arXiv:2301.02875v2 [math.NA] 3 May 2023

强非线性椭圆边值问题的迭代双网格方法

Jiajun Zhan[1], Lei Yang[1], Xiaoqing Xing[2], 和 Liuqiang Zhong[2],*

[1] 澳门科技大学创新工程学院计算机科学与工程学院，澳门特别行政区 *999078*，中国。[2] 华南师范大学数学科学学院，广州 *510631*，中国。

摘要。 本文针对强非线性椭圆边值问题的有限元离散，设计并分析了一种迭代双网格算法。我们提出了一种迭代双网格算法：首先在粗空间上求解一个非线性问题，然后在细空间上求解一个对称正定问题。本文的主要贡献是首次对迭代双网格方法建立收敛性分析，该分析需要处理四个耦合误差估计。我们还给出了一些数值实验，以验证所提算法的效率。

AMS学科分类：65N30, 65M12, 35J60

关键词：迭代双网格方法、收敛性、强非线性椭圆问题。

1 引言

双网格方法最初用于求解非自伴问题和不定椭圆问题 [6,10]。随后，双网格方法分别被扩展用于求解半线性椭圆问题 [7], 、拟线性和非线性椭圆问题 [8,9], 。特别是对于非线性椭圆问题，双网格方法的基本思想是：首先在网格尺寸为H的“粗网格”上求解原问题，以获得一个粗略解；然后在网格尺寸为h的“细网格”上求解一个对称正定（SPD）系统，以校正该粗略解。注意到与“细网格”相比，“粗网格”可以非常粗，因此在“粗网格”上求解原问题并不困难。因此，双网格方法将求解原问题的计算复杂度降低为求解一个SPD问题的计算复杂度，并显著提高了计算速度。最近，Bi、Wang 和 Lin [1] 提出了一种用于求解

*通讯作者。电子邮箱：2109853gii30011@student.must.edu.mo (J. Zhan), leiyang@must.edu.mo (L. Yang), xingxq@scnu.edu.cn (X. Xing), zhong@scnu.edu.cn (L. Zhong)

强非线性椭圆问题的双网格算法，并为双网格方法提供了后验误差估计子。需要指出的是，上述文献全部讨论的是非迭代双网格方法。

众所周知，在非迭代双网格方法中，为达到最优收敛阶，“粗网格”的网格尺寸 H 与“细网格”的网格尺寸 h 应满足一定关系。相比非迭代双网格方法，迭代双网格方法的优势在于，在精度相同的情况下，可以通过增加迭代次数来增大网格尺寸 H 与 h 之间的差距。然而，关于椭圆问题保形有限元离散的迭代双网格方法，现有文献还很少。Xu [9] 最早针对非对称正定椭圆问题提出并分析了一种迭代双网格方法。Zhang、Fan 和 Zhong[11] 为半线性椭圆问题设计了一些迭代双网格算法，并给出了相应的收敛性分析。据我们所知，目前尚无关于强非线性椭圆边值问题保形有限元离散迭代双网格算法的已发表文献。

本文研究一种求解强非线性椭圆问题的迭代双网格算法。首先给出强非线性椭圆问题的离散系统，随后通过连续应用 [8] 中的非迭代双网格算法，为该离散系统提出一种迭代双网格算法。最后，对所提出的算法进行颇具挑战性的收敛性分析。尽管我们的算法只是通过 [8], 得到，但非迭代双网格算法的收敛性分析无法直接应用于迭代双网格算法。本文通过数学归纳法完成了这一具有挑战性的收敛性分析；该方法也可用于 [11]中通过迭代双网格算法求解半线性椭圆问题。不过，我们必须强调，我们算法的收敛性分析与 [11]中的分析有显著差异。与当前工作 [11], 相比，我们的收敛性分析困难得多、复杂得多，具体挑战体现在：（1）模型问题中的高阶导数项仍然是非线性的；（2）耦合误差估计给收敛性分析带来了巨大障碍（见引理 4.7 的证明）。

为避免反复使用泛指但未明确指定的常数，$x \lesssim y$ 用于表示 $x \leq Cy$，其中 C 表示一些与网格尺寸无关的正常数。此外，常数 C 在不同情况下可表示不同的值。对于某些特定常数，我们使用带下标的常数 C 来表示。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍强非线性椭圆问题的离散格式，以及相应的适定性和先验误差估计。第 3 节提出一种迭代双网格算法。随后，第 4 节给出一些预备知识，并对所提出算法进行收敛性分析。最后，第 5 节通过数值实验验证所提出算法的效率。

2 模型问题和离散系统

本节介绍强非线性椭圆问题的连续和离散变分问题，并给出相应的适定性和先验误差估计。

给定一个有界凸多边形区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$，其边界为 $\partial\Omega$。我们将 $W^{m,p}(\Omega)$ 记为具有范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 和半范数 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 的标准索博列夫空间，其中整数 $m\geq 0$ 且 $p\geq 1$。为方便起见，我们还记 $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$，$\|\cdot\|_m=\|\cdot\|_{m,2,\Omega}$，并将 $H_0^1(\Omega)$ 定义为：$=\{u\in H^1(\Omega):\ u\ |_{\partial\Omega}=0\}$。

我们考虑以下强非线性椭圆问题：

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)+f(\boldsymbol{x},u,\nabla u)=0, & \text{in } \Omega,\\ u=0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\ y,\ z):\ \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，且 $f(\boldsymbol{x},\ y,\ z):\ \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$。当 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\ u,\ \nabla u)$ 和 $f(\boldsymbol{x},\ u,\ \nabla u)$ 取不同函数时，就得到不同的问题，例如平均曲率流、布拉图问题等（见 [3]）。

我们假设 $a(x,y,z)$ 和 $f(x,y,z)$ 是二阶连续可微函数。为简便起见，我们记 $a_y(w)=Da(x,w,\nabla w)$、$a_z(w)=Da(x,w,\nabla w)$、$f_y(w)=Df(x,w,\nabla w)$ 和 $f_z(w)=Df(x,w,\nabla w)$，并对 $a(x,y,z)$ 和 $f(x,y,z)$ 的二阶导数采用类似的记法。

注 2.1. 由于 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},y,z)$ 和 $f(\boldsymbol{x},y,z)$ 是二阶连续可微函数，因此存在一个正常数 C 作为 $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 所有一阶和二阶导数的上界。

我们记

$$A(v,\varphi)=(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},v,\nabla v),\nabla\varphi)+(f(\boldsymbol{x},v,\nabla v),\varphi),\quad \forall v,\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

根据格林公式，容易看出，(2.1) 的解 $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$A(u,v)=0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

方程 (2.1) 在 w 处的 Fr´echet 导数 $\mathcal{L}'$ 为

$$\mathcal{L}'(w)v=-\nabla\cdot(\boldsymbol{a}_y(w)v+\boldsymbol{a}_z(w)\nabla v)+f_y(w)v+f_z(w)\nabla v.$$

下面给出一些基本假设（类似的假设也可见于 [9] 或 [3]）。首先，问题 (2.3) 存在一个解 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^{r+1}(\Omega)\cap W^{2,2+\varepsilon}(\Omega)$（$\varepsilon>0$ 且整数 $r\geq 1$）。其次，对于 (2.3) 的解 u，存在一个正常数 α_0，使得

$$\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{a}_z(u)\boldsymbol{\xi}\geq\alpha_0|\boldsymbol{\xi}|^2,\quad \forall\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}. \tag{2.4}$$

最后， $\mathcal{L}'(u): H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 是一个同构。这些假设保证 u 是 (2.3) 的一个孤立解。

设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 上的协调拟一致三角剖分，其中网格尺寸 h 表示单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 的外接圆直径的最大值。因此，任意单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 都包含在（包含）半径为 $\hat{C}_1 h$ （分别为 $\hat{C}_2 h$）的圆内，其中常数 $\hat{C}_1$ 和 $\hat{C}_2$ 与网格尺寸 h 无关，并且 $\mathcal{T}_h$ 上没有悬挂节点。

