arXiv:2301.02901v1 [math.PR] 7 Jan 2023

超越平均场设定的近似最优分布式随机控制

JOE JACKSON 和 DANIEL LACKER

ABSTRACT. 我们研究高维随机最优控制问题，其中多个智能体协作以最小化一个凸成本泛函。我们同时考虑全信息问题（每个智能体都能观察所有其他智能体的状态）和分布式问题（每个智能体只能观察自身状态）。我们的主要结果是关于这两个问题之间差距的精确非渐近界，并分别以其值函数和最优状态来衡量这一差距。在此过程中，我们通过根据相应的随机最大值原理和哈密顿-雅可比型方程刻画最优解，构建了与经典设定相平行的分布式随机最优控制理论。将这些结果专门应用于均值场控制设定——其中成本是状态经验分布的（对称）函数——我们推导出位移凸情形下收敛问题的最优速率。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 符号与预备知识 9 3. 问题表述与值函数 11 4. 分布式控制的近最优性 18 5. 均值场控制的应用 33 6. 异质双随机相互作用的应用 40 7. 凸性与小量性之间的权衡 44 附录A. 最大值原理前向后向随机微分方程的适定性 48 参考文献 51

1. 引言

考虑如下形式、定义在有限时间范围 $T > 0$ 上的随机最优控制问题。每个 n 智能体 $i = 1, \ldots, n$ 控制一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的状态过程 X_t^i，其随机动力学由下式给出

$$dX_t^i = \alpha^i(t, \mathbf{X}_t)dt + dW_t^i. \tag{1.1}$$

这里， $W^1, \ldots, W^n$ 是相互独立的布朗运动，而 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ 是一个马尔可夫型（反馈）控制，它依赖于状态的整个向量 $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \ldots, X_t^n)$。也就是说， $\boldsymbol{\alpha}$ 属于全信息控制集，定义如下（更精确地说，见第3节）。

全信息控制： $\mathcal{A}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$的集合，其中 α^i： $[0, T] \times (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^d$对每个 i均可测，且 SDE (1.1) 存在唯一的强解。

J.J. 获美国国家科学基金会资助，资助编号为 DGE1610403。D.L. 部分获美国国家科学基金会职业奖资助，项目编号为 DMS-2045328。本文所表达的任何观点、研究结果、结论或建议均为作者所持，不一定反映美国国家科学基金会的意见。

全信息控制问题是要最小化以下形式的泛函：

$$V := \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}} J(\boldsymbol{\alpha}), \qquad J(\boldsymbol{\alpha}) := \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X_t^i, \alpha^i(t,\mathbf{X}_t)) + F(\mathbf{X}_t)\bigg)dt + G(\mathbf{X}_T)\bigg]. \tag{1.2}$$

关于 L^i、F 和 G 的精确假设推迟到第3节说明。后文将会看到，运行成本作为控制的函数具有加法可分性十分重要；相比之下，更一般的形式 $f(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\alpha}(t,\mathbf{X}_t))$ 可任意依赖所有 n 状态和控制；有关可能推广的更多讨论，请参见第1.4节。本文始终聚焦于马尔可夫（闭环）控制，但也可以采用开环控制（适应于给定滤过的过程）来阐述一种平行且大体等价的理论。

均值场控制框架既是我们所设定情形的一个重要特殊情形，也是我们研究的一个参照。若 L^i 不依赖于 i，且 F 和 G 对称，则得到平均场情形：

$$\textbf{Mean field case:} \quad L^i = L, \quad F(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(m_{\mathbf{x}}^n), \quad G(\mathbf{x}) = \mathcal{G}(m_{\mathbf{x}}^n), \quad m_{\mathbf{x}}^n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \tag{1.3}$$

对于某些良好的函数 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$：$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$，其中 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上概率测度的空间。本文以下各处均用 $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ 表示 $(\mathbb{R}^d)^n$ 的一个一般元素。在平均场情形下，已知 [28, 19] 在关于 $(L, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ 的一般假设下，值函数 V 随着 $n \to \infty$ 趋于极限，收敛到相应均值场控制问题的值：

$$\begin{gathered} V_{\mathrm{MF}} = \inf_{\alpha} \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \big(L(X_t, \alpha(t,X_t)) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(X_t))\big)dt + \mathcal{G}(\mathcal{L}(X_T))\bigg], \\ \text{where} \quad dX_t = \alpha(t,X_t)dt + dW_t, \quad \mathcal{L}(X_t) = \mathrm{Law}(X_t). \end{gathered} \tag{1.4}$$

其思路是，随着 $n \to \infty$，状态过程应渐近地成为独立同分布的，因此，根据大数定律，它们的经验测度 $m_{\mathbf{X}_t}^n$ 应接近状态过程的共同分布律 $\mathcal{L}(X_t)$。若 $\alpha^{\mathrm{MF}}: [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 表示该均值场控制问题的一个最优控制，那么由 $\alpha^{\mathrm{MF},\,i}(t,\mathbf{x}) := \alpha^{\mathrm{MF}}(t,x_i)$ 所定义的控制 $(\alpha^{\mathrm{MF},\,i})_{i=1}^n \in \mathcal{A}$ 对原控制问题 (1.2) 应近乎最优。

值得注意的是，由均值场极限构造的近似最优控制 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{MF}}$ 是分布式的，也就是说，智能体 i 的控制仅取决于智能体 i 的状态，而不取决于其他智能体。事实上，均值场控制理论的主要动机之一，就是为通常更难处理的高维控制问题提供一种构造近似最优分布式控制的方法。

在高度对称的均值场情形 (1.3) 之外，如何为控制问题 (1.2) 构造近似最优的分布式控制，就不那么明了了。近期有一些方案尝试扩展均值场框架，以适用于具有某种渐近结构、且存在异质相互作用的模型，并借助图子理论 [1, 3,25, 33]。例如，假设成本函数 G（类似地，F）具有如下形式

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_1(x^i) + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J_{ij}G_2(x^i - x^j), \tag{1.5}$$

对于某些函数 $G_1, G_2: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 以及某个对称相互作用矩阵 J。如果 J 在 $n \to \infty$ 下以适当的意义收敛到一个图子，那么就应当可以像平均场情形那样采用类似（但更复杂）的方案：我们可以先求解相应的极限问题，再以此为基础，为 n 智能体问题构造近似最优的分布式控制。必须强调的是，平均场方法和基于图子的研究方法都要求成本函数具有特定的渐近结构（L^i, F, G）。

本文的主要目标是为构造近似最优的分布式控制提出一种新视角。这种方法本质上是非渐近的，并且不施加此类结构性假设。为此，我们直接研究分布式控制上的优化问题。

分布式控制： $\mathcal{A}_{\mathrm{dist}}$ 表示满足以下条件的 $(\alpha^1,\dots,\alpha^n) \in \mathcal{A}$： 对于每个 i， $\alpha^i(t,x^1,\dots,x^n) = \alpha^i(t,x^i)$ 仅依赖于 i^{th} 状态变量。

