arXiv:2301.02861v1 [math.NT] 7 Jan 2023

涉及退化调和数与退化超调和数的恒等式

HYE KYUNG KIM[1], DAE SAN KIM[2], 和 TAEKYUN KIM[3],*

摘要。自古以来，人们便开始研究调和数，而超调和数由 Conway 和 Guy 于 1996年 引入。退化调和数和退化超调和数分别是它们的退化版本。本文旨在进一步研究与第一类退化斯特林数、退化 Daehee 数和退化错排数相关的退化调和数与退化超调和数的若干性质、递推关系及恒等式。

1. 引言

近年来，人们研究了许多特殊数和多项式的各种退化版本，并取得了许多引人入胜且富有成果的结果（参见 [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] 及其中的参考文献）。这项研究始于 Carlitz 关于退化伯努利数和退化欧拉数的工作（参见 [2]）。值得一提的是，对退化版本的探索并不局限于多项式和数，还扩展到了伽马函数等超越函数（参见 [9, 10]）。此外，λ-umbra 演算和 λ-q-umbra 演算分别作为 umbra 演算和 q-umbra 演算的退化版本被引入（参见 [6, 11]）。事实证明，在处理退化 Sheffer 多项式和退化q-Sheffer多项式时，λ-umbra 演算和 λ-q-umbra演算比 umbra 演算和 q-umbra 演算更为方便。

本文旨在进一步研究与第一类退化斯特林数、退化 Daehee 数和退化错排数相关的退化调和数（见 (6)）及退化超调和数（见 (7)、(8)）的一些性质、递推关系和恒等式。退化调和数和退化超调和数分别是调和数和超调和数的退化形式，后者由 [4] 引入。

本文的结构如下。第 1 节回顾退化指数函数和退化对数函数。我们先介绍调和数，以及超调和数及其由 Conway 和 Guy 给出的显式表达式（见 [4]）。接着回顾它们的退化形式，即退化调和数和退化超调和数及其显式表达式（见 [7, 8]）。我们还介绍近期引入的第一类退化斯特林数和 r 阶退化 Daehee 数。第 2 节是本文的主要内容。定理 1 给出了 r 阶退化超调和数用低阶同类数表示的表达式。定理 2 和定理 3 分别将 Daehee 数表示为退化调和数和退化超调和数。定理 4 则将退化调和数表示为 r 阶退化超调和数。

2010年数学主题分类：05A19；11B73；11B83。关键词和短语：退化调和数；退化超调和数；退化 Daehee 数；退化对数；第一类退化斯特林数；退化错排数。* 为通讯作者。

在定理 5 中，退化 Daehee 数被表示为 r 阶退化 Daehee 数 -1 和退化超调和数。定理 6 推导出退化超调和数与退化 Daehee 数之间的一个简单关系。定理 7 推导出一个涉及退化超调和数和退化错排数的恒等式。定理 8 将退化 Daehee 数表示为第一类退化斯特林数的形式。最后，定理 9 得到一个涉及第一类退化斯特林数和退化调和数的恒等式。

对于任意非零的 $\lambda \in \mathbb{R}$，退化指数函数定义为

$$e_\lambda^x(t) = (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} (x)_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!}, \quad e_\lambda(t) = e_\lambda^1(t), \quad \text{(see [2, 8])}, \tag{1}$$

其中

$$(x)_{0,\lambda} = 1, \ (x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda), \ (n \geq 1), \quad \text{(see [8])}.$$

令 $\log_\lambda t$ 为 $e_\lambda(t)$ 的复合反函数，使得 $e_\lambda(\log_\lambda t) = \log_\lambda e_\lambda(t) = t$。它称为退化对数，定义为

$$\log_\lambda(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}(1)_{k,\frac{1}{\lambda}}}{k!} t^k = \frac{1}{\lambda}((1+t)^\lambda - 1), \quad \text{(see [5])}. \tag{2}$$

调和数定义为

$$H_0 = 0, \ H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{(see [3, 4, 16])}. \tag{3}$$

1996年，Conway 和 Guy 引入了 r 阶超调和数 $H_n^{(r)}$（$n, r \geq 0$），其定义为

$$H_0^{(r)} = 0, \ (r \geq 0), \ H_n^{(0)} = \frac{1}{n}, \ (n \geq 1), \ H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} H_k^{(r-1)}, \ (n, r \geq 1), \quad \text{(see [4])}. \tag{4}$$

因此，由（4）可得

$$H_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{n} (H_{n+r-1} - H_{r-1}), \quad (r \geq 1), \quad \text{(see [4])}. \tag{5}$$

