正则模的刻画

Philly Ivan Kimuli[1] 和 David Ssevviiri[2] [3]电子邮箱：
pi.kimuli@muni.ac.ug；david.ssevviiri@mak.ac.ug

摘要

文献中存在关于模正则性的多种不同概念。当这些概念限定于交换环时，它们都与环的著名冯·诺依曼正则性一致。我们从（弱）形态模和约化模两个角度，给出这些不同模概念的新刻画。此外，我们还建立了一些模论背景，在其中，这些通常彼此不同的概念最终无法区分。

关键词：正则模；约化模；（弱）形态模
2020年数学主题分类：主要分类 16D80；次要分类 13C13、13C05、16E50、16S50

arXiv:2301.02900v1 [math.AC] 7 Jan 2023

1 引言

设 R 是一个不一定交换的结合含幺环， M 是一个右 R-模。若对每个 $a \in R$，都存在一个（单位） $y \in R$ 使得 $a = aya$，则称 R 为（单位）正则的。若对每个 $a \in R$，都存在一个元素 $y \in R$ 使得 $a = a^2y$，则称其为强正则的；等价地说，它是正则的且幂等元均为中心的。文献中，对正则环有不同的刻画，而这些刻画对于模来说并不相同。例如，参见 [28, 第 237] 页，以及 [3, 习题 15（13）：], 是正则的，当且仅当每个右（左）循环理想都是直和项；当且仅当每个有限生成右（左）理想都是直和项。 R 是强正则的，当且仅当它是正则且约化；当且仅当每个右（左）循环理想都由一个中心幂等元生成；当且仅当它是正则的，且 $Ra \subseteq aR$ 对每个 $a \in R \Leftrightarrow aR = a^2R$ 都有 $a \in R$。若 R 是交换的，则它正则，当且仅当它强正则。

沿袭环的（冯·诺伊曼）正则性刻画，不同作者为模的“正则性”概念提出了不同的定义。下面概述其中一些（另见定义 5.1, [28, 定义 2.3] 和 [29]）：

定义 1.1. R-模 M 被称为

(a) 内正则 [15, 28] 当且仅当 $\varphi(M)$ 和 $ker(\varphi)$ 对于 M 的每个自同态 φ 都是 M 的直和项；(b) 阿贝尔内端正则 [15] 当且仅当 $\mathrm{End}_R(M)$ 是强正则环；(c) F-正则 [8] 当且仅当对于 M 的每个子模 N，对每个 R-模 E，序列 $0 \to N \bigotimes E \to M \bigotimes E$ 正合；(d) 强 F-正则 [25] 当且仅当 M 的每个有限生成子模都是 M 的直和项。（在下文的 (e)、(f) 和 (g) 项中， R 是交换的。）(e) JT-正则 [11] 当且仅当对于每个 $m \in M$，存在某个 $a \in R$ 使得 $mR = Ma = Ma^2$；(f) 弱 JT-正则 [1] 当且仅当对于每个 $a \in R$， $Ma = Ma^2$；

[1]数学系，穆尼大学，邮政信箱 725，阿鲁阿，乌干达[2]通讯作者[3]数学系，马凯雷雷大学，邮政信箱 7062，坎帕拉，乌干达

(g) 弱自内正则 [2] 当且仅当对于每个 $a \in R$， Ma 和 $l_M(a)$ 都是 M 的直和项。

若一个 R-模 M 是约化的 [16]，则当 $a \in R$ 和 $m \in M$ 满足 $ma^2 = 0$时，有 $mRa = 0$。约化模是约化环的推广。回顾一下，如果一个环没有非零幂零元，则称其为约化的 [17]。因此， R 是约化环，当且仅当 R 是约化的 R-模。

如果 M 的每个自同态 φ 都有一个与其核同构的余核，即对于 M的每个自同态 φ， $M/\varphi(M) \cong \ker(\varphi)$ 作为 R-模成立，则称 M 为形态模。注意，性质 $M/\varphi(M) \cong \ker(\varphi)$ 是模自同态 φ 的第一同构定理的对偶。该概念已得到广泛研究，例如参见 [21]。最近，对于交换环， M在 [13] 中被称为弱态射的，如果对于每个 $a \in R$，都有 $M/Ma \cong l_M(a)$ 作为 R-模成立；换言之，如果由 $a \in R$ 右乘给出的 M 的每个自同态 φ_a 都是形态的。事实证明，（交换）环 R 是右（以及左）形态的，当且仅当 R 这个 R-模是弱态射模。形态环已在 [5, 23, 22]中得到研究。

文献中对形态环、约化环与正则环之间的关系进行了广泛研究，其历史可追溯至 Ehrlich [7] 证明环是右形态且正则的，当且仅当它是单位正则环。此后，由于形态环与约化环之间的联系能够为正则环提供相关条件，环的形态性质研究蓬勃发展。回顾一下，一般而言，约化环未必是正则的或（右）形态的。例如，整数环 $\mathbb{Z}$ 是约化的，但它既不是（右）形态的，也不是正则的。一般来说，环之间有如下关系：强正则（即具有中心幂等元的正则环）$\Leftrightarrow$ 约化且（右）形态 $\Rightarrow$ 单位正则 $\Leftrightarrow$ （右）形态且正则 $\Rightarrow$ 正则。事实上，由命题 4.13], 可知，强正则（即具有中心幂等元的正则）环与约化且（右）形态的环相同，而这些环都是单位正则的。根据 [7, 定理 1], ，单位正则环恰好是（右）形态且正则的环。一般而言，其余蕴含关系不可逆。环 $R := \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{R}$ （其中 $\mathbb{R}$ 是实数环）是单位正则的，因而是形态的。但根据 [7, 定理的推论 1] 和 [15, 例 2.25], R 有一些非平凡且非中心的幂等元（因此不是约化的）。环 $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}$ 是正则的，但不是右形态的（因此不是单位正则的）；环 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$是形态的，但不是正则的。

本文从弱形态的与约化（子）模的角度，对定义 1.1 中给出的正则模作出了新的刻画。我们证明，一个模是弱形态的且约化的，当且仅当它是弱自内正则的（定理 1）；阿贝尔端正则模类与自同态环为约化环的形态模类相同（定理 2）；若模 M 是强 F-正则的，则它的每个子模在 M 的每个自同态下都保持不变，当且仅当 M 是自同态环为约化环的形态模（定理 3）。一个模是 F-正则的，当且仅当它的每个（循环）子模都是弱形态的且约化的模（定理 4）。本文还确立了在模论背景下，不同正则性概念仍能相互一致的条件。例如，在有限生成模的子范畴中，以下概念相同：弱形态的且约化的、F-正则、弱自内正则、弱 JT-正则（定理 7）。

记号与约定。本文中，所有环 R 均为结合的含幺环，但不一定交换； M 是一个含幺右 R-模，而 S 表示 $\mathrm{End}_R(M)$，即 M的自同态环。因此，在此情形下， M 可视为左 S-右 R-双模。分别用 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 表示整数环、有理数和实数。对于 $\varphi \in S$，$\ker(\varphi)$ 和 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 分别表示 φ 的核和像。记号 $N \subseteq M$（分别地， $N \subseteq^{\oplus} M$）表示 N是 M的子模（分别地，直和项）。对于 S的非空子集 I，我们还定义 $r_M(I) := \{m \in M\colon\ I(m) = 0\}$， $l_S(I) := \{\varphi \in S\colon\ \varphi I = 0\}$， $r_S(I) := \{\varphi \in S\colon\ I\varphi = 0\}$；对于 $N \subseteq M$，定义 $r_R(N) := \{a \in R\colon\ Na = 0\}$， $l_S(N) := \{\varphi \in S\colon\ \varphi(N) = 0\}$

以及 $l_M(A) := \{m \in M\colon\ mA = 0\}$（对于 $A \subseteq R$）。注意，对于 $0 \neq \varphi \in S$， $r_M(\varphi) := \ker(\varphi)$，且 $\mathrm{Ann}_R(M) := r_R(M)$ 表示 M的（右）湮灭子。对于任意 $a \in R$，由 a 生成的主理想记作 (a)。