分布式最优控制问题定义为

$$V_{\mathrm{dist}} := \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{\mathrm{dist}}} J(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.6}$$

注意到 $V \le V_{\mathrm{dist}}$，因为 V_{dist} 在更小的可容许控制类上使同一泛函达到最小值。量 $V_{\mathrm{dist}} - V$ 可视为分布式控制对于原全信息问题的次优程度的度量。当可以证明 $V_{\mathrm{dist}} - V < \epsilon$ 时，便可得出结论：原问题 (1.2) 存在 ϵ-最优分布式控制。

在控制理论文献中，“分布式”一词的用法很广泛，含义也各不相同。例如，J.L. Lions 的一篇早期论文 [35] 将“分布式系统的控制”非常一般地定义为“状态可由偏微分方程解描述的系统”。我们的术语含义要具体得多，其选择旨在与平均场博弈和控制领域文献中的用法保持一致。

1.1. 分布式控制的近似最优性。我们工作的核心部分是推导关于 $V_{\mathrm{dist}} - V$ 的定量界。我们的界最简单的特殊情形可写成以下形式（例如，在 $d = 1$ 中）；更精确的表述见定理 4.5：

$$0 \le V_{\mathrm{dist}} - V \le Cn \sum_{1\le i<j\le n} \big(\|\partial_{ij}F\|_\infty^2 + \|\partial_{ij}G\|_\infty^2\big), \tag{1.7}$$

其中常数 C 是显式的，且关键在于它不依赖于 n。常数 C 是显式的这一点很重要，这使得我们的非渐近界能够恰当地适用于各种渐近情形，例如平均场情形 (1.3) 和类似于 (1.5) 的异质相互作用。一般而言，(1.7) 中的常数 C 取决于 L^i 及其凸共轭（哈密顿量）的二阶导数的 L^∞-范数，以及 F 和 G 的海森矩阵算子范数（的 L^∞-范数）；在大多数例子中，后者的关键特点是无维数依赖。二次成本 $L^i(x,a) = |a|^2/2$ 的情形允许进行某些简化；在推论 4.7 中，我们得到一个特别简洁的界，此处在额外假设初始状态为非随机的条件下给出：

$$(V_{\mathrm{dist}} - V)^{1/2} \le \left(nT^4 \sum_{1\le i<j\le n} \|\partial_{ij}F\|_\infty^2\right)^{1/2} + \left(nT^2 \sum_{1\le i<j\le n} \|\partial_{ij}G\|_\infty^2\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

此外，作为证明 (1.7) 的副产品，我们还获得了一个具有混沌传播精神的定量结果。具体而言，考虑全信息问题的最优状态 $(X^1,\dots,X^n)$，我们发现存在一个分布式状态过程 $(\widehat{X}^1,\dots,\widehat{X}^n)$，使得对于每个$k \le n$，$(X^i)_{i\in S}$ 的联合分布与 $(\widehat{X}^i)_{i\in S}$ 的联合分布在二次 Wasserstein 距离下，对于“多数”基数为 k的 $S \subset \{1,\dots,n\}$ 选择而言都很接近。精确表述见定理 4.8。

我们主要界（1.7）背后的两个主要假设是：（1） F、 G以及哈密顿量 $H^i(x,p) := \sup_{a\in\mathbb{R}^d}\big(-a\cdot p - L^i(x,a)\big)$的二阶导数（但非一阶导数）有界；（2）对每个 i， F、 G 和 L^i 都是凸的。事实上，在下文精确表述的定理 4.5 中，我们给出了一个更精细的界，其中（1.7）中的 L^∞ 范数被某些 L^2 范数取代。正如注 4.16 所讨论的，对于二次哈密顿量，有界性假设可以放宽。凸性假设则很难去除，但在附加小性假设下，我们在第 7 节中给出了这方面的一些初步结果。

界（1.7）最重要的特点是，它只涉及交叉导数：对于 $i \neq j$，包括 $\partial_{ij}F$ 和 $\partial_{ij}G$，而不涉及导数 $\partial_{ii}F$ 或 $\partial_{ii}G$。这个界是非渐近的，但某些渐近情形表明，它相当精确：

1.1.1. 平均场情形。我们着重讨论的第一个特殊情形是平均场情形 (1.3)，并将在第 5 节中详细处理。在界 (1.7) 中，每个交叉导数都变为 $\partial_{ij}G(\mathbf{x}) = n^{-2}D_m^2\mathcal{G}(m_{\mathbf{x}}^n, x_i, x_j)$；如果二阶 Lions（Wasserstein）导数 $D_m^2\mathcal{G}$ 有界，则该项为 $O(1/n^2)$，对F也类似。综上，界 (1.7) 变为 $|V - V_{\mathrm{dist}}| = O(1/n)$。我们将单独证明（事实上，无需凸性假设） $|V_{\mathrm{dist}} - V_{\mathrm{MF}}| = O(1/n)$，其中 V_{MF} 在 (1.4) 中定义。这便推出了收敛问题的最优收敛速率 $|V - V_{\mathrm{MF}}| = O(1/n)$；精确表述见定理 5.6。据我们所知，这是在如此一般条件下的一项新结果，不过我们强调，它关键依赖于一定的光滑性，尤其是 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$的位移凸性。我们预计（尽管尚无文献记载），相同的假设将保证 Hamilton-Jacobi 方程在 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上存在光滑解；该方程（至少形式上）由均值场控制问题的值函数满足。利用这一方程的光滑解，可以采用为平均场博弈开发、并在控制情形下于 [26] 中阐述的 [8] 方法，证明相同的 $O(1/n)$收敛速率。有趣的是，我们的方法并未用到这个 Hamilton-Jacobi 方程。

自然会让人想知道，我们的方法是否能在困难的非凸情形下得到收敛速率，但迄今为止，我们只能处理较短的时间范围（第 7 节）。相比之下，近期的工作 [7] 在不对时间范围施加任何限制的情况下，得到了非凸情形下的收敛速率，尽管这些速率并非最优。另请参阅 [15] 关于有限状态空间中类似结果的研究。

值得注意的是，此前有几项关于平均场博弈的研究将分布式控制问题作为完全信息框架的简化，因为严格证明 n人博弈的分布式均衡收敛到平均场极限（即收敛问题）更为容易。事实上，Lasry-Lions 最初的研究 [34] 采用了这一视角，并将全信息收敛问题留作开放问题；另请参阅 [6, 20], ，但请注意，这些作者都没有使用“分布式”这一术语。在我们的语境中，他们研究的是 V_{dist} 到 V_{MF}的收敛。