$\mathcal{T}_h$ 上的有限元空间 V_h 定义如下:

$$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_K \in \mathcal{P}_r(K), \forall\, K \in \mathcal{T}_h\},$$

其中 $\mathcal{P}_r(K)$ 表示 K 上次数不超过整数r 的多项式集合。

下面给出 (2.3) 的离散系统：求 $u_h \in \in V_h$，使得

$$A(u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.5}$$

下述引理给出了变分问题 (2.5) 的适定性及其先验误差估计，相关内容分别见 [9], 的引理 3.2 和定理 3.4。

引理 2.1. 设 u 是问题 (2.3) 的解，则当 h 足够小时，离散变分问题 (2.5) 存在唯一解 $u_h \in V_h$，且下述先验误差估计成立

$$\|u - u_h\|_{1,p} \lesssim h^r, \quad if\ u \in W^{r+1,p}(\Omega), 2 \le p \le \infty. \tag{2.6}$$

3 迭代双网格算法

本节介绍一种用于变分问题 (2.3) 的迭代双网格算法。

设 $\mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{T}_H$ 是 Ω 中两个拟一致、协调且嵌套的网格。此外， $\mathcal{T}_h$ 的网格尺寸 h 和 $\mathcal{T}_H$ 的网格尺寸 H 满足，对于某个 $0 < \lambda < 1$,

$$H = O(h^\lambda) \quad \text{and} \quad h < H < 1.$$

为介绍迭代双网格算法，我们对固定的 w 和任意的 v， $\chi \in H_0^1(\Omega)$，定义双线性型 $B(w; v, \chi)$ （由 $\mathcal{L}'$ 诱导），

$$B(w; v, \chi) = (\boldsymbol{a}_y(w)v, \nabla\chi) + (\boldsymbol{a}_z(w)\nabla v, \nabla\chi) + (f_y(w)v, \chi) + (f_z(w)\nabla v, \chi). \tag{3.1}$$

注 3.1. 型 $B(w; \cdot, \cdot)$ 是一个固定 w 的双线性型。

据我们所知， [8]首次提出了用于强非线性问题的双网格算法。这里给出 [8] 中算法 3.3所述的一种双网格算法。

算法1. 1. 求 $u_H \in V_H$，使得

$$A(u_H, v_H) = 0, \qquad \forall v_H \in V_H.$$

2. 求$u^h \in V_h$，使得

$$B(u_H; u^h, v_h) = B(u_H; u_H, v_h) - A(u_H, v_h), \qquad \forall v_h \in V_h.$$

注3.2. 在算法1中，我们首先在粗空间V_H中求解一个非线性问题。然而，由于 $\dim(V_H)$ 相对较小，在V_H 中求解非线性问题的计算量并不大。至于算法1的第二步，注意到$B(u_H; \cdot, \cdot)$ 是给定u_H时的一个双线性型，因此我们只需在V_h中求解一个线性问题，而求解这类问题有许多快速算法。

在 [8], 中，Xu 已证明，算法1的解u^h 可以以较低成本很好地近似有限元解u_h，即:

$$\|u_h - u^h\|_1 \lesssim H^2. \tag{3.2}$$

利用三角不等式、带有$r = 1$的 (2.6) 式以及 (3.2) 式，我们得到算法1的误差估计:

$$\|u - u^h\|_1 \le \|u - u_h\|_1 + \|u_h - u^h\|_1 \lesssim h + H^2. \tag{3.3}$$

接下来，将算法1以连续迭代的方式执行，便得到我们的迭代双网格算法。

算法 2. 设$u_h^0 = u_H$为式 (2.5) 在V_H中的解。假设已得到$u_h^k \in V_h$，则$u^{k+1}{}_h \in V_h$ 可通过以下两个步骤求得。

步骤1. 求$e_H^k \in V_H$，使得对任意$v_H \in V_H$,

$$A(u_h^k + e_H^k, v_H) = 0. \tag{3.4}$$

步骤2. 求$u^{k+1}{}_h \in V_h$，使得对任意$v_h \in V_h$,

$$B(u_h^k + e_H^k; u_h^{k+1}, v_h) = B(u_h^k + e_H^k; u_h^k + e_H^k, v_h) - A(u_h^k + e_H^k, v_h). \tag{3.5}$$

注 3.3. 注意到有限元解的唯一性（见引理 2.1），由式 (2.5)、$u_h^0 = u_H$ 以及式 (3.4)（其中$k=0$），可知$e_H^0 = 0$，这意味着$u_h^0 + e_H^0 = u_H$。观察算法 2 的步骤2和算法 1 的第二步可知，当$k = 0$时，算法 2 与算法 1 相同。

与 [8], 相比，我们的方法对高阶协调有限元仍然有效，而 [8] 仅考虑了分片线性有限元空间。下面给出我们算法的误差估计（见定理4.1），

$$\|u - u_h^k\|_1 \lesssim h^r + H^{r+k}. \tag{3.6}$$

特别地，若选择有限元空间 V_h 为分片线性有限元空间，即 $r=1$，则算法 2 的误差估计（3.6）可写为

$$\|u-u_h^k\|_1 \lesssim h+H^{1+k}.$$

为了达到最优收敛阶，算法1中应满足关系$h=H^2$（见 (3.3)）。但在算法 2 中，我们可以通过增加迭代次数k来扩大网格尺寸H 与h 之间的差距。

4 收敛性分析

本节将对算法 2 进行相应的收敛性分析。为此，我们首先需要介绍一些基于型$B(w;v,\chi)$的预备知识。

4.1 基于型$B(w;v,\chi)$的一些预备知识

本小节将介绍型$B(w;v,\chi)$ 的一些性质，并引入两个离散格林函数。

首先，固定w，由注 2.1和柯西-施瓦茨不等式，容易得到型$B(w;\cdot,\cdot)$ 是连续的，即:

$$B(w;v,\chi)\lesssim\|v\|_1\|\chi\|_1,\quad \forall\, v,\chi\in H_0^1(\Omega). \tag{4.1}$$

其次，我们给出一个引理，用以提供型$B(\cdot;\cdot,\cdot)$ 在V_h中的 Babuˇska-Brezzi（BB）条件。此引理可通过与 [9] 中引理2.2类似的论证予以证明。

引理 4.1. 设 u 是问题(2.3)的解，则当 h 充分小时，对任意 $w_h\in V_h$，有

$$\|w_h\|_1\lesssim\sup_{v_h\in V_h}\frac{B(u;w_h,v_h)}{\|v_h\|_1}\quad and\quad \|w_h\|_1\lesssim\sup_{v_h\in V_h}\frac{B(u;v_h,w_h)}{\|v_h\|_1}. \tag{4.2}$$

证明。 对于 (2.3) 的解u，定义投影算子$P_h\colon H_0^1(\Omega)\to V_h$如下

$$(\boldsymbol{a}_z(u)\nabla P_h v,\nabla\chi_h)=(\boldsymbol{a}_z(u)\nabla v,\nabla\chi_h),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),\chi_h\in V_h. \tag{4.3}$$

由 (2.4) 可知，投影算子 P_h定义良好。取 $v=v_h\in V_h\subset H_0^1(\Omega)$和 $\chi_h=P_hv_h-v_h$，并利用 (2.4)，可证明投影算子 P_h是空间 V_h上的恒等算子。将 $\chi_h=P_hv$ 代入 (4.3)，并利用 (2.4)、庞加莱不等式、注 2.1 和柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\|P_hv\|_1\lesssim\|v\|_1,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{4.4}$$

利用 (2.4)、对偶论证和 (4.4)，可得（参见 [2] 中的定理 3.2.5）

$$\|v-P_hv\|_0 \lesssim h\|v\|_1, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{4.5}$$