本节余下部分需要用到以下定义，并将在后续各节中广泛使用。

定义 1.2. 环 R是

(a) 若没有非零幂零元，则称为约化；

(b) 若对任意 a、$b \in R$， $ab = 0$ 蕴含 $ba = 0$，则称为可逆序；

(c) 若对于每个 $r \in R$， a、$b \in R$、$ab = 0$ 蕴含 $arb = 0$，则称其具有因子插入性质（IFP）。

定义 1.3. R-模 M 是

(a) 若任意满足 $ma^2 = 0$ 的 $a \in R$ 和 $m \in M$ 都有 $mRa = 0$，则称其为约化的；

(b) 若任意满足 $mba = 0$ 的 a、$b \in R$ 和 $m \in M$ 都有 $mab = 0$，则称其为对称的；

(c) 若任意满足 $ma = 0$ 的 $a \in R$ 和 $m \in M$ 都有 $mra = 0$，且对 R 的每个元素 r 均成立，则称其具有幂零因子性质。

定义 1.2 和 1.3 中的概念已在 [6, 9, 14, 16, 17] 中得到广泛研究。若给定 $a \in R$ 和 $m \in M$ 时，条件 $ma^2 = 0$ 蕴含 $ma = 0$，则称模 M_R 是刚性的 [6]。这等价于对每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$，都有 $l_M(a^n) = l_M(a)$。对于交换环 R，文献 [14] 证明了：当且仅当对每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$，都有 M 是约化的，即 $l_M(a^n) = l_M(a)$。作为文献 [14], 中约化模的对偶概念，我们有余约化模。

定义 1.4. 设 R 是交换环。若对每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$， R-模 M 满足$Ma = Ma^n$，则称其为余约化的。

对于非交换环，我们给出约化模和约化环的刻画。

引理 1. 设 R 是一个环，且 M 是一个非零的 R-模。以下陈述等价：

(1) M 是约化的；

(2) M 是对称的，并且对每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$， $l_M(a^n) = l_M(a)$；

(3) M 具有幂零因子性质，并且对每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$， $l_M(a^n) = l_M(a)$。

证明。

(1)⇔(2) 假设 (1) 成立。根据 [9, 定理 2.2], ，约化模是对称的。为了证明 $l_M(a^n) = l_M(a)$，令 $x \in l_M(a^n)$。于是 $xa^n = 0$。由于 M 是约化的， $xRa = 0$，因此 $xa = 0$。这就得到 $l_M(a^n) \subseteq l_M(a)$。由于反向包含显然成立，我们得到 $l_M(a^n) = l_M(a)$。应用 [9, 推论 2.2] 后，(2) ⇒ (1) 的证明即得。

(3)⇔(1) 这由 [6, 命题 2.8] 得出。

□

推论 1. 对于环 R，以下命题等价：

(1) R 是约化的；(2) 对任意 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$，
$l_R(a^n) = l_R(a)$；(3) 对任意 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$，
$r_R(a^n) = r_R(a)$。

证明。（1)⇔（2）约化环是可逆序的，因此具有幂零因子性质。由引理 1，（2）可由（1）推出。逆命题，设 $a^n = 0$。那么 $1_R \in l_R(a^n) = l_R(a)$，因此 $a = 1_R \cdot a = 0$。这证明了 R 是约化的。（1)⇔（3）的证明类似。 □

若 M_R 是交换环 R上的约化模，则对于每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$，有 $Ma \cong Ma^n$。为此，假设 M是约化的。由引理 1，$l_M(a^n) = l_M(a)$，因此 $Ma \cong M/l_M(a) = M/l_M(a^n) \cong Ma^n$。对于不一定是交换的环 R，由 $m \mapsto ma$ 定义的映射 φ：$M \to M$（其中 $a \in R$）未必是自同态。我们将在命题 1 中证明，当 M 是约化的，且 e 是 R的一个幂等元时，$m \mapsto me$ 是 M的一个幂等自同态。

命题 1. 设 R 为一个环，M 为约化 R-模，$m \in M$ 且 $e^2 = e \in R$。那么，每个由 $\varphi_e(m) = me$ 定义的映射 φ_e 都是 S 中的幂等元。

证明. 设 e 是 R 中的幂等元，且 $m \in M$。由于 M 是约化的，它具有幂零因子性质，因此 $me(1_R - e) = 0$ 意味着，对于任意 $r \in R$，$mer(1_R - e) = 0$，即 $mer = mere$。另一方面，$m(1_R - e)e = 0$ 意味着 $mre = mere$。因此，$mer = mre$。现在，对于所有 $r \in R$，$\varphi_e(mr) = (mr)e = (me)r = \varphi_e(m)r$。对加法的封闭性总是成立。 □

2 弱内自同态正则模

Lee、Rizvi 与 Roman [15] 以及 Ware [28, 推论 3.2] 将 M 称为内正则的，如果 $S := \mathrm{End}_R(M)$ 是一个正则环。为了研究自同态环的各种正则性，Anderson 和 Juett [2] 定义了弱自内正则模。交换环 R 上的一个模 M 是弱内正则模，当且仅当对于每个 $a \in R$，$M = Ma \bigoplus l_M(a)$。我们将用弱态射模和（余）约化模刻画弱内正则模。关于定理 1 的其他等价表述，见 [2, 定理 1.1]。

定理 1. 设 R 是交换环，M 是非平凡的 R-模。以下命题等价：

(1) M 是弱态射且约化的，(2) M 是
弱态射且余约化的，

(3) M 是余约化且约化的，

(4) M 是弱自内正则的。

证明。
(1)⇒(2) 假设 (1) 成立。我们需要证明，对于每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$，$Ma = Ma^n$。由于M是弱态射的，$M/Ma \cong l_M(a)$ 且 $M/Ma^n \cong l_M(a^n)$。由引理 1，$l_M(a) = l_M(a^n)$，因此 $M/Ma \cong M/Ma^n$。所以存在一个同构 φ，使得 $\varphi(M/Ma^n) = M/Ma$。由此，$\varphi(Ma/Ma^n) = \varphi(M/Ma^n)a = Ma/Ma = 0$。因此 $Ma^n = Ma$，如所求。

(2)⇒(1) 假设 (2) 成立。那么 $Ma = Ma^n$对每个 $a \in R$和 $n \in \mathbb{Z}^+$都成立。由于 M是弱形态的，$l_M(a) \cong M/Ma = M/Ma^n \cong l_M(a^n)$。由此得到 $l_M(a) \cong l_M(a^n)$。根据 [14,命题 2.3], 接下来只需证明这是等式。由 [13, 引理 1], , 存在某个 $\varphi \in S$，使得 $l_M(a^n) = \varphi(M)$ 且 $\ker(\varphi) = Ma^n$。这两个等式意味着$0 = \varphi(M)a^n = \varphi(Ma^n)$。根据假设，$Ma = Ma^n$。因此 $\varphi(Ma^n) = \varphi(Ma) = \varphi(M)a$，由此可推出 $l_M(a^n) = \varphi(M) \subseteq l_M(a)$。因此 $l_M(a^n) = l_M(a)$。

(2)⇒(3) 可由 (2) ⇒ (1) 的证明推出。

(3)⇒(4) 令 $a \in R$并假设 (3)。那么根据定义 1.4, $Ma = Ma^2$，且根据引理 1, $l_M(a) = l_M(a^2)$。由 [2, 定理 1.1] 可知, M 是弱自内正则的。

(4)⇒(1) 由于对于每个 $a \in R$, $M = Ma \bigoplus l_M(a)$ $M/Ma \cong l_M(a)$。因此, M是弱态射的。接下来, 令 $x \in M = Ma \bigoplus l_M(a)$ 满足 $xa^2 = 0$。那么 $(xa)a = 0$，因此 $xa \in l_M(a)$。但还有$xa \in Ma$，且 $Ma \cap l_M(a) = 0$。因此, $xa = 0$，并且 M是约化模。

□

推论 2. 令 R 为交换环, M 为非平凡的有限生成 R-模。则以下陈述等价:

(1) M 是弱态射且约化，(2) M 是余约化的，(3) $\mathrm{Ann}_R(M)$ 是正则环，(4) M 是弱自内正则的。

证明。

(1)⇒(2) 由定理 1 得出。

(2)⇒(3) 假设对每个 $a \in R$ 和 $n \in \mathbb{Z}^+$，都有 $Ma = Ma^n$。那么 $M(a) = M(a)(a^n)$，其中 $M(a)$ 是有限生成模。利用推论 2.5],，我们有 $M(a)(1 + (a^n)) = 0$，这意味着对所有 $r \in R$, $M(a)(1 + a^n r) = 0$。由此可得 $(a + a^{n+1}r) \in \mathrm{Ann}_R(M)$，因此 $a + \mathrm{Ann}_R(M) = a^{n+1}(-r) + \mathrm{Ann}_R(M) \in (a^{n+1}) + \mathrm{Ann}_R(M)$。这给出 $(a) + \mathrm{Ann}_R(M) \subseteq (a^{n+1}) + \mathrm{Ann}_R(M)$，进而得到 $(a) + \mathrm{Ann}_R(M) = (a^{n+1}) + \mathrm{Ann}_R(M)$。由于存在某个 $r \in R$ 使得 $a = ra^2 + s$，并且 $s \in \mathrm{Ann}_R(M)$ $a - ra^2 \in \mathrm{Ann}_R(M)$，又存在某个 $\overline{r} \in \overline{R}$ 使得: $\overline{a} = \overline{ra^2}\,\mathrm{Ann}_R(M)$，故 $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ 是正则的。

(3)⇒(4) 假设 (3) 成立。利用这一假设以及适用于R-自同态 $\varphi : R \to S := \mathrm{End}_R(M)$（定义为 $\varphi(a) = \varphi_a$ 对所有 $a \in R$）的第一同构定理，我们得到$\{\varphi_a : a \in R\}$ 是正则的。根据 [13, 命题 7], M 是弱内正则模。

(4)⇒(1) 由定理 1 得出。

□

Cor推论 3. 对于交换环 R，以下命题等价 :

(1) R 是形态的且约化的，(2) R 是余约化的，(3) R 是正则的，(4) 对每个 $a \in R$, $R = (a) \bigoplus r_R(a) = (a) \bigoplus l_R(a)$。

证明. (2)⇔(3) 交换环 R 是正则的，当且仅当对每个 $a \in R$, $aR = a^2R$。因此, R 是余约化的，当且仅当它是正则的。等价关系 (1)⇔(3)⇔(4) 由定理 1 得出。 □

推论 4. 交换正则环上的每个模都是弱自内正则的 .

证明。这由 [13, 命题 13]得出。 □

3 阿贝尔端正则模

本节重点从约化模和形态模的角度刻画阿贝尔内正则模。若环 R 的所有幂等元都是中心的，则称 R 为阿贝尔环。若 R 是约化的，则每个幂等元都是中心的。强正则环是约化的、正则的阿贝尔环。更一般地，若 R-模 M 满足 S 是阿贝尔环，则称其为阿贝尔模。若 S 是正则阿贝尔环，则 M_R 是阿贝尔内正则模。

注 1. M_R是阿贝尔内正则模，当且仅当对于每个$\varphi \in S$， $M = \varphi(M) \bigoplus \ker(\varphi)$。阿贝尔内正则模是形态模。注意，内正则模未必是形态模。 $\mathbb{Z}$-模 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_i$，其中 $\mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}$，是内正则的，但不是形态的。

回忆一下，如果 $M/\varphi(M)$可以嵌入 $M^{(I)}$，其中 I是一个指标集，则称 M余生成 $M/\varphi(M)$ $\varphi \in S$。也就是说， $0 \neq x \in M/\varphi(M)$ $\varphi \in S$意味着对于某个 $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(M/\varphi(M)\ M)$[20,pg. 230]，有 $\gamma(x) \neq 0$。

引理 2. 如果 R 是一个环，且 M 是一个非平凡的形态 R-模，那么对于每个 $\varphi \in S$,

$$\varphi(M) = r_M(l_S(\varphi)).$$

此外，以下陈述等价：

(1) 对每个 $\varphi \in S$， $\varphi(M) = r_M(l_S(\varphi))$；(2) 对每个 $\varphi \in S$ 和 $m \in M$，若 $l_S(\varphi(M)) \subseteq l_S(m)$，则 $m \in \varphi(M)$；(3) 对每个 $\varphi \in S$， M 余生成 $M/\varphi(M)$。

证明。对每个 $\varphi \in S$，存在 $\psi \in S$ 使得 $\varphi(M) =$核$(\psi) = r_M(\psi)$ 且 $\psi(M) =$核$(\varphi) = r_M(\varphi)$。由等式 $\varphi(M) = r_M(\psi)$ 可得 $\psi\varphi(M) = 0$，由此得到 $\psi\varphi = 0$，进而 $S\psi \subseteq l_S(\varphi(M))$。因此，$r_M(l_S(\varphi)) \subseteq r_M(\psi) = \varphi(M)$。反向包含显然成立，故 $r_M(l_S(\varphi)) = \varphi(M)$。

(1)⇒(2) 设 $m \in M$和 $\varphi \in S$使得 $l_S(\varphi(M)) \subseteq l_S(m)$。那么，由 (1) 可得 $m \in r_M(l_S(m)) \subseteq r_M(l_S(\varphi(M)))$ $=\varphi(M)$。因此 $m \in \varphi(M)$。

(2)⇒(1) 显然，对每个 $\varphi \in S$，都有 $\varphi(M) \subseteq r_M(l_S(\varphi(M)))$。设 $m \in r_M(l_S(\varphi(M)))$。那么我们有$l_S($ $r_M(l_S(\varphi(M)))) \subseteq l_S(m)$。由 $[3, $命题 24.3$]$， $l_S(\varphi(M)) \subseteq l_S(m)$。由 (2)， $m \in \varphi(M)$。

(1)⇔(3) 假设 (1) 成立，并设 $\varphi \in S$。鉴于 $[3, $第 109 页和引理 24.4$]$, , $\mathrm{Rej}^{M/\varphi(M)}(M) :=\bigcap\{$核$(\gamma) :$ $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(M/\varphi(M)\ M)\} = r_M(l_S(\varphi(M)))/\varphi(M) = 0$。这说明，对每个 $\varphi \in S$，$\mathrm{Rej}^{M/\varphi(M)}(M) =0$。应用 $[3, $推论 8.13$]$，对每个 $\varphi \in S$， M 余生成 $M/\varphi(M)$。反过来，假设对每个 $\varphi \in S$， M 余生成 $M/\varphi(M)$。那么，由 $[3, $推论 8.13$]$，对每个$\varphi \in S$，$\mathrm{Rej}^{M/\varphi(M)}(M) = 0$ 。应用 $[3, $引理 24.4$]$，得到 $r_M(l_S(\varphi(M)))/\varphi(M) = 0$。因此可得 $r_M(l_S(\varphi(M))) = \varphi(M)$。

□

注 2。

(a) 鉴于引理 2， $[15, $命题 4.2$]$的陈述 (b) 中的假设“$\varphi(M) = r_M(l_S(\varphi(M)))$”是多余的。

(b) 回忆一下，在 $[20],$中，若一个模 ${}_SM$满足对每个 $\varphi \in S$都有 $\varphi(M) = r_M(l_S(\varphi))$，则称其为 P-内射的。若一个环R 是 P-内射右 R-模，则称其为左 P-内射的（等价地，对每个 $a \in R$都有 $r_R l_R(a) = aR$ ）。因此，若 M 是一个形态的 R-模，则由引理 2 可知， ${}_SM$ 是一个 P-内射模。

引理 3. 若 M 是一个形态的 R-模，且 S 是一个约化环，则对每个 $\varphi \in S$,

$$r_M(\varphi^2) = r_M(\varphi).$$

证明。我们只证明 $r_M(\varphi^2) \subseteq r_M(\varphi)$，因为反向包含显然成立。由于 M是形态模，存在 $\gamma \in S$使得 $\gamma(M) = r_M(\varphi^2)$。这意味着 $\varphi^2\gamma = 0$。此外， S 为约化的事实意味着 $\varphi\gamma = 0$。因此， $\gamma(M) \subseteq r_M(\varphi)$，从而得到 $r_M(\varphi^2) = \gamma(M) \subseteq r_M(\varphi)$。 □

现在我们用形态模和自同态约化环来刻画阿贝尔内正则模。

定理 2。设 R 是一个环， M 是一个非平凡的 R-模。以下陈述等价:

(1) M_R 是形态模，且 S 是约化环,

(2) M_R 是阿贝尔内正则模。

证明。

(1)⇒(2) 由于 S 是约化的，根据推论 1，对任意 $\varphi \in S$， $l_S(\varphi) = l_S(\varphi^2)$。应用引理 2，$\varphi(M) = r_M(l_S(\varphi(M))) = r_M(l_S(\varphi^2(M))) = \varphi^2(M)$。由此得到 $\varphi(M) = \varphi^2(M)$。对于任意$m \in M$， $\varphi(m) \in \varphi(M) = \varphi^2(M)$，因此存在某个 $n \in \varphi(M)$ 使得 $\varphi(m) = \varphi(n)$。因此，$x := m - n \in r_M(\varphi)$ 且 $m = x + n \in r_M(\varphi) + \varphi(M)$。我们得到 $M = r_M(\varphi) + \varphi(M)$。为证明这是直和，设 $y \in r_M(\varphi) \cap \varphi(M)$。于是存在某个 $m \in M$，使得$\varphi(y) = \varphi^2(m) = 0$。因此，根据引理 3，有 $m \in r_M(\varphi^2) = r_M(\varphi)$，从而得到 $y = \varphi(m) = 0$，进而得到 $0 = r_M(\varphi) \cap \varphi(M)$。这证明了 $M = r_M(\varphi) \bigoplus \varphi(M)$，且 M 是阿贝尔内正则模。

(2)⇒(1) M 是形态的 形态的，这由注 1 得出。此外，由于 S 是强正则环，它是约化的。

□

推论 5. 设 R 是一个环， M 是一个非平凡的 R-模。以下陈述等价:

(1) M_R 是形态的，且 ${}_SM$ 是约化的,

(2) M_R 是一个阿贝尔内正则模。

证明。

(1)⇒(2) 令 $\varphi \in S$ 使得 $\varphi^2 = 0$。则根据 (1)，对所有 $m \in M$，有 $\varphi S(m) = 0$。由此，对所有 $m \in M$，有 $\varphi 1_M(m) = \varphi(m) = 0$，因此 $\varphi = 0$。这表明 S是约化环，并且由定理 2 可得 (2)。

(2)⇒(1) 根据注 1， M_R 显然是形态的。令 $\varphi \in S$ 和 $m \in M$ 使得 $\varphi^2(m) = 0$。则 $\varphi(\varphi(m)) = 0$。根据注 1， $\varphi(m) \in r_M(\varphi) \cap \varphi(M) = 0$，因此 $\varphi(m) = 0$。由于 S是强正则的，存在某个 $\psi \in S$ 使得 $\varphi = \varphi\psi\varphi$，其中 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 是 S 的中心幂等元。于是 $\varphi S(m) = \varphi\psi\varphi S(m) = \varphi S\psi\varphi(m) = 0$。这证明了 ${}_SM$是约化模。

□

考虑情形 $M = R$ and $\mathrm{End}_R(R) \cong R$，我们有:

推论 6. 对于环 R，以下命题等价:

(1) R 是右形态的且约化的，(2) R 是左 P-内射的且约化的，(3) 对每个 $a \in R$，$R = aR \bigoplus r_R(a)$，(4) R 是强正则的。

证明。

(1)⇒(2) 由引理 2 和注 2 (b) 可得。

(1)⇔(3) 和 (3)⇔(4) 由定理 2 和注 1 可得。

(2)⇒(4) 由于 R 是约化的，对每个 $a \in R, l_R(a) = l_R(a^2)$，由推论 1 可知。因此 $aR = r_R(l_R(a)) = r_R(l_R(a^2)) = a^2R$，因为 R 是左 P- 内射的。于是，对某个 $y \in R$，有 $a = a^2y$，这就证明了 R 是强正则的。

□

若模 M_R 的每个子模都是完全不变的，则称 M_R 为 duo 模；也就是说，对于 M 的任意子模 N，对每个 $\varphi \in S$，都有 $\varphi(N) \subseteq N$。环 R 是右双子模环，当且仅当 R 的每个右理想都是双边理想；等价地，对于 R [24] 中的每个元素 a，都有 Ra 包含于 aR。

引理 4. [24,引理 1.1] 设 R 是任意环。那么，右 R-模 M 是 duo 模，当且仅当对于 M 的每个自同态 φ 以及 M 的每个元素 m，存在 R 中的 a，使得$\varphi(m) = ma$。

引理 5. 设 R 是交换环。对于非平凡的 duo R-模 M，考虑以下命题:

(1) M 作为右 R-模是约化的,

(2) M 作为左 S-模是约化的,

(3) S 是约化环。

那么 (1) ⇔ (2) ⇒ (3)。

证明。

(1)⇒(2) 设 $\varphi \in S$ 和 $m \in M$ 满足 $\varphi^2(m) = 0$。由于 M 是 duo，故存在某个 $a \in R$ 使得 $ma^2 = 0$。由 (1)，对所有 $r \in R$，都有 $mra = 0$。由于 S 中的每个元素都是将 M 的每个元素右乘某个 R所得，因此对每个 $\psi \in S$，存在某个$r \in R$，使得 $\varphi(\psi(m)) = mra = 0$。于是 $\varphi S(m) = 0$，且 ${}_SM$ 是约化模。

(2)⇒(1) 设 $m \in M$ 和 $a \in R$ 满足 $ma^2 = 0$。那么，自同态 $\varphi: M \to M, x \mapsto xa$给出 $\varphi^2(m) = 0$。由于 ${}_SM$ 是约化的，我们有 $\varphi S(m) = 0$。注意，对每个 $r \in R$，右乘 r 定义了一个自同态 $\psi_r: M \to M, m \mapsto mr$。这给出$mra = \varphi\psi_r(m) = 0$。由于 $mRa \subseteq \varphi S(m) = 0$，$M_R$ 是约化模。

(2)⇒(3) 令 $\varphi \in S$ 满足 $\varphi^2 = 0$。那么对于每个 $m \in M$，由引理 4 可得 $0 = ma^2 = \varphi^2(m)$，其中某个 $a \in R$; 因此，根据 (2)，$\varphi S(m) = 0$。由此可得 $\varphi 1_M(m) = \varphi(m) = 0$。由于 m 是任意选取的，$\varphi = 0$。

□

请注意，即使 duo 模的自同态环是约化的，该模本身也可能不是约化的。

例 3.1. 设 $R := \mathbb{Z}$ 是一个环。对于任意素数 p，Pr¨ufer p-群 $M := \mathbb{Z}(p^\infty)$ 是一个阿廷单列 R-模，因此由 [24, pg. 536] 可知它是一个 duo 模。众所周知，$S := \mathrm{End}_R(M)$ 是 p-进整数环 [3, Exercises 3 (17), pg. 54]。由于 p-进整数环是交换整环，因此它是约化环。然而，M 既不是约化的 R-模，也不是约化的 S-模。

若一个 R-模 M 满足：对 M 的每个子模 N，都存在 R 的一个理想 A，使得 $N = MA$，则称其为乘法模。有限生成乘法模是 duo 模。

引理 6. [13, 命题 19] 设 M 是交换环 R 上的有限生成乘法模。那么，M 弱态射当且仅当它是形态的。

推论 7. 交换环 R 上的每个循环模是弱态射的，当且仅当它是形态的。

证明. 由于每个循环 R-模都是有限生成的乘法模，根据引理 6，它是弱态射的，当且仅当它是形态的。 □

命题 2. 设 R 是交换环，且 M 是非平凡的有限生成乘法R-模。那么，M 是弱自内正则的，当且仅当它是阿贝尔内端正则的。

证明. 假设 M_R 是弱内正则模。根据定理 1，M_R 是弱态射的且约化的。由于它是有限生成乘法模，引理 6推出 M_R 是形态的。由于它是 duo，根据引理 5，${}_SM$ 是约化模。应用推论 5可得 M 是阿贝尔内端正则的。逆命题显然成立，因为交换环上的每个阿贝尔内端正则模都是弱内正则模。

