pi_B, \\ D_t^N(\rho_S h_S) + \mathrm{div}_\Gamma(\rho_S h_S v_S - q_S) = e_{D_S} + D_t^S \pi_S + q_B \cdot n_\Gamma - q_A \cdot n_\Gamma. \end{cases} \tag{1.16}$$

假设热力学恒等式（吉布斯 [9]）： $D_t^\sharp e_\sharp = \theta_\sharp D_t^\sharp \varsigma_\sharp - \pi_\sharp D_t^\sharp (1/\rho_\sharp)$ 成立。那么

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_A \varsigma_A) + \mathrm{div}\left(\rho_A \varsigma_A v_A - \frac{q_A}{\theta_A}\right) = \frac{e_{D_A}}{\theta_A} + \frac{q_A \cdot \mathrm{grad}\theta_A}{\theta_A^2}, \\ \partial_t(\rho_B \varsigma_B) + \mathrm{div}\left(\rho_B \varsigma_B v_B - \frac{q_B}{\theta_B}\right) = \frac{e_{D_B}}{\theta_B} + \frac{q_B \cdot \mathrm{grad}\theta_B}{\theta_B^2}, \\ D_t^N(\rho_S \varsigma_S) + \mathrm{div}_\Gamma\left(\rho_S \varsigma_S v_S - \frac{q_S}{\theta_S}\right) = \frac{e_{D_S}}{\theta_S} + \frac{q_S \cdot \mathrm{grad}_\Gamma \theta_S}{\theta_S^2} + \frac{q_B \cdot n_\Gamma - q_A \cdot n_\Gamma}{\theta_S}. \end{cases} \tag{1.17}$$

令 亥姆霍兹自由能 $F_\sharp^H$为 $F_\sharp^H = e_\sharp - \theta_\sharp \varsigma_\sharp$。则

$$\begin{cases} \rho_A D_t^A F_A^H + \rho_A \varsigma_A D_t^A \theta_A = -(\mathrm{div} v_A)\pi_A, \\ \rho_B D_t^B F_B^H + \rho_B \varsigma_B D_t^B \theta_B = -(\mathrm{div} v_B)\pi_B, \\ \rho_S D_t^S F_S^H + \rho_S \varsigma_S D_t^S \theta_S = -(\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S. \end{cases} \tag{1.18}$$

令 吉布斯自由能 $F_\sharp^G$为 $F_\sharp^G = h_\sharp - \theta_\sharp \varsigma_\sharp$。则

$$\begin{cases} \rho_A D_t^A F_A^G + \rho_A \varsigma_A D_t^A \theta_A = D_t^A \pi_A, \\ \rho_B D_t^B F_B^G + \rho_B \varsigma_B D_t^B \theta_B = D_t^B \pi_B, \\ \rho_S D_t^S F_S^G + \rho_S \varsigma_S D_t^S \theta_S = D_t^S \pi_S. \end{cases} \tag{1.19}$$

详情请参见定理 2.9 和第 6 节。

注1.4. (i)由于

$$\mathcal{T}_A(v_A, \pi_A) : D(v_A) = e_{D_A} - (\mathrm{div} v_A)\pi_A,$$
$$\mathcal{T}_B(v_B, \pi_B) : D(v_B) = e_{D_B} - (\mathrm{div} v_B)\pi_B,$$
$$\mathcal{T}_S(v_S, \pi_S) : D_\Gamma(v_S) = e_{D_S} - (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S,$$

由(1.18) 可知

$$\begin{cases} \rho_A D_t^A F_A^H + \rho_A \varsigma_A D_t^A \theta_A - \mathcal{T}_A(v_A, \pi_A) : D(v_A) = -e_{D_A}, \\ \rho_B D_t^B F_B^H + \rho_B \varsigma_B D_t^B \theta_B - \mathcal{T}_B(v_B, \pi_B) : D(v_B) = -e_{D_B}, \\ \rho_S D_t^S F_S^H + \rho_S \varsigma_S D_t^S \theta_S - \mathcal{T}_S(v_S, \pi_S) : D_\Gamma(v_S) = -e_{D_S}. \end{cases}$$

注意， P_Γ： $D_\Gamma(v_S) =$ 散度$_\Gamma v_S$。
(ii)设 $\mathcal{D}_A f := \rho_A D_t^A f$、 $\mathcal{D}_B f := \rho_B D_t^B f$、 $\mathcal{D}_S f := \rho_S D_t^S f$。那么

$$\begin{cases} \mathcal{D}_A e_A = \theta_A \mathcal{D}_A \varsigma_A - \pi_A \mathcal{D}_A(1/\rho_A), \\ \mathcal{D}_B e_B = \theta_B \mathcal{D}_B \varsigma_B - \pi_B \mathcal{D}_B(1/\rho_B), \\ \mathcal{D}_S e_S = \theta_S \mathcal{D}_S \varsigma_S - \pi_S \mathcal{D}_S(1/\rho_S), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{D}_A h_A = \theta_A \mathcal{D}_A \varsigma_A + (1/\rho_A)\mathcal{D}_A \pi_A, \\ \mathcal{D}_B h_B = \theta_B \mathcal{D}_B \varsigma_B + (1/\rho_B)\mathcal{D}_B \pi_B, \\ \mathcal{D}_S h_S = \theta_S \mathcal{D}_S \varsigma_S + (1/\rho_S)\mathcal{D}_S \pi_S, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_A F_A^H = -\varsigma_A \mathcal{D}_A \theta_A - \pi_A \mathcal{D}_A(1/\rho_A), \\ \mathcal{D}_B F_B^H = -\varsigma_B \mathcal{D}_B \theta_B - \pi_B \mathcal{D}_B(1/\rho_B), \\ \mathcal{D}_S F_S^H = -\varsigma_S \mathcal{D}_S \theta_S - \pi_S \mathcal{D}_S(1/\rho_S), \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{D}_A F_A^G = -\varsigma_A \mathcal{D}_A \theta_A + (1/\rho_A)\mathcal{D}_A \pi_A, \\ \mathcal{D}_B F_B^G = -\varsigma_B \mathcal{D}_B \theta_B + (1/\rho_B)\mathcal{D}_B \pi_B, \\ \mathcal{D}_S F_S^G = -\varsigma_S \mathcal{D}_S \theta_S + (1/\rho_S)\mathcal{D}_S \pi_S. \end{cases}$$

We often call $1/\rho_\sharp$ *a* specific volume.