对于任意$w_h\in V_h$，$v\in H_0^1(\Omega)$，由 (3.1)、格林公式、(4.3)、注 2.1、柯西-施瓦茨不等式和 (4.5)，可得

$$\begin{aligned} B(u;w_h,v-P_hv) &= (\boldsymbol{a}_y(u)w_h,\nabla(v-P_hv))+(\boldsymbol{a}_z(u)\nabla w_h,\nabla(v-P_hv)) \\ &\quad +(f_y(u)w_h,v-P_hv)+(f_z(u)\nabla w_h,v-P_hv) \\ &= ((\nabla\cdot\boldsymbol{a}_y(u))w_h,v-P_hv)+(\boldsymbol{a}_y(u)\cdot\nabla w_h,v-P_hv) \\ &\quad +(f_y(u)w_h,v-P_hv)+(f_z(u)\nabla w_h,v-P_hv) \\ &\lesssim \|w_h\|_1\|v-P_hv\|_0 \\ &\lesssim h\|w_h\|_1\|v\|_1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

注意到 $\mathcal{L}'(u)\colon H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ 是一个同构，利用 (4.6) 和 (4.4)，可得

$$\begin{aligned} \|w_h\|_1 &\lesssim \sup_{v\in H_0^1(\Omega)}\frac{B(u;w_h,v)}{\|v\|_1} \\ &\lesssim \sup_{v\in H_0^1(\Omega)}\frac{B(u;w_h,v-P_hv)}{\|v\|_1}+\sup_{v\in H_0^1\Omega}\frac{B(u;w_h,P_hv)}{\|v\|_1} \\ &\lesssim h\|w_h\|_1+\sup_{v\in H_0^1(\Omega)}\frac{B(u;w_h,P_hv)}{\|P_hv\|_1}. \end{aligned}$$

在上述不等式中取充分小的h，并令投影算子 P_h 为V_h上的恒等算子，即可得到 (4.2) 的第一个估计。(4.2) 的第二个估计证明类似。

□

接下来，我们给出另一个关于型$B(\cdot;\cdot,\cdot)$的 BB 条件。

引理 4.2. 设 u 是 (2.3) 的解，且 Ψ 满足 $\|u-\Psi\|_{1,\infty}\lesssim H$，则当 H 充分小时，对于任意 $w_h\in V_h$，有

$$\|w_h\|_1\lesssim\sup_{v_h\in V_h}\frac{B(\Psi;w_h,v_h)}{\|v_h\|_1} \quad and \quad \|w_h\|_1\lesssim\sup_{v_h\in V_h}\frac{B(\Psi;v_h,w_h)}{\|v_h\|_1}. \tag{4.7}$$

证明。利用型 B 的定义 (3.1)，对 h(y,z) 进行泰勒展开，得到 $h(y_0,z_0)+\partial_y h(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)(y-y_0)+\partial_z h(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)(z-z_0)$，其中 $\tilde{\theta}_1$ 位于 y 和 y_0 之间，$\tilde{\theta}_2$ 位于 z 和 z_0, 之间。注

2.1，利用 H¨older 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&B(u;w_h,v_h)-B(\Psi;w_h,v_h)\\
&= ((\boldsymbol{a}_y(u)-\boldsymbol{a}_y(\Psi))w_h,\nabla v_h)+((\boldsymbol{a}_z(u)-\boldsymbol{a}_z(\Psi))\nabla w_h,\nabla v_h)\\
&\quad +((f_y(u)-f_y(\Psi))w_h,v_h)+((f_z(u)-f_z(\Psi))\nabla w_h,v_h)\\
&= (\boldsymbol{a}_{yy}(\theta_1)(u-\Psi)w_h,\nabla v_h)+(\boldsymbol{a}_{yz}(\theta_1)\nabla(u-\Psi)w_h,\nabla v_h)\\
&\quad +(\boldsymbol{a}_{zy}(\theta_2)(u-\Psi)\nabla w_h,\nabla v_h)+(\nabla(u-\Psi)^T\boldsymbol{a}_{zz}(\theta_2)\nabla w_h,\nabla v_h)\\
&\quad +(f_{yy}(\theta_3)(u-\Psi)w_h,v_h)+(f_{yz}(\theta_3)\cdot\nabla(u-\Psi)w_h,v_h)\\
&\quad +(f_{zy}(\theta_4)\cdot\nabla w_h(u-\Psi),v_h)+(\nabla(u-\Psi)^T f_{zz}(\theta_4)\nabla w_h,v_h)\\
&\lesssim \|u-\Psi\|_{1,\infty}\|w_h\|_1\|v_h\|_1, \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

其中，$\theta_i\,(i=1,2,3,4)$ 介于u与 Ψ之间。

由引理 4.1、(4.8)以及 $\|u-\Psi\|_{1,\infty}\lesssim H$，可得

$$\begin{aligned}
\|w_h\|_1 &\lesssim \sup_{v_h\in V_h}\frac{B(u;w_h,v_h)-B(\Psi;w_h,v_h)}{\|v_h\|_1}+\sup_{v_h\in V_h}\frac{B(\Psi;w_h,v_h)}{\|v_h\|_1}\\
&\lesssim \|u-\Psi\|_{1,\infty}\|w_h\|_1+\sup_{v_h\in V_h}\frac{B(\Psi;w_h,v_h)}{\|v_h\|_1}\\
&\lesssim H\|w_h\|_1+\sup_{v_h\in V_h}\frac{B(\Psi;w_h,v_h)}{\|v_h\|_1}.
\end{aligned}$$

在上述不等式中取H 充分小，可得(4.7)的第一个估计。(4.7)的第二个估计的证明类似。

□

注 4.1. 根据(2.6)，将 Ψ 替换为(2.5)的有限元解u_h 后，引理 4.2仍然成立。

为使记号更加简洁，并便于后续分析，我们记

$$E_k = u_h - u_h^k, \qquad (4.9)$$

$$u_h^{k,1} = u_h^k + e_H^k, \qquad (4.10)$$

其中u_h 是问题(2.5)的解，而u_h^k 和e_H^k 由算法 2给出。需要指出的是，本文后续部分将频繁使用这些记号。

注 4.2. 对于 $k\geq 0$，假设 E_k、$u^{k,1}$ h 和 e_H^k 分别由 (4.9)、(4.10) 和算法 2 给出。如果已知 $\|E_k\|_{1,\infty}\lesssim H$ 和 $\|e_H^k\|_{1,\infty}\lesssim H$，则引理 4.2 在将 Ψ 替换为 $u^{k,1}$ h 后仍然成立。事实上，利用 (4.10)、(4.9)、三角不等式以及 $r\geq 1$ 和 $h<H$ 的 (2.6)，对于 $\|E_k\|_{1,\infty}\lesssim H$ 和 $\|e_H^k\|_{1,\infty}\lesssim H$，我们推导得

$$\|u-u_h^{k,1}\|_{1,\infty}\leq\|u-u_h\|_{1,\infty}+\|E_k\|_{1,\infty}+\|e_H^k\|_{1,\infty}\lesssim H.$$

因此，引理 4.2 对 $\Psi=u^{k,1}{}_h$ 仍然成立。

接着，对于方程 (2.5) 的有限元解 u_h 以及任意固定的 $\boldsymbol{x}\in\Omega$，我们引入格林函数 $g_H^{\boldsymbol{x}}\in V_H$，其定义如下：

$$B(u_h;v_H,g_H^{\boldsymbol{x}})=\partial v_H(\boldsymbol{x}),\quad \forall v_H\in V_H, \tag{4.11}$$

其中，∂ 表示$\frac{\partial}{\partial x_1}$ 或$\frac{\partial}{\partial x_2}$。由注 4.1 易知，格林函数$g_H^{\boldsymbol{x}}$ 是良定义的。

假设$u^{k,1}{}_h$由 (4.10) 给出。类似地，对于任意固定的$\boldsymbol{x}\in\Omega$，我们引入格林函数$g^{k,\boldsymbol{x}}{}_h\in V_h$，定义如下

$$B(u_h^{k,1};v_h,g_h^{k,\boldsymbol{x}})=\partial v_h(\boldsymbol{x}),\quad \forall v_h\in V_h. \tag{4.12}$$