□

推论 8. 交换环 R 上的每个循环模 R 弱自内正则，当且仅当它是阿贝尔内端正则的。

证明. 由于循环模是有限生成乘法模，该推论可由命题 2 立即得出。

□

若 R-模 M满足：对于所有 $N \subseteq M_R$，M在 N中的迹为 N，即 $\mathrm{Tr}_N(M) := \sum\{\text{像}(\lambda) : \lambda \in \mathrm{Hom}_R(M, N)\} = N$，则称其为强 duo [12]。显然，每个强 duo 模 M都是 duo 模。在 [12, 定理 5.5], 中，证明了强 duo 且约化的模 M 的自同态环是强正则环。对于交换环，我们在推论 9 中得到了一个改进的结果。

推论 9. 设 R 是交换环，M 是非平凡的 duo R-模。以下命题等价：

(1) M_R 是一个形态的约化模，

(2) S 是一个强正则环。

证明。

(1)⇒(2) 假设 (1) 成立。由引理 5，S 是一个约化环，因此由定理 2 可知它是强正则的。

(2)⇒(1) M_R 根据注 1 是形态的，并根据引理 5 是约化的。

□

4 F-正则模

回顾一下，环 R 是正则的，当且仅当 R 的每个右（左）循环理想都是 R_R的直和项。为了将这一刻画推广到模，Ramamurthi 和 Rangaswamy 在 [25, 第246] 页定义了强正则模。如果每个有限生成子模都是直和项，或者等价地，每个循环子模都是直和项，则称模 M 是强正则的（按 [25]的意义）。遵循 Naoum [19], 的做法，我们将强正则模称为强 F-正则模（即使 R不满足交换性）。在 [21], 中，建立了形态有限生成强 F-正则模与其自同态环之间的关系。

命题 3。 [21, 推论2。7] 有限生成的强 F-正则模 M 是形态的，当且仅当 S 是形态的且正则的。

若一个 R-模 M 满足 k-局部可缩性（即核局部可缩性）（或等价地，在 $S:=\mathrm{End}_R(M)$ 上 P-平坦），则称其为该性质的模；如果对于任意 $\varphi \in S$以及任意非零元素 $x \in r_M(\varphi)$，都存在一个同态 ψ_x: $M \to r_M(\varphi)$，使得 $x \in \psi_x(M) \subseteq r_M(\varphi)$（[15,页。 4069]和 [20]）。模 M_R 称为 [20, 页中的自生成元。 228] 如果它生成自身的每个像，即对于所有 $m \in M$都有 $mR = \mathrm{Hom}_R(M, mR)(M)$。在这种情况下，对于每个 $m \in M$， $m = \sum \alpha_i(x_i)$，其中 $x_i \in M$且 $\alpha_i \in \mathrm{Hom}_R(M, mR)$。

命题 4. 每个非平凡的强 F-正则模 M_R 都是 k-局部可收缩的。

证明。根据 [20, 页 228]， M_R 强 F-正则模是自生成元模；根据 [20, 引理 1], ，它在 S 上是 P-平坦的，这等价于 [15, 页 4069]所述的 k-局部可收缩性。 □

引理 7。 *If M 是一个 k-局部可收缩的 R-模，且 S 是一个约化环，那么对每个 $\varphi \in S$ ，*

$$r_M(\varphi^2) = r_M(\varphi).$$

证明。设 $x \in r_M(\varphi^2)$。由于 M具有 k-局部可收缩性，存在 $0 \neq \psi_x \in S$使得 $x \in \psi_x(M) \subseteq r_M(\varphi^2)$。因此 $\varphi^2\psi_x = 0$。由于 S约化可推出 $\varphi\psi_x = 0$，故 $x \in \psi_x(M) \subseteq r_M(\varphi)$。这表明 $r_M(\varphi^2) \subseteq r_M(\varphi)$。反向包含是众所周知的。 □

引理 8。 *If M 是一个非平凡的 duo 强 F-正则 R-模，则 S 是一个约化环。*

证明。令 $\varphi \in S$ 使得 $\varphi^2 = 0$。若 $\varphi \neq 0$，则存在某个 $0 \neq m \in M$ 使得 $\varphi(m) \neq 0$。根据强 F-正则假设，存在环 M的某个子模 X，使得 $M = \varphi(m)R \bigoplus X$。由于 M是 duo，$\varphi(M) = \varphi(\varphi(m)R) \bigoplus \varphi(X) = \varphi(X) \subseteq X$，因此 $\varphi(M) \subseteq X$。这意味着 $\varphi(m) \in \varphi(m)R \cap X = 0$，矛盾。因此 $\varphi = 0$ ，且 S 是一个约化环。 □

引理 9。设 M 是一个非平凡的 duo 强 F-正则 R-模。若 $K \cong K'$ ，其中 K 和K' 是 M的子模，则 $K = K'$。

证明。首先，我们证明对于 M 的每个子模 N，所有同态 φ: $N \to M$ 都满足 $\varphi(N) \subseteq N$。令 $n \in N$，并考虑 φ: $nR \to M$。根据强 F-正则假设，存在某个子模 X，使得 $M = nR \bigoplus X$。定义 β: $M \to M$，使得对于每个 $s \in nR$ 和 $x \in X$，有 $\beta(s + x) = \varphi(s)$。那么， β 是 M 的良定义自同态，它将 φ 延拓为 M 的自同态。因此，对于任意 $n \in N$，存在 $\beta \in S$ 使得 $\varphi(n) \in \varphi(nR) = \beta(nR) \subseteq N$，因为 M 是 duo。于是 $\varphi(N) \subseteq N$。因此，若 σ: $K \to K'$ 是给定的同构，则 $K' = \sigma(K) \subseteq K$，且 $K = \sigma^{-1}(K') \subseteq K'$。这证明了 $K = K'$。 □

以下等价条件已在关于近环的 [5, 命题 4.13 和引理 4.2]中得到证明，因此它们对环也成立：约化且右形态 $\Leftrightarrow$ 正则且右双子模 $\Leftrightarrow$约化且正则 $\Leftrightarrow$ 强正则。在下一个定理中，我们将在模论语境中阐述这些思想。

定理 3. 设 R 是一个环，且 M 是一个非平凡的强 F-正则模。则以下陈述等价:

(1) M_R 是形态模，且 S 是约化环,

(2) M_R 是 duo 模,

(3) M_R 是阿贝尔内正则模。

证明。

(1)⇒(2) 假设 (1) 成立。设 N 是 M 的子模，且 $\varphi \in S$。根据强 F-正则假设，对每个 $n \in N$，存在某个幂等元 $e \in S$，使得 $nR = e(M)$。由于 S 是约化的， e 在 S 中心。因此， $\varphi(n) \in \varphi(nR) = \varphi(e(M)) = e(\varphi(M)) \subseteq e(M) = nR \subseteq N$。这证明对所有 $\varphi \in S$，都有 $\varphi(N) \subseteq N$，因此 M_R 是 duo。

(2)⇒(1) 假设 (2) 成立。由引理 8， S 是约化环。为证明 M 是形态的，根据定理 2，我们将证明对每个 $\varphi \in S$，都有 $M = \varphi(M) \bigoplus r_M(\varphi)$。设 $\varphi \in S$。利用引理 7 和第一同构定理， $\varphi(M) \cong M/r_M(\varphi) = M/r_M(\varphi^2) \cong \varphi^2(M)$。由此得到 $\varphi(M) \cong \varphi^2(M)$。应用引理 9 得到 $\varphi(M) = \varphi^2(M)$。对任意 $x \in M$， $\varphi(x) \in \varphi(M) = \varphi^2(M)$，这意味着存在 $y \in M$，使得 $\varphi(x) = \varphi^2(y)$。于是 $\varphi(x-\varphi(y)) = 0$。这意味着 $k := x-\varphi(y) \in r_M(\varphi)$，因此 $x = \varphi(y)+k \in \varphi(M)+r_M(\varphi)$ 且 $M = \varphi(M) + r_M(\varphi)$。设 $x \in r_M(\varphi) \cap \varphi(M)$。那么，对某个 $m \in M$，有 $x = \varphi(m)$，且 $\varphi(x) = \varphi^2(m) = 0$。因此，根据命题 4 和引理 7，我们有$m \in r_M(\varphi^2) = r_M(\varphi)$，由此可得 $x = \varphi(m) = 0$。因此 $0 = r_M(\varphi) \cap \varphi(M)$ 且$M = \varphi(M) \bigoplus r_M(\varphi)$。