下面解释推导具有表面张力和流动的多相流系统时遇到的主要困难，以及克服这些困难的关键思路。主要困难在于推导系统中的黏性项，从理论角度推导表面张力，以及推导两个运动区域中的流体流动与表面流之间的依赖关系。为克服这些困难，我们应用热力学第一定律（定理 2.4）、能量密度（定义 2.2）以及总能量守恒定律，推导出方程（1.3）和（1.4）。详情请参见第 4 节。

下面介绍表面流（界面流）的研究。Boussinesq [5] 最早发现了表面流的存在。Scriven [22] 研究了表面应力张量。Slattery [23] 研究了由 Boussinesq-Scriven 定律确定的表面应力张量的一些性质（见（1.7）中的 $\mathcal{T}_S$ ）。此后，许多研究者对表面流进行了研究（关于界面现象的研究，参见 Slattery-Sagis-Oh [24] 和 Gatignol-Prud'homme [8]）。

下面陈述流形和曲面上黏性流体运动控制方程的推导。Taylor [26] 引入了表面应力张量，以建立流形上的不可压缩黏性流体系统。Mitsumatsu-Yano[20]采用能量变分方法，推导出流形上的不可压缩黏性流体系统。Arnaudon-Cruzeiro [2] 利用随机变分方法，推导出流形上的不可压缩黏性流体系统。Koba-Liu-Giga [18] 采用能量变分方法和广义 Helmholtz-Weyl 分解，推导出随时间演化的闭曲面上的不可压缩流体系统。Koba [14, 15] 采用能量变分方法和热力学第一定律，推导出随时间演化的闭曲面以及带边界的演化曲面上的可压缩流体流动系统。本文对 [14, 15] 中的方法进行了修改和改进，以推导我们的多相流系统。

现在我们介绍关于含表面流的多相流系统建模的研究成果。Bothe-Pr¨uss [4] 通过采用由 Boussinesq-Scriven 定律确定的表面应力张量，建立了含表面流的多相流系统。Koba[17] 通过采用几何变分方法，推导出了无黏性含表面流的多相流系统。本文从热力学观点出发推导我们的多相流系统。因此，我们的建模方法不同于 [4]和 [17]中的方法。

最后，我们介绍一些与本文相关的研究成果和教科书。Hyon-Kwak-Liu [13] 和 Koba-Sato [19] 将他们的能量变分方法应用于定义域中的复杂非牛顿流体系统，并对其进行了推导和研究。

Feireisl [7] 从热力学的角度研究了定义域中黏性流体的运动。关于热力学理论，请参阅 Gyarmati [12]和 Gurtin-Fried-Anand[11] ；关于内能、焓、熵和自由能等热力学势，请参阅 Angel [1] 的第十三章；关于超曲面上的若干椭圆方程和抛物方程，请参阅 Pr¨uss-Simonett [21] 。

本文结构如下：第 2 节首先介绍本模型的输运定理和能量密度，然后陈述本文的主要结果。第 3 节利用输运定理推导热力学第一定律，并通过分部积分计算耗散能的变化。第 4 节应用热力学方法，为具有表面张力和流动的多相流建立数学模型。第 5 节研究系统的守恒定律和能量定律。第 6 节探讨系统的热力学势。

2. Main Results

我们首先介绍多相流系统的输运定理和能量密度，然后陈述主要结果。

定义2.1 (Ω_T 由速度场(v_A, v_B, v_S)流动)。 如果对于每个 $0 < t < T$, $f \in C^1(\mathbb{R}^4)$, 以及$\Lambda \subset\Omega$，我们称Ω_T由速度场流动(v_A, v_B, v_S),

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} f(x,t)\ dx = \int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda}\{D_t^A f + (\mathrm{div}v_A)f\}\ dx, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} f(x,t)\ dx = \int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda}\{D_t^B f + (\mathrm{div}v_B)f\}\ dx, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} f(x,t)\ d\mathcal{H}_x^2 = \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda}\{D_t^S f + (\mathrm{div}_\Gamma v_S)f\}\ d\mathcal{H}_x^2. \tag{2.3}$$

这里 $D_t^\sharp f = \partial_t f + (v_\sharp\cdot\nabla)f$、$\mathrm{div}_\Gamma v_S = \partial_1^\Gamma v_1^S + \partial_2^\Gamma v_2^S + \partial_3^\Gamma v_3^S$、 $\partial_j^\Gamma f = \partial_j f - n_j^\Gamma(n_\Gamma\cdot\nabla)f$，其中 $\sharp = A,\ B,\ S$，以及 $j = 1,\ 2,\ 3$。

我们通常将 (2.1)、(2.2) 称为输运定理，并将 (2.2) 称为表面输运定理。表面输运定理的推导可见 [3, 10,6, 18]。本文中，我们假设 Ω_T 由速度场 $(v_A,\ v_B,\ v_S)$ 流动。

定义 2.2 （能量密度）。 设

$$\begin{cases} e_{K_A} = \rho_A|v_A|^2/2, \\ e_{K_B} = \rho_B|v_B|^2/2, \\ e_{K_S} = \rho_S|v_S|^2/2, \end{cases} \quad \begin{cases} e_{D_A} = \mu_A|D(v_A)|^2 + \lambda_A|\mathrm{div}v_A|^2, \\ e_{D_B} = \mu_B|D(v_B)|^2 + \lambda_B|\mathrm{div}v_B|^2, \\ e_{D_S} = \mu_S|D_\Gamma(v_S)|^2 + \lambda_S|\mathrm{div}_\Gamma v_S|^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_{W_A} = (\mathrm{div}v_A)\pi_A, \\ e_{W_B} = (\mathrm{div}v_B)\pi_B, \\ e_{W_S} = (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S, \end{cases} \quad \begin{cases} e_{Q_A} = \kappa_A|\mathrm{grad}\theta_A|^2, \\ e_{Q_B} = \kappa_B|\mathrm{grad}\theta_B|^2, \\ e_{Q_S} = \kappa_S|\mathrm{grad}_\Gamma\theta_S|^2. \end{cases}$$

我们称 $e_{K_\sharp}$ 为 动能，$e_{D_\sharp}$ 为 黏度导致的能量耗散的能量密度$(\mu_\sharp, \lambda_\sharp)$，$e_{W_\sharp}$ 为 压力所做的功的功率密度$\pi_\sharp$，以及 $e_{Q_\sharp}$ 为 热扩散导致的能量耗散的能量密度。

关于能量密度的数学有效性，请参见 [19], [14], 和 [15] 中的注2.5。应用这些能量密度、限制条件（1.1）以及我们的热力学方法，我们在第 4 节推导出系统（1.2）-（1.4）。

现在陈述本文的主要结果。根据定义2.1，我们有

命题 2.3 （连续性方程）. 假设对每个 $0 < t < T$ 和$\Lambda \subset\Omega$,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} \rho_A(x,t)\ dx + \int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} \rho_B(x,t)\ dx + \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \rho_S(x,t)\ d\mathcal{H}^2_x \right) = 0.$$

那么（ρ_A, ρ_B, ρ_S）满足（1.2）。

命题 2.3 的证明留给读者。

定理 2.4 (热力学第一定律**).** 设 $\widetilde{Q}_A, \widetilde{Q}_B, \widetilde{Q}_S \in C(\mathbb{R}^4)$。假设$(\rho_A, \rho_B, \rho_S)$ 满足(1.2)。则(i) 假设对于每个 $0 < t < T$和 $\Lambda \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} \rho_A e_A\ dx &= \int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} \{\widetilde{Q}_A - (\mathrm{div} v_A)\pi_A\}\ dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} \rho_B e_B\ dx &= \int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} \{\widetilde{Q}_B - (\mathrm{div} v_B)\pi_B\}\ dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \rho_S e_S\ d\mathcal{H}^2_x &= \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{\widetilde{Q}_S - (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S\}\ d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{cases}
\rho_A D_t^A e_A + (\mathrm{div} v_A)\pi_A = \widetilde{Q}_A \ \textit{in}\ \Omega_{A,T},\\
\rho_B D_t^B e_B + (\mathrm{div} v_B)\pi_B = \widetilde{Q}_B \ \textit{in}\ \Omega_{B,T},\\
\rho_S D_t^S e_S + (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S = \widetilde{Q}_S \ \textit{on}\ \Gamma_T.
\end{cases} \tag{2.4}$$