由注 4.2 也可知，格林函数$g^{k,\boldsymbol{x}}{}_h$是良定义的。

这里给出上述两个格林函数$g_H^{\boldsymbol{x}}$和$g^{k,\boldsymbol{x}}{}_h$的一些估计（参见 [4],的引理3.3，或 [9]中的 (2.10) 和 (2.11)）

$$\|g_H^{\boldsymbol{x}}\|_{1,1}\lesssim|\log H|\quad\text{and}\quad\|g_h^{k,\boldsymbol{x}}\|_{1,1}\lesssim|\log h|. \tag{4.13}$$

最后，对于任意$v\in H_0^1(\Omega)\cap W^{1,\infty}(\Omega)$，利用 [2], 中的 (3.1.11) 可得 t

$$\|v\|_{1,\infty}\lesssim|v|_{1,\infty}. \tag{4.14}$$

4.2 误差估计

本小节通过一系列引理给出算法 2 的收敛性分析。

引理4.3. 假设 $u^{k,1}{}_h$、E_k 和 e_H^k 分别由(4.10)、(4.9) 和算法 *2* 给出，则对于任意 $v_h\in V_h$,

$$B(u_h^{k,1};E_{k+1},v_h)\lesssim(\|E_k\|_{1,\infty}+\|e_H^k\|_{1,\infty})(\|E_k\|_1+\|e_H^k\|_1)\|v_h\|_1, \tag{4.15}$$

$$B(u_h^{k,1};E_{k+1},v_h)\lesssim(\|E_k\|_{1,\infty}^2+\|e_H^k\|_{1,\infty}^2)\|v_h\|_{1,1}. \tag{4.16}$$

证明。 利用 (4.9)、注 3.1、(3.5)、(2.5) 和 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}
B(u_h^{k,1};E_{k+1},v_h) &= B(u_h^{k,1};u_h,v_h)-B(u_h^{k,1};u_h^{k+1},v_h)\\
&= B(u_h^{k,1};u_h,v_h)-B(u_h^{k,1};u_h^k+e_H^k,v_h)+A(u_h^{k,1},v_h)-A(u_h,v_h)\\
&= B(u_h^{k,1};E_k-e_H^k,v_h)+(\boldsymbol{a}(u_h^{k,1},\nabla u_h^{k,1}),v_h)+(f(u_h^{k,1},\nabla u_h^{k,1}),v_h)\\
&\quad -(\boldsymbol{a}(u_h,\nabla u_h),v_h)-(f(u_h,\nabla u_h),v_h)\\
&:= A_1-A_2-A_3,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

其中

$$A_1 = B(u_h^{k,1}; E_k - e_H^k, v_h),$$
$$A_2 = (\boldsymbol{a}(u_h, \nabla u_h), v_h) - (\boldsymbol{a}(u_h^{k,1}, \nabla u_h^{k,1}), v_h),$$
$$A_3 = (f(u_h, \nabla u_h), v_h) - (f(u_h^{k,1}, \nabla u_h^{k,1}), v_h).$$

由A_1, 和B的定义 (3.1)，可得

$$\begin{aligned} A_1 &= (\boldsymbol{a}_y(u_h^{k,1})(E_k - e_H^k), \nabla v_h) + (\boldsymbol{a}_z(u_h^{k,1})\nabla(E_k - e_H^k), \nabla v_h) \\ &\quad + (f_y(u_h^{k,1})(E_k - e_H^k), v_h) + (f_z(u_h^{k,1})\nabla(E_k - e_H^k), v_h). \end{aligned} \tag{4.18}$$

由A_2, 的二阶泰勒展开以及 (4.10) 和 (4.9)，可得

$$\begin{aligned} A_2 &= (\boldsymbol{a}_y(u_h^{k,1})(E_k - e_H^k), \nabla v_h) + (\boldsymbol{a}_z(u_h^{k,1})\nabla(E_k - e_H^k), \nabla v_h) \\ &\quad + (\boldsymbol{a}_{yy}(\theta_5)(E_k - e_H^k)^2, \nabla v_h) + 2(\boldsymbol{a}_{yz}(\theta_5)\nabla(E_k - e_H^k)(E_k - e_H^k), \nabla v_h) \\ &\quad + (\nabla(E_k - e_H^k)^T \boldsymbol{a}_{zz}(\theta_5)\nabla(E_k - e_H^k), \nabla v_h), \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中， θ_5 介于u_h 和u^k之间， $^1{}_h$ 。

类似地，由A_3, 的二阶泰勒展开以及 (4.10) 和 (4.9)，可得

$$\begin{aligned} A_3 &= (f_y(u_h^{k,1})(E_k - e_H^k), v_h) + (f_z(u_h^{k,1})\nabla(E_k - e_H^k), v_h) \\ &\quad + (f_{yy}(\theta_6)(E_k - e_H^k)^2, v_h) + 2(f_{yz}(\theta_6)\cdot\nabla(E_k - e_H^k)(E_k - e_H^k), v_h) \\ &\quad + (\nabla(E_k - e_H^k)^T f_{zz}(\theta_6)\nabla(E_k - e_H^k), v_h), \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中， θ_6 介于u_h 和u^k之间， $^1{}_h$ 。

注意到 (4.19) 和 (4.20) 中关于$\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和$f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的一阶导数项之和恰好等于A_1。将 (4.18)、(4.19) 和 (4.20) 代入 (4.17)，可得

$$\begin{aligned} B(u_h^{k,1}; E_{k+1}, v_h) &= -(\boldsymbol{a}_{yy}(\theta_5)(E_k - e_H^k)^2, \nabla v_h) - 2(\boldsymbol{a}_{yz}(\theta_5)\nabla(E_k - e_H^k)(E_k - e_H^k), \nabla v_h) \\ &\quad - (\nabla(E_k - e_H^k)^T \boldsymbol{a}_{zz}(\theta_5)\nabla(E_k - e_H^k), \nabla v_h) - (f_{yy}(\theta_6)(E_k - e_H^k)^2, v_h) \\ &\quad - 2(f_{yz}(\theta_6)\cdot\nabla(E_k - e_H^k)(E_k - e_H^k), v_h) \\ &\quad - (\nabla(E_k - e_H^k)^T f_{zz}(\theta_6)\nabla(E_k - e_H^k), v_h). \end{aligned} \tag{4.21}$$

将注 2.1、H¨older 不等式和三角不等式代入 (4.21)，可得

$$\begin{aligned} B(u_h^{k,1}; E_{k+1}, v_h) &\lesssim \|E_k - e_H^k\|_{1,\infty}\|E_k - e_H^k\|_1\|v_h\|_1 \\ &\leq (\|E_k\|_{1,\infty} + \|e_H^k\|_{1,\infty})(\|E_k\|_1 + \|e_H^k\|_1)\|v_h\|_1, \end{aligned}$$

由此完成了对 (4.15) 的证明。类似地，由 (4.21) 可得 (4.16)。 □

引理 4.4. 假设 $u^{k,1}$, h、e_H^k 和 E_k 分别由(4.10)、算法 *2* 和 (4.9)定义，则有

$$B(u_h^{k,1};e_H^k,v_H)\lesssim(\|E_k\|_1+\|E_{k+1}\|_1)\|v_H\|_1,\quad \forall v_H\in V_H. \tag{4.22}$$

证明。 将 $v_h=v_H$ 代入 (3.5)，并利用 (3.4)，可得

$$B(u_h^{k,1};u_h^{k+1},v_H)=B(u_h^{k,1};u_h^k+e_H^k,v_H).$$

利用注 3.1 改写上述方程，再结合 (4.9)、(4.1) 和三角不等式，可得

$$\begin{aligned} B(u_h^{k,1};e_H^k,v_H) &= B(u_h^{k,1};u_h^{k+1}-u_h^k,v_H)\\ &= B(u_h^{k,1};u_h^{k+1}-u_h+u_h-u_h^k,v_H)\\ &= B(u_h^{k,1};E_k-E_{k+1},v_H)\\ &\lesssim \|E_k-E_{k+1}\|_1\|v_H\|_1\\ &\le (\|E_k\|_1+\|E_{k+1}\|_1)\|v_H\|_1, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