(1)⇔(3) 由定理 2 得出。

□

定义 4.1。子模 N of M 在 M 中是纯的，当且仅当对于每个 R-模 E，序列 $0 \to N \bigotimes E \to M \bigotimes E$ 是正合的。若对于每个 $a \in R$， $Na = Ma \cap N$（等价地， $0 \to N \bigotimes R/aR \to M \bigotimes R/aR$ 是正合的），则称 N 在 M 中是相对可除纯的或 RD-纯的。

根据 [8, 命题 8, 1], 每个纯子模也是 RD-纯的。环 R 是正则的，当且仅当每个（右）理想都是纯的（见 [8]）。利用这一事实，Fieldhouse 将满足每个子模 N of M 都是纯的模称为 M_R 正则模。遵循 Naoum [19], 的说法，我们将 Fieldhouse 正则模称为 F-正则模。

引理 10。设 R 为交换环， M 为非平凡的 F-正则模。则 M 是弱自内正则的、弱态射的、约化的且余约化的。

证明。由于 F-正则模的子模由 [8, 命题 8.1], 知是 RD-纯的，我们证明对每个 $a \in R$都有$M = Ma \bigoplus l_M(a)$。设 $a \in R$。则 $Ma = Ma \cap Ma = Ma^2$，因此 $Ma = Ma^2$。由此可知，对任意 $x \in M$， $xa = na^2$其中某个 $n \in M$。由于 $(x - na)a = 0$， $x - na \in l_M(a)$且 $x = na + x - na \in Ma + l_M(a)$。因此 $M = Ma + l_M(a)$。由 RD-纯性质， $0 = l_M(a)a = Ma \cap l_M(a)$对每个 $a \in R$都成立。因此 $M = Ma \bigoplus l_M(a)$。这证明了 M是弱自内正则的。根据定理 1， M 是弱态射的、约化的且余约化的。

□

例 4.1. 引理 10 的逆命题一般不成立。 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Q}$ 是弱内正则、弱态射且约化的，但它不是 F-正则。特别地，并非它的所有子模都是（RD-）纯的，因为对于子模 $\mathbb{Z}$， $2\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} \neq 2\mathbb{Z}$。

由 [25, 第 240 页和 246], 可知，强 F-正则模的子模是 RD-纯的。由此根据 [13, 命题 8] 可得，若 R 是交换环，则每个强 F-正则模都是弱态射模。若存在形如 $R^n \to R^m \to M$ 的正合列，其中 n、$m \in \mathbb{Z}^+$，或者等价地，若 $M \cong P/Q$，其中P 和 Q 是有限生成模，且 P 是投射模，则称 R-模 M 是有限表示的（简称 f.p.）。显然，强 F-正则模是 F-正则的，但逆命题一般不成立，见 [1]。在命题 5 中，我们确定 F-正则模何时是强 F-正则的。

引理 11. [18, 定理 7.14] 如果 N 是 M 的纯子模，且 M/N 是有限表示的，那么 N 是 M的直和项。

命题 5. 设 R 是交换环， M 是非平凡的 R-模。那么，只要 M 是 F-正则的，且对于每个 $m \in M$，M/mR 都是有限表示的， M 就是强 F-正则的。

证明. 假设 M 是 F-正则的，并且对于每个 $m \in M$， M/mR 都是有限表示的。那么，对于每个 $m \in M$，mR 都是 M 中的纯子模。由引理 11，对于每个 $m \in M$， mR 都是 M 的直和项，因此 M 是强 F-正则的。 □

设 R 是交换环， N 是 M_R的真子模。若对于任意 $a \in R$和 $m \in M$， $ma \in N$蕴含 $m \in N$或 $a \in (N :_R M) := \{r \in R : Mr \subseteq N\}$，则称 N 为素子模。对于 M 的任意真子模 N，所有包含 N的 M 的素子模的交记作 $Rad(N)$。定理 4 给出了交换环上 F-正则模的一些新刻画。定理 4 的其他等价表述参见 [1, 定理 6], [10, 定理 2.3、推论 2.7 和定理 4.1]以及 [26, 定理 2.1]。

定理 4. 设 R 是一个交换环， M 是一个非零的 R-模。以下命题等价：

(1) M 是 F-正则的；(2) M 的每个子模都是弱内正则模；(3) M 的每个子模都是弱态射且约化的模；(4) M 的每个循环子模都是（弱）形态的且约化的模；(5) M 的每个循环子模都是余约化模；(6) M 的每个循环子模都是阿贝尔内正则模；(7) M 的每个循环子模都是 F-正则模。

证明。

(1)⇒(2) 假设 (1) 成立，并令 N 为 M的一个子模。根据引理 10， M 是弱内正则的。由于 N 是 M 中的纯子模，根据定理 1.1 (3)， $]$ N 也弱内正则。

(2)⇒(3) 这由定理 1 得出。

(3)⇒(4) 根据推论 7，弱态射循环模是形态的。

(4)⇒(5) 由于 M 的每个循环子模都是有限生成的 R-模，故由推论 2 可得证明。

(5)⇒(1) 假设 (5) 成立。设 N 是 M的真子模。根据 [10, 定理 2，3],我们需要证明 $Rad(N) = N$。但要证明 $Rad(N) = N$，根据 [26,定理 2，1],只需证明对所有 $a \in R$和 $m \in M$， $m(a) = m(a^2)$。令 $a \in R$和 $m \in M$。由于 mR 是余约化模， $mRa = mRa^2$。因此 $m(a) = m(a^2)$。(2)⇒(6) 假设 (2) 成立。由于 mR， $m \in M$ 是有限生成乘法模，根据命题 2，它是弱自内正则的当且仅当它是阿贝尔内端正则的。(6)⇒(5) 假设对每个 $m \in M$， mR都是阿贝尔内端正则模。那么对每个 $m \in M$ 和 $a \in R$， $mR = mRa \bigoplus l_{mR}(a)$。由此可得 $mRa = mRa^2$；根据定义 1.4，对每个$m \in M$， mR 都是余约化的。(1)⇒(7) 假设 M 是 F-正则的。根据 [8, 定理 8，2]和 [10, 命题 2，6]对每个 $m \in M$ 都是 F-正则模。(7)⇒(1) 假设对每个 $m \in M$， mR 都是 F-正则模。那么根据定义 1.1 和 4.1， mRa 对每个 $a \in R$都是 mR 的（RD-）纯子模。由此可得 $mRa = mRa \cap mRa = mRa^2$，从而证明了 $m(a) = m(a^2)$。根据 [26,定理 2，1]，对 M的每个子模 N，都有 $Rad(N) = N$。因此，根据 [10, 定理 2，3]， M 是 F-正则的。

□

注 3。

(a) 若 M 是交换环上的 F-正则模，则由引理 10 和定理 4 可知，对于每个 $\varphi \in S$，ker(φ) 和 Im(φ) 都是弱态射且约化的模。(b) 根据定理 4，“弱态射模”和“约化模”这两种性质可从一个模传递到它的每个子模，反之亦然。(c) 定理 4 证明了，若 M 的每个（循环）子模都是（弱）形态且约化的模，则 M 具有 F-正则性。

回顾一下，交换环 R 是正则的，当且仅当对每个 $a \in R$， $aR = a^2R$。对于交换环 R，Jayaram 和 Tekir 在 [11] 中称 M_R为正则的，若对每个 $m \in M$，存在某个$a \in R$使得 $mR = Ma = Ma^2$。按照 [1, 定义 1], ，我们将 Jayaram–Tekir 正则模称为 JT-正则模。Anderson、Chun 和 Juett 在 [1] 中定义了这类模的一个弱版本，即弱 JT-正则模。若对每个 $a \in R$， $Ma = Ma^2$ ，则称 M 为弱 JT-正则模。

注 4. 设 R 是交换环， M 是一个 R-模。

(a) 根据 [1, 定理 13]， M 是 JT-正则 $\Rightarrow$ M 是强 F-正则 $\Rightarrow$ M 是 F-正则 $\Rightarrow$ M 是弱 JT-正则。(b) 根据定义 1.1 和 1.4，弱 JT-正则模与余约化模无法区分。因此，根据 (a)，F-正则（分别地，强 F-正则、JT-正则）模是余约化模。(c) 有限生成 JT-正则模是约化模这一事实已在 [11, 引理 10] 中得到证明。根据引理 10，若 M 是 F-正则（分别地，强 F-正则、JT-正则）模，则它是弱自内正则、弱态射且约化的。由于根据 (a)，所有其他形式都是 F-正则的，因此它们也都是弱态射、约化且余约化的。