（ii）令 $p_A, p_B, p_S \in C^1$（$\mathbb{R}$）。假设对于每个 $0 < t < T$和 $\Lambda \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} \{\rho_A e_A - p_A(\rho_A)\}\ dx &= \int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} \widetilde{Q}_A\ dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} \{\rho_B e_B - p_B(\rho_B)\}\ dx &= \int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} \widetilde{Q}_B\ dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{\rho_S e_S - p_S(\rho_S)\}\ d\mathcal{H}^2_x &= \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \widetilde{Q}_S\ d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{cases}
\rho_A D_t^A e_A + (\mathrm{div} v_A)\Pi_A = \widetilde{Q}_A \ \textit{in}\ \Omega_{A,T},\\
\rho_B D_t^B e_B + (\mathrm{div} v_B)\Pi_B = \widetilde{Q}_B \ \textit{in}\ \Omega_{B,T},\\
\rho_S D_t^S e_S + (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\Pi_S = \widetilde{Q}_S \ \textit{on}\ \Gamma_T.
\end{cases} \tag{2.5}$$

Here

$$\begin{cases}
\Pi_A = \Pi_A(\rho_A) = \rho_A p_A'(\rho_A) - p_A(\rho_A),\\
\Pi_B = \Pi_B(\rho_B) = \rho_B p_B'(\rho_B) - p_B(\rho_B),\\
\Pi_S = \Pi_S(\rho_S) = \rho_S p_S'(\rho_S) - p_S(\rho_S).
\end{cases} \tag{2.6}$$

注2.5。（i）我们可以将系统 （2.4）写成如下形式：

$$\begin{cases} \mathcal{D}_A e_A = \widetilde{Q}_A - \pi_A \mathcal{D}_A(1/\rho_A), \\ \mathcal{D}_B e_B = \widetilde{Q}_B - \pi_B \mathcal{D}_B(1/\rho_B), \\ \mathcal{D}_S e_S = \widetilde{Q}_S - \pi_S \mathcal{D}_S(1/\rho_S), \end{cases}$$

其中 $\mathcal{D}_\sharp f = \rho_\sharp D_t^\sharp f$。因此，本文将定理 *2.4* 称为热力学第一定律 。另见注*1.4*中的(ii) 。

(ii) 定理 *2.4* 的(ii) 所导出的压力(Π_A, Π_B, Π_S) ，与通过能量变分方法导出的压力相对应(见 [17])。

接下来，我们考虑耗散能的变分。令 $r \in \{0,1\}$ 和 $0 < t < T$。令 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_S \in [C^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ 和 $\psi_A, \psi_B, \psi_S \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$。对于 $-1 < \varepsilon < 1$,$v_A^\varepsilon := v_A + \varepsilon\varphi_A$, $v_B^\varepsilon := v_B + \varepsilon\varphi_B$, $v_S^\varepsilon := v_S + \varepsilon\varphi_S$, $\theta_A^\varepsilon := \theta_A + \varepsilon\psi_A$, $\theta_B^\varepsilon := \theta_B + \varepsilon\psi_B$, 以及 $\theta_S^\varepsilon := \theta_S + \varepsilon\psi_S$。我们称 $(v_A^\varepsilon, v_B^\varepsilon, v_S^\varepsilon, \theta_A^\varepsilon, \theta_B^\varepsilon, \theta_S^\varepsilon)$ 为 $(v_A, v_B, v_S, \theta_A, \theta_B, \theta_S)$ 的变分。由 **(1.1)**，对于 $-1 < \varepsilon < 1$，我们假设

$$(2.7) \qquad \begin{cases} v_B^\varepsilon = {}^t(0,0,0) & \text{on } \partial\Omega, \\ v_A^\varepsilon \cdot n_\Gamma = v_B^\varepsilon \cdot n_\Gamma = v_S^\varepsilon \cdot n_\Gamma & \text{on } \Gamma(t), \\ P_\Gamma v_A^\varepsilon = P_\Gamma v_B^\varepsilon = r P_\Gamma v_S^\varepsilon & \text{on } \Gamma(t), \end{cases} \begin{cases} (n_\Omega \cdot \nabla)\theta_B^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \theta_A^\varepsilon = \theta_B^\varepsilon = \theta_S^\varepsilon & \text{on } \Gamma(t). \end{cases}$$

于是我们得到

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \varphi_B = {}^t(0,0,0) & \text{on } \partial\Omega, \\ \varphi_A \cdot n_\Gamma = \varphi_B \cdot n_\Gamma = \varphi_S \cdot n_\Gamma & \text{on } \Gamma(t), \\ P_\Gamma \varphi_A = P_\Gamma \varphi_B = r P_\Gamma \varphi_S & \text{on } \Gamma(t), \end{cases}$$

and

$$(2.9) \qquad \begin{cases} (n_\Omega \cdot \nabla)\psi_B = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \psi_A = \psi_B = \psi_S & \text{on } \Gamma(t). \end{cases}$$

对于每个变分（$v_A^\varepsilon, v_B^\varepsilon, v_S^\varepsilon, \theta_A^\varepsilon, \theta_B^\varepsilon, \theta_S^\varepsilon$），

$$\begin{aligned} E_D[v_A^\varepsilon, v_B^\varepsilon, v_S^\varepsilon] := &\int_{\Omega_A(t)} \left(-\frac{\mu_A}{2}|D(v_A^\varepsilon)|^2 - \frac{\lambda_A}{2}|\mathrm{div} v_A^\varepsilon|^2 \right) dx \\ &+ \int_{\Omega_B(t)} \left(-\frac{\mu_B}{2}|D(v_B^\varepsilon)|^2 - \frac{\lambda_B}{2}|\mathrm{div} v_B^\varepsilon|^2 \right) dx \\ &+ \int_{\Gamma(t)} \left(-\frac{\mu_S}{2}|D_\Gamma(v_S^\varepsilon)|^2 - \frac{\lambda_S}{2}|\mathrm{div}_\Gamma v_S^\varepsilon|^2 \right) d\mathcal{H}_x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_W[v_A^\varepsilon, v_B^\varepsilon, v_S^\varepsilon] := &\int_{\Omega_A(t)} (\mathrm{div} v_A^\varepsilon)\pi_A \, dx \\ &+ \int_{\Omega_B(t)} (\mathrm{div} v_B^\varepsilon)\pi_B \, dx + \int_{\Gamma(t)} (\mathrm{div}_\Gamma v_S^\varepsilon)\pi_S \, d\mathcal{H}_x^2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} E_{TD}[\theta_A^\varepsilon, \theta_B^\varepsilon, \theta_S^\varepsilon] := &\int_{\Omega_A(t)} \left(-\frac{\kappa_A}{2}|\mathrm{grad}\theta_A^\varepsilon|^2 \right) dx \\ &+ \int_{\Omega_B(t)} \left(-\frac{\kappa_B}{2}|\mathrm{grad}\theta_B^\varepsilon|^2 \right) dx + \int_{\Gamma(t)} \left(-\frac{\kappa_S}{2}|\mathrm{grad}_\Gamma \theta_S^\varepsilon|^2 \right) d\mathcal{H}_x^2. \end{aligned}$$

令 $E_{D+W}[\cdot]=E_D[\cdot]+E_W[\cdot]$。我们称 E_D 为黏度导致的能量耗散，E_W 为压力所做的功，并将 E_{TD} 称为热扩散导致的能量耗散。

定理 2.6（由耗散能变分导出的力）。设 $r\in\{0,1\}$，$0<t<T$，且 $\mathcal{F}_A$，$\mathcal{F}_B$，$\mathcal{F}_S\in[C(\mathbb{R}^3)]^3$。假设对每个 φ_A，φ_B，$\varphi_S\in[C^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$ 满足 (2.8)，