引理 4.5。 假设 E_k和 e_H^k分别由(4.9) 和算法 *2* 给出，且 $r\ge 1$。当 h 足够小时，对任意整数 $k\ge 1$,

$$\|E_k\|_1\lesssim H^{r+k},\quad \|E_k\|_{1,\infty}\lesssim|\log h|\,H^2,\quad \|e_H^k\|_{1,\infty}\lesssim H,\quad \|e_H^k\|_1\lesssim H^{r+k}. \tag{4.23}$$

证明。 这里我们用数学归纳法证明 (4.23) 成立。

由 (3.4)、$u_h^0=u_H$、(2.5) 以及有限元解的唯一性（见引理 2.1），可知$e_H^0=0$。

利用三角不等式、(2.6) 和 $h\le H$，可得

$$\|E_0\|_1\le\|u-u_h\|_1+\|u-u_H\|_1\lesssim h^r+H^r\le H^r, \tag{4.24}$$

$$\|E_0\|_{1,\infty}\le\|u-u_h\|_{1,\infty}+\|u-u_H\|_{1,\infty}\lesssim h^r+H^r\le H^r. \tag{4.25}$$

接下来，我们将证明当 $k=1$ 时，(4.23) 成立。

(i) 对于 $\|E_1\|_1\lesssim H^{r+1}$。注意到 $r\ge 1$ 和 $e_H^0=0$，并利用 (4.25)，我们有 $\|E_0\|_{1,\infty}\lesssim H$ 和 $\|e_H^0\|_{1,\infty}\lesssim H$，由此可导出型 $B(u^{0,1}h;\cdot,\cdot)$ 的 BB 条件（见注 4.2）。利用型 $B(u^{0,1}h;\cdot,\cdot)$ 的 BB 条件、(4.15)、(4.25)、$e_H^k=0$、(4.24)、$r\ge 1$ 和 $H<1$，可得

$$\begin{aligned} \|E_1\|_1 &\lesssim \sup_{v_h\in V_h}\frac{B(u_h^{0,1};E_1,v_h)}{\|v_h\|_1}\\ &\lesssim (\|E_0\|_{1,\infty}+\|e_H^0\|_{1,\infty})(\|E_0\|_1+\|e_H^0\|_1)\\ &\lesssim (H^r+0)(H^r+0)\\ &\lesssim H^{r+1}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

(ii) 对于 $\|E_1\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$。对于 $k=0$ 以及任意固定的 $\boldsymbol{x} \in \Omega$，将 $v_h = E_1$ 代入 (4.12)，利用 (4.16)、(4.25)、$e_H^0 = 0$、(4.13)、$r \geq 1$ 和 $H < 1$，可得

$$\begin{aligned} \partial E_1(\boldsymbol{x}) &= B(u_h^{0,1}; E_1, g_h^{0,\boldsymbol{x}}) \\ &\lesssim (\|E_0\|_{1,\infty}^2 + \|e_H^0\|_{1,\infty}^2)\|g_h^{0,\boldsymbol{x}}\|_{1,1} \\ &\lesssim (H^{2r} + 0)\,|\log h| \\ &\lesssim |\log h|\, H^2. \end{aligned}$$

进一步利用$\boldsymbol{x}$ 的任意性及式（4.14），可得

$$\|E_1\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2.$$

（iii）对于 $\|e_H^1\|_{1,\infty} \lesssim H$。利用 $\|E_1\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$ 和引理 5.1（引理及证明的具体内容参见附录），可得

$$\|e_H^1\|_{1,\infty} \lesssim H.$$

（iv）对于 $\|e_H^1\|_1 \lesssim H^{r+1}$。注意到 $\|E_1\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$ 和 $\|e_H^1\|_{1,\infty} \lesssim H$ 均成立，因此型$B(u^{1,1}{}_h;\cdot,\cdot)$ 满足 BB 条件（见注 4.2）。利用$B(u^{1,1}{}_h;\cdot,\cdot)$ 的 BB 条件及式（4.15），可得

$$\begin{aligned} \|E_2\|_1 &\lesssim \sup_{v_h} \frac{B(u_h^{1,1}; E_2, v_h)}{\|v_h\|_1} \\ &\lesssim (\|E_1\|_{1,\infty} + \|e_H^1\|_{1,\infty})(\|E_1\|_1 + \|e_H^1\|_1). \end{aligned} \tag{4.27}$$

利用型$B(u^{1,1}{}_h;\cdot,\cdot)$的 BB 条件、含$k=1$的式（4.22）、式（4.27）、 $\|E_1\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$ 以及 $\|e_H^1\|_{1,\infty} \lesssim H$，可得

$$\begin{aligned} \|e_H^1\|_1 &\lesssim \sup_{v_H \in V_H} \frac{B(u_h^{1,1}; e_H^1, v_H)}{\|v_H\|_1} \\ &\lesssim \|E_1\|_1 + \|E_2\|_1 \\ &\lesssim \|E_1\|_1 + (\|E_1\|_{1,\infty} + \|e_H^1\|_{1,\infty})(\|E_1\|_1 + \|e_H^1\|_1) \\ &\lesssim \|E_1\|_1 + (|\log h|\, H^2 + H)(\|E_1\|_1 + \|e_H^1\|_1). \end{aligned}$$

Ta令上式中的H 足够小，并利用（4.26），可得

$$\|e_H^1\|_1 \lesssim \|E_1\|_1 \lesssim H^{r+1}.$$

我们假设当$k=l$时（4.23）成立，即

$$\|E_l\|_1 \lesssim H^{r+l}, \quad \|E_l\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2, \quad \|e_H^l\|_{1,\infty} \lesssim H, \quad \|e_H^l\|_1 \lesssim H^{r+l}. \tag{4.28}$$

接下来，我们将证明当 $k=l+1$ 时，(4.23) 仍然成立。

(i) 对于 $\|E_{l+1}\|_1 \lesssim H^{r+l+1}$。注意到 $\|E_l\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$ 以及 $\|e_H^l\|_{1,\infty} \lesssim H$ 均得到满足，因此，型 $B(u^l, {}^1{}_h; \cdot, \cdot)$ 的 BB 条件成立（见注 4.2）。利用型 $B(u^l, {}^1{}_h; \cdot, \cdot)$ 的 BB 条件、(4.15)、(4.28) 以及 $H<1$，我们得到

$$\begin{aligned}
\|E_{l+1}\|_1 &\lesssim \sup_{v_h \in V_h} \frac{B(u_h^{l,1}; E_{l+1}, v_h)}{\|v_h\|_1} \\
&\lesssim (\|E_l\|_{1,\infty} + \|e_H^l\|_{1,\infty})(\|E_l\|_1 + \|e_H^l\|_1) \\
&\lesssim (|\log h|\, H^2 + H)(H^{r+l} + H^{r+l}) \\
&\lesssim H^{r+l+1}. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

(ii) 对于 $\|E_{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$。将 $v_h = E^{l+1}$ 代入 (4.12)，其中 $k=l$，并利用 (4.16)、(4.28) 和 (4.13)，得到

$$\begin{aligned}
\partial E_{l+1}(\boldsymbol{x}) &= B(u_h^{l,1}; E_{l+1}, g_h^{l,\boldsymbol{x}}) \\
&\lesssim (\|E_l\|_{1,\infty}^2 + \|e_H^l\|_{1,\infty}^2)\|g_h^{l,\boldsymbol{x}}\|_{1,1} \\
&\lesssim (|\log h|^2 H^4 + H^2)\,|\log h| \\
&\lesssim |\log h|\, H^2,
\end{aligned}$$

