arXiv:2301.02890v1 [math.DS] 7 Jan 2023

含两个不动点的 p-进(1,2)有理动力系统的遍历性与周期轨道

I.A. SATTAROV，E.T. ALIEV

Abstract. 我们研究定义在 p-进数域 $\mathbb{Q}_p$上的(1, 2)有理函数。一般而言，这类函数有四个参数。我们研究这类函数有两个不动点的情形，并证明当其有两个不动点时，该(1, 2)有理函数共轭于一个二参数(1, 2)有理函数。根据这两个参数，我们确定不动点的类型，求出Siegel圆盘和不动点的吸引域。此外，我们对不变集进行分类，并研究该函数在各个不变集上的遍历性质。我们描述由二参数(1, 2)有理函数生成的 p-进动力系统的2-周期轨道和3-周期轨道。

1. Introduction and preliminaries

一个函数称为 (n,m)-有理函数，当且仅当它可以写成 $f(x) = {}^{P_n(x)}\!/_{Q_m(x)}$ 的形式，其中 $P_n(x)$ 和 $Q_m(x)$ 分别是次数为 n和 m的多项式函数， $Q_m(x)$ 是非零多项式。

本文研究由一个（1.2-）有理函数生成的动力系统。我们的研究基于 [1], [3], [13]-[17] 中的方法。关于本研究的动机，请参见 [2],[4]-[6], [10]-[12] 及其中的参考文献。

给出主要定义。设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域。正整数 n 和 m 的最大公约数记作 (n,m)。每个有理数 $x \neq 0$ 都可以表示为 $x = p^r \frac{n}{m}$ 的形式，其中 r、 $n \in \mathbb{Z}$、 m 是正整数，$(p,n) = 1$, $(p,m) = 1$ ，且 p 是一个固定的素数。

p-进范数定义为 $x \in \mathbb{Q}$

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{for } x \neq 0, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

它具有以下性质：

1) $|x|_p \geq 0$ 和 $|x|_p = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

2) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$, 3) 强三角不等式

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\},$$

3.1) 若 $|x|_p \neq |y|_p$ ，则 $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$,

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46S10, 12J12, 11S99, 30D05,54H20.*Key words and phrases.* 有理动力系统；不动点；不变集；Siegel圆盘；复p进域。

3.2) 若 $|x|_p = |y|_p$，则 $|x+y|_p \le |x|_p$。

关于 p-adic 范数完备化 $\mathbb{Q}$，定义了 p-adic 域，记作 $\mathbb{Q}_p$ （见 [8]）。

对于任意 $a \in \mathbb{Q}_p$ 和 $r > 0$，记

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p < r\}, \quad V_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p \le r\},$$
$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x-a|_p = r\}.$$

若函数 $f\colon U_r(a) \to \mathbb{Q}_p$ 可表示为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x-a)^n, \quad f_n \in \mathbb{Q}_p,$$

且该级数在球 $U_r(a)$ 上一致收敛。

现在设 $f\colon U \to U$ 是一个解析函数。记 $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(x)$.

若 $f(x_0) = x_0$，则称 x_0 为不动点。f 的所有不动点组成的集合记为 Fix(f)。若存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得对所有点 $x \in U(x_0)$，均有 $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$，则称不动点 x_0 为吸引子。若 x_0 是吸引子，则其
吸引域为

$$A(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \ f^n(x) \to x_0, \ n \to \infty\}.$$

若存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得对于 $x \in U(x_0)$，$|f(x) - x_0|_p > |x-x_0|_p$，则称不动点 x_0 为排斥子。

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的不动点。令 $\lambda = f'(x_0)$。若$0 < |\lambda|_p < 1$，则称点 x_0 为吸引的；若 $|\lambda|_p = 1$，则称其为中性的；若 $|\lambda|_p > 1$，则称其为排斥的。

若球 $U_r(x_0)$ 中的每个球面 $S_\rho(x_0)$，$\rho < r$ 都是 $f(x)$ 的不变球面，即若 $x \in S_\rho(x_0)$，则对所有 $n = 1, 2 \ldots$，迭代点 $f^n(x) \in S_\rho(x_0)$ 均成立，那么称球 $U_r(x_0)$ 为 Siegel圆盘。所有以 x_0 为中心的 Siegel圆盘的并称为最大Siegel圆盘，记作 $SI(x_0)$。

设 $f\colon A \to A$ 和 $g\colon B \to B$ 是两个映射。若存在一个同胚 $h\colon A \to B$ 使得 $h \circ f = g \circ h$，则称 f 和 g 拓扑共轭。这个同胚 h 称为拓扑共轭。拓扑共轭的映射在动力学方面完全等价。

本文考虑由下式定义的 (1, 2)-有理函数 $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}, \quad x \ne \hat{x}_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4d}}{2} \tag{1.1}$$