近期，退化调和数定义为

$$H_{0,\lambda} = 0, \ H_{n,\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \binom{\lambda}{k} (-1)^{k-1}, \quad (n \geq 1), \quad \text{(see [8])}. \tag{6}$$

注意，$\lim_{\lambda \to 0} H_{n,\lambda} = H_n$。阶数为 r 的退化超调和数 $H^{(r)}{}_{n\lambda}$（$n, r \geq 0$）定义为

$$H_{0,\lambda}^{(r)} = 0, \ (r \geq 0), \ H_{n,\lambda}^{(0)} = \frac{1}{\lambda} \binom{\lambda}{n} (-1)^{n-1}, \ (n \geq 1), \ H_{n,\lambda}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} H_{k,\lambda}^{(r-1)}, \ (n, r \geq 1), \quad \text{(see [7])}. \tag{7}$$

由（6）和（7）可知，$H^{(1)}{}_{n\lambda} = H_{n,\lambda}$。由（7）可知

$$H_{n,\lambda}^{(r)} = \frac{(-1)^{r-1}}{\binom{\lambda-1}{r-1}} \binom{n+r-1}{n} (H_{n+r-1,\lambda} - H_{r-1,\lambda}), \quad \text{(see [7])}, \tag{8}$$

w这里 n、r 为正数。由（5）和（8）可观察到 $\lim_{\lambda \to 0} H^{(r)}_{n\lambda} = H_n^{(r)}$.

在 [5],中，第一类退化斯特林数定义为

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} S_{1,\lambda}(n,k)(x)_{k,\lambda}, \quad (n \geq 0), \quad (\text{see [5, 8]}), \tag{9}$$

其中 $(x)_0 = 1$, $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, $(n \geq 1)$。

对于 $r \in \mathbb{N}$，r 阶退化 Daehee 数定义为

$$\left(\frac{\log_\lambda(1+t)}{t}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n,\lambda}^{(r)} \frac{t^n}{n!}, \quad (\text{see [11]}). \tag{10}$$

特别地，对于 $r = 1$，$D_{n,\lambda} = D_{n,\lambda}^{(1)}$ 称为退化 Daehee 数

2. 涉及退化调和数与退化超调和数的恒等式

由 (6) 和 (7)，我们注意到

$$-\frac{\log_\lambda(1-t)}{(1-t)} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda} t^n, \quad (\text{see [7]}), \tag{11}$$

and

$$-\frac{\log_\lambda(1-t)}{(1-t)^r} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda}^{(r)} t^n, \quad (\text{see [7]}), \tag{12}$$

其中 r 是非负整数。

由 (12) 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda}^{(r-1)} t^n &= -\frac{\log_\lambda(1-t)}{(1-t)^r}(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda}^{(r)} t^n (1-t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda}^{(r)} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda}^{(r)} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (H_{n,\lambda}^{(r)} - H_{n-1,\lambda}^{(r)}) t^n. \end{aligned} \tag{13}$$

比较 (13) 两边的系数，得

$$H_{n,\lambda}^{(r)} = H_{n-1,\lambda}^{(r)} + H_{n,\lambda}^{(r-1)}. \tag{14}$$

对于 $1 \leq s \leq r$，由 (12) 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda}^{(r)} t^n &= -\frac{\log_\lambda(1-t)}{(1-t)^r} = -\frac{\log_\lambda(1-t)}{(1-t)^{r-s}} \frac{1}{(1-t)^s} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} H_{l,\lambda}^{(r-s)} t^l \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+s-1}{k} t^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} H_{l,\lambda}^{(r-s)} \binom{n-l+s-1}{s-1} t^n. \end{aligned} \tag{15}$$

比较 (15) 两边的系数，得

$$H_{n,\lambda}^{(r)} = \sum_{l=1}^{n} H_{l,\lambda}^{(r-s)} \binom{n-l+s-1}{s-1}, \tag{16}$$

其中 $r、s \in \mathbb{Z}$ with $1 \leq s \leq r$。特别地，对于 $r = s$，有

$$H_{n,\lambda}^{(r)} = \sum_{l=1}^{n} H_{l,\lambda}^{(0)} \binom{n-l+r-1}{r-1} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \binom{\lambda}{l} (-1)^{l-1} \binom{n-l+r-1}{r-1}. \tag{17}$$