结合 $\boldsymbol{x}$ 的任意性与 (4.14)，可推出

$$\|E_{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2.$$

(iii) 对于 $\|e_H^{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim H$。利用 $\|E_{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$ 和引理 5.1，得到

$$\|e_H^{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim H. \qquad (4.30)$$

(iv) 对于 $\|e_H^{l+1}\|_1 \lesssim H^{r+l+1}$。注意到 $\|E_{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$ 以及 $\|e_H^{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim H$ 均满足，因此型 $B(u^{l+1}, {}^1{}_h; \cdot, \cdot)$ 满足 BB 条件（见注 4.2）。利用型 $B(u^{l+1}, {}^1{}_h; \cdot, \cdot)$ 的 BB 条件以及 (4.15)，可得

$$\begin{aligned}
\|E_{l+2}\|_1 &\lesssim \sup_{v_h} \frac{B(u_h^{l+1,1}; E_{l+2}, v_h)}{\|v_h\|_1} \\
&\lesssim (\|E_{l+1}\|_{1,\infty} + \|e_H^{l+1}\|_{1,\infty})(\|E_{l+1}\|_1 + \|e_H^{l+1}\|_1). \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

利用型 $B(u^{l+1}, {}^1{}_h; \cdot, \cdot)$ 的 BB 条件、(4.22)（其中 $k=l+1$）、(4.31)、$\|E_{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$ 以及 $\|e_H^{l+1}\|_{1,\infty} \lesssim H$，可得

$$\begin{aligned}
\|e_H^{l+1}\|_1 &\lesssim \sup_{v_H \in V_H} \frac{B(u_h^{l+1,1}; e_H^{l+1}, v_H)}{\|v_H\|_1} \\
&\lesssim \|E_{l+1}\|_1 + \|E_{l+2}\|_1 \\
&\lesssim \|E_{l+1}\|_1 + (\|E_{l+1}\|_{1,\infty} + \|e_H^{l+1}\|_{1,\infty})(\|E_{l+1}\|_1 + \|e_H^{l+1}\|_1) \\
&\lesssim \|E_{l+1}\|_1 + (|\log h|\, H^2 + H)(\|E_{l+1}\|_1 + \|e_H^{l+1}\|_1).
\end{aligned}$$

在上述不等式中取足够小的 H，并利用 (4.29)，可得

$$\|e_H^{l+1}\|_1 \lesssim \|E_{l+1}\|_1 \lesssim H^{r+l+1}.$$

通过数学归纳法，得到结论。 □

注 4.3. 尽管我们的主要结果（见定理4.1）只用到了估计 $\|E_{k+1}\|_1 \lesssim H^{r+k+1}$，但要得到 $\|E_{k+1}\|_1 \lesssim H^{r+k+1}$，还需要借助 $\|E_k\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$、$\|e_H^k\|_{1,\infty} \lesssim H$ 以及 $\|e_H^k\|_1 \lesssim H^{r+k}$。

下面给出本文的主要结果。

定理4.1. 设 u 是(2.3) 的解，且 u_h^k 由算法 *2* 给出，则有

$$\|u - u_h^k\|_1 \lesssim h^r + H^{r+k}. \tag{4.32}$$

证明. 利用三角不等式、(4.9)、(2.6) 和引理 4.5，可得

$$\|u - u_h^k\|_1 \le \|u - u_h\|_1 + \|E_k\|_1 \lesssim h^r + H^{r+k},$$

由此完成证明。 □

5 数值实验

本节通过一些数值实验展示所提出的迭代双网格算法的效率。我们使用 Python 编程语言的软件包 FEALPy 实现了这些实验 [5]。特别地，在算法 2 的步骤1中，我们采用牛顿迭代法求解非线性方程组，相对残差为 10^{-8}。

我们采用以下平均曲率流问题作为模型问题：

$$-\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{1/2}}\right) = g \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

其中，计算区域为 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$，精确解为 $u = x(1-x)^2 y(1-y)\mathrm{e}^x$，而 g 根据精确解选取。

首先，我们选取协调分片线性有限元空间作为 V_h，即取 $r=1$。根据定理4.1，为了达到最优收敛阶，应保持 $h^r = H^{r+k}$。因此，表 1 给出了不同网格尺寸下，$h = H^2$对应 $k=1$ 时的一些数值结果。在这种情况下，我们的算法与算法 1 相同（见注 3.3）。此外，我们可以观察到，表 1 中的 $\|u-u_h^1\|_1 * \max\{H^2,h\}^{-1}$保持稳定，这与定理4.1中的 (4.32) 一致。

接下来，我们增加迭代次数k 以扩大H 与h之间的距离，结果如表 2 和表 3 所示。我们还观察到，$\|u-u_h^1\|_1 * \max\{H^{1+k},h\}^{-1}$ 保持稳定。

表 1：$k=1, r=1$

H	h	$\|u-u_h^1\|_1$	$\|u-u_h^1\|_1$ *最大$\{H^2, h\}^{-1}$
$1/8$	$1/64$	3.47E-03	0.221929
$1/9$	$1/81$	2.74E-03	0.221953
$1/10$	$1/100$	2.22E-03	0.221967
$1/11$	$1/121$	1.83E-03	0.221977
$1/12$	$1/144$	1.54E-03	0.221983

表2：$k=2, r=1$

H	h	$\|u-u_h^2\|_1$	$\|u-u_h^2\|_1$ *最大値$\{H^3, h\}^{-1}$
$1/2$	$1/8$	2.73E-02	0.218321
$1/3$	$1/27$	8.20E-03	0.221524
$1/4$	$1/64$	3.47E-03	0.221784
$1/5$	$1/125$	1.77E-03	0.221826
$1/6$	$1/216$	1.03E-03	0.221836

表 3：$k=3, r=1$

H	h	$\|u-u_h^3\|_1$	$\|u-u_h^3\|_1$ *最大$\{H^4, h\}^{-1}$
$1/2$	$1/16$	1.38E-02	0.220944
$1/3$	$1/81$	2.74E-03	0.221805
$1/4$	$1/256$	8.67E-04	0.221837

表 4：$k=1, r=2$

H	h	$\|u-u_h^1\|_1$	$\|u-u_h^1\|_1$ *最大値$\{H^3, h^2\}^{-1}$
$1/4$	$1/8$	2.57E-03	0.164578
$1/9$	$1/27$	2.30E-04	0.167320
$1/16$	$1/64$	4.09E-05	0.167553
$1/25$	$1/125$	1.07E-05	0.167590
$1/36$	$1/216$	3.59E-06	0.167599

表5：$k=2,r=2$

H	h	$\|u-u_h^2\|_1$	$\|u-u_h^2\|_1$*最大值$\{H^4,h^2\}^{-1}$
$1/8$	$1/64$	4.09E-05	0.167552
$1/9$	$1/81$	2.55E-05	0.167571
$1/10$	1/100	1.68E-05	0.167582
$1/11$	1/121	1.14E-05	0.167589
$1/12$	1/144	8.08E-06	0.167593

表6：$k=3,r=2$

H	h	$\|u-u_h^3\|_1$	$\|u-u_h^3\|_1$*最大值$\{H^5,h^2\}^{-1}$
$1/5$	$1/55$	5.54E-05	0.167534
$1/6$	$1/90$	2.07E-05	0.160874
$1/7$	1/126	1.06E-05	0.167590
$1/8$	1/184	4.95E-06	0.162211
$1/9$	1/243	2.84E-06	0.167600

表 7：$k=1,r=3$

H	h	$\|u-u_h^1\|_1$	$\|u-u_h^1\|_1$*最大值$\{H^4,h^3\}^{-1}$
$1/8$	$1/16$	1.83E-05	0.075054
$1/27$	$1/81$	1.40E-07	0.074662
$1/64$	1/256	4.44E-09	0.074543