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}E_{D+W}[v_A^\varepsilon,v_B^\varepsilon,v_S^\varepsilon]=\int_{\Omega_A(t)}\mathcal{F}_A\cdot\varphi_A\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\mathcal{F}_B\cdot\varphi_B\,dx+\int_{\Gamma(t)}\mathcal{F}_S\cdot\varphi_S\,d\mathcal{H}^2_x.$$

Then

$$\begin{cases}\mathcal{F}_A=\mathrm{div}\mathcal{T}_A(v_A,\pi_A) & in\ \Omega_A(t),\\ \mathcal{F}_B=\mathrm{div}\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B) & in\ \Omega_B(t),\\ \mathcal{F}_S=\mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S(v_S,\pi_S)+\widetilde{\mathcal{T}}_B(v_B,\pi_B)n_\Gamma-\widetilde{\mathcal{T}}_A(v_A,\pi_A)n_\Gamma & on\ \Gamma(t),\end{cases}\tag{2.10}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其中 $(\mathcal{T}_A,\mathcal{T}_B,\mathcal{T}_S)$ 和 $(\mathcal{T}_A,\mathcal{T}_B)$ 分别由 (1.7) 和 (1.8)定义。

定理 2.7（由热扩散导出的吸热能）。设 $0<t<T$，且 Q_A，Q_B，$Q_S\in C(\mathbb{R}^3)$。假设对每个 ψ_A，ψ_B，$\psi_S\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$满足 (2.9)，

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}E_{TD}[\theta_A^\varepsilon,\theta_B^\varepsilon,\theta_S^\varepsilon]=\int_{\Omega_A(t)}Q_A\psi_A\,dx+\int_{\Omega_B(t)}Q_B\psi_B\,dx+\int_{\Gamma(t)}Q_S\psi_S\,d\mathcal{H}^2_x.$$

Then

$$\begin{cases}Q_A=\mathrm{div}(\kappa_A\nabla\theta_A) & in\ \Omega_A(t),\\ Q_B=\mathrm{div}(\kappa_B\nabla\theta_B) & in\ \Omega_B(t),\\ Q_S=\mathrm{div}_\Gamma(\kappa_S\nabla_\Gamma\theta_S)+\kappa_B(n_\Gamma\cdot\nabla)\theta_B-\kappa_A(n_\Gamma\cdot\nabla)\theta_A & on\ \Gamma(t).\end{cases}\tag{2.11}$$

最后，我们陈述多相流系统的守恒定律和热力学势。

定理 2.8（守恒形式与守恒定律）。设 $r\in\{0,1\}$。则（i）系统(1.2)-(1.4) 的任意解都满足(1.9)-(1.11)。（ii）系统(1.1)-(1.4) 的任意解都满足(1.12)-(1.14)。（iii）假设 $r=1$，且对于 $0<t<T$

$$\int_{\partial\Omega}\{\mu_BD(v_B)n_\Omega+\lambda_B(\mathrm{div}v_B)n_\Omega-\pi_Bn_\Omega\}\,d\mathcal{H}^2_x={}^t(0,0,0).\tag{2.12}$$

那么，(1.1)-(1.4) 的任意解都满足(1.15)。

定理 2.9（热力学势）。设 $\sharp=A$、B、S 和 $r\in\{0,1\}$。假设 $\rho_\sharp$ 和 $\theta_\sharp$ 是正函数。令 $h_\sharp=e_\sharp+\pi_\sharp/\rho_\sharp$、$F^H_\sharp=e_\sharp-\theta_\sharp\varsigma_\sharp$、$F^G_\sharp=h_\sharp-\theta_\sharp\varsigma_\sharp$。假设 $e_\sharp$ 满足 $D_t^\sharp e_\sharp=\theta_\sharp D_t^\sharp\varsigma_\sharp-\pi_\sharp D_t^\sharp(1/\rho_\sharp)$。则(1.16)-(1.19) 成立。

我们在第 3 节证明定理 2.4、2.6 和 2.7，在第 5 节证明定理 2.8，并在第 6 节证明定理 2.9。在第 4 节中，我们通过热力学方法推导系统 (1.2)-(1.4)。

3. Application of Transport Theorems and Integration by Parts

我们应用输运定理（定义2.1）和若干分部积分公式（引理 3.1）来证明定理2.4、2.6和2.7。

引理 3.1 （分部积分公式）。 设 $0 \le t < T$ 和 $j = 1,2,3$。那么对每个 $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\Omega_A(t)} (\partial_j f) g \, dx = -\int_{\Omega_A(t)} f(\partial_j g) \, dx + \int_{\Gamma(t)} f g n_j^\Gamma \, d\mathcal{H}_x^2,$$

$$\int_{\Omega_B(t)} (\partial_j f) g \, dx = -\int_{\Omega_B(t)} f(\partial_j g) \, dx + \int_{\partial\Omega} f g n_j^\Omega \, d\mathcal{H}_x^2 - \int_{\Gamma(t)} f g n_j^\Gamma \, d\mathcal{H}_x^2,$$

$$\int_{\Gamma(t)} (\partial_j^\Gamma f) g \, d\mathcal{H}_x^2 = -\int_{\Gamma(t)} f(\partial_j^\Gamma g) \, d\mathcal{H}_x^2 - \int_{\Gamma(t)} H_\Gamma f g n_j^\Gamma \, d\mathcal{H}_x^2,$$

其中 $H_\Gamma = -$散度$_\Gamma n_\Gamma$ 且 $\partial_j^\Gamma f = \partial_j f - n_j^\Gamma (n_\Gamma \cdot \nabla) f$。这里 $n_\Gamma = n_\Gamma(x,t) = {}^t(n_1^\Gamma, n_2^\Gamma, n_3^\Gamma)$ 表示 $x \in \Gamma(t)$ 处的单位外法向量，而 $n_\Omega = n_\Omega(x) = {}^t(n_1^\Omega, n_2^\Omega, n_3^\Omega)$ 表示 Ω $x \in \partial$ 处的单位外法向量（见图 *1*）。

应用高斯散度定理和曲面散度定理（ [25], 定理 2.3 中的第 9 节 [16]），我们可以证明引理 3.1。

现在我们利用输运定理来证明定理 2.4。

定理 *2.4* 的证明。 我们只证明 (ii)，因为 (i) 的证明类似。假设 (ρ_A, ρ_B, ρ_S) 满足 (1.2)。令 $\widetilde{Q}_A, \widetilde{Q}_B, \widetilde{Q}_S \in C(\mathbb{R}^4)$ 和 $p_A, p_B, p_S \in C^1(\mathbb{R})$。我们首先证明，对于每个 $0 < t < T$ 和 $\Lambda \subset \Omega$,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} \{\rho_A e_A - p_A(\rho_A)\} \, dx = \int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda} \{\rho_A D_t^A e_A + (\mathrm{div} v_A)\Pi_A\} \, dx, \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} \{\rho_B e_B - p_B(\rho_B)\} \, dx = \int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda} \{\rho_B D_t^B e_B + (\mathrm{div} v_B)\Pi_B\} \, dx, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{\rho_S e_S - p_S(\rho_S)\} \, d\mathcal{H}_x^2 = \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{\rho_S D_t^S e_S + (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\Pi_S\} \, d\mathcal{H}_x^2, \tag{3.3}$$