因此，由式 (16) 和 (17)，我们得到以下定理。

定理 1. 对于 $r, s \in \mathbb{Z}$ 满足 $1 \leq s \leq r$，我们有

$$H_{n,\lambda}^{(r)} = \sum_{l=1}^{n} H_{l,\lambda}^{(r-s)} \binom{n-l+s-1}{s-1},$$

and

$$H_{n,\lambda}^{(r)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \binom{\lambda}{l} (-1)^{l-1} \binom{n-l+r-1}{r-1}.$$

由 (11) 和 (14)，可知

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!} &= \frac{\log_\lambda(1+t)}{t} = \frac{\log_\lambda(1+t)}{1+t} \frac{1+t}{t} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} H_{k,\lambda} t^k \right) \left(1 + \frac{1}{t} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} H_{n,\lambda} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H_{n+1,\lambda} t^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (H_{n+1,\lambda} - H_{n,\lambda}) t^n. \end{aligned} \tag{18}$$

Th因此，通过比较 (18) 两边的系数，我们得到以下定理 .

定理 2. 对于 $n \geq 0$，有

$$D_{0,\lambda} = 1,\ D_{n,\lambda} = (-1)^n n! (H_{n+1,\lambda} - H_{n,\lambda}),\ (n \geq 1).$$

由 (12)，可知

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!} &= \frac{\log_\lambda(1+t)}{t} = \frac{\log_\lambda(1+t)}{t(1+t)^r} (1+t)^r \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} H_{k+1,\lambda}^{(r)} (-1)^k t^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{r}{l} t^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} H_{k+1,\lambda}^{(r)} \binom{r}{n-k} (-1)^k \right) t^n. \end{aligned} \tag{19}$$

因此，由 (19) 得到以下定理

定理 3. 对于 $n \geq 0$，我们有

$$D_{n,\lambda} = n! \sum_{k=0}^{n} H_{k+1,\lambda}^{(r)} \binom{r}{n-k} (-1)^k.$$

现在，由 (2) 可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!} = \frac{\log_\lambda(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\lambda}{n} \frac{1}{\lambda} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n+1} \frac{1}{\lambda} t^n. \tag{20}$$

因此，由（20）式可得

$$D_{n,\lambda} = n! \frac{1}{\lambda} \binom{\lambda}{n+1} = \frac{(\lambda-1)_n}{n+1}, \quad (n \geq 0). \tag{21}$$

由（11）式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda} t^n &= -\frac{\log_\lambda(1-t)}{1-t} = -\frac{\log_\lambda(1-t)}{t}\frac{t}{1-t} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} D_{l,\lambda}(-1)^l \frac{t^l}{l!}\sum_{m=1}^{\infty} t^m \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n-1} D_{l,\lambda}\frac{(-1)^l}{l!}\right)t^n.\end{aligned} \tag{22}$$

因此，由定理 3 和式（22），可得

$$\begin{aligned}H_{n,\lambda} &= \sum_{l=0}^{n-1} D_{l,\lambda}\frac{(-1)^l}{l!} = \sum_{l=0}^{n-1}\frac{(-1)^l}{l!} l! \sum_{k=0}^{l} H_{k+1,\lambda}^{(r)}\binom{r}{l-k}(-1)^k \\ &= \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+l} H_{k+1,\lambda}^{(r)}\binom{r}{l-k}, \quad (n \geq 1).\end{aligned} \tag{23}$$

因此，由式（23）可得以下定理。

定理 4。对于 $n \geq 1$，有

$$H_{n,\lambda} = \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+l}\binom{r}{l-k} H_{k+1,\lambda}^{(r)}.$$

由式（10）可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} D_{n,\lambda}^{(r)}\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{\log_\lambda(1+t)}{t}\right)^r = \frac{\log_\lambda(1+t)}{t(1+t)^k}\left(\frac{\log_\lambda(1+t)}{t}\right)^{r-1}(1+t)^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1} H_{i,\lambda}^{(k)} t^{i-1}\sum_{j=0}^{\infty} D_{j,\lambda}^{(r-1)}\frac{t^j}{j!}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{k}{l}t^l \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i H_{i+1,\lambda}^{(k)} t^i \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j} D_{j,\lambda}^{(r-1)}(k)_{m-j}\right)\frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^i\binom{n-i}{j}\frac{(k)_{n-i-j}}{(n-i)!} D_{j,\lambda}^{(r-1)} H_{i+1,\lambda}^{(k)}\right)t^n.\end{aligned} \tag{24}$$