其中函数的参数满足以下条件

$$a \ne 0, \quad a, b, c, d, \sqrt{c^2-4d} \in \mathbb{Q}_p.$$

我们研究由有理函数 (1.1) 生成的 p-进动力系统。函数 (1.1) 的不动点方程 $f(x) = x$ 等价于方程

$$x^3 + cx^2 + (d-a)x - b = 0. \tag{1.2}$$

方程 (1.2) 可能有三个解，且满足以下关系之一：

(i) 一个解的重数为三；(ii) 两个解，其中一个的重数为二；(iii) 三个互不相同的解。

注 1. 由于动力系统的行为取决于不动点集，因此上述 (i)-(iii) 各种情形都有各自的动力学特征。 [15]中讨论了情形 (i)。本文考虑情形 (ii)，即研究 $\mathbb{Q}_p$ 中任意 (1,2) 有理动力系统在 f 存在两个不动点时的轨道行为。情形 (iii) 将在另一篇论文中讨论。

本文安排如下。第 2 节在一些假设下证明，四参数函数 (1.1) 与二参数 (1,2) 有理函数共轭。第 3 节研究由该二参数函数生成的 p-adic 动力学，并给出 Siegel 圆盘、吸引域以及所有不变集的分类。第 4 节研究该动力系统在不变集上的遍历性。第 5 节描述 2-周期轨道和 3-周期轨道。

2. A function conjugate to (1.1)

用 x_1 和 x_2 表示方程 (1.2) 的两个解，其中 x_2 的重数为二。于是有 $x^3+cx^2+(d-a)x-b=(x-x_1)(x-x_2)^2$ 并且

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-c \\ x_2^2+2x_1x_2=d-a \\ x_1x_2^2=b. \end{cases} \tag{2.1}$$

定义同胚 $h\colon \mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$，使其满足 $h(t)=t+x_2$。注意，函数f 与函数 $h^{-1}\circ f\circ h$拓扑共轭。我们有

$$(h^{-1}\circ f\circ h)(t)=\frac{-x_2t^2+Bt}{t^2+Dt+B}, \tag{2.2}$$

其中 $B=x_2^2+cx_2+d$ 且 $D=2x_2+c$。

在 [13] 中，研究了情形 $x_2\neq 0$ 。

因此，本文考虑 (2.2) 中的情形 $x_2=0$ 。若 $x_2=0$，则 $B=d=a$ 且$D=c$。于是得到以下命题

命题 1. 任意具有两个不同不动点的 (1,2) 有理函数，都拓扑共轭于下列函数之一

$$f(x)=\frac{ax^2+bx}{x^2+cx+b},\quad ab(a-c)\neq 0,\quad a,b,c\in\mathbb{Q}_p,$$

and

$$f(x)=\frac{ax}{x^2+cx+a},\quad ac\neq 0,\quad a,c,\in\mathbb{Q}_p. \tag{2.3}$$

其中 $x\neq \hat{}x_{1,\ 2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4a}}{2}$ 。

我们研究由（2.3）给出的动力系统（$\mathbb{Q}_p, f$），其中 f。

3. p-Adic dynamics of (2.3)

N注意，函数（2.3）有两个不动点 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = -c$。我们有

$$f'(x_1) = 1 \quad \text{and} \quad f'(x_2) = 1 - \frac{c^2}{a}.$$

因此，点 x_1 是映射 (2.3) 的中性点，即， x_1 是某个 Siegel 圆盘 $SI(x_1)$ 的中心。本节中，我们将确定各种情况下不动点 x_2 的性质。然后，当不动点 x_2 分别为中性的或吸引的时，我们求出其 Siegel 圆盘或吸引域。当 x_2 为排斥的时，我们求出开球 $U_r(x_2)$，使得对所有 $x \in U_r(x_2)$，不等式 $|f(x) - x_2|_p > |x - x_2|_p$ 均成立。此外，当 x_2 为中性点时，我们研究集合 $SI(x_1)$ 与 $SI(x_2)$ 之间的关系。

对于任意 $x \in \mathbb{Q}_p, x \neq \hat{x}_{1,2}$，通过简单计算可得

$$|f(x)|_p = |x|_p \cdot \frac{|a|_p}{|x - \hat{x}_1|_p |x - \hat{x}_2|_p}. \tag{3.1}$$

记

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Q}_p : \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, f^n(x) \in \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}\},$$
$$\alpha = \min\{|\hat{x}_1|_p, |\hat{x}_2|_p\} \quad \text{and} \quad \beta = \max\{|\hat{x}_1|_p, |\hat{x}_2|_p\}. \tag{3.2}$$

由于 $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = -c$，我们有 $|c|_p \leq \alpha$ （当 $\alpha = \beta$ 时）以及 $|c|_p = \beta$ （当 $\alpha < \beta$ 时）。又由于 $\hat{x}_1 \hat{x}_2 = a$，我们有 $|a|_p = \alpha\beta$。