其中 (Π_A, Π_B, Π_S) 由 (2.6) 定义。我们只推导 (3.3)。利用表面输运定理 (2.3) 和 (1.2)，可验证对于 $0 < t < T$ 和 $\Lambda \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{\rho_S e_S - p_S(\rho_S)\} \, d\mathcal{H}_x^2 &= \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{(D_t^S \rho_S) e_S + \rho_S D_t e_S + \rho_S e_S (\mathrm{div}_\Gamma v_S)\} \, d\mathcal{H}_x^2 \\
&\quad + \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{-D_t^S \rho_S p_S'(\rho_S) - p_S(\rho_S)(\mathrm{div}_\Gamma v_S)\} \, d\mathcal{H}_x^2 \\
&= \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda} \{\rho_S D_t^S e_S + (\rho_S p_S'(\rho_S) - p_S(\rho_S))(\mathrm{div}_\Gamma v_S)\} \, d\mathcal{H}_x^2.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 (3.3)。我们假设对于每个 $0 < t < T$ 和 $\Lambda \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda}\{\rho_A e_A - p_A(\rho_A)\}\,dx &= \int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda}\widetilde{Q}_A\,dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda}\{\rho_B e_B - p_B(\rho_B)\}\,dx &= \int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda}\widetilde{Q}_B\,dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda}\{\rho_S e_S - p_S(\rho_S)\}\,d\mathcal{H}^2_x &= \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda}\widetilde{Q}_S\,d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}$$

应用 (3.1)-(3.3)，可得 (2.5)。因此，定理 2.4 得证。 □

下面利用分部积分证明定理 2.6 和 2.7。

定理 *2.6* 的证明。令 $r \in \{0,1\}$ 和 $0 < t < T$。令 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_S \in [C^\infty(\mathbb{R}^3)]^3$满足 (2.8)。直接计算可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} E_D[v_A^\varepsilon, v_B^\varepsilon, v_S^\varepsilon] &= -\int_{\Omega_A(t)}\{\mu_A D(v_A) : D(\varphi_A) + \lambda_A(\mathrm{div} v_A)(\mathrm{div}\varphi_A)\}\,dx\\
&\quad -\int_{\Omega_B(t)}\{\mu_B D(v_B) : D(\varphi_B) + \lambda_B(\mathrm{div} v_B)(\mathrm{div}\varphi_B)\}\,dx\\
&\quad -\int_{\Gamma(t)}\{\mu_S D_\Gamma(v_S) : D_\Gamma(\varphi_S) + \lambda_S(\mathrm{div}_\Gamma v_S)(\mathrm{div}_\Gamma\varphi_S)\}\,d\mathcal{H}^2_x,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} E_W[v_A^\varepsilon, v_B^\varepsilon, v_S^\varepsilon]\\
&\quad = \int_{\Omega_A(t)}(\mathrm{div}\varphi_A)\pi_A\,dx + \int_{\Omega_B(t)}(\mathrm{div}\varphi_B)\pi_B\,dx + \int_{\Gamma(t)}(\mathrm{div}_\Gamma\varphi_S)\pi_S\,d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}$$

利用分部积分（引理 3.1），可得

$$\begin{aligned}
(3.4)\quad \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} E_{D+W}[v_A^\varepsilon, v_B^\varepsilon, v_S^\varepsilon] &= \int_{\Omega_A(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_A(v_A,\pi_A)\cdot\varphi_A\,dx\\
&\quad + \int_{\Omega_B(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B)\cdot\varphi_B\,dx + \int_{\Gamma(t)}\mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S(v_S,\pi_S)\cdot\varphi_S\,d\mathcal{H}^2_x\\
&\quad - \int_{\Gamma(t)}\{\mathcal{T}_A(v_A,\pi_A)n_\Gamma\}\cdot\varphi_A\,d\mathcal{H}^2_x + \int_{\Gamma(t)}\{\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B)n_\Gamma\}\cdot\varphi_B\,d\mathcal{H}^2_x\\
&\quad - \int_{\partial\Omega}\{\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B)n_\Omega\}\cdot\varphi_B\,d\mathcal{H}^2_x,
\end{aligned}$$

其中，$(\mathcal{T}_A,\ \mathcal{T}_B,\ \mathcal{T}_S)$ 和 $(\widetilde{\mathcal{T}}_A,\ \widetilde{\mathcal{T}}_B)$ 由 (1.7) 和 (1.8) 定义。应用 (2.8)，可验证

$$\begin{aligned}
\text{(R.H.S) of (3.4)} &= \int_{\Omega_A(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_A(v_A,\pi_A)\cdot\varphi_A\,dx + \int_{\Omega_B(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B)\cdot\varphi_B\,dx\\
&\quad + \int_{\Gamma(t)}\{\mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S(v_S,\pi_S) + \widetilde{\mathcal{T}}_B(v_B,\pi_B)n_\Gamma - \widetilde{\mathcal{T}}_A(v_A,\pi_A)n_\Gamma\}\cdot\varphi_S\,d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}$$

这里我们用到了以下事实:

$$D(v_A)n_\Gamma\cdot\varphi_A=(n_\Gamma\cdot\{(n_\Gamma\cdot\nabla)v_A\})(n_\Gamma\cdot\varphi_S)\text{ if }r=0,$$
$$D(v_B)n_\Gamma\cdot\varphi_B=(n_\Gamma\cdot\{(n_\Gamma\cdot\nabla)v_B\})(n_\Gamma\cdot\varphi_S)\text{ if }r=0.$$

根据变分法基本引理，我们得到（2.10）。因此，定理 2.6 得证。□

定理 *2.7* 的证明。固定 $0<t<T$。令 ψ_A，ψ_B，$\psi_S\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 满足（2.9）。由于

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}E_{TD}[\theta_A^\varepsilon,\theta_B^\varepsilon,\theta_S^\varepsilon]\\&=-\int_{\Omega_A(t)}\kappa_A\nabla\theta_A\cdot\nabla\psi_A\,dx-\int_{\Omega_B(t)}\kappa_B\nabla\theta_B\cdot\nabla\psi_B\,dx-\int_{\Gamma(t)}\kappa_S\nabla_\Gamma\theta_S\cdot\nabla_\Gamma\psi_S\,d\mathcal{H}^2_x,\end{aligned}$$

我们应用分部积分（引理 3.1）、（2.9）和（1.1），可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}E_{TD}[\theta_A^\varepsilon,\theta_B^\varepsilon,\theta_S^\varepsilon]&=\int_{\Omega_A(t)}\operatorname{div}(\kappa_A\nabla\theta_A)\psi_A\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\operatorname{div}(\kappa_B\nabla\theta_B)\psi_B\,dx\\&\quad+\int_{\Gamma(t)}\{\operatorname{div}_\Gamma(\kappa_S\nabla_\Gamma\theta_S)+\kappa_B(n_\Gamma\cdot\nabla)\theta_B-\kappa_A(n_\Gamma\cdot\nabla)\theta_A\}\psi_S\,d\mathcal{H}^2_x.\end{aligned}$$

根据变分法基本引理，我们得到（2.11）。因此，定理 2.7 得证。□

4. Thermodynamical Modeling

本节采用热力学方法，为具有表面张力和流动的多相流建立数学模型。在限制条件（1.1）下，我们应用命题 2.3、热力学第一定律（定理 2.4）以及我们的能量密度（定义 2.2），推导出方程（1.2）—（1.4）。本节考虑 $\Omega_{A,T}$、$\Omega_{B,T}$, Γ_T 中的流体为正压流体的情形。