全信息收敛问题（即 V到 V_{MF}的收敛）如今已在相当一般的情形下，从定性角度得到解决，涵盖平均场博弈 [29, 18]和控制[28, 19]。现有针对博弈 [8, 17] 的定量结果依赖于对所谓主方程的分析，而控制 [26, 7, 9] 方面的结果则类似地依赖于由平均场值函数求解的 Hamilton-Jacobi 方程，不过我们要指出，[38] 提出的其他倒向随机微分方程技术也已为平均场博弈带来了定量收敛结果。用我们的记号来说，这些工作直接研究了 V到 V_{MF}的收敛，没有借助任何中间的 V_{dist}。

这两种逼近 $V_{\mathrm{MF}} \approx V_{\mathrm{dist}}$ 和 $V_{\mathrm{dist}} \approx V$ 在本质上颇为不同。前者更偏向概率论，实质上归结为（光滑泛函的）独立同分布经验测度的收敛速率。后者则更偏向控制理论，凸性在其中发挥着关键作用。更多细节请参见注 5.10。

1.1.2. 异质相互作用。除了证明平均场收敛问题的预期最优速率之外，我们最重要的贡献是超越平均场设定，使我们关于 $|V - V_{\mathrm{dist}}|$ 的主要界适用于相当一般的非对称情形。这与近年来日益发展的有关大规模群体博弈和控制问题的研究相联系；在这些问题中，智能体之间的两两相互作用由一个（可能带权的）图建模，正如（1.5）附近的段落所提到的。与上文讨论的既有基于图子的研究相比，我们的方法的一大优势在于其定量且非渐近的性质，因此更容易应用于稀疏图。

我们通过例（1.5）来说明这一点：该例中的异质两两相互作用由相互作用矩阵 J 建模，假设该矩阵对称且主对角线上的元素为零。在这种

情况下，对于 $i \neq j$， $\partial_{ij} G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{n} J_{ij}(D^2 G_2(x^i - x^j) + D^2 G_2(x^j - x^i))$。因此

$$n \sum_{1 \le i < j \le n} \|\partial_{ij} G\|_\infty^2 \le 2 \|D^2 G_2\|_\infty^2 \operatorname{Tr}(J^2)/n. \tag{1.9}$$

这表明，在 $n \to \infty$ 的渐近情形下，为了保证 $|V - V_{\mathrm{dist}}| \to 0$，我们需要 $\mathbf{Tr}(J^2) = o(n)$。在大型图上的伊辛模型和波茨模型研究中， J 上的同一条件也曾出现在 [2] 。

一种常见的特殊情形是， J 是 $1/m$ 倍的某个 m-正则图的邻接矩阵（其中$m = n$ 落入平均场情形），这描述了每个智能体与图中邻居的平均状态相互作用。在这种情形下，$\mathbf{Tr}(J^2) = n/m$，因此当 $m \to \infty$ 随着 $n \to \infty$ 时，(1.9) 右端趋于零。基于此，我们在推论 6.3 中证明，事实上 $|V - V_{\mathrm{MF}}| = O(1/m)$，其中 V_{MF} 是 (1.4) 中定义的均值场值函数，且 $\mathcal{G}(m) := \langle m, G_1 \rangle + \langle m \otimes m, G_2(\cdot - \cdot) \rangle$。也就是说，只要 m 发散，定义在 m-正则图上的控制问题就会收敛到通常的均值场控制问题。均值场极限对 n 智能体相互作用矩阵变化不敏感，这是一种“普适性”现象，已在多种情形中得到观察；对于行平均值（近似）等于 1 的足够稠密矩阵 J，人们也预期会出现这一现象；参见 [33, 关于均值场博弈的注释 3.12] 、 [36] 关于相互作用扩散过程的讨论，以及 [2, 关于伊辛模型和波茨模型的第2节.1] 有界度情形 m （当 $n \to \infty$ 时）则截然不同，不能指望分布式控制近似最优；关于博弈论背景下这一稠密/稀疏阈值的深入讨论，见 [32] 。

1.1.3. Cole-Hopf 情形。以下是一个值得注意的特殊情形：

$$\textbf{Cole-Hopf case:} \quad F \equiv 0, \quad L^i(x, a) = |a|^2/2 \text{ for each } i, \quad G \text{ is general.} \tag{1.10}$$

在这一特殊情形下，我们的界 (1.8) 化为近期结果 [31, 推论 2.14], ，该结果利用非线性大偏差理论中的思想证明（针对 $d = 1$）。全信息控制问题通过 Cole-Hopf 变换有一个广为人知的半显式解：

$$V = -\frac{1}{n} \log \int_{(\mathbb{R}^d)^n} e^{nG} \, d\gamma_T = \inf_{m \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^n)} \left(\int_{(\mathbb{R}^d)^n} G \, dm + \frac{1}{n} H(m \,|\, \gamma_T) \right), \tag{1.11}$$

其中， γ_T 是协方差矩阵为 TI 的中心高斯测度， H 是相对熵。这可以解释为控制问题的一种“静态”表述，即对 $m \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^n)$ 进行优化，其中它对应于状态过程在时刻 T 的分布律。 [31] 的方法基于对分布式控制问题进行类似的“静态”重述：注意到 V_{dist} 等于 (1.11) 中相同的下确界，但仅限于乘积测度 $m = m^1 \otimes \cdots \otimes m^n$，然后运用对数凹测度的泛函不等式。我们最初的研究动机之一，是将他们的结果推广到 Cole-Hopf 情形之外；在这种情况下，静态重述不再适用，因此需要一种完全不同的方法。不过需要指出， [31] 的静态方法能更详细地揭示最优分布式控制的结构，详见下文注 3.9。

1.1.4. 引言其余部分的安排。引言的其余部分大致分为三部分。首先，我们介绍分布式控制问题的一些一般理论，包括验证定理和最大值原理。其次，我们概述主要界（1.7）的证明。最后，我们讨论一些可能的推广。

1.2. 迈向分布式随机控制理论。本文的第一部分为分布式控制问题 (1.6) 建立了一些一般理论。全信息问题 (1.2) 已有一套成熟的理论，几本教科书对此作了总结 [40, 22, 37]。然而，由于其信息约束不同寻常，分布式控制问题不属于经典理论的研究范围。我们也无法转而参考部分观测下随机控制的相关文献 [4]，，因为这类文献中所有控制 $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ 都基于同一套共同的信息。