定理1. 由函数 (2.3) 生成的 p-adic 动力系统具有以下性质：

1. $SI(x_1) = U_\alpha(0)$。2. 若 $|c|_p < \alpha = \beta$，则 x_2 是函数 (2.3) 的中性不动点，并且

$$SI(x_2) = SI(x_1).$$

3. 若 $|c|_p = \alpha = \beta$ 且 $|a - c^2|_p = \alpha^2$，则 x_2 是函数 (2.3) 的中性不动点，并且

$$SI(x_2) = U_\alpha(x_2), \quad SI(x_2) \cap SI(x_1) = \emptyset.$$

4. 若 $|c|_p = \alpha = \beta$ 且 $|a - c^2|_p < \alpha^2$，则 x_2 是函数 (2.3) 的吸引不动点，并且

$$A(x_2) = U_\alpha(x_2) \subset S_\alpha(0).$$

5. 若 $\alpha < \beta$，则 $x_2 \in S_\beta(0)$ 是函数 (2.3) 的排斥不动点，并且不等式 $|f(x) - x_2|_p > |x - x_2|_p$ 对所有 $x \in U_\beta(x_2), x \neq x_2$ 均成立。

证明。 1. 令 $x \in S_r(x_1)$，即 $|x|_p = r$。那么，由等式 (3.1)、(3.2) 以及 p-adic 范数的性质可得

$$|f(x)|_p = \begin{cases} r, & \text{if } r < \alpha, \\ \geq \alpha, & \text{if } \alpha \leq r \leq \beta, \\ \frac{|a|_p}{r}, & \text{if } r > \beta. \end{cases}$$

由此等式，对于任意 $r < \alpha$， $f(S_r(x_1)) \subset S_r(x_1)$，即我们有 $SI(x_1) = U_\alpha(0)$。

2. 注意到 $|a|_p = \alpha\beta$。若 $|c|_p < \alpha = \beta$，则 $|f'(x_2)|_p = \left|1 - \frac{c^2}{a}\right|_p = 1$. 由此可知， x_2 是中性不动点。令 $x \in S_r(x_2)$，即 $|x - x_2|_p = r$。于是，由等式

$$|f(x) - x_2|_p = |x - x_2|_p \cdot \frac{|x_2(x - x_2) + (x_2^2 - a)|_p}{|(x - x_2) + \hat{x}_1|_p |(x - x_2) + \hat{x}_2|_p} \tag{3.3}$$

对所有 $r < \alpha$，我们有 $|f(x) - x_2|_p = r$；并且对于 $r = \alpha$，有 $|f(x) - x_2|_p \geq r$。因此，对于任意 $r < \alpha$， $f(S_r(x_2)) \subset S_r(x_2)$，也就是说，我们有 $SI(x_2) = U_\alpha(x_2)$。在这种情况下，我们有 $|x_2|_p = |c|_p < \alpha$，所以 $x_2 \in U_\alpha(0) = SI(x_1)$。由于这两个 Siegel 圆盘半径相同且有一个公共点，它们是同一个圆盘，即 $SI(x_2) = SI(x_1)$。

3. 若 $|c|_p = \alpha = \beta$且 $|a - c^2|_p = \alpha^2$，则 $|f'(x_2)|_p = \left|\frac{a-c^2}{a}\right|_p = 1.$。由此可知， x_2是中性不动点。与上文一样，由方程 (3.3) 可得 $SI(x_2) = U_\alpha(x_2)$。然而，在这种情况下 $x_2 \in S_\alpha(0)$，因此 $SI(x_2) \cap SI(x_1) = \emptyset$。

4. 如果 $|c|_p = \alpha = \beta$且 $|a - c^2|_p < \alpha^2$，那么 $|f'(x_2)|_p = \left|\frac{a-c^2}{a}\right|_p < 1$. 由此可知， x_2是吸引不动点。注意， $|x_2|_p = \alpha_\circ$ 令 $x \in U_\alpha(x_2) \subset S_\alpha(0)$。于是，由等式 (3.3) 并利用 p-进范数的强三角不等式，我们推导出关系$|f(x) - x_2|_p < |x - x_2|_p$ 对所有 $x \in U_\alpha(x_2)$ 均成立。同样地，如果 $x \notin U_\alpha(x_2)$，那么有关系 $|f(x) - x_2|_p \geq \alpha$。

注意， p-进范数的赋值集合为 $\{p^m | m \in \mathbb{Z}\}$。因此，关系$|f(x) - x_2|_p < |x - x_2|_p$等价于关系 $|f(x) - x_2|_p \leq \frac{1}{p}|x - x_2|_p$。这意味着映射 $f: U_\alpha(x_2) \to U_\alpha(x_2)$ 是一个压缩映射。根据压缩映射的性质，有等式 $A(x_2) = U_\alpha(x_2)$。

5. 若 $\alpha < \beta$，则有 $|x_2|_p = \beta$，即 $x_2 \in S_\beta(0)$。此外， $|f'(x_2)|_p = \left|1 - \frac{c^2}{a}\right|_p = \frac{\beta}{\alpha} > 1.$ 设 $x \in S_r(x_2)$，即 $|x - x_2|_p = r$。于是由等式 (3.3) 得

$$|f(x) - x_2|_p = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}|x - x_2|_p, & \text{if } r < \alpha, \\ \geq \beta, & \text{if } r = \alpha, \\ \beta, & \text{if } \alpha < r < \beta, \\ \leq \beta, & \text{if } r = \beta, \\ \beta, & \text{if } r > \beta. \end{cases}$$

