arXiv:2301.02887v1 [math.DG] 7 Jan 2023

具有曲率上界的奥比折与流形商空间

CHRISTIAN LANGE

摘要。我们将具有亚历山德罗夫意义下曲率上界的黎曼轨形刻画为反射奥比折，即所有局部群均由反射生成、且具有相同截面曲率上界的黎曼轨形。结合 Lytchak–Thorbergsson 的一项结果，这意味着：黎曼流形被闭等距变换群作用后所得的商空间，在亚历山德罗夫意义下局部具有有界的上曲率，当且仅当它是反射奥比折。

1. 引言

设 M 是一个黎曼流形， G 是其上的闭等距变换群。那么商空间 M/G 是一个度量空间，其度量性质往往以有趣的方式与该作用的性质相关，参见例如 [GLLM22, LT10]。通常，这个商空间并非黎曼流形，而是一个曲率局部有下界的亚历山德罗夫空间。尽管如此，它仍可分层为黎曼流形，而所谓的主层是开且稠密的 [AB15]。Lytchak 和 Thorbergsson 证明，主层的截面曲率在某点附近有上界，当且仅当 M/G 中该点的邻域是一个黎曼轨形；也就是说，它是一个局部等距于某个黎曼流形在有限群等距作用下所得商空间的度量空间[LT10, 定理 1.1]。然而，这类商空间的曲率通常在亚历山德罗夫意义下仍然局部无上界。例如， $\mathbb{R}^2$ 被一个绕原点旋转的有限循环群作用后所得的商空间，与半径为 $2\pi/k$ 的圆上的欧几里得锥等距，其中 $k > 1$ ，并且在圆锥顶点处呈现无穷正曲率。从无穷小角度看，唯一能想到的例外是 $\mathbb{R}^n$ 被有限反射群作用后所得的商空间 [Hu90]。在这种情况下，商空间与相应反射群的魏尔室等距，因此是平坦的。从整体上看，这些例子对应于所谓的反射奥比折，即所有局部群均为反射群的黎曼轨形[Da11]。特别地，反射奥比折在其内部是黎曼流形。事实上，具有双侧曲率界的度量空间在其内部总是黎曼流形（正则性或许较低） [BN93], cf. [BBI01, 定理 10.10.13]。在这里，我们证实，对于整个商空间而言，除反射奥比折外，不存在其他能够局部具有双侧曲率界的例子。

定理 *1.1*。 *</style}*黎曼轨形的曲率在亚历山德罗夫意义下局部有上界，当且仅当它是反射奥比折。在这种情况下，局部而言，曲率在亚历山德罗夫意义下有 k 上界，当且仅当截面曲率有 k 上界。

在流形情形中，这一结论归功于亚历山德罗夫 [Al51]，其依据是嘉当 [Ca28] 的早期工作。我们对定理 1.1 的证明采用关于维数的归纳法，并利用这样一个事实：曲率有上界的度量空间的切空间是 CAT(0) 空间，见定理 2.2。关键步骤是证明引理 2.3，该引理刻画了有限子群 $\Gamma < \mathrm{O}(n)$ 的商空间 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ 中哪些是 CAT(0) 空间。也就是说，这样的商空间是 CAT(0) 空间，当且仅当 Γ 由反射生成；在这种情况下，若 Γ 非平凡，则该商空间与 Γ 的一个魏尔室等距。证明策略与 [La16 第 4] 节以及 [La19 引理 4.17] 中的策略相关。

根据 Lytchak–Thorbergsson [LT10 定理 1.1] 的结果，我们陈述以下推论。

推论 1.2. 设 M 是一个黎曼流形，G 是 M的一个等距变换闭群。设 $p \in M$ 是一个具有各向同性群 G_p的点。令 $\bar{p} = Gp \in M/G$。则下列条件等价：

(i) 在亚历山德罗夫意义下，M/G 的曲率在 $\bar{p}$ 的某个邻域内有上界。*(ii)* M/G 中 $\bar{p}$ 的某个邻域是一个反射奥比折。*(iii)* G_p 在 T_pM 上的作用是极作用，且相应的极群 Π 由反射生成。