我们采取的思路是将分布式控制问题从 $(\mathbb{R}^d)^n$ 中的状态过程“提升”到 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n$ 中的状态过程；后者是 $\mathbb{R}^d$ 上概率测度向量构成的空间。空间 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n$ 可视为 $(\mathbb{R}^d)^n$ 上乘积测度构成的空间；它在此处自然出现，因为状态过程 $(X^1,\dots,X^n)$ 相互独立，当且仅当控制是分布式的（且初始状态相互独立）。令 μ_t^i 表示 X_t^i 的分布律，对于任意分布式控制 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)\in\mathcal{A}_{\text{dist}}$，我们可以写为

$$J(\boldsymbol{\alpha})=\int_0^T\int_{(\mathbb{R}^d)^n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(x_i,\alpha^i(t,x_i))+F(\mathbf{x})\right)\prod_{i=1}^n\mu_t^i(dx_i)\,dt+\int_{(\mathbb{R}^d)^n}G(\mathbf{x})\prod_{i=1}^n\mu_T^i(dx_i).$$

我们通过将值函数定义为 $[0,T]\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n$ 上的函数，研究非随机状态过程 $(\mu_t^1,\dots,\mu_t^n)_{t\in[0,T]}$ 上的这一控制问题。

我们需要的第一个主要工具，是针对 $[0,T]\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n$ 上相关非线性偏微分方程（偏微分方程）的一条验证定理。为简便起见，聚焦于 Cole-Hopf 情形，分布式值函数 $\mathcal{V}_{\text{dist}}\colon[0,T]\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n\to\mathbb{R}$ 对应的偏微分方程形式如下：

$$-\partial_t\mathcal{V}_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^d}\Big(n|D_{m^i}\mathcal{V}_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m},y)|^2-\operatorname{Tr}\big(D_yD_{m^i}\mathcal{V}_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m},y)\big)\Big)m^i(dy)=0,\quad(1.12)$$

$$\mathcal{V}_{\text{dist}}(T,\boldsymbol{m})=\int_{(\mathbb{R}^d)^n}G\,d(m^1\otimes\cdots\otimes m^n).$$

这里，对于 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n$ 中的任意元素，我们将 $\boldsymbol{m}=(m^1,\dots,m^n)$ 简记为该元素； D_{m^i} 表示关于变量 $m^i\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 的 Lions（Wasserstein）导数，其精确定义见第2.4节。我们的验证结果（命题 3.4）相当直接，它表明，该偏微分方程的光滑解必定等于分布式控制问题的值函数，其中值函数被视为关于起始时刻以及状态过程初始分布 n 的函数。

其次，我们证明一个随机最大值原理，由此可通过一个 McKean-Vlasov 型前向-后向随机微分方程（前向后向随机微分方程）来刻画 V_{dist} 的最优解。为简便起见，我们再次聚焦于 Cole-Hopf 情形 (1.10)，该方程具有如下形式

$$dX_t^i=-nY_t^i\,dt+dW_t^i,\quad dY_t^i=Z_t^i\,dW_t^i,\qquad X_0^i=x^i,\quad Y_T^i=\mathbb{E}[G(\mathbf{X}_T)\,|\,X_T^i].\qquad(1.13)$$

注意，$(X^i,Y^i)_{i=1}^n$ 必须相互独立，因此条件期望 $\mathbb{E}[G(\mathbf{X}_T)\,|\,X_T^i]$ 只是对分量 $j\neq i$ 的分布律进行积分。在凸性假设下，我们证明该前向后向随机微分方程适定，并且刻画了唯一的最优分布式控制；参见命题 3.7 和 3.8。随后，我们利用这一刻画证明定理 4.9，该定理给出了分布式问题与全信息问题的最优控制之间的 L^2-估计。

我们的分布式随机控制理论还有一些值得注意的缺漏。我们没有陈述动态规划原理。人们自然也会期待，我们的验证定理可以辅以粘性解理论。我们没有选择将这一理论发展到最一般的程度，而是只作了足以说明其应有形式的阐述，并以此服务于我们的首要目标：获得类似 (1.7) 的界。

1.3. 比较控制问题。这里概述推导界 (1.7) 的主要思路，重点讨论 (1.10) 中定义的 Cole-Hopf 情形，并取 $d=1$。对于原始（完全信息）控制问题 (1.2)，我们引入通常的值函数 $V\colon[0,T]\times(\mathbb{R}^d)^n\to\mathbb{R}$，其定义适用于任意初始时刻以及任意非随机状态 $\mathbf{x}\in(\mathbb{R}^d)^n$。我们首先将该值函数“提升”到随机但相互独立的初始状态，定义 $\mathcal{V}\colon[0,T]\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n\to\mathbb{R}$ by

$$\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}):=\int_{(\mathbb{R}^d)^n}V(t,\cdot)\,d(m^1\otimes\cdots\otimes m^n).\qquad(1.14)$$

我们证明（见引理 4.14），$\mathcal{V}$ 恰好满足同一个偏微分方程 (1.12)，只是右端的 0 被“误差项” $-E(t,\boldsymbol{m})$ 替代，其中

$$E(t,\boldsymbol{m}) := \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big[|D_iV(t,\boldsymbol{\xi})|^2 - |\mathbb{E}[D_iV(t,\boldsymbol{\xi})\,|\,\xi^i]|^2\big] = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,\mathrm{Var}(D_iV(t,\boldsymbol{\xi})\,|\,\xi^i),$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\dots,\xi^n)\sim m^1\otimes\cdots\otimes m^n$，且随机向量的方差定义为其各分量方差之和。利用前面提到的验证论证，我们推导出 $\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m})$ 是某个分布式最优控制问题的值函数，在该问题中，这个误差项 E 作为运行成本出现。该问题的最优状态过程 $\widehat{\mathbf{X}}_s=(\widehat{X}^1_s,\dots,\widehat{X}^n_s)$ $\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m})$（根据引理 4.14）恰好是 McKean–Vlasov 系统的唯一解

$$d\widehat{X}^i_s = -n\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)\,|\,\widehat{X}^i_s]ds + dW^i_s,\quad s\in(t,T],\quad \widehat{X}^i_t\sim m^i \text{ independent.} \tag{1.15}$$

关键的是，过程 $\widehat{X}^1,\dots,\widehat{X}^n$ 相互独立，而这个条件期望实际上只是对 $(\widehat{X}^j_s)_{j\neq i}$ 求期望的一种简写。

已知 $\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}$ 和 $\mathcal{V}$ 满足同一个偏微分方程（至多相差一个误差项），我们通过某种形式的比较原理推导出（见引理 4.15）：

$$0\le \mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t,\boldsymbol{m}) - \mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) \le \int_t^T E(s,\boldsymbol{m}_s)\,ds, \tag{1.16}$$