因此，通过比较式（24）两边的系数，可得以下定理。

定理 5. 对于 n、k ≥ 0 和 r ≥ 1，我们有

$$D_{n,\lambda}^{(r)} = n!\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^i\binom{n-i}{j}\frac{(k)_{n-i-j}}{(n-i)!} D_{j,\lambda}^{(r-1)} H_{i+1,\lambda}^{(k)}.$$

由（11）式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} H_{n,\lambda} t^n &= -\frac{\log_\lambda(1-t)}{1-t} = \frac{\log_\lambda(1-t)}{-t}\frac{t}{1-t} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l D_{l,\lambda}\frac{t^l}{l!}\sum_{j=1}^{\infty} t^j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{D_{l,\lambda}}{l!}\right)t^n.\end{aligned} \tag{25}$$

因此，通过比较（25）式两边的系数，可得

$$H_{n,\lambda}=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{D_{l,\lambda}}{l!},\quad (n\geq 1). \tag{26}$$

由 (12) 可得如下结果。

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}H_{n,\lambda}^{(r)}t^n&=-\frac{\log_\lambda(1-t)}{t}\frac{t}{(1-t)^r}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}D_{l,\lambda}(-1)^l\frac{t^l}{l!}\sum_{m=1}^{\infty}\binom{r+m-2}{m-1}t^m\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\binom{r+m-2}{r-1}\frac{D_{n-m,\lambda}}{(n-m)!}(-1)^{n-m}\right)t^n.\end{aligned} \tag{27}$$

因此，由 (26) 和 (27) 可得以下定理。

定理 6. 对于 $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$，有

$$H_{n,\lambda}=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{D_{l,\lambda}}{l!},\quad (n\geq 1),$$

and

$$H_{n,\lambda}^{(r)}=\sum_{m=1}^{n}\binom{r+m-2}{r-1}\frac{D_{n-m,\lambda}}{(n-m)!}(-1)^{n-m}.$$

退化错排数定义如下:

$$\frac{1}{1-t}e_\lambda(-t)=\sum_{n=0}^{\infty}d_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}. \tag{28}$$

因此，我们注意到

$$d_{n,\lambda}=n!\sum_{k=0}^{n}(1)_{k,\lambda}\frac{(-1)^k}{k!},\quad (n\geq 0).$$

现在，我们注意到

$$\begin{aligned}-\frac{\log_\lambda(1-t)}{(1-t)^r}e_\lambda(-t)&=\sum_{l=1}^{\infty}H_{l,\lambda}^{(r)}t^l\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}(-1)^kt^k\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}H_{l,\lambda}^{(r)}\frac{(1)_{n-l,\lambda}}{(n-l)!}(-1)^{n-l}\right)t^n.\end{aligned} \tag{29}$$

另一方面，由式（28）可得

$$\begin{aligned}\frac{-\log_\lambda(1-t)}{(1-t)^r}e_\lambda(-t)&=-\frac{\log_\lambda(1-t)}{(1-t)^{r-1}}\frac{1}{1-t}e_\lambda(-t)\\&=\sum_{l=1}^{\infty}H_{l,\lambda}^{(r-1)}t^l\sum_{k=0}^{\infty}d_{k,\lambda}\frac{t^k}{k!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}H_{l,\lambda}^{(r-1)}\frac{d_{n-l,\lambda}}{(n-l)!}\right)t^n.\end{aligned} \tag{30}$$

因此，由式（29）和（30）可得以下定理。

定理 7. 对于 $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$，我们有

$$\sum_{l=1}^{n}H_{l,\lambda}^{(r)}\frac{(1)_{n-l,\lambda}}{(n-l)!}(-1)^{n-l}=\sum_{l=1}^{n}H_{l,\lambda}^{(r-1)}\frac{d_{n-l,\lambda}}{(n-l)!}.$$

令 Y $=\log_\lambda(1+t)$。那么，对于 N ≥ 1，我们有

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^N Y &= (\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-N+1)(1+t)^{\lambda-N}\\ &= \frac{N!}{\lambda}\binom{\lambda}{N}e_\lambda^{\lambda-N}(\log_\lambda(1+t))\\ &= \frac{N!}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-N)_{k,\lambda}\frac{1}{k!}(\log_\lambda(1+t))^k\\ &= \frac{N!}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-N)_{k,\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}S_{1,\lambda}(n,k)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{N!}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{n}S_{1,\lambda}(n,k)(\lambda-N)_{k,\lambda}\right)\frac{t^n}{n!},\end{aligned} \tag{31}$$