若存在一个子空间 $\Sigma \subseteq T_pM$ 与 G_p作用的所有轨道相交，且始终与这些轨道正交，则称 G_p 在 T_pM 上的作用为极作用。极群 Π 定义为保持 Σ不变的子群模去逐点固定 Σ 的子群所得的商群。它自然地作用于 Σ。特别地，若 G_p 是连通的 [GZ12，命题 1.4]，且若 G_p 是考克斯特极的（例如对称空间的各向同性表示），则条件 (iii)成立。关于极作用的更多细节，请参阅综述 [GZ12]。

2. 曲率上界下的商空间

2.1. 曲率有上界的空间。 如果存在某个 $D > 0$，使度量空间 X 中距离小于 D_k 的任意两点都由一条测地线连接，我们就称 X 是 D-测地的。令 D_k 为常曲率 k 的完备模型平面的直径。如果 X 是 D_k-测地的，并且其中周长小于 $2D_k$ 的所有测地三角形都满足 CAT(k) 比较条件（见 [BH99, II.1]），我们就称 X 是 CAT(k) 空间。如果 X 在亚历山德罗夫意义下曲率有上界 k，我们就称它局部为 CAT(k) 空间。亚历山德罗夫的下述结果为这一定义提供了依据。证明亦见 [BH99, Theorem 1A.6]。

定理 2.1 (亚历山德罗夫，[Al51])。黎曼流形在亚历山德罗夫意义下曲率有上界 k，当且仅当其截面曲率有上界 k。

对于一个在亚历山德罗夫意义下曲率有上界的度量空间 X，我们将点 $p \in X$ 处的方向空间（的完备化）记为 Σ_pX，并将 X 在 p 处的切锥记为 T_pX；后者与以方向空间 Σ_pX 为底的欧几里得锥等距。参见 [BH99, II 3]。以下命题的证明最初由 Kleiner 和 Leeb[KL97]，概述，可见 [BH99, II 3.19]。

定理 2.2 (Nikolaev，[N95])。如果一个度量空间在亚历山德罗夫意义下曲率有上界，那么所有方向空间都是$\mathrm{CAT}(1)$，所有切空间都是$\mathrm{CAT}(0)$。

2.2. **黎曼奥比折**。 黎曼 n轨形 $\mathcal{O}$ 可以定义为一种长度空间，它在局部等距于黎曼 n流形除以有限群 [La20]的等距作用所得的商空间。在此类流形图卡中，有限群作用下某点 $p \in \mathcal{O}$ 的原像的各向同性群在正交群 O(n) 中的共轭意义下唯一确定，称为 $\mathcal{O}$ 在 p处的局部群。局部群平凡的点集称为 $\mathcal{O}$的正则部分。从局部模型容易看出，正则部分是开且稠密的。因此，如果一个黎曼轨形的曲率在亚历山德罗夫意义下有上界 k ，那么根据定理 2.1，其正则部分的截面曲率也必须满足相同的曲率上界。此外，由于正则部分是稠密的，该截面曲率上界必处处成立。

2.3. **定理 1.1 和推论 1.2 的证明**。 黎曼奥比折 $\mathcal{O}$ 在点 $p \in \mathcal{O}$ 处的方向空间与 S^{n-1}/Γ_p等距，其中 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$中的单位球面，而 $\mathcal{O}$ 在 p 处的切锥与 $\mathbb{R}^n/\Gamma_p$等距。因此，定理 1.1 中所述的结论——若曲率在亚历山德罗夫意义下有上界，则局部群由反射生成——是以下引理的推论。

引理 2.3。 设 $\Gamma < \mathrm{O}(n)$ 是一个有限子群，且 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ 是 $\mathrm{CAT}(0)$。则 Γ 由反射生成。