其中 $\boldsymbol{m}_s=(m^1_s,\dots,m^n_s)$ 满足 $m^i_s=\mathrm{Law}(\widehat{X}^i_s)$，其中 $\widehat{X}^i$ 由 (1.15) 定义。乍一看，要估计 $E(t,\boldsymbol{m})$ 似乎颇具挑战性，我们也不认为它能有一个关于 $\boldsymbol{m}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)^n$ 一致的有用界。事实上，聚焦于时间 $t=T$，在平均场情形 (1.3) 中，我们至多可以预期，对于每个 i，若 G 是 Wasserstein-Lipschitz，则有 $\|D_iV(T,\cdot)\|_\infty = \|D_iG\|_\infty = O(1/n)$，这会导致一个无用的 $\|E(T,\cdot)\|_\infty = O(1)$ 界。然而，值得注意的是，$E(s,\boldsymbol{m}_s)$ 沿曲线 $(\boldsymbol{m}_s)_{s\in[t,T]}$ 的动力学却是可处理的：简记 $V=V(s,\mathbf{x}_s)$，我们证明

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E(s,\boldsymbol{m}_s) = n^2\mathbb{E}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\big(D_iV-\mathbb{E}[D_iV\,|\,\widehat{X}^i_s]\big)\big(D_jV-\mathbb{E}[D_jV\,|\,\widehat{X}^j_t]\big)D_{ij}V\Big]\\ +\frac{n}{2}\mathbb{E}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}V|^2-\sum_{i=1}^{n}|\mathbb{E}[D_{ii}V\,|\,\widehat{X}^i_s]|^2\Big].\end{aligned}$$

第二行非负。当 G 是凸函数时，众所周知（而且很容易证明），$V(t,\mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{x}$ 是凸的，因此第一行也非负。由 (1.16) 可推得

$$\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t,\boldsymbol{m}) - \mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) \le (T-t)E(T,\boldsymbol{m}_T) = (T-t)\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,\mathrm{Var}(D_iG(\widehat{\mathbf{X}}_T)\,|\,\widehat{X}^i_T).$$

利用 V 的凸性，我们可以证明 $\widehat{X}^i$ 的漂移是单调的，因此 $\widehat{X}^i_T$ 满足 Poincaŕe 不等式 $\mathrm{Var}(\varphi(\widehat{X}^i_T)) \le (T-t)\mathbb{E}|D\varphi(\widehat{X}^i_T)|^2$，其中 $\varphi\in C^1$ 和 $i=1,\dots,n$ 任意。Poincaŕe 不等式可张量化，从而得到

$$\mathrm{Var}(D_iG(\widehat{\mathbf{X}}_T)\,|\,\widehat{X}^i_T) \le (T-t)\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}\mathbb{E}\big[|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2\,|\,\widehat{X}^i_T\big].$$

最后，结合这些不等式可得

$$\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t,\boldsymbol{m}) - \mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) \le n(T-t)^2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2.$$

取 $t = 0$，在 Cole-Hopf 情形下可得 (1.7)。有关这一论证在 Cole-Hopf 情形之外的一般版本，请参见定理 4.5。

V 的凸性是上述论证中的关键要素，而无需了解 $(V, F, G, \ldots)$ 的其他定量信息。事实上，即使 V 不是凸函数，但满足半正定序意义下形式为 $D^2V \geq -(c/n)I$ 的下界，我们也可以使用格朗沃尔不等式估计E，并得到类似的不等式，只是用另一个（但仍与 n 无关的）常数替代 $(T - t)$。在非凸情形下，难点在于难以得到关于 D^2V 的这一界。在第 7 节中，我们将介绍一些基于不同前后向随机微分方程论证以及非凸情形下某些小量条件的结果；只要 $L^i(x, a)$ 相对于 F 和 G 的非凸性和/或时间范围 T的长度，在 a 上具有足够的凸性即可。

我们采用截然不同的论证，以随机最大值原理取代偏微分方程，并在定理 4.9 中给出了全信息问题与分布式问题中最优控制之间的一个 L^2 估计。考虑分别对应于全信息问题和分布式问题的前后向随机微分方程的解 (X, Y, Z) 和 (X, Y, Z)；前者是标准的，后者则是上文 (1.13) 中提到的（在 Cole-Hopf 情形下）。定理 4.9 的证明思路是对 $(\mathrm{X}_t - \mathrm{X}_t) \cdot (\mathrm{Y}_t - \mathrm{Y}_t)$ 应用伊藤公式，并利用凸性以及恰当时机的条件化。最终，这将导出一个关于

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} \int_0^T |\alpha_t^i - \overline{\alpha}_t^i|^2 \, dt$$

由式 (1.7) 右侧乘以（另一个常数），其中（$\alpha^1, \ldots, \alpha^n$）和（$\overline{\alpha}^1, \ldots, \overline{\alpha}^n$）分别是完全信息问题和分布式问题的最优控制。

1.4. 展望。我们的工作引出了许多关于推广和变体的自然问题。

最显而易见的推广问题涉及动力学和成本函数的形式。更一般的运行成本可以写成 $F(\boldsymbol{\alpha}_t, \mathrm{X}_t)$，而不是 $F(\mathrm{X}_t) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L^i(X_t^i, \alpha_t^i)$，并以一般形式取决于所有 n 状态和控制。不过，在这种一般性下，最优控制（$\alpha^1, \ldots, \alpha^n$）的结构较难处理，因为哈密顿量无法解耦；这让人联想到平均场博弈理论中通常对哈密顿量施加的可分性假设。或许可以允许更一般的状态过程动力学，其形式为

$$dX_t^i = b(X_t^i, \alpha_t^i)dt + \sigma(X_t^i, \alpha_t^i)dW_t^i, \tag{1.17}$$

对于足够良好的 (b, σ)，尽管这会使我们的凸性论证变得复杂。更具挑战性的是耦合状态过程，此时 dX_t^i 直接依赖于其他状态 $(X^j)_{j \neq i}$中的某些状态。从某种意义上说，我们的方法从根本上依赖于“分布式控制”与“独立状态过程”之间的等价性，而这种等价性由形式为 (1.17) 的动力学所保证。这种等价性使 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$ 成为偏微分方程方法的自然状态空间。不过，在我们看来，当状态过程相互耦合时，分布式控制的实际意义并不那么明确。

如何扩展我们的方法以允许存在公共噪声并不明显；也就是说，在 (1.17) 中加入一个额外的布朗运动 dB_t，并且该运动为所有智能体 $i = 1$、.....、 n所共有。此时，“分布式控制”至少有两种合理的定义方式。一种方式是沿用相同的定义，使 $\alpha^i = \alpha^i(t, X_t^i)$ 仅取决于智能体自身的状态。另一种方式则允许 $\alpha^i = \alpha^i(t, X_t^i, B)$ 依赖于公共噪声，甚至依赖于其历史；这是一种自然的选择，因为它涵盖了在均值场控制设定中可以构造的近似最优控制。