其中 N 为正整数。

另一方面，由 (10) 可得

$$Y=\log_\lambda(1+t)=\frac{\log_\lambda(1+t)}{t}t=\sum_{n=1}^{\infty}nD_{n-1,\lambda}\frac{t^n}{n!}. \tag{32}$$

因此，由 (32) 可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^N Y &= \sum_{n=N}^{\infty}nD_{n-1,\lambda}n(n-1)\cdots(n-N+1)\frac{t^{n-N}}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+N)D_{n+N-1,\lambda}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{33}$$

因此，由 (31) 和 (33)，我们得到以下定理。

定理 8. 对于 N $\in\mathbb{N}$ 且 n $\geq$ N -1，有

$$D_{n,\lambda}=\frac{N!}{n+1}\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{n-N+1}S_{1,\lambda}(n-N+1,k)(\lambda-N)_{k,\lambda}.$$

接下来，令 F $=-\log_\lambda(1-t)$。那么，对于 N ≥ 1，有

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^N F &= (-1)^{N+1}(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-N+1)(1-t)^{\lambda-N}\\ &= (-1)^{N+1}\frac{N!}{\lambda}\binom{\lambda}{N}e_\lambda^{\lambda-N}(\log_\lambda(1-t))\\ &= (-1)^{N+1}N!\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-N)_{k,\lambda}\frac{1}{k!}(\log_\lambda(1-t))^k\\ &= (-1)^{N+1}N!\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-N)_{k,\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}S_{1,\lambda}(n,k)(-1)^n\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(N!\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-N-1}(\lambda-N)_{k,\lambda}S_{1,\lambda}(n,k)\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{34}$$

另一方面，由（11）式可得

$$F=-\log_\lambda(1-t)=-\frac{\log_\lambda(1-t)}{1-t}(1-t)=\sum_{n=1}^{\infty}(H_{n,\lambda}-H_{n-1,\lambda})t^n. \tag{35}$$

因此，由（35）式且对于 $\mathrm{N} \geq 1$，可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^N F &= \sum_{n=N}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-N+1)(H_{n,\lambda}-H_{n-1,\lambda})t^{n-N} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+N)(n+N-1)\cdots(n+1)(H_{n+N,\lambda}-H_{n+N-1,\lambda})t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} N!\binom{n+N}{N}(H_{n+N,\lambda}-H_{n+N-1,\lambda})t^n.\end{aligned} \tag{36}$$

因此，由 (34) 和 (36)，我们得到以下定理。

定理 9. 对于 $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ 和 $\mathrm{n} \geq 0$，有

$$\frac{1}{n!}\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{N}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-N-1}(\lambda-N)_{k,\lambda}S_{1,\lambda}(n,k) = \binom{n+N}{N}(H_{n+N,\lambda}-H_{n+N-1,\lambda}).$$

由定理 9 和 (6)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-N-1}(\lambda-N)_{k,\lambda}S_{1,\lambda}(n,k) &= \frac{\binom{n+N}{N}}{\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{N}}(H_{n+N,\lambda}-H_{n+N-1,\lambda}) \\ &= \frac{\binom{n+N}{N}}{\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{N}}\frac{1}{\lambda}\binom{\lambda}{n+N}(-1)^{n+N-1} = (-1)^{n+N-1}\frac{\binom{\lambda}{N+n}}{\binom{\lambda}{N}}\binom{n+N}{N}.\end{aligned} \tag{37}$$

因此，由 (37)，我们得到以下推论。

推论 10. 对于 $\mathrm{n} \geq 0$ 和 $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$，有

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(\lambda-N)_{k,\lambda}S_{1,\lambda}(n,k) = \frac{\binom{\lambda}{n+N}}{\binom{\lambda}{N}}\binom{n+N}{N}.$$

注 11. 根据推论 10 并令 $\lambda \to 0$，我们得到

$$(-1)^n\frac{N}{n+N}\binom{n+N}{N} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k N^k S_1(n,k).$$

注 12. 近年来，已有多位研究者对大惠数及其相关主题进行了各种研究。感兴趣的读者可参阅 [1, 12, 13, 14, 15, 17, 18]。

3. 结论

在探索某些特殊数和多项式的退化版本时，人们使用了多种不同的工具，包括生成函数、组合方法、符号微积分、p 进分析、微分方程、概率论、算子理论、特殊函数和解析数论（参见 [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] 及其中的参考文献）。本文采用生成函数的初等方法研究退化调和数和退化超调和数。结合第一类退化斯特林数、退化代赫数和退化错排，推导出了这些数的一些性质、递推关系和恒等式。

我们希望继续研究某些特殊数和多项式的各种退化形式，尤其是它们在物理学、科学和工程学中的应用。

致谢
Th作者感谢 Jangjeon 数学科学研究所对本研究的支持。 .