由此可得，对于所有 $x \in U_\beta(x_2)$，$x \neq x_2$，不等式 $|f(x) - x_2|_p > |x - x_2|_p$成立。□

推论 1. • 球面 $S_r(x_1)$ 对于 f 不变，当且仅当 $r < \alpha_\circ$
• 球面 $S_r(x_2)$ 对于 f 是不变的，当且仅当以下陈述之一成立：a) $|c|_p < \alpha = \beta$ 且 $r < \alpha$；b) $|c|_p = \alpha = \beta$、 $|a - c^2|_p = \alpha^2$ 和 $r < \alpha_\circ$

4. Ergodicity of the dynamical systems on invariant spheres

回顾一下，不变测度是指在某个函数作用下保持不变的测度。在动力系统的遍历理论中，不变测度非常重要。

设 G是一个拓扑群。如果 G 是阿贝尔且局部紧的，那么众所周知[7]，它存在一个非零的平移不变测度 μ，且该测度在相差一个标量的意义下唯一。这称为哈尔测度。

在 p-进数域中，设 Σ 为包含所有开闭（既开又闭）子集的最小 σ-代数。

测度 $\mu(V_\rho) = \rho, V_\rho \in \Sigma$ 通常称为哈尔测度，其中 V_ρ 是半径为 ρ的球。

然而，在某些情况下，会出现研究将 $\mathbb{Q}_p$ 的紧子集映射到其自身的函数所诱导的动力系统的问题。此时，需要一个定义在 σ-代数上的测度，其单位元为一个紧集。如果这个紧集具有某种代数结构，那么我们能否考虑自然的哈尔测度？如果所考虑的紧集是球或球面，这个问题的答案是肯定的，具体如下文 [16]所述。

设 $V_r(a)$ 为以点 $a \in \mathbb{Q}_p$ 为中心的球（$S_r(a)$ 为球面），且 $\mathcal{B}$ 是由 $V_r(a)$（$S_r(a)$）的开闭子集生成的代数。已知 $\mathcal{B}$ 的每个元素都是若干个球 $V_\rho(s) \subset V_r(a)$、 $s \in V_r(a)$（$V_\rho(s) \subset S_r(a)$、 $s \in S_r(a)$）的并集。

定理2. [16] 测度 $\bar{\mu} : \mathcal{B} \to p^{\mathbb{Z}}$ 若由 $\bar{\mu}(V_\rho(s)) = \rho$ 对所有 $V_\rho(s) \in \mathcal{B}$ 定义，则为哈尔测度。

此外, 遍历理论常研究遍历变换。定义如下: :

定义1. [18] 设 $T : X \to X$ 是测度空间 (X, Σ, μ) 上的保测变换，其中 $\mu(X) = 1$。若对任意 E 属于 Σ 且满足 $T^{-1}(E) = E$，则或者 $\mu(E) = 0$，或者 $\mu(E) = 1$，称 T 为遍历的。

本节研究以不动点为中心的不变球面上的动力系统的遍历性（关于哈尔测度）。

注 2. 上一节的推论 1 对以不动点为中心的不变球面进行了分类。此外，在定理1的第 2 部分中，证明了由不变球面之并组成的极大 Siegel圆盘彼此重合。因此，当 $|c|_p < \alpha = \beta$ 时，不变球面的中心并不重要。然而，当 $|c|_p = \alpha = \beta$ 时，有必要分别考察中心为 x_1 和 x_2 的不变球面上的动力系统的遍历性。

对于每个不变球面，我们考虑一个可测空间（S_r（x_i） $\mathcal{B}$），其中 $\mathcal{B}$ 是由 S_r（x_i）的闭子集生成的代数， $i = 1,2$。 $\mathcal{B}$ 的每个元素都是若干个球V_ρ（s） $\subset S_r$（x_i）的并。

测度 $\bar{\mu}$：如果对所有 $s \in S_r(x_i)$ 和满足 $V_\rho(s) \subset S_r(x_i)$ 的 $\rho \in p^{\mathbb{Z}}$，都有 $\bar{\mu}(V_\rho(s)) = \rho$，则 $\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ 是哈尔测度。

注意， $S_r(x_i) = V_r(x_i) \setminus V_{\frac{r}{p}}(x_i)$。因此，我们有 $\bar{\mu}(S_r(x_i)) = r(1 - \frac{1}{p})$。

我们考虑归一化（概率）哈尔测度:

$$\mu(V_\rho(s)) = \frac{\bar{\mu}(V_\rho(s))}{\bar{\mu}(S_r(x_i))} = \frac{p\rho}{(p-1)r}.$$

定理 3. 设 $S_r(x_i)$, $i = 1, 2$ 是由 (2.3) 给出的函数 f 的不变球面。则函数 $f: S_r(x_i) \to S_r(x_i)$ 是等距变换。