我们工作的另一种变体似乎也较易处理，不过适用范围或许不如前一种广：将分布式控制集合 $\mathcal{A}_{\mathrm{dist}}$ 替换为确定性控制集合 $\mathcal{A}_{\mathrm{det}}$，其中 $\alpha^i : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ 是非随机的。对于这种控制，状态过程 X_t 服从高斯分布，其协方差矩阵为 t 乘以单位矩阵。若 $L^i(x, a) = |a|^2/2$，那么我们预计类似的

(1.7) 中的界仍然成立，但将 V_{dist} 替换为 $\inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{\mathrm{det}}} J(\boldsymbol{\alpha})$，且右侧的求和现在还包括对角项 $\partial_{ii}F$ 和 $\partial_{ii}G$。这在 Cole-Hopf 情形下的 [31, 注 2.16] 中得到了证明。直观地说，若 F 和 G 的二阶导数都很小，那么 F 和 G 就近似为线性；对于线性的 (F,G)，可以证明最优的全信息控制是确定性的。然而，目前尚不清楚如何将这一结论推广到非二次型 L^i。

1.5. 论文结构。我们首先在第2节总结一些有用的记号和约定，其中最重要的部分是第2.4节，该节回顾了 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上的微积分，并介绍了我们关于测度向量和乘积测度的一套略显非标准的记号。第3节给出了完整信息控制问题和分布式控制问题的精确假设与设定。在第3节中，我们提出验证结果（命题 3.4）和随机最大值原理（第3.5节）。论文中篇幅最重的第 4 节阐述了主要结果的精确表述；定理 4.5 给出了我们对上文 (1.7) 中 $V - V_{\mathrm{dist}}$ 估计的最一般形式，而定理 4.8 和 4.9 则给出了两个控制问题的状态过程与控制过程之间的其他界。第 5 节专门讨论平均场情形，并证明了收敛问题的最优速率；第 6 节则在异质相互作用的设定下推导出类似结果。最后，第 7 节给出主要估计的若干变体，其中凸性被适当形式的小性所取代。

2. Notation and preliminaries

本节介绍本文中将始终使用的记号和术语，其中大多数都是标准用法；在此汇总列出，以便查阅。

2.1. 概率设置。固定数值 n、$d \in \mathbb{N}$，终止时间 $T > 0$，以及一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，其上承载着标准的 n 维布朗运动 $\mathbf{W} = (W^1, \dots, W^n)$。我们用 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ 表示由 $\mathbf{W}$ 生成的（增广）滤过；$\mathcal{F}_0$，$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ 是一个完备的无原子 σ-代数，且与 $\mathbf{W}$ 独立。用 $\mathcal{L}(Z)$ 表示随机变量 Z 的分布律。

2.2. 基本记号。我们将频繁使用空间 $(\mathbb{R}^d)^n$。由于我们经常需要对 $(\mathbb{R}^d)^n$ 上的函数及其梯度和海森矩阵作定量陈述，并且需要能够体现对维数 n 的精确依赖关系的常数，因此我们在本节中务必明确说明某些记号约定。

我们用粗体表示该空间中的元素或取值于该空间的过程，例如，$\mathbf{x}$ 表示 $(\mathbb{R}^d)^n$ 中的一个元素，而 $\mathbf{X}$ 表示取值于 $(\mathbb{R}^d)^n$的过程。我们用上标按以下方式表示 $\mathbf{x}$ 的分量：$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$，其中每个 $x^i \in \mathbb{R}^d$。必要时，我们还可以使用下标，写作 $x^i = (x^i_1, \dots, x^i_d)$。通常，我们用$i$ 或 j 表示从 1 到 n的指标，用 k 或 l 表示从 1 到 d的指标。

对于函数 $u = u(\mathbf{x}) : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$，我们用 $D_{x^i_k} u$ 表示 u 关于变量 x^i_k的导数，用 $D_{x^i_k x^j_l} u$ 表示关于变量 x^i_k、x^j_l 的混合偏导数。我们常用更紧凑的记法 $D_i u$ 和 $D_{ij} u$, $1 \le i, j \le n$，定义如下。$D_i u = D_i u(\mathbf{x}) : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^d$ 是 u 关于 x^i的梯度，定义为

$$D_i u = (D_{x^i_1} u, \dots, D_{x^i_d} u)^T,$$

类似地，$D_{ij} u = D_{ij} u(\mathbf{x}) : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^{d\times d}$由 $(D_{ij}u)_{kl} = D_{x^i_k x^j_l} u$给出。我们写作 $D^2 u$时，指的是 $\mathbb{R}^{nd\times nd}$ 中按如下分块写出的元素

$$D^2 u = \begin{pmatrix} D_{11}u & \dots & D_{1n}u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}u & \dots & D_{nn}u. \end{pmatrix}$$

也就是说，以自然的方式将 D^2u 视为映射 $\mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{R}$时，它就是 u 的通常海森矩阵。给定 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in (\mathbb{R}^d)^n$，我们将稍微滥用记号，写作

$$(\mathbf{y})^T D^2u(\mathbf{x})\,\mathbf{z} = \sum_{i,j=1}^{n} (y^i)^T D_{ij}u(\mathbf{x})\,z^j = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{d} y^i_k D_{x^i_k x^j_l}u(\mathbf{x})\,z^j_l.$$

我们经常使用对称矩阵之间通常的半正定序；也就是说，$D^2u \le CI_{nd\times nd}$ 表示，对于任意 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^d)^n$，我们都有

$$\mathbf{y}^T D^2u(\mathbf{x})\mathbf{y} \le C\sum_{i=1}^{n} |y^i|^2.$$

即使对于非对称矩阵，我们也用此记号表示相同的含义

我们用 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 和 $(\mathbb{R}^d)^n$ 上的通常欧几里得范数，即 $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^n |x^i|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^d |x^i_k|^2$。我们用 $|\cdot|$ 表示 Frobenius 范数，而 $|\cdot|_{\mathrm{op}}$ 表示任意有限维矩阵空间上的算子范数：

$$|A| = \mathrm{Tr}(AA^\top)^{1/2}, \quad |A|_{\mathrm{op}} = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

2.3. 函数空间。令 E 表示某个欧几里得空间。给定函数 $u : E \to \mathbb{R}$，若 u 的导数至 j 阶连续，则称 u 为 C^j。对于 $\alpha \in (0,1]$，我们称 u 为 C^α，并记作 $u \in C^\alpha$，如果范数

$$\|u\|_{C^\alpha} := \|u\|_{L^\infty} + \sup_{x,x'\in E, x\neq x'} \frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|}$$

是有限的。我们称 u 是局部 C^α 的，并记作 $u \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}$，如果对任意紧集 $K \subset E$，都有

$$\sup_{x,x'\in K, x\neq x'} \frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|} < \infty.$$