表8：$k=2,r=3$

H	h	$\|u-u_h^2\|_1$	$\|u-u_h^2\|_1$*最大值$\{H^5,h^3\}^{-1}$
$1/8$	$1/32$	2.28E-06	0.074870
$1/9$	$1/36$	1.60E-06	0.074838
$1/10$	$1/40$	1.17E-06	0.074810
$1/11$	$1/55$	4.49E-07	0.072343
$1/12$	$1/60$	3.46E-07	0.074716

表 9：$k=3,r=3$

H	h	$\|u-u_h^3\|_1$	$\|u-u_h^3\|_1$*最大$\{H^6,h^3\}^{-1}$
$1/8$	$1/64$	2.85E-07	0.074703
$1/9$	$1/81$	1.40E-07	0.074662
$1/10$	1/100	7.46E-08	0.074630
$1/11$	1/121	4.21E-08	0.074606
$1/12$	1/144	2.50E-08	0.074588

最后，我们在表4—9中针对高阶有限元空间实施了类似的数值实验，其中$r=2$和$r=3$。通过观察可知，所有这些数值实验均支持定理4.1中的(4.32)。

致谢。 第一和第二作者的工作部分受到澳门特别行政区科学技术发展基金（编号：0070/2019/A2、0031/2022/A1）的资助。第三作者受到国家自然科学基金（项目编号：11901212）的资助。第三和第四作者还受到国家自然科学基金（项目编号：12071160）的资助。

附录

本附录旨在给出引理 5.1 的证明。

引理 5.1。 假设e_H^k由(3.4) 给出，且当H足够小时，$\|E_k\|_{1,\infty}\lesssim|\log h|H^2$，则有

$$\|e_H^k\|_{1,\infty}\lesssim H. \tag{A.1}$$

在给出引理 5.1 的证明之前，我们需要介绍一些预备知识和引理。

对于方程 (2.5) 的有限元解 u_h ，我们引入一个投影算子 $\hat{}P_H$:$H_0^1(\Omega)\to V_H$，其定义如下：

$$B(u_h;\hat{P}_H w,v_H)=B(u_h;w,v_H),\quad \forall w\in H_0^1(\Omega),v_H\in V_H. \tag{A.2}$$

由型 $B(u_h;\cdot,\cdot)$ 满足的 BB 条件可知，容易得出 $\hat{}P_H$ 定义良好；这些条件可由注 4.1 得到。此外，投影算子 $\hat{}P_H$ 满足以下估计

$$\|\hat{P}_H w\|_{1,\infty}\lesssim|\log H|\,\|w\|_{1,\infty},\quad \forall w\in W^{1,\infty}(\Omega). \tag{A.3}$$

事实上，在 (4.11) 中取 $v_H=\hat{}P_H w$ ，并利用 (A.2)、(3.1)、注 2.1、H¨older 不等式和 (4.13)，可得

$$\begin{aligned}
\partial\hat{P}_H w(\boldsymbol{x}) &= B(u_h;\hat{P}_H w,g_H^{\boldsymbol{x}})\\
&= B(u_h;w,g_H^{\boldsymbol{x}})\\
&= (\boldsymbol{a}_y(u_h)w,\nabla g_H^{\boldsymbol{x}})+(\boldsymbol{a}_z(u_h)\nabla w,\nabla g_H^{\boldsymbol{x}})+(f_y(u_h)w,g_H^{\boldsymbol{x}})+(f_z(u_h)\nabla w,g_H^{\boldsymbol{x}})\\
&\lesssim \|w\|_{1,\infty}\|g_H^{\boldsymbol{x}}\|_{1,1}\\
&\lesssim |\log H|\,\|w\|_{1,\infty}.
\end{aligned}$$

最后，利用 $\boldsymbol{x}$ 的任意性和 (4.14)，可得 (A.3)。

由泰勒展开可得（详细证明见 [9] 中的引理3.1）

$$A(w,\chi)=A(v,\chi)+B(v;w-v,\chi)+R(\eta;v,w,\chi),\quad \forall w,v,\chi\in H_0^1(\Omega), \tag{A.4}$$

其中，型 $A(\cdot,\cdot)$ 和型 $B(\cdot;\cdot,\cdot)$ 分别由（2.2）和（3.1）给出， $\eta=v+t(w-v)$以及

$$\begin{aligned} R(\eta;v,w,\chi) &= \int_0^1 \Big[(\boldsymbol{a}_{yy}(\eta)(v-w)^2,\nabla\chi)+2(\boldsymbol{a}_{yz}(\eta)\nabla(v-w)(v-w),\nabla\chi) \\ &\quad +(\nabla(v-w)^T\boldsymbol{a}_{zz}(\eta)\nabla(v-w),\nabla\chi)+(f_{yy}(\eta)(v-w)^2,\chi) \\ &\quad +2(f_{yz}(\eta)\cdot\nabla(v-w)(v-w),\chi) \\ &\quad +(\nabla(v-w)^T f_{zz}(\eta)\nabla(v-w),\chi)\Big](1-t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

为证明引理 5.1，我们引入如下算子 Φ 。设 u_h 是 (2.5) 的解， E_k、R、u_h^k 分别由 (4.9)、(A.4) 和算法 2 给出，我们定义算子 Φ： $V_H\to V_H$，对任意 $w_H\in V_H$，

$$B(u_h;\Phi(w_H),v_H)=B(u_h;E_k,v_H)-R(\eta;u_h,u_h^k+w_H,v_H),\ \forall v_H\in V_H, \tag{A.5}$$

其中 $\eta=u_h+t(w_H-E_k)$。根据型 $B(u_h;\cdot,\cdot)$ 的 BB 条件（见注 4.1），容易证明算子 Φ 是良定义的。

我们定义一个空间

$$Q_H=\{v_H\in V_H:\|v_H-\hat{P}_H E_k\|_{1,\infty}\le H\}, \tag{A.6}$$

其中 $\hat{P}_H$ 是由 (A.2) 定义的投影算子。由于 Q_H 是有限维空间，容易看出 Q_H 是一个非空紧凸子集。

接下来，我们将使用布劳威尔不动点定理证明 (A.5) 有一个不动点 $\bar{w}_H$ 属于Q_H。

Lem引理 5.2. 设 $\|E_k\|_{1,\infty}\lesssim|\log h|H^2,$，则当 H 足够小时，有 $\Phi(Q_H)\subset Q_H$.

证明。 对于任意$w_H\in Q_H$， $v_H\in V_H$，将 (A.5) 利用 (A.2) 改写，可得

$$B(u_h;\Phi(w_H)-\hat{P}_H E_k,v_H)=-R(u_h+t(w_H-E_k);u_h,u_h^k+w_H,v_H). \tag{A.7}$$

将$v_H=\Phi(w_H)-\hat{P}_H E_k$代入 (4.11)，并利用 (A.7)、注 2.1、H¨older 不等式、(4.9)、三角不等式、(4.13)、(A.3)、(A.6) 以及 $\|E_k\|_{1,\infty}\lesssim|\log h\ |H^2,$，可得

$$\begin{aligned} \partial(\Phi(w_H)-\hat{P}_H E_k)(\boldsymbol{x}) &= B(u_h;\Phi(w_H)-\hat{P}_H E_k,g_H^{\boldsymbol{x}}) \\ &= -R(u_h+t(w_H-E_k);u_h,u_h^k+w_H,g_H^{\boldsymbol{x}}) \\ &\lesssim \|E_k-w_H\|_{1,\infty}^2\|g_H^{\boldsymbol{x}}\|_{1,1} \\ &\lesssim (\|E_k-\hat{P}_H E_k\|_{1,\infty}^2+\|\hat{P}_H E_k-w_H\|_{1,\infty}^2)\,|\log H| \\ &\lesssim ((1+|\log H|)^2\|E_k\|_{1,\infty}^2+H^2)\,|\log H| \\ &\lesssim ((1+|\log H|)^2\,|\log h|^2\,H^4+H^2)\,|\log H|. \end{aligned}$$

进一步利用$\boldsymbol{x}$ 的任意性和（4.14），证明完成。 □

引理 5.3. 假设 $\|E_k\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$，则算子 Φ 在 V_H 中连续。