证明. 根据推论 1，如果球面 $S_r(x_i)$, $i = 1, 2$ 对于 (2.3) 是不变的，则有 $r < \alpha$。设 $i = 1$。由关系式 $x, y \in S_r(x_1)$ 可得 $|x|_p = |y|_p = r$。于是，我们得到如下结果

$$|f(x) - f(y)|_p = |x - y|_p \cdot \frac{|a|_p |a - xy|_p}{|(x - \hat{x}_1)(x - \hat{x}_2)(y - \hat{x}_1)(y - \hat{x}_2)|_p}. \tag{4.1}$$

注意到 $|a|_p = \alpha\beta$ 和 $|x|_p = |y|_p = r < \alpha \leq \beta$。于是,

$$|f(x) - f(y)|_p = |x - y|_p \cdot \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = |x - y|_p.$$

因此，函数 $f: S_r(x_1) \to S_r(x_1)$ 是等距变换。

设 $i = 2$。根据推论 1，我们有两种情况。如果 $|c|_p < \alpha = \beta$，那么根据注 2，这种情况与情况 $i = 1$ 重叠。如果 $|c|_p = \alpha = \beta$ 和 $|a - c^2|_p = \alpha^2$，那么根据定理1的第 3 部分，对于所有不变球面，我们有关系式 $S_r(x_2) \subset S_\alpha(0)$。因此，对于所有 $x \in S_r(x_2)$，我们有 $|x - x_2|_p = r < \alpha$ 和 $|x|_p = \alpha$。

设 x、$y \in S_r(x_2)$。则

$$|f(x) - f(y)|_p = |x - y|_p \cdot \frac{|a|_p |(a - x_2^2) + x_2(x_2 - y) + y(x_2 - x)|_p}{|[(x - x_2) + \hat{x}_1][(x - x_2) + \hat{x}_2][(y - x_2) + \hat{x}_1][(y - x_2) + \hat{x}_2]|_p}.$$

注意 $|a|_p = \alpha^2$、$|x - x_2|_p = |y - x_2|_p = r < \alpha$ 和 $|a - x_2^2|_p = |a - c^2|_p = \alpha^2$。于是,

$$|f(x) - f(y)|_p = |x - y|_p \cdot \frac{\alpha^4}{\alpha^4} = |x - y|_p.$$

因此，函数 $f: S_r(x_2) \to S_r(x_2)$ 是一个等距变换。 □

推论 2。设上述定理的条件成立。则 $f: S_r(x_i) \to S_r(x_i)$，$i = 1$，2 是测度空间 $(S_r(x_i)\ \mathcal{B},\ \mu)$ 上的保测变换，其中 μ 是归一化 Haar 测度。

在 [16], 中给出了关于等距映射动力学的重要结果，由于我们所考虑的函数 (2.3) 也是一个等距变换，因此 [16] 中得到的结果同样适用于函数 (2.3) 的动力学，即如果 $S_r(x_i)$，$i = 1$，2 是由 (2.3) 给出的函数 f 的不变球面，那么我们有以下结论:

- 函数 $f: S_r(x_i) \to S_r(x_i)$, $i = 1, 2$ 是双射。
- 对于任意初始点 $x \in S_r(x_i)$, $i = 1, 2$（不包括不动点），其轨道 $\{f^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$不收敛。

以下引理的结果作为 [16] 中的一个条件给出。设 $S_r(x_i)$、$i = 1$、2 是由（2.3）给出的函数 f 的不变球面，则我们将 $\rho(r, x) = |f(x) - x|_p$ 记为$x \in S_r(x_i)$。

引理 1. 若 $r \neq |c|_p$，则对于由（2.3）给出的函数 f，值 $\rho(r,x)$ 不依赖于 x。

证明。我们考虑推论 1 中的所有情形。设 $i=1$。那么 $r<\alpha$。经过简单计算可得

$$\rho(r,x)=\left|\frac{ax}{x^2+cx+a}-x\right|_p=|x|_p^2\cdot\frac{|x+c|_p}{|x-\hat{x}_1|_p|x-\hat{x}_2|_p}=\begin{cases}\frac{r^2|c|_p}{\alpha\beta}, & \text{if } r<|c|_p,\\ \frac{r^3}{\alpha\beta}, & \text{if } r>|c|_p.\end{cases}$$

设 $i=2$。在此情形下，根据注 2，只需在$|c|_p=\alpha=\beta$时证明引理。因此，我们有 $r=|x-x_2|_p=|x+c|_p<\alpha$ and

$$\rho(r,x)=\left|\frac{ax}{x^2+cx+a}-x\right|_p=|x+c|_p\cdot\frac{|(x+c)-c|_p^2}{|(x+c)+\hat{x}_1|_p|(x+c)+\hat{x}_2|_p}=r.$$

□

因此，对于所有 $x\in S_r(x_i)$，$i=1,2$, $r\neq|c|_p$，我们记 $\rho(r)=|f(x)-x|_p$。在这种情况下，由 [16]可得以下断言：