类似地，给定 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in (0,1]$，我们记 $u \in C^{k,\alpha}$，如果 u 及其直到 k 阶的导数属于 C^α；若 $u \in C^k$ 且 k 阶导数属于 C^α_{loc}，则称 $u \in C^{k,\alpha}$ 局部。

对于函数 $u = u(t,x) : [0,T]\times E \to \mathbb{R}$，若 $\partial_t u$、Du 和 D^2u 存在且在 $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上连续，则称 u 为 $C^{1,2}$。若范数

$$\|u\|_{C^\alpha} := \|u\|_{L^\infty} + \sup_{t,t'\in[0,T],x,x'\in E, t\neq t', x\neq x'} \frac{|u(t,x)-u(t',x')|}{|t-t'|^{\alpha/2}+|x-x'|^\alpha}$$

是有限的。我们称 $u \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}$，如果对每个紧集 $K \subset E$,

$$\sup_{t,t'\in[0,T],x,x'\in K, t\neq t', x\neq x'} \frac{|u(t,x)-u(t',x')|}{|t-t'|^{\alpha/2}+|x-x'|^\alpha} < \infty.$$

若 u 和 Du 是 C^α，则称 $u \in C^{1,\alpha}$。若 u、$\partial_t u$、Du 和 D^2u 是 C^α，则称 $u \in C^{2,\alpha}$。

2.4. 概率测度空间上的分析。我们还将研究空间$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n = (\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))^n$，其中 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 表示具有有限二阶矩的概率测度所构成的 Wasserstein空间。我们用 m 表示 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 中的任意元素，用 $\boldsymbol{m} = (m^1,\dots,m^n)$ 表示 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$ 中的任意元素。为方便起见，我们用尖括号表示积分：$\langle m, g\rangle := \int g\,dm$。对于 $i = 1,\dots,n$，我们用 $\boldsymbol{m}^{-i}$ 表示 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^{n-1}$ 中由 $\boldsymbol{m}^{-i} = (m^1,\dots,m^{i-1},m^{i+1},\dots,m^n)$ 给出的元素。滥用一下记号，我们将 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$（或 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^{n-1}$）中的元素视为 $\mathcal{P}_2((\mathbb{R}^d)^n)$（或 $\mathcal{P}_2((\mathbb{R}^d)^{n-1})$）中相应的乘积测度。也就是说，

$\boldsymbol{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$ 被视为 $m^1 \otimes \cdots \otimes m^n \in \mathcal{P}_2((\mathbb{R}^d)^n)$，因此，例如，若 $f\colon (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$，我们可以写作

$$\langle \boldsymbol{m}, f\rangle = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} f(x^1, ..., x^n) \prod_{i=1}^n m^i(dx^i)$$

只要该积分有定义。我们还采用如下约定：对于上述的 f、 $\boldsymbol{m}$ ，表达式 $\langle \boldsymbol{m}^{-i}$、 $f\rangle$ 表示由下式给出的函数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\langle \boldsymbol{m}^{-i}, f\rangle(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x, x^{i+1}, \ldots, x^n) \prod_{j=1,\, j\neq i}^n m^j(dx^j). \tag{2.1}$$

同样，若对于某些 k、 $\langle \boldsymbol{m}^{-i}$， $f\colon (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^k$，则可按分量通过 (2.1) 定义 $f\rangle\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$。我们将对函数 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 使用一种微积分，它继承自 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上逐坐标应用的微积分。给定函数 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(m)\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$，关于 Lions 导数（亦称内在导数）（一阶和二阶）的定义，请参阅 [13, 第5] 章或 [16, 第2节1]

$$D_m\mathcal{U} = D_m\mathcal{U}(m, y) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad D_y D_m\mathcal{U} = D_y D_m\mathcal{U}(m, y) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$$

and

$$D_{mm}\mathcal{U} = D_{mm}\mathcal{U}(m, y, \overline{y}) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$$

我们回顾一下，一般而言， $D_m\mathcal{U}(m, \cdot)$ 仅在 m 的支撑集上唯一确定，但若存在连续版本，我们总是固定采用该版本。请注意，有些资料（例如 [13, 16]）使用记号 ∂_μ，而我们使用 D_m。

有了这些定义，我们可以考虑一个连续映射 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t, \boldsymbol{m}) = \mathcal{U}(t, m^1, .., m^n) : [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$。若此映射的（通常意义下的）时间导数 $\partial_t\mathcal{U}$ 存在，且对每个 $(t, \boldsymbol{m}^{-i})$，映射 $m^i \mapsto \mathcal{U}(t, m^1, \ldots, m^n)$ 存在至二阶的 Lions 导数，并且这些导数存在某些版本，在整个 $[0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \times \mathbb{R}^d$ 上连续，则称该映射为 $C^{1,\,2}$。此外，若 $\mathcal{U}$ 是 $C^{1,\,2}$，我们将.....记为

$$D_{m^i}\mathcal{U} = D_{m^i}\mathcal{U}(t, \boldsymbol{m}, y) : [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^d$$

映射 $m^i \mapsto \mathcal{U}(t, m^1, \ldots, m^n)$ 的导数，同样地，我们将.....记为

$$D_y D_{m^i}\mathcal{U} = D_y D_{m^i}\mathcal{U}(t, \boldsymbol{m}, y) : [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$$

映射 $y \mapsto D_{m^i}\mathcal{U}(t, \boldsymbol{m}, y)$ 的导数。

3. Problem formulations and value functions

现在，我们对引言中提出的控制问题作更精确的讨论。我们的数据包括以下 n 个“拉格朗日”函数

$$L^i = L^i(x, a) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n,$$

以及运行成本函数和终端成本函数

$$F = F(\mathbf{x}) : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}, \quad G = G(\mathbf{x}) : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}.$$

此外，使用与 L^i相关的哈密顿量也很方便，即由以下公式定义的映射 $H^i = H^i(x, p) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$H^i(x, p) = \sup_{a\in\mathbb{R}^d} \big(- a \cdot p - L^i(x, a)\big). \tag{3.1}$$

在对 L^i 作出适度的凸性和正则性假设（如以下假设 3.1）时，(3.1) 中的唯一最优解为 $a = -D_p H^i(x, p)$。

我们的主要结果基于对数据 (G, F, L^i) 的以下假设；这些假设在本节和第 4 节中始终成立，并用到了第 2.3 节总结的函数空间。

假设 3.1. 函数 $F, G : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 有下界且为凸函数。此外，F 是 C^2，G 属于 $C^{2,\alpha}_{loc}$，其中某个 $\alpha \in (0, 1)$ 成立，且 F 和 G 均具有有界二阶导数（但不一定具有有界一阶导数）。