推论 10. 设 R 是一个交换环， M 是一个非平凡的 R-模。那么，只要对每个 $m \in M$， M/mR 都是有限表示的，且满足以下任一条件， M 就是强 F-正则的：

(1) mR 是（弱）形态的且约化的；
(2) mR 是阿贝尔内端正则的；(3) mR 是弱自内正则的；(4) mR 是弱JT-正则的；(5) mR 是余约化的；(6) mR 是 F-正则的。

证明。鉴于命题 5，以及注 4(b) 中弱 JT-正则模就是余约化模这一事实，只需证明给出的陈述 (1) 至 (6) 中任意一条都蕴含 M 是 F-正则。假设对于每个 $m \in M$， mR 都满足所给陈述中的任意一条。那么根据定理 4， M 是 F-正则。 □

设 R 是一个交换环， M 是一个非平凡的 R-模。表 1 展示了“（弱）形态模”和“（余）约化模”这些性质如何从一个模传递到它的每个循环子模，反之亦然。此外，该表还展示了这些性质如何决定一个模所具有的正则性类型。

Ta表 1：正则、（弱）形态的约化模及其循环子模

M is 强 F-正则	$\Rightarrow$	M is F-正则	$\Rightarrow$	M is 弱自内正则	$\Rightarrow$	M is 弱 JT-正则
$\Uparrow$		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		$\|\|$
$\forall m \in M$, mR是弱态射 $+ mR$ 是约化的 $+ M/mR$ 是有限表示的	$\Rightarrow$	$\forall m \in M$, mR 是弱态射 $+ mR$ 是约化的	$\Rightarrow$	M is 弱态射 $+$ 约化	$\Rightarrow$	M is 余约化
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		$\Updownarrow$		$\|\|$
$\forall m \in M$, mR是余约化的 $+ M/mR$ 是有限表示的	$\Rightarrow$	$\forall m \in M$, mR 是余约化的	$\Rightarrow$	M is 弱态射的 $+$ 余约化	$\Rightarrow$	M is 余约化的

例4.2。一般而言，各行中的蕴含关系不可逆。

(a) 余约化 $\not\Rightarrow$ 弱态射的。设 p 是 $\mathbb{Z}$中的一个素元。那么 Prüfer p群 $\mathbb{Z}_{p^\infty}$是一个余约化 $\mathbb{Z}$-模。然而，由于 $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ 的 φ_a 型任意非零自同态都是满射但非单射， $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ 不是一个弱态射的 $\mathbb{Z}$-模（参见 [13, 命题 4 和例 2.2]）。

(b) 弱态射 $+$（余）约化于 $M \not\Rightarrow$ 在 M的循环子模上的弱态射模。 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Q}$ 是弱态射的、（余）约化的。然而，它的循环 $\mathbb{Z}$-子模 $\mathbb{Z}$ 不是弱态射的。

(c) 余约化（= 弱态射 + 约化）于 mR, $m \in M \not\Rightarrow M/mR$ 是有限表示的。Teply 在 [27] 中构造了一个交换正则环 R，其上有一个有限生成的 F-正则R-模 M，该模有一个子模 $T(M) := \{m \in M : r_R(m)$ 是 $R\}$.的本质理想。根据定理 4，每个 mR、$m \in M$ 都是弱态射的、约化的且余约化的。然而，由于根据[27] $T(M)$ 是一个循环纯子模，但不是 M的直和项，根据引理 11，$M/T(M)$ 不是有限表示的。

推论 11. 设 R 是一个交换环，M 是一个 R-模。M 是弱自内正则的，当且仅当它是弱 JT-正则且弱态射的；而这又当且仅当它是弱态射且约化的。

证明. 由于弱 JT-正则模恰好是余约化模，由定理 1 即得。

□

5 形态、约化与正则模的等价性

本节给出一些条件，在这些条件下，模的不同正则性概念与弱态射模和约化模相一致。此外，在某些特殊条件下，我们还讨论当某个模的每个（循环）子模都是（弱）形态的且约化时，该模会具有何种正则性。注意（利用引理 10、例 4.1、注 4、[1, 第 15 页和例 35 (6)]），F-正则 $\Rightarrow$ 弱自内正则 $\not\Rightarrow$ F-正则 $\Rightarrow$ 弱 JT-正则 $\not\Rightarrow$ F-正则。

定理 5. 设 R 是交换环，M 是非零有限生成的 R-模。则以下命题等价：

(1) M 是弱态射且约化的，(2) $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ 是正则环，(3) M 是弱自内正则的，(4) M 是弱 JT-正则的，(5) M 是 F-正则的，(6) M 的每个循环子模都是（弱）态射且约化的（分别为弱自内正则、阿贝尔内端正则、余约化、弱 JT-正则、F-正则）模。

证明。

(1)⇔(3) 由定理 1 得出。

(1)⇔(2) ⇔(4) 分别由推论 2 和注 4(b) 得出。

(3)⇔(5) 由 [1, 定理 22] 得出。

(5)⇔(6) 由定理 4 和推论 10 得出。

□

注意，$\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Q}$ 是一个非有限生成的 $\mathbb{Z}$-模，它满足定理 5 的（1）、（3）和（4），但不满足（2）、（5）和（6）。与环的情形类似，（弱）形态模和约化模的概念相互关联，可为模中的正则性提供相关条件。在有限生成模的子范畴中，这两种性质的结合与定理 5 中不同的正则性概念相一致。现在，我们在命题 6 中给出一个条件，在该条件下，内正则模和强 F-正则模与定理 5 中的模一致。此外，我们还用（弱）形态子模和约化（子）模来刻画内正则模和强 F-正则模。

命题 6. 设 R 是一个交换环， M 是一个非平凡的有限表示 R-模。则以下陈述等价:

(1) M 是弱态射且约化的，(2) $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ 是正则环，(3) M 是（弱）内正则的，(4) M 是弱 JT-正则的，(5) M 是（强）F-正则的，(6) M 的每个循环子模都是（弱）形态的且约化的（分别为（弱）内正则、阿贝尔内端正则、余约化、弱 JT-正则、F-正则）模。

证明。(2) $\Leftrightarrow$、(3) $\Leftrightarrow$ 和(5)的等价性由 $[1,$ 定理 $23]$得出。其余等价性由定理 5 得出。

□

注记 5。以下概念均不能推出 $S := \mathrm{End}_R(M)$ 是约化环：“ M 是约化的”、“弱态射且约化的 $+$ ”、“弱态射且余约化的 $+$ ”。因此，弱 JT-正则、（强）F-正则和弱自内正则均不能推出阿贝尔内端正则。存在一个约化模 M，其每个循环子模都是弱态射、约化且余约化的，但 S 并非约化，见例 5.1。

例 5.1. $[1,$ 例 $24]$设 R 是一个具有非有限生成极大理想 $\mathcal{M}$的交换正则环，并设 $\overline{R} := R/\mathcal{M}$ 和 $M := R \bigoplus \overline{R}$。那么 M 是一个有限生成的强 F-正则模，因此根据引理 10， M 是弱态射的、约化且余约化的。然而，我们声称 $S := \mathrm{End}_R(M)$ 不是约化环。注意，由于

$$S \cong \begin{bmatrix} \mathrm{End}_R(R) & \mathrm{Hom}_R(\bar{R}, R) \\ \mathrm{Hom}_R(R, \bar{R}) & \mathrm{End}_R(\bar{R}) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} R & 0 \\ \overline{R} & \overline{R} \end{bmatrix},$$

对应于 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \overline{1} & \overline{0} \end{bmatrix}$ 的自同态 φ 非零，但 $\varphi^2 = 0$。

定义 5.1. 设 R 是一个交换环。如果对于 R的每个极大理想 $\mathcal{M}$， $M_{\mathcal{M}}$ 是平凡的或单的 $R_{\mathcal{M}}$-模（等价地，如果 $M_{\mathcal{M}}$ 是平凡的或单的 R-模），则称 R-模 M 为几乎局部单模[1] 。