令 $r\in\{0,1\}$，以及 $p_A,p_B,p_B\in C^1(\mathbb{R})$。我们假设（$v_A,v_B,v_S,\theta_A,\theta_B,\theta_S$）满足（1.1）。我们将定义 2.2 中定义的能量密度作为具有表面流的多相流的能量密度。

根据命题 2.3，我们认为系统（1.2）是我们系统的连续性方程，也就是说，我们假设（ρ_A, ρ_B,ρ_S）满足（1.2）。

设 (Q_A,Q_B,Q_S) 为由热扩散引起的能量耗散所产生的吸热能。根据定理 2.7，我们设

$$\begin{cases}Q_A=\operatorname{div}(\kappa_A\nabla\theta_A) & \text{in }\Omega_{A,T},\\ Q_B=\operatorname{div}(\kappa_B\nabla\theta_B) & \text{in }\Omega_{B,T},\\ Q_S=\operatorname{div}_\Gamma(\kappa_S\nabla_\Gamma\theta_S)+\kappa_B(n_\Gamma\cdot\nabla)\theta_B-\kappa_A(n_\Gamma\cdot\nabla)\theta_A & \text{on }\Gamma_T.\end{cases}$$

令 $\tilde{\ }$ $Q_\sharp=Q_\sharp(x,\ t)$ 表示供给 $\Omega_\sharp(t)$ 中流体的热量，其中 $\sharp=A,\ B,\ S$，且 $\Omega_S(t):=\Gamma(t)$。由于 $e_{D_\sharp}$ 是由黏度（$\mu_\sharp,\ \lambda_\sharp$）引起能量耗散的能量密度，我们令 $Q_\sharp=Q_\sharp+e_{D_\sharp}$。现在我们接受热力学第一定律，

即假设对于每个 $0<t<T$ 和 $\Lambda\subset\Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda}\{\rho_A e_A-p_A(\rho_A)\}\,dx&=\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda}(Q_A+e_{D_A})\,dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda}\{\rho_B e_B-p_B(\rho_B)\}\,dx&=\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda}(Q_B+e_{D_B})\,dx,\\
\frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda}\{\rho_S e_S-p_S(\rho_S)\}\,d\mathcal{H}^2_x&=\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda}(Q_S+e_{D_S})\,d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}$$

由定理 2.4 可得

$$\begin{cases}
\rho_A D_t^A e_A+(\mathrm{div}v_A)\Pi_A=\mathrm{div}q_A+e_{D_A}\ \text{in}\ \Omega_{A,T},\\
\rho_B D_t^B e_B+(\mathrm{div}v_B)\Pi_B=\mathrm{div}q_B+e_{D_B}\ \text{in}\ \Omega_{B,T},\\
\rho_S D_t^S e_S+(\mathrm{div}_\Gamma v_S)\Pi_S=\mathrm{div}_\Gamma q_S+e_{D_S}+q_B\cdot n_\Gamma-q_A\cdot n_\Gamma\ \text{on}\ \Gamma_T,
\end{cases}\tag{4.1}$$

其中，$(q_A,\ q_B,\ q_S)$ 和 $(\Pi_A,\ \Pi_B,\ \Pi_S)$ 分别由（1.5）和（2.6）定义。

设 $\mathcal{F}^A,\ \mathcal{F}^B,\ \mathcal{F}^S\in[C(\mathbb{R}^4)]^3$。我们假设系统的动量方程写为

$$\begin{cases}
\rho_A D_t^A v_A=\mathcal{F}^A & \text{in}\ \Omega_{A,T},\\
\rho_B D_t^B v_B=\mathcal{F}^B & \text{in}\ \Omega_{B,T},\\
\rho_S D_t^S v_S=\mathcal{F}^S & \text{on}\ \Gamma_T.
\end{cases}\tag{4.2}$$

从热力学观点出发，我们假设系统满足总能量守恒定律，即 $(\mathcal{F}^A,\ \mathcal{F}^B,\ \mathcal{F}^S)$ 对每个 $0<t<T$ 都满足

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big\{\int_{\Omega_A(t)}\Big(\frac{1}{2}\rho_A|v_A|^2+\rho_A e_A\Big)\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\Big(\frac{1}{2}\rho_B|v_B|^2+\rho_B e_B\Big)\,dx\\
+\int_{\Gamma(t)}\Big(\frac{1}{2}\rho_S|v_S|^2+\rho_S e_S\Big)\,d\mathcal{H}^2_x\Big\}=0.
\end{aligned}\tag{4.3}$$

利用输运定理以及（1.2）、（4.1）、（4.2），我们可得

$$\begin{aligned}
\text{(L.H.S) of (4.3)}&=\int_{\Omega_A(t)}(\rho_A D_t^A v_A\cdot v_A+\rho_A D_t^A e_A)\,dx\\
&+\int_{\Omega_B(t)}(\rho_B D_t^B v_B\cdot v_B+\rho_B D_t^B e_B)\,dx+\int_{\Gamma(t)}(\rho_S D_t^S v_S\cdot v_S+\rho_S D_t^S e_S)\,d\mathcal{H}^2_x\\
&=\int_{\Omega_A(t)}\{\mathcal{F}^A\cdot v_A+\mathrm{div}q_A+e_{D_A}-(\mathrm{div}v_A)\Pi_A\}\,dx\\
&+\int_{\Omega_B(t)}\{\mathcal{F}^B\cdot v_B+\mathrm{div}q_B+e_{D_B}-(\mathrm{div}v_B)\Pi_B\}\,dx\\
&+\int_{\Gamma(t)}\{\mathcal{F}^S\cdot v_S+\mathrm{div}_\Gamma q_S+e_{D_S}-(\mathrm{div}_\Gamma v_S)\Pi_S+q_B\cdot n_\Gamma-q_A\cdot n_\Gamma\}\,d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}$$

结合（1.1）进行分部积分，我们观察到

$$\begin{aligned}\text{(L.H.S) of (4.3)} = &\int_{\Omega_A(t)} \{\mathcal{F}^A - \mathrm{div}\mathcal{T}_A(v_A,\Pi_A)\}\cdot v_A\ dx\\ +\int_{\Omega_B(t)} &\{\mathcal{F}^B - \mathrm{div}\mathcal{T}_B(v_B,\Pi_B)\}\cdot v_B\ dx + \int_{\Gamma(t)} \{\mathcal{F}^S - \mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S(v_S,\Pi_S)\}\cdot v_S\ d\mathcal{H}^2_x\\ &+\int_{\Gamma(t)} \widetilde{\mathcal{T}}_A(v_A,\Pi_A)n_\Gamma\cdot v_S\ d\mathcal{H}^2_x - \int_{\Gamma(t)} \widetilde{\mathcal{T}}_B(v_B,\Pi_B)n_\Gamma\cdot v_S\ d\mathcal{H}^2_x,\end{aligned}$$

其中，$(\widetilde{\mathcal{T}}_A,\widetilde{\mathcal{T}}_B,\mathcal{T}_S)$ 和 $(\widetilde{\mathcal{T}}_A,\widetilde{\mathcal{T}}_B)$ 分别由（1.7）和（1.8）定义。这里我们使用了以下事实：