- 半径为 $\rho(r)$ 的球是 f 的最小不变球：$S_r(x_i)\to S_r(x_i)$，$i=1,2$,$r\neq|c|_p$。
- 设 μ 是 $S_r(x_i)$ 上的归一化 Haar 测度。那么，a) 对所有 $p\geq 3$，动力系统 $(S_r(x_i)\ f,\mu)$ 都不是遍历的；b) 动力系统 $(S_r(x_i)\ f,\mu)$ 可能是遍历的，当且仅当对于$p=2$，有 $r=2\rho(r)$。

设 $p=2$。根据上述内容，动力系统（$S_r(x_2)\ f,\mu$）不是遍历的，因为对于 $i=2$，有 $r=\rho(r)$。

如果 $i=1$，那么 $x_1=0$，我们考虑动力系统（$S_r(0)\ f,\mu$）。

回顾 $\mathbb{Z}_2=\{x\in\mathbb{Q}_2:\ |x|_2\leq 1\}$。因此我们有 $1+2\mathbb{Z}_2=S_1(0)$。下面的定理给出了将 $S_1(0)$ 映射到其自身的有理函数的遍历性判据：

定理 4。 [9] 设 f、g：$1+2\mathbb{Z}_2\to 1+2\mathbb{Z}_2$ 为系数是 2进整数的多项式。

令 $f(x)=\sum_i a_ix^i$，$g(x)=\sum_i b_ix^i$，并且

$$A_1=\sum_{i\,\text{odd}}a_i,\quad A_2=\sum_{i\,\text{even}}a_i,\quad B_1=\sum_{i\,\text{odd}}b_i,\quad B_2=\sum_{i\,\text{even}}b_i.$$

有理函数 $R=\frac{f}{g}$ 是遍历的，当且仅当以下情形之一成立：

(1) $A_1=1(\text{mod }4)$、$A_2=2(\text{mod}4)$、$B_1=0(\text{mod}4)$ 和 $B_2=1(\text{mod }4)$。(2) $A_1=3(\text{mod}4)$、$A_2=2(\text{mod }4)$、$B_1=0(\text{mod}4)$ 和 $B_2=3(\text{mod}4)$。(3) $A_1=1(\text{mod }4)$、$A_2=0(\text{mod}4)$、$B_1=2(\text{mod}4)$ 和 $B_2=1(\text{mod }4)$。(4) $A_1=3(\text{mod }4)$、$A_2=0(\text{mod}4)$、$B_1=2(\text{mod}4)$ 和 $B_2=3(\text{mod }4)$。(5) 前述情形之一，其中 f 和 g 互换。

考虑 $x = g(t) = r^{-1}t$，其中 $t \in S_1(0)$，则 $g^{-1} \circ f \circ g : S_1(0) \to S_1(0)$。令 $\mathcal{B}$ (分别为$\mathcal{B}_1$) 表示由 $S_r(0)$（分别为 $S_1(0)$）的闭子集生成的代数，并令 μ (分别为 μ_1) 表示 $\mathcal{B}$ （分别为 $\mathcal{B}_1$）上的归一化 Haar 测度。

定理 5. [14] 动力系统 $(S_r(0)\ f, \mu)$ 是遍历的，当且仅当 $(S_1(0)\ g^{-1} \circ f \circ g, \mu_1)$ 是遍历的。

现在，利用上述关于 (2.3) 的结果（当 $p = 2$ 时），我们证明以下结论

定理 6. 设 $p = 2$。则动力系统 $(S_r(0)\ f, \mu)$ 是遍历的，当且仅当$|c|_2 = \beta$ 且 $r = \frac{\alpha}{2}$。

证明. 设 $r = 2^l$, $\alpha = 2^m$, $\beta = 2^k$ 且 $|c|_2 = 2^q$。由于 $\alpha \leq \beta$，我们有 $m \leq k$。此外，由于 $c = -\hat{}x_1 - \hat{}x_2$ 且 $a = \hat{}x_1\hat{}x_2$，我们有 $q \leq k$ 和 $|a|_2 = 2^{m+k}$。

注意，球面 $S_{2^l}(0)$ 对于 f 是不变的，当且仅当 $l < m$。我们考虑由 $x = g(t) = 2^{-l}t$ 定义的函数$g : S_1(0) \to S_r(0)$。注意，函数$g^{-1}(f(g(t))) : S_1(0) \to S_1(0)$ 具有以下形式

$$g^{-1}(f(g(t))) = \frac{t}{\frac{2^{-2l}}{a}t^2 + \frac{2^{-l}c}{a}t + 1}, \tag{4.2}$$

对于由 (2.3) 给出的函数 f。注意， k、 l、 m、 $q \in \mathbb{Z}$、 $l < m \leq k$ 和 $q \leq k$。因此我们有不等式 $l - m \leq -1$ 和 $l - k \leq -1$。从 (4.2) 中可以容易地看出以下结果

$$\left|\frac{2^{-2l}}{a}t^2\right|_2 = 2^{2l-(m+k)} \leq 2^{-2}, \quad \left|\frac{2^{-l}c}{a}t\right|_2 = 2^{l+q-(m+k)} \leq 2^{-1}.$$