证明。 我们对 n使用归纳法来证明该结论。对于 $n = 1$ ，该结论显然成立。

假设该命题对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，并设 $\Gamma < \mathrm{O}(n+1)$ 是一个有限子群，使得 $\mathbb{R}^{n+1}/\Gamma$ 是 CAT(0) 空间。根据定理 2.2， $\Sigma_{\overline{0}}(\mathbb{R}^{n+1}/\Gamma) = S^n/\Gamma$ 是 CAT(1) 空间。因此，对于任意 $v \in S^n$ ，都有 $T_{\overline{v}}(S^n/\Gamma) = T_vS^n/\Gamma_v = \mathbb{R}^n/\Gamma_v$ 是 CAT(0) 空间；于是根据归纳假设，对于任意 $v \in S^n$，各向同性群 Γ_v 都由反射生成。

我们令 $\Gamma' = \langle \Gamma_v \mid v \in S^n \rangle$。根据构造， Γ' 是由反射生成的 Γ 的正规子群。Γ/Γ' 在 S^n/Γ' 上的诱导作用是等距且自由的，见 [La19，引理 4.16]。

我们先假设 Γ' 非平凡。在这种情况下， $\mathbb{R}^{n+1}/\Gamma'$ 与魏尔室 [Hu90] 等距，因此商空间 S^n/Γ' 可缩。这意味着 $\Gamma = \Gamma'$ ，因为非平凡有限群不可能在有限维复形上自由作用（尽管它可以在没有不动点的情况下作用 [FR59]）。或者，我们也可以按如下方式从几何角度论证。群 Γ 保持子空间

$$V = \mathrm{Fix}(\Gamma') = \{v \in \mathbb{R}^n \mid gv = v \text{ for all } g \in \Gamma'\} \cong \mathbb{R}^k$$

且其正交补保持不变。由于 Γ' 非平凡，我们有 $k > 0$。于是 $\Delta = S^{n-k}/\Gamma'$ 是一个（严格凸的）球面单纯形 [Hu90]。联接分解 $S^n = S^{k-1} * S^{n-k}$诱导出其 Γ'-商空间的分解 $S^n/\Gamma' = S^{k-1} * \Delta$ ，其中子空间 S^{k-1} 和 Δ 在 Γ/Γ' 作用下保持不变。由于 Δ 的重心被 Γ/Γ'固定，我们再次得出 $\Gamma = \Gamma'$。

因此，我们可以假设 Γ' 是平凡的。在这种情况下， Γ 在 S^n上自由作用。因此，对任意非平凡的 $g \in \Gamma$ ， S^n 上都存在一条周期测地线，且该测地线连同其定向在 g作用下保持不变。假设存在这样一个非平凡的 g。那么，相应的不变测地线投影为 S^n/Γ 上的一条长度为 $< 2\pi$的周期测地线；这是因为 Γ 在 S^n 上的作用也是自由的。这与 S^n/Γ 是 CAT(1) 的事实矛盾，参见 [AKP19，命题 2.2。7],因此，在这种情况下， Γ 也必定是平凡的。结论得证。□

这就完成了定理 1.1 中“如果”方向的证明。“唯有如果”方向的证明基于这样一个事实：商 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ of $\mathbb{R}^n$ by a reflection group $\Gamma < \mathrm{O}(n)$

is isometric to a Weyl chamber in $\mathbb{R}^n$ [Hu90]. 若有限群 Γ_p 以等距方式作用于黎曼流形 M，并固定一点 $p \in M$，且 Γ_p 在 T_pM 上的诱导作用由反射生成，那么 p 在 M/Γ_p 中的像的一个小 r邻域，与指数映射 $\exp^p\colon T_pM \to M$ 下相应魏尔室与 $0 \in T_pM$的一个小 r 邻域之交的像等距。由此可得结论，因为只需注意到，当 $r > 0$ 充分小时，该像是 M的一个凸子集；这在黎曼几何中是一个简单的练习。

推论 *1.2* 的证明。 为证明推论 1.2，我们首先注意到，根据定理 2.1， U在 M/G 中的一个邻域具有亚历山德罗夫意义下的曲率上界，这意味着 U 与 M/G 的主层的交集具有截面曲率上界。在这种情况下，根据 [LT10，定理 1.1] ， U 是一个黎曼奥比折，因此根据定理 1.1，它也是一个反射奥比折。反向蕴含也由定理 1.1 得出。