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(t)} \{\mathcal{T}_A(v_A,\Pi_A)n_\Gamma\}\cdot v_A\ d\mathcal{H}^2_x &= \int_{\Gamma(t)} \widetilde{\mathcal{T}}_A(v_A,\Pi_A)n_\Gamma\cdot v_S\ d\mathcal{H}^2_x,\\ \int_{\Gamma(t)} \{\mathcal{T}_B(v_B,\Pi_B)n_\Gamma\}\cdot v_B\ d\mathcal{H}^2_x &= \int_{\Gamma(t)} \widetilde{\mathcal{T}}_B(v_B,\Pi_B)n_\Gamma\cdot v_S\ d\mathcal{H}^2_x.\end{aligned}$$

因此，我们设

$$\begin{cases}\mathcal{F}^A = \mathrm{div}\mathcal{T}_A(v_A,\Pi_A),\\ \mathcal{F}^B = \mathrm{div}\mathcal{T}_B(v_B,\Pi_B),\\ \mathcal{F}^S = \mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S(v_S,\Pi_S) + \widetilde{\mathcal{T}}_B(v_B,\Pi_B)n_\Gamma - \widetilde{\mathcal{T}}_A(v_A,\Pi_A)n_\Gamma\end{cases} \tag{4.4}$$

从而可知（4.3）的左端等于零。结合（4.1）、（4.2）和（4.4），可得（1.3）和（1.4）。因此，通过热力学方法，我们推导出了（1.2）—（1.4）。

最后，我们介绍另一种推导动量方程（1.4）的方法。我们假设动量的变化率等于由黏度导致的能量耗散变化所产生的力，即假设对于每个 $0<t<T$ 和 $\Lambda\subset\Omega$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda}\rho_A v_A\ dx &= \int_{\Omega_A(t)\cap\Lambda}\mathcal{F}_A\ dx,\\ \frac{d}{dt}\int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda}\rho_B v_B\ dx &= \int_{\Omega_B(t)\cap\Lambda}\mathcal{F}_B\ dx,\\ \frac{d}{dt}\int_{\Gamma(t)\cap\Lambda}\rho_S v_S\ d\mathcal{H}^2_x &= \int_{\Gamma(t)\cap\Lambda}\mathcal{F}_S\ d\mathcal{H}^2_x,\end{aligned}$$

其中，$(\mathcal{F}_A,\mathcal{F}_B,\mathcal{F}_S)$ 由（2.10）定义。结合（1.2）使用输运定理，我们得到（1.4）。

5. Conservative Forms and Conservation Laws

我们研究该模型的守恒定律，以证明定理 2.8。

*定理 2.8 的证明。*令 $r\in\{0,1\}$。直接计算可得 (i)（见注 1.3）。现在证明 (ii)。由命题 2.3 和第 4 节中的论证可知 (1.12) 和 (1.13) 成立。利用 (1.2) 和

(1.4) 以及输运定理（定义2.1），可知

$$
\begin{aligned}
(5.1)\quad & \frac{d}{dt}\bigg(\int_{\Omega_A(t)}\frac{1}{2}\rho_A|v_A|^2\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\frac{1}{2}\rho_B|v_B|^2\,dx+\int_{\Gamma(t)}\frac{1}{2}\rho_S|v_S|^2\,d\mathcal{H}^2_x\bigg)\\
&=\int_{\Omega_A(t)}\rho_A D_t^A v_A\cdot v_A\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\rho_B D_t^B v_B\cdot v_B\,dx+\int_{\Gamma(t)}\rho_S D_t^S v_S\cdot v_S\,d\mathcal{H}^2_x\\
&\qquad=\int_{\Omega_A(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_A(v_A,\pi_A)\cdot v_A\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B)\cdot v_B\,dx\\
&\qquad\quad+\int_{\Gamma(t)}\{\mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S(v_S,\pi_S)+\widetilde{\mathcal{T}}_B(v_B,\pi_B)n_\Gamma-\widetilde{\mathcal{T}}_A(v_A,\pi_A)n_\Gamma\}\cdot v_S\,d\mathcal{H}^2_x.
\end{aligned}
$$

应用分部积分（引理 3.1）和（1.1），可验证

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{R.H.S})\text{ of }(5.1)=\int_{\Omega_A(t)}\{-e_{D_A}+(\mathrm{div}v_A)\pi_A\}\,dx\\
&\qquad+\int_{\Omega_B(t)}\{-e_{D_B}+(\mathrm{div}v_B)\pi_B\}\,dx+\int_{\Gamma(t)}\{-e_{D_S}+(\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S\}\,d\mathcal{H}^2_x,
\end{aligned}
$$

其中 $(e_{D_A},\ e_{D_B},\ e_{D_S})$ 由（1.6）定义。对 t 积分，得到（1.14）。

最后，我们证明（iii）。假设 $r=1$。根据（定义2.1和引理 3.1）中的输运定理和散度定理，并结合（2.12），可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\bigg(\int_{\Omega_A(t)}\rho_A v_A\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\rho_B v_B\,dx+\int_{\Gamma(t)}\rho_S v_S\,d\mathcal{H}^2_x\bigg)\\
&\qquad=\int_{\Omega_A(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_A(v_A,\pi_A)\,dx+\int_{\Omega_B(t)}\mathrm{div}\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B)\,dx\\
&\quad+\int_{\Gamma(t)}\{\mathrm{div}_\Gamma\mathcal{T}_S(v_S,\pi_S)+\mathcal{T}_B(v_B,\pi_B)n_\Gamma-\mathcal{T}_A(v_A,\pi_A)n_\Gamma\}\,d\mathcal{H}^2_x={}^t(0,0,0).
\end{aligned}
$$

对 t积分，得到（1.15）。因此，定理 2.8 得证。 □

6. Thermodynamic Potential

我们研究模型的热力学势，以证明定理 2.9。

定理 *2.9* 的证明。我们只证明 $\sharp=S$ 的情形。令 $r\in\{0,1\}$。假设 ρ_S 和 θ_S 是正函数。设 $h_S=e_S+\pi_S/\rho_S$、$F_S^H=e_S-\theta_S\varsigma_S$、$F_S^G=h_S-\theta_S\varsigma_S$。假设 e_S 满足热力学恒等式:

$$
(6.1)\qquad D_t^S e_S=\theta_S D_t^S\varsigma_S-\pi_S D_t^S\bigg(\frac{1}{\rho_S}\bigg).
$$

我们首先推导（1.16）。由（1.2）和（1.3）可知,

$$
\begin{aligned}
\rho_S D_t^S h_S&=\rho_S D_t^S e_S+\rho_S D_t^S\bigg(\frac{\pi_S}{\rho_S}\bigg)\\
&=\mathrm{div}_\Gamma q_S+e_{D_S}+q_B\cdot n_\Gamma-q_A\cdot n_\Gamma+D_t^S\pi_S.
\end{aligned}
$$

这表明

$$D_t^N(\rho_S h_S) + \mathrm{div}_\Gamma(\rho_S h_S v_S - q_S) = \rho_S D_t^S h_S - \mathrm{div}_\Gamma q_S$$
$$= e_{D_S} + D_t^S \pi_S + q_B \cdot n_\Gamma - q_A \cdot n_\Gamma,$$

即为（1.16）。

接下来我们证明（1.17）。由（1.3）和（6.1），可得

$$\theta_S \rho_S D_t^S \varsigma_S = \rho_S D_t^S e_S + \rho_S \pi_S D_t^S \left(\frac{1}{\rho_S}\right)$$
$$= \mathrm{div}_\Gamma q_S + e_{D_S} + q_B \cdot n_\Gamma - q_A \cdot n_\Gamma.$$