数据和材料的可用性 不适用。

资金支持
本研究得到韩国国家研究基金会基础科学研究计划的资助，项目编号为 NRF-2021R1F1A1050151。

伦理审批与参与同意
所有作者声明，本文的撰写不存在任何伦理问题。

利益冲突
所有作者均声明不存在利益冲突。

发表同意
所有作者均希望在本期刊上发表本文。

作者贡献
所有作者均已阅读并批准最终手稿。

参考文献

[1] S. Araci、U. Duran 和 M. Acikgoz，关于加权 q-Daehee 多项式及其应用。《Indag. Math.》（新系列）30（2019），第 2 期，365–374 页。[2] L. Carlitz，退化 Stirling 数、伯努利数和欧拉数。《Utilitas Math.》15（1979），51–88 页。[3] L. Comtet，《高级组合学：有限与无限展开的艺术》。修订增补版。D. Reidel Publishing Co.，Dordrecht，1974。xi+343 页。ISBN：90-277-0441-4。[4] J. H. Conway 和 R. K. Guy，《数之书》。Copernicus，纽约，1996年。x+310 页。ISBN：0-387-97993-X。[5] D. S. Kim 和 T. Kim，关于一种新型退化伯努利数的注记。《Russ. J. Math. Phys.》27 2，227 2020 235 ( )，第 - 期。[6] D. S. Kim 和 T. Kim，退化谢弗序列和λ-谢弗序列。《J. Math. Anal. Appl.》493（2021），第 1 期，124521。[7] T. Kim 和 D. S. Kim，关于退化超调和数的一些恒等式。《Georgian Math. J.》，2022（2022）。https://doi.org/ 10 1515 2022 2203 。/gmj- - T. Kim 和 D. S. Kim，关于一些退化微分算子和退化差分算子[8]。《Russ. J. Math. Phys.》29（2022），第 1 期，37–46 页。[9] T. Kim 和 D. S. Kim，退化拉普拉斯变换和退化伽马函数。《Russ. J. Math. Phys.》24（2017），第 2 期，241–248 页。[10] T. Kim 和 D. S. Kim，关于退化伽马函数的注记。《Russ. J. Math. Phys.》27（2020），第 3 期，352–358 页。[11] T. Kim、D. S. Kim 和 H. K. Kim，λ-q-谢弗序列及其应用。《Demonstr. Math.》55（2022），843–865 页。[12] T. Kim、D. S. Kim、H. Lee 和 J. Kwon，以退化 Daehee 多项式表示。《Open Math.》20（2022），第 1 期，179–194 页。[13] J. Kwon、W. J. Kim 和 S.-H. Rim，关于由 $\mathbb{Z}_p$上的 p 进积分导出的第二型 Daehee 多项式和 Changhee 多项式的一些恒等式。《Proc. Jangjeon Math. Soc.》22（2019），第 3 期，487–497 页。[14] J. G. Lee、J. Kwon、G.-W. Jang 和 L.-C. Jang，关于λ-Daehee 多项式的一些恒等式。《J. Nonlinear Sci. Appl.》10（2017），第 8 期，4137–4142 页。[15] J.-W. Park、B. M. Kim 和 J. Kwon，关于修正退化 Daehee 多项式和数。《J. Nonlinear Sci. Appl.》10（2017），第 3 期，1108–1115 页。[16] S. Roman，umbra演算。《纯粹与应用数学》，第 111 卷。Academic Press, Inc.［Harcourt Brace Jovanovich，出版社]， 1984 +193 0 12 594380 6 纽约，。x 页。ISBN：- - - S. K. Sharma、W. A. Khan、S. Araci 和 S. S. Ahmed，第二类新型退化 Daehee 多项式。《Adv. Difference Equ.》2020（2020），论文编号 428，共 14 页。[18] S. J. Yun 和 J.-W. Park，关于完全退化 Daehee 数和第二类多项式。《J. Math.》2020（2020），文章编号 7893498，共 9 页。[17]

数学教育系，大邱天主教大学，庆山 38430，共和国
电子邮箱：hkkim@cu.ac.kr

大韩民国首尔121-742，西江大学数学系，电子邮箱：dskim@sogang.ac.kr

数学系，光云大学，首尔139-701，大韩民国
电子邮箱：tkkim@kw.ac.kr