证明。 对于任意 $w_1, w_2 \in Q_H$，由 (A.5) 可得

$$\begin{aligned} B(u_h;\Phi(w_1)-\Phi(w_2),v_H) &= R(u_h+t(w_2-E_k);u_h,u_h^k+w_2,v_H) \\ &\quad -R(u_h+t(w_1-E_k);u_h,u_h^k+w_1,v_H). \end{aligned} \tag{A.8}$$

注意到 (A.4) 中 R 的定义，对于 (A.8) 右端与 $\boldsymbol{a}^{yy}$ 有关的项，可利用注 2.1 和 H¨older 不等式得到

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_2-E_k))(E_k-w_2)^2,\nabla v_H)-(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))(E_k-w_1)^2,\nabla v_H) \\ &= (\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_2-E_k))(E_k-w_2)^2,\nabla v_H)-(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))(E_k-w_2)^2,\nabla v_H) \\ &\quad +(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))(E_k-w_2)^2,\nabla v_H)-(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))(E_k-w_1)^2,\nabla v_H) \\ &= (\left[\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_2-E_k))-\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))\right](E_k-w_2)^2,\nabla v_H) \\ &\quad +(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))\left(-2E_kw_2+w_2^2+2E_kw_1-w_1^2\right),\nabla v_H) \\ &= (\left[\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_2-E_k))-\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))\right](E_k-w_2)^2,\nabla v_H) \\ &\quad +(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))(2E_k-w_1-w_2)(w_1-w_2),\nabla v_H) \\ &\lesssim \|\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_2-E_k))-\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))\|_{0,\infty}\|(E_k-w_2)^2\|_0\|v_H\|_1 \\ &\quad +\|2E_k-w_1-w_2\|_0\|w_1-w_2\|_{0,\infty}\|v_H\|_1. \end{aligned} \tag{A.9}$$

对于 $\|(E_k-w_2)^2\|_0$，利用三角不等式、(A.3)、(A.6) 和 $\|E_k\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|\, H^2$，可得

$$\begin{aligned} \|(E_k-w_2)^2\|_0 &\le \|E_k-w_2\|_{1,\infty}^2 \\ &\lesssim \|E_k\|_{1,\infty}^2+\|\hat{P}_HE_k\|_{1,\infty}^2+\|\hat{P}_HE_k-w_2\|_{1,\infty}^2 \\ &\lesssim \|E_k\|_{1,\infty}^2+|\log H|^2\|E_k\|_{1,\infty}^2+H^2 \\ &\lesssim |\log h|^2H^4+|\log H|^2|\log h|^2H^4+H^2 \\ &:= C_1(H), \end{aligned} \tag{A.10}$$

其中 $C_1(H)$ 是一个依赖于 H 的常数。

类似地，对于 $\|2E_k-w_1-w_2\|_0$，也存在一个常数 $C_2(H)$ 使得

$$\|2E_k-w_1-w_2\|_0 \lesssim C_2(H). \tag{A.11}$$

将 (A.10) 和 (A.11) 代入 (A.9)，可得

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_2-E_k))(E_k-w_2)^2,\nabla v_H)-(\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))(E_k-w_1)^2,\nabla v_H) \\ &\lesssim C(H)\left[\|\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_2-E_k))-\boldsymbol{a}_{yy}(u_h+t(w_1-E_k))\|_{0,\infty}+\|w_1-w_2\|_{0,\infty}\right]\|v_H\|_1, \end{aligned}$$

其中 $C(H) = \max\{C_1(H), C_2(H)\}$。右端 (A.8) 中其余各项也有类似结果，此处略去。由上述讨论、(A.8)、型 $B(u_h;\cdot,\cdot)$ 的 BB 条件（见注 4.1）以及.....的连续性，可得结论

$\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的二阶导数（见第 2 节中关于 $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和$f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的假设）。

□

最后，我们利用布劳威尔不动点定理给出引理 5.1 的证明。

证明。 利用引理 5.2 和引理 5.3 以及布劳威尔不动点定理，我们知道 (A.5) 存在一个不动点 $\bar{w}_H$，属于 Q_H。

将 $w = u_h^k + \bar{w}_H$、$v = u_h$ 和 $\chi = v_H$ 代入 (A.4)，再利用 (2.5)，其中 $V_H \subset V_h$，注 3.1、(4.9)、$\bar{w}_H = \Phi(\bar{w}_H)$ 和 (A.5)，可得

$$\begin{aligned} A(u_h^k+\bar{w}_H,v_H) &= A(u_h,v_H)+B(u_h;u_h^k+\bar{w}_H-u_h,v_H)+R(\tilde{\eta};u_h,u_h^k+\bar{w}_H,v_H) \\ &= B(u_h;\bar{w}_H,v_H)-B(u_h;E_k,v_H)+R(\tilde{\eta};u_h,u_h^k+\bar{w}_H,v_H) \\ &= B(u_h;\Phi(\bar{w}_H),v_H)-B(u_h;E_k,v_H)+R(\tilde{\eta};u_h,u_h^k+\bar{w}_H,v_H) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{A.12}$$

其中 $\tilde{\eta} = u_h + t(\bar{w}_H - E_k)$。由有限元解的唯一性（见引理 2.1）、(3.4) 和 (A.12)，可知 $\bar{w}_H = e_H^k$，这意味着 $e_H^k \in Q_H$。

最后，利用三角不等式、(A.6)、(A.3) 以及 $\|E_k\|_{1,\infty} \lesssim |\log h|H^2$，我们得到

$$\begin{aligned} \|e_H^k\|_{1,\infty} &\leq \|e_H^k - \hat{P}_H E_k\|_{1,\infty} + \|\hat{P}_H E_k\|_{1,\infty} \\ &\lesssim H + |\log H|\,\|E_k\|_{1,\infty} \\ &\lesssim H + |\log H|\,|\log h|H^2, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

参考文献

[1] C. J. BI, C. WANG 和 Y. P. LIN，非线性椭圆问题双网格有限元方法的后验误差估计，J. Sci. Comput., 74 (2018), 23–48.[2] P. G. CIARLET，椭圆问题的有限元方法，应用数学经典丛书，第 40 卷。SIAM，费城，2002.[3] T. GUDI, N. NATARAJ 和 A. PANI，强非线性椭圆边值问题的 *hp* 不连续伽辽金方法，Numer. Math., 109 (2008), 233–268.[4] V. THOM´EE, J. C. XU 和 N. Y. ZHANG，抛物问题分片线性有限元逼近中梯度的超收敛，SIAM J. Numer. Anal., 26 (1989), 553–573.[5]H. Y. WEI 和 Y. Q. HUANG，*Fealpy*：*Python* 有限元分析库。*https://github.com/weihuayi/fealpy*，湘潭大学，2017-2021.[6] J. C. XU，用于非对称或不定问题的对称正定和小子空间求解器迭代方法，载于第五届偏微分方程区域分解方法国际研讨会论文集，SIAM，费城，1992，第 106–118 页.[7] J. C. XU，半线性椭圆方程的新型双网格方法，SIAM J. Sci. Comput., 15 (1994), 231–237.[8] J. C. XU，若干双网格有限元方法，载于《科学与工程中的区域分解方法》（Quarteroni、Alfio、P´eriaux、Jacques、Kuznetsov、Yuri A 和 Widlund、Olof B 编），Contemp. Math. 第 157 卷，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，RI，1994，第 79–87 页。

[9] J. C. XU，线性与非线性偏微分方程的双网格离散技术，SIAMJ. Numer. Anal., 33 (1996), 1759–1777.[10] J. C. Xu 和 X. C. Cai，用于非对称或不定问题的预条件广义最小残量法，Math. Comp., 59 (1992), 311–319.[11] W. F. ZHANG、R. H. Fan 和 L. Q. Zhong，半线性椭圆方程的迭代双网格方法，Comput. Math. Appl., 80 (2020), 522–530。