利用上述等式和（1.16），可验证

$$D_t^N(\rho_S \varsigma_S) + \mathrm{div}_\Gamma\left(\rho_S \varsigma_S v_S - \frac{q_S}{\theta_S}\right) = \rho_S D_t^S h_S - \mathrm{div}_\Gamma\left(\frac{q_S}{\theta_S}\right)$$
$$= \frac{e_{D_S}}{\theta_S} + \frac{q_S \cdot \mathrm{grad}_\Gamma \theta_S}{\theta_S^2} + \frac{q_B \cdot n_\Gamma - q_A \cdot n_\Gamma}{\theta_S}.$$

因此，我们得到（1.17）。

最后，我们推导出（1.18）和（1.19）。应用（6.1）和（1.2），可得

$$\rho_S D_t^S F_S^H + \rho_S \varsigma_S D_t^S \theta_S = \rho_S D_t^S e_S - \rho_S \theta_S D_t^S \varsigma_S$$
$$= -(\mathrm{div}_\Gamma v_S)\pi_S,$$

并且

$$\rho_S D_t^S F_S^G + \rho_S \varsigma_S D_t^S \theta_S = \rho_S D_t^S h_S - \rho_S \theta_S D_t^S \varsigma_S$$
$$= D_t^S \pi_S.$$

因此，定理 2.9 得证。 □

数据可用性：作者声明，由于本研究未生成或分析任何数据集，因此数据共享不适用于本文。

利益冲突：作者声明与本文相关的利益冲突。

致谢：本研究部分得到了日本学术振兴会（JSPS）科学研究费补助金的资助，科研费资助编号 JP21K03326。

References

[1] Fierros Palacios Angel, *The Hamilton-type principle in fluid dynamics. Fundamentals and applications to magnetohydrodynamics thermodynamics and astrophysics*。SpringerWien-NewYork，维也纳，2006年。xxvi+404页。ISBN:978-3-211-24964-2；3-211-24964-8 MR2286737[2] Marc Arnaudon 和 Ana Bela Cruzeiro, *Lagrangian Navier-Stokes diffusions on manifolds: variational principle and stability*。《数学科学通报》（），第—期。MR 2995006

[3] David E. Betounes, *Kinematics of submanifolds and the mean curvature normal*。《理性力学与分析档案》96（1986），第1期，1–27。MR0853973[4] Dieter Bothe 和 Jan Pr¨uss, *On the two-phase Navier-Stokes equations with Boussinesq-Scriven surface fluid*。《数学流体力学杂志》（），第—期。MR。[5] M. J. Boussinesq, *Sur l'existence d'une viscosité seperficielle dans la mince couche de transition séparant un liquide d'un autre fluide contigu*，《化学与物理年鉴》（），–。[6] Gerhard Dziuk 和 Charles M. Elliott, *Finite elements on evolving surfaces*。《IMA数值分析杂志》27（2007），第2期，262–292。MR2317005。[7] Eduard Feireisl, *Mathematical thermodynamics of viscous fluids*。《复杂流体的数学热力学》，47–100，数学讲义，第2200卷，Fond. CIME/CIME Found. Subser.，施普林格，Cham，2017年。MR3729354

[8] Ren ´ *Mechanical and thermodynamical modeling of fluid* ee Gatignol 和 *interfaces* 2001 +248 =9810243057 Roger Prud'homme，。世界科学出版社，新加坡，。xviii，页。ISBN。[9] J. Willard Gibbs, *The scientific papers of J. Willard Gibbs. Vol. I: Thermodynamics*。多佛出版社，纽约 1961 1906 +434 0128829 / xxvi页。MR Morton E. Gurtin、Allan Str [10] uthers 和 William O. Williams, *A transport theorem for moving interfaces* 47 1989 4, 773 777 。《应用数学季刊》（），第—1031691 期。MR[11] Morton E. Gurtin、Elliot Fried 和 *The mechanics and thermodynamics of con-* Lallit Anand, *tinua* 2010 +694 978 0 521 40598 0 。剑桥大学出版社，剑桥，。xxii页。ISBN: - - - - MR2884384 [12] ´ *Non-equilibrium Thermodynamics* 1970 978 3 642 51067 0 Istvan Gyarmati。。施 [13] 普林格，。ISBN: - - - - Yunkyong Hyon、Do Y. Kwak 和 Chun Liu, *Energetic variational approach in complex fluids: maximum dissipation principle* 26 2010 4, 1291 。《离散与连续动力系统》（），第—期，–1304。MR2600746[14] Hajime Koba, *On Derivation of Compressible Fluid Systems on an Evolving Surface*。《应用数学季刊》，76（2018），第2期，303–359。[15] Hajime Koba, *On Generalized Compressible Fluid Systems on an Evolving Surface with a Boundary* 1810 07909 ，预印本。arXiv:。。即将发表于《应用数学季刊》。[16] Hajime Koba, *On Generalized Diffusion and Heat Systems on an Evolving Surface with a Boundary* 78 2020 617 640 ，《应用数学季刊》（），- [17] Hajime Koba, *Energetic Variational Approaches for inviscid multiphase flow systems with surface flow and tension* 2211 06672 ，预印本。arXiv:。[18] Hajime Koba、Chun Liu 和 Yoshikazu Giga, *Energetic variational approaches for incompressible fluid systems on an evolving surface* 75 2017 2, 359 389 ，《应用数学季刊》（），第–期。MR3614501。 *Errata to Energetic variational approaches for incompressible fluid systems onan evolving surface*。《应用数学季刊》76（2018），第1期，147–152。[19] Hajime Koba 和 Kazuki Sato, *Energetic variational approaches for non-Newtonian fluid systems* 2018 69 143 10 1007 00033 018 1039 1 。《应用数学与物理杂志》（）：。https://doi.org/。/s - - -。[20] Yoshihiko Mitsumatsu 和 Yasuhisa Yano, *Geometry of an incompressible fluid on a Riemannian manifold* — — — 2002 。（日文）几何力学（日文）（京都，）。Surikaisekikenkyusho Kokyuroku 第1260号（2002），33–47。[21] Jan Pr ¨ uss 和 Gieri Simonett, *Moving interfaces and quasilinear parabolic evolution equations* 105 [ ], 2016 +609 。数学专著，。Birkhauser/施普林格，Cham。xix页。ISBN: 978-3-319-27697-7; 978-3-319-27698-4 MR3524106[22] L.E. Scriven, *Momentum and moment of momentum balances for moving surfaces* 19, 1964, 379 385 。《化学工程科学》，12（1960），98–108。[23] John C. Slattery, 《化学工程科学》，第卷，页–。[24] John C. Slattery、Leonard. Sagis 和 Eun-Suok Oh, *Interfacial transport phenomena. Second edition* 2007 +827 978 0 387 38438 2 0 387 38438 3 。施普林格，纽约，。xviii页。ISBN: - - - -; - - - MR2284654。[25] Leon Simon, *Lectures on geometric measure theory*。澳大利亚国立大学数学分析中心论文集，第3卷。澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983年。vii，272 页。ISBN: 0-86784-429-9 MR0756417。[26] Michael E. Taylor, *evolution equations Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other* 17 1992 9 10, 1407 1456 。《偏微分方程通讯》（），第-期–。MR1187618。

Graduate School of Engineering Science, Osaka University, 1-3 Machikaneyamacho, Toyonaka, Osaka, 560-8531, Japan*Email address*: iti@sigmath.es.osaka-u.ac.jp