另一个等价关系由 [LT10，定理 1.1] 以及以下观察得出： G_p 在 T_pM 上的极作用的截面 Σ 除以极群 Π所得的商 Σ/Π ，与轨形 M/G 在 $\overline{p}$ □处的切锥等距。

致谢。 作者感谢 Claudio Gorodoski 就极作用展开讨论，并感谢 LMU 几何研讨班的成员提出有益的问题和评论。

参考文献

[AKP19] S. Alexander、V. Kapovitch 和 A. Petrunin，《亚历山德罗夫几何导论》。CAT(0) 空间。数学 SpringerBriefs 丛书。Springer，Cham，2019年。xii+88 页。[AB15] M. Alexandrino 和 R. Bettiol，《李群与等距作用的几何方面》。Springer，Cham，2015年。x+213 页。[Al51] A. D. Alexandrov，《度量空间中的三角形定理及其若干应用》。（俄文）《斯捷克洛夫数学研究所论文集》38（1951年），5–23。苏联科学院出版社，莫斯科。[BN93] V. N. Berestovskij 和 I. G. Nikolaev，《多维广义黎曼空间》。几何学，IV，165–243，245–250，数学科学百科全书，70，Springer，柏林，1993年。[BH99] M. R. Bridson、A. Haefliger，《非正曲率度量空间》。数学科学基础丛书。 [数学科学基本原理], 319。Springer-Verlag，柏林，1999年。xxii+643 页。[BBI01] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov，《度量几何教程》。数学研究生丛书，33。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。[Ca28] É. Cartan，《黎曼空间几何讲义》。Gauthier-Villars，巴黎，1928年，第二版，1951年。[Da11] M. W. Davis，《轨形与反射群讲座》，载于变换群与曲线模空间，63–93，进阶数学讲座（ALM），16，Int. Press，Somerville，马萨诸塞州，2011年。[GL15] C. Gorodski 和 A. Lytchak，《最小约化具有环面恒等连通分支的表示》。美国数学会会刊 143（2015年），第1期，379–386。[GLLM22] C. Gorodski、C. Lange、A Lytchak 和 R. A. E. Mendes，《单位球面商空间的直径间隙》。欧洲数学会杂志（2022年），DOI 10.4171/JEMS/1272。[GL16] C. Gorodski 和 A. Lytchak，《具有轨形商空间的球面上的等距作用》。数学年刊 365（2016年），第3–4期，1041–1067。[GZ12] K. Grove 和 W. Ziller，《极流形与作用》。不动点理论与应用杂志 11（2012年），第2期，279–313。[Hu90] J. E. Humphreys，《反射群与考克斯特群》。剑桥高等数学研究丛书，第29卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[KL97] B. Kleiner 和 B. Leeb，《对称空间与欧几里得建筑中拟等距映射的刚性》。高等科学研究所数学出版物，第86期（1997年），115–197（1998年）。

[La16] C. Lange, 《由反射与旋转生成的有限群的刻画》。拓扑学杂志 9（2016年），第4期，1109–1129。[La19] C. Lange, 《何时奥比折的底空间是流形？》美国数学会汇刊 372（2019年），第4期，2799–2828。[La20] C. Lange, 《从度量观点看奥比折》。几何奉献，**209**（2020年），43–57。[LT10] A. Lytchak 和 G. Thorbergsson, 《商空间中的曲率爆炸及其应用》。微分几何杂志 85（2010年），第1期，117–139。[N95] I. Nikolaev, 《曲率为 $\leq k$的亚历山德罗夫空间的切锥》。数学手稿 86（1995年），第2期，137–147。[FR59] E. Floyd 和 R. W. Richardson, 《有限群在无不动点的 n维胞腔上的作用》。美国数学会通报 65（1959年），73–76。

慕尼黑路德维希-马克西米利安大学，数学研究所，特蕾西娅街39号，80333 慕尼黑，德国电子邮箱地址：lange@math.lmu.de, clange.math@gmail.com