因此,

$$t =: \gamma_1(t), \ \text{ is such that } \ \gamma_1 : 1 + 2\mathbb{Z}_2 \to 1 + 2\mathbb{Z}_2$$

and

$$\frac{2^{-2l}}{a}t^2 + \frac{2^{-l}c}{a}t + 1 =: \gamma_2(t) \ \text{ is such that } \ \gamma_2 : 1 + 2\mathbb{Z}_2 \to 1 + 2\mathbb{Z}_2.$$

因此，函数 (4.2) 满足定理 4 的所有条件，故利用该定理可得

$$A_1 = 1, \ \ A_2 = 0, \ \ B_1 = \frac{2^{-l}c}{a} \ \text{ and } \ B_2 = \frac{2^{-2l}}{a} + 1.$$

此外,

$$A_1 = 1(\mathrm{mod}\, 4), \ \ A_2 = 0(\mathrm{mod}\, 4), \ \ B_1 \in 2^{m+k-(l+q)}(1 + 2\mathbb{Z}_2) \ \text{ and } \ B_2 = 1(\mathrm{mod}\, 4).$$

由这些关系和定理 4 可得 $m+k-(l+q) = (m-l)+(k-q) = 1$.注意到$l < m$ 和 $q \leq k$. 因此我们得出结论：动力系统 $(S_1(0)\ g^{-1} \circ f \circ g, \mu_1)$ 遍历，当且仅当 $q = k$ 和 $l = m - 1$，即 $|c|_2 = \beta$ 和 $r = \frac{\alpha}{2}$.。因此，根据定理 5，$(S_r(0)\ f, \mu)$ 遍历，当且仅当 $|c|_2 = \beta$ 和 $r = \frac{\alpha}{2}$. □

5. Periodic orbits

本节我们关注周期轨迹及其特征。由于我们的函数在一个不变球面上是等距变换，因此由 [16]可得关于周期轨迹的如下结果:

定理7. 若动力系统 $(S_r(x_i)\ f)$，$i = 1, 2$ 存在 n-周期轨道

$$y_0 \to y_1 \to ... \to y_n \to y_0,$$

则以下结论成立:

1. 对所有 $k \in \{1, 2, ..., n\}$，$y_k \in V_{\rho(r)}(y_0)$；2. 周期点的性质为中性的；3. 若 $\rho \le \rho(r)$，则对于任意 $k \in \{0, 1, ...n-1\}$ and$f(S_\rho(y_n)) \subset S_\rho(y_0)$，有 $f(S_\rho(y_k)) \subset S_\rho(y_{k+1})$。

现在我们证明以下关于 2 周期和 3 周期轨道存在性的定理:

定理8. 若 $\sqrt{c^2-2a} \in \mathbb{Q}_p$，则函数 (2.3) 有唯一的 2-周期轨道 $\{t_1, t_2\}$，其中 t_1, $_2 = -c \pm \sqrt{c^2-2a}$。

证明. 我们考虑方程

$$\frac{f^2(x)-x}{f(x)-x} = 0.$$

于是得到如下结果

$$(x^2+2cx+2a)(x^2+cx+a) = 0.$$

由于 $x^2+cx+a \neq 0$，我们得到 $x^2+2cx+2a = 0$，且 $t_1,\ _2 = -c \pm \sqrt{c^2-2a}$. □

定理9. 设 $S_r(x_i)$，$i = 1$，2 是 (2.3) 的不变球面，并假设参数 $a \in S_r(x_i)$。那么函数 (2.3) 有 3-周期轨道 $\{a,\ f(a)\ f^2(a)\}$ 当且仅当

$$(a,c) \in \left\{(h(q), qh(q)-1) : q \in \mathbb{Q}_p \setminus \left\{0, -1, -\frac{2}{3}\right\}, |h(q)|_p = r\right\}, \quad for\ \ i = 1, \tag{5.1}$$

$$(a,c) \in \left\{(h(q), qh(q)-1) : q \in \mathbb{Q}_p \setminus \left\{0, -1, -\frac{2}{3}\right\}, |h(q)(q+1)-1|_p = r\right\}, \quad for\ \ i = 2, \tag{5.2}$$

其中 $h(q) = \frac{3q^2+2q}{6q^3+11q^2+6q+1}$。

证明。我们考虑方程

$$\frac{f^3(x)-x}{f(x)-x} = 0.$$

化简此方程，我们得到下面的方程

$$P(x) = x^6 + 6cx^5 + (11c^2+6a)x^4 + (6c^3+20ac)x^3 + (15ac^2+9a^2)x^2 + 12a^2cx + 3a^3 = 0.$$