众所周知， R 是几乎局部单 R-模，当且仅当 R 是正则环。根据 Anderson、Chun 和 Juett 在 $[1,$ 第 $2],$ 页的论述，模中的 “ 几乎局部单性质 ” 是模论正则性的另一种形式。

引理 12. 设 R 是交换环， M 是非平凡的 R-模。那么

(1) $[1,$ 定理 $4]$ M 是 JT-正则，当且仅当 M 是乘法模且是弱 JT-正则模；(2) $[1,$ 定理 $13]$ M 是 JT-正则 $\Rightarrow$ M 是几乎局部单 $\Rightarrow$ M 是强 F-正则$\Rightarrow$ M 是 F-正则 $\Rightarrow$ M 是弱 JT-正则。

推论 12. 设 R 是一个交换环， M 是一个非平凡的乘法 R-模。那么M 是 JT-正则， $\Leftrightarrow$ M 是几乎局部单， $\Leftrightarrow$ M 是强 F-正则， $\Leftrightarrow$ M 是 F-正则， $\Leftrightarrow$ M是弱 JT-正则。

证明. 由引理 12 可立即得出。 □

Naoum 在 [19] 证明，乘法模是强 F-正则的，当且仅当其自同态环 S 是正则的（即 M 是内正则的）。命题 7 表明，对于交换环上的有限生成乘法模，（弱）形态的模和约化模与我们讨论过的所有正则性概念等价。

命题 7. 设 R 是交换环， M 是非平凡有限生成乘法R-模。那么以下命题等价：

(1) M 是（弱）形态的且约化的；(2) $R/\mathrm{Ann}(M)$ 是正则环；(3) M 是（弱）内正则的；(4) M 是（阿贝尔）内正则的；(5) M 是（弱）JT-正则的；(6) M 几乎局部单；(7) M 是（强）F-正则的；(8) M 的每个循环子模都是（弱）形态的且约化的（分别为（弱）内正则的、阿贝尔内正则的、余约化的、（弱）JT-正则的、（强）F-正则的、几乎局部单的）模。

证明。
(1)⇔(2) ⇔ (3) ⇔ (5) ⇔ (8) 根据引理 6，弱态射有限生成乘法模是形态的，因此该等价性的证明由定理 5 和推论 12 得出。

(5)⇔(6) ⇔ (7) 由推论 12 得出。

(3)⇔(4) 由命题 2 得出。

□

Ware [28, 定义 2。3]若一个模是投射的，且其每个同态像都是平坦的，则称其为 M 正则模（称之为 W-正则）；等价地说，若 M 是投射的，且 M 的每个循环子模都是直和项。为扩展 Ware 正则性这一概念，Zelmanowitz 定义了非投射正则模。若对于任意 $m \in M$，都存在 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$，使得 $m\varphi(m) = m$，则称 M 为 Zelmanowitz 正则 [29] （称之为 Z-正则）模；等价地，对于任意 $m \in M$， mR 是投射的，并且是 M的直和项。

注 6. 设 R 为交换环，且 M 为非平凡的 R-模。

(a) 由于（根据 [25]） M 是 W-正则、 $\Rightarrow M$ 是 Z-正则、 $\Rightarrow M$ 是强 F-正则、 $\Rightarrow M$ 是 F-正则，W-正则模和 Z-正则模根据引理 10 都是弱自内正则、弱态射且约化的。

(b) 如果 M 是投射的，那么对于每个 $m \in M$， M 是 W-正则、 $\Leftrightarrow M$ 是 Z-正则、 $\Leftrightarrow M$ 是（强）F-正则 $\Leftrightarrow$；对于每个 $m \in M$， mR 是（弱）态射且约化的模 $\Leftrightarrow$； mR 是余约化模（[28, 命题 2] 和定理 4）。

致谢。我们谨向匿名审稿人致谢，感谢其细致校阅稿件并提出许多宝贵意见。本研究在马凯雷雷大学开展，得到了 ISP 通过马凯雷雷-瑞典国际发展合作署双边计划第四期、项目316“数学及其应用能力建设”以及东非代数研究组（EAALG）的支持。

参考文献

[1] D. D. Anderson、S. Chun 和 J. R. Juett，交换冯·诺依曼正则环的模论推广，《交换代数》，47(11) (2019)，4713–4728。[2] D. D. Anderson 和 J. R. Juett，内正则模，《纯粹与应用代数杂志》，225(1) (2021)，106475（27页）。[3] F. W. Anderson 和 K. R. Fuller，《环与模范畴》，施普林格出版社，纽约，（1992）。[4] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，《交换代数导论》，马萨诸塞州雷丁，艾迪生-韦斯利出版社，（1969）。[5] A. S. Bamunoba、P. I. Kimuli 和 D.Ssevviiri，正则近环中的态射元，《庆北数学杂志》，60(4) (2020)，839–851。[6] A. Buhphang、S. Halicioglu、A. Harmanci、K. H. Singh、H. Kose 和 M. Rege，论刚性模，《东西方数学杂志》，15(01) (2013)，70–84。[7] G. Ehrlich，正则环中的单位元与单侧单位元，《美国数学会汇刊》，216 (1976)，81–90。[8] D. J. Fieldhouse，纯理论，《数学年刊》，184(1) (1969)，1–18。[9] N. J. Groenewald 和 D. Ssevviiri，二素模，《代数与应用杂志》，12(05) (2013)，1250226（12页）。[10] D. Hassanzadeh-Lelekaami 和 H. Roshan-Shekalgourabi，论交换环上的正则模，《马来西亚数学科学学会通报》，42(2) (2019)，569–583。.[11] C. Jayaram 和 U. Tekir，冯·诺依曼正则模，《交换代数》，46(5) (2018)，2205–2217。[12] H. Khabazian、S. Safaeeyan 和 M. R. Vedadi，强二元模与环，《交换代数》，38(8) (2010)，2832–2842[13] P. I. Kimuli 和 D. Ssevviiri，弱态射模，《巴勒莫数学学会报告》（第二辑），（2022），1–16。https://doi.org/10.1007/s12215-022-00758-3。[14] A. Kyomuhangi 和 D. Ssevviiri，交换环上模的局部幂零根，《代数与几何论丛》，61(4) (2020)，759–769。[15] G. Lee、S. T. Rizvi 和 C. Roman，自同态环为冯·诺依曼正则环的模，《交换代数》，41(11) (2013)，4066–4088。[16] T. K. Lee 和 Y. Zhou，约化模，《环、模、代数与阿贝尔群》，《纯粹与应用数学讲义》，Dekker，纽约，236 (2004)，365–377。[17] G. Marks，二素环的分类，《代数杂志》，266(2) (2003)，494–520。[18] H. Matsumura，《交换环理论》，剑桥大学出版社，（1989）。[19] A. G. Naoum，正则乘法模，《匈牙利数学期刊》，31(2) (1995)，155–162。[20] W. K. Nicholson，论 PP-自同态环，《加拿大数学通报》，36(2) (1993)，227–230。

[21] W. K. Nicholson，形态模与环综述，载于《环论进展》（2005），167–180。[22] W. K. Nicholson 和 C. E. S´anchez，具有同构定理对偶的主环，《格拉斯哥数学杂志》46(1)（2004），181–191。[23] W. K. Nicholson 和 C. E. S´anchez，具有同构定理对偶的环，《代数杂志》271(1)（2004），391–406。.[24] A. Ozcan、A. Harmanci 和 P. Smith，duo 模，《格拉斯哥数学杂志》48(3)（2006），533–545。[25] V. S. Ramamurthi 和 K. M. Rangaswamy，关于有限内射模，《澳大利亚数学会杂志》16(2)（1973），239–248。[26] H. Sharif、Y. Sharif 和 S. Namazi，满足根式公式的环，《匈牙利数学学报》71(1-2)（1996），103–108。[27] M. L. Teply，关于交换正则环上的模的一则注记，《美国数学会会刊》29(2)（1971），267–268。[28] R. Ware，投射模的自同态环，《美国数学会汇刊》155(1)（1971），233–256。[29] J. Zelmanowitz，正则模，《美国数学会汇刊》163（1972），341–355。