必要性。设 $a \in S_r(x_i)$ 是一个 3-周期点。那么 $P(a) = 0$，由此我们得到等式

$$a^3 + 6(c+1)a^2 + (11c+9)(c+1)a + 3(2c+1)(c+1)^2 = 0. \tag{5.3}$$

根据等式 (5.3)，由于 $a \neq 0$，我们有 $c \neq -1$。记

$$q = \frac{c+1}{a}.$$

于是由 (5.3) 得到 $(6q^3 + 11q^2 + 6q + 1)a - (3q^2 + 2q) = 0$。

若记

$$a := h(q) = \frac{3q^2 + 2q}{6q^3 + 11q^2 + 6q + 1},$$

则 $c = qh(q) - 1$。注意，$h(q)$ 在 $q = -1$ 处无定义。应用条件 $a(c+1) \neq 0$，我们看到 $q \neq 0$ 和 $q \neq -\frac{2}{3}$。

对于 $i = 1$，我们有 $|a|_p = |h(q)|_p = r$；类似地，对于 $i = 2$，我们有 $|a + c|_p = |h(q)(q+1) - 1|_p = r$。综上所述，得到 (5.1) 和 (5.2)。

充分性。设条件 (5.1) 和 (5.2) 成立。则容易看出 $P(a) = 0$。因此，$a \in S_r(x_i)$ 是由 (2.3) 给出的 f 的 3-周期点。□

6. Availability of data

支持本文结论的数据已包含在本文中。

Acknowledgements

我们感谢导师 U.A. Rozikov 与我们进行了有益的讨论。

References

[1] S. Albeverio, U.A. Rozikov, I.A. Sattarov. p $2,1$ *Jour. Math. Anal.* -阿进（）-有理 *Appl.* **398** 2 2013 553 566
动力系统。（）（），–。[2] S. Albeverio, P. E. Kloeden, A. Khrennikov，人类记忆作为一种 p *Theor.* -阿进动力系统，。 *Math. Phys* **114** 3 1998 1414 1422
（）（），–。[3] E.T. ALIEV, I.A. SATTAROV. p $1,2$ $\mathbb{C}_p$ *Uzbek* -阿进（）-有理 *Mathematical Journal* **65** 2 2021 5 14
动力系统：在上有两个不动点。，（）（），–。[4] V.S. Anashin. *The p-adic ergodic theory and applications*, DOI：10.13140/2.1.3548.0647.，图书。2014年12月。[5] V.S. Anashin, A.Yu. Khrennikov. *Applied Algebraic Dynamics*，第49卷，数学论丛（德格鲁伊特版）。Walter de Gruyter，柏林、纽约，2009年。[6] A. Fan, S. Fan, L. Liao, Y. Wang，关于 p-阿进齐次动力系统的最小分解。*Adv. Math*。257（2014），92–135。[7] S. Kantorovitz， *Introduction to modern analysis*，牛津大学出版社。2003年。[8] N. Koblitz， *p-adic numbers*, *p-adic analysis and zeta-function* 施普林格，柏林，1977年。[9] N. Memi ´ 2 *Inter. J. Number* c，阿进单位元集 *Theory.* **13** 2017 1119 1128
合上遍历有理函数的刻画。（），–。[10] F.M. Mukhamedov, O.N. Khakimov，压缩非阿基米德动力系统非常规极限集的度量性质。*Dyn. Syst.* **31**（4）（2016），506–524。[11] F.M. Mukhamedov, O.N. Khakimov，相变与混沌：凯莱树上的 p-阿进 Potts 模型。*Chaos Solitons Fractals* **87**（2016），190–196。

[12] F.M. Mukhamedov, U.A. Rozikov. 一个 p-阿进多项式动力系统。 *Theor. Math. Phys*。170(3)（2012），376–383。[13] U.A. Rozikov, I.A. SATTAROV，具有两个不动点的 p-阿进（2, 2）-有理函数动力系统，*Results in Mathematics*，100(75)（2020），1–37。[14] U.A. Rozikov, I.A. SATTAROV。 p-阿进（2, 2）-有理函数动力系统及其唯一不动点。 *Chaos*， *Solitons and Fractals*，105（2017），260–270。[15] U.A. Rozikov, I.A. SATTAROV. S. Yam。 p-阿进函数 $\frac{ax}{x^2+a}$的动力系统。 *p-Adic Numbers*，*Ultrametric Analysis and Applications* **11** 1 2019 77 87 ， （） （），–。[16] I.A. SATTAROV。 p-阿进球的群结构及球面上的等距映射动力系统。*arXiv:2208.03513*，doi.org/ 10 48550 2208 03513 。/arXiv.。I.A. SATTAROV。-阿进（）-有理动力系统。[17] p $3,2$ *p-Adic Numbers Ultrametric Analysis and*， ， （）*Applications* **7** 1 2015 39 55 （），–。[18] P.Walters， *An introduction to ergodic theory.* 施普林格，柏林—海德堡—纽约，（1982）。

I. A. Sattarov， Namangan Satate University，316， Uychi str.，160100， Namangan， Uzbekistan. *Email address*： sattarovi-a@yandex.ruE. T. Aliev，Namangan Institute of Engineering Technology，7， Kosonsoy str.，160115，Namangan ，Uzbekistan.*Email address*： aliev-erkinjon@mail.ru