函数 $L^i, H^i : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 具有有界二阶导数（但不一定具有有界一阶导数）。此外，L^i 有下界且满足

$$D^2 L^i(x,a) = \begin{pmatrix} D_{xx}L^i(x,a) & D_{xa}L^i(x,a) \\ D_{ax}L^i(x,a) & D_{aa}L^i(x,a) \end{pmatrix} \geq C_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{d\times d} \end{pmatrix}, \quad \text{for all } x, a \in \mathbb{R}^d \tag{3.2}$$

或者等价地

$$\big(D_x L^i(x,a) - D_x L^i(\bar{x},\bar{a})\big) \cdot (x - \bar{x}) + \big(D_a L^i(x,a) - D_a L^i(\bar{x},\bar{a})\big) \cdot (a - \bar{a}) \geq C_L |a - \bar{a}|^2 \tag{3.3}$$

对于所有 $x, \bar{x}, a, \bar{a} \in \mathbb{R}^d$，以及某个常数 $C_L > 0$。

注 3.2。我们的主要结构条件是映射 F、G 和 L^i 的凸性。F 和 G 的二阶导数有界这一事实对我们的方法很重要；事实上，我们的主要估计（定理 4.5、4.8、4.9）涉及 F 和 G 的二阶导数，不过注 4.16 讨论了在何种情况下以及如何放宽这一条件。假设 L^i 和 H^i 的二阶导数有界并非必要；更自然的做法是，例如，假设对每个 $R > 0$，H^i 的二阶导数在 $\mathbb{R}^d \times B_R$ 上有界。只要我们能对控制问题 (3.7) 的值函数得到良好的利普希茨估计，我们的方法就能在这种情形下给出良好的估计；而当 F 和 G 是利普希茨函数时，这一点是可行的。由于我们是在凸性框架下研究问题，因此假设 F 和 G 二次增长更为自然，所以我们无法假设值函数是利普希茨函数，这也是我们要求 L^i 和 H^i 的二阶导数有界的原因。

3.1. 完全信息控制问题。如引言中所述，$\mathcal{A}$ 完全信息控制的集合定义为 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ 的集合，其中对于每个 i，$\alpha^i : [0,T] \times (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^d$ 是可测的，并且随机微分方程

$$dX_s^i = \alpha^i(s, \mathbf{X}_s)ds + dW_s^i, \quad s \in [t,T], \quad \mathbf{X}_t \sim \boldsymbol{m} \tag{3.4}$$

存在唯一的强解 $\mathbf{X} = (X^1, \dots, X^n)$，满足 $\mathbb{E}\int_t^T |\alpha^i(s, \mathbf{X}_s)|^2 \, ds < \infty$，对于每个 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$。这里回顾一下，我们将 $\boldsymbol{m} = (m^1, \dots, m^n)$ 与乘积测度 $m^1 \otimes \cdots \otimes m^n$ 等同，因此 $\mathbf{X}_t \sim \boldsymbol{m}$ 意味着 $X_t^i \sim m^i$ 是独立的。过程 $\mathbf{X}$ 称为与 $\boldsymbol{\alpha}$（以及初始位置 $(t, \boldsymbol{m})$）相对应的状态过程。

对于每个 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$ 和 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}$，定义成本泛函

$$\mathcal{J}(t, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}) := \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X_s^i, \alpha^i(s, X_s^i)) + F(\mathbf{X}_s)\bigg)ds + G(\mathbf{X}_T)\bigg], \tag{3.5}$$

其中，$\mathbf{X}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相关联的状态过程，即方程 (3.4) 的唯一解。提升值函数 $\mathcal{V} : [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{V}(t, \boldsymbol{m}) := \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}} \mathcal{J}(t, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{3.6}$$

或者，我们可以通过非随机初始位置来定义标准值函数 $V : [0,T] \times (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$：

$$V(t, \mathbf{x}) := \mathcal{V}(t, \delta_{\mathbf{x}}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}} \mathcal{J}(t, \delta_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{3.7}$$

其中 $\delta_{\mathbf{x}}$对应向量 $(\delta_{x^1},\dots,\delta_{x^n}) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$。根据标准的动态规划论证，可得恒等式

$$\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, V(t,\cdot)\rangle. \tag{3.8}$$

在假设 3.1 下，值函数 V定义良好，事实上还是 HJB 方程的经典解

$$\begin{cases} -\partial_t V - \dfrac{1}{2}\Delta V + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n H^i(x^i, nD_i V) = F(\mathbf{x}), \quad (t,\mathbf{x}) \in [0,T)\times(\mathbb{R}^d)^n, \\ V(T,\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in(\mathbb{R}^d)^n. \end{cases} \tag{3.9}$$

它是唯一的经典解，至少在满足增长约束的函数类中 t

$$|DV(t,\mathbf{x})| \le C(1+|\mathbf{x}|), \quad \mathbf{x}\in(\mathbb{R}^d)^n. \tag{3.10}$$

这一点相当标准，但很难找到涵盖 F和 G 不是利普希茨函数时这一情形的参考文献。我们在此给出一个简要概述。众所周知， V 是方程 (3.9) 的粘性解，因此首先要论证它属于 $C^{1,2}$，从而是经典解。为此，可以先利用控制理论论证（见下文引理 4.10）证明 V连续，事实上属于 $C^{1,1\,\mathrm{loc}}$，然后注意到 V在 $[0,T]\times B_R$上的限制 V^R是

$$\begin{cases} -\partial_t V^R - \dfrac{1}{2}\Delta V^R + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n H^i(x^i, nD_i V^R) = F(\mathbf{x}), \quad (t,\mathbf{x}) \in [0,T)\times B_R, \\ V^R(T,\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in B_R, \quad V^R(t,\mathbf{x}) = V(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in \partial B_R \end{cases} \tag{3.11}$$

线性抛物型方程的内部正则性结果（例如，见 [24]的第 3.4 节中的定理 9），再结合 $G \in C^{2,\alpha}{}_{1}{}_{\mathrm{oc}}$ 这一事实，便可推出 $V \in C^{1,2}{}_{\mathrm{o}}$。控制理论论证（见下文引理 4.10）还可再次证明 V 满足增长条件 (3.10)。满足此增长条件的经典解的唯一性也是标准结论，因为该条件足够强，通常的验证论证可以适用。

3.2. 分布式控制问题。与引言中一样，分布式控制的集合 $\mathcal{A}_{\mathrm{dist}}$ 定义为满足以下条件的 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1,\dots,\alpha^n) \in \mathcal{A}$ 的集合：对于每个 i， $\alpha^i(t,\mathbf{x}) = \alpha^i(t,x^i)$ 仅依赖于 i^{th} 坐标。我们可以定义分布式值函数

$$\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t,\boldsymbol{m}) := \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{\mathrm{dist}}} \mathcal{J}(t,\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.12}$$

类比于式 (3.7) 中给出的全信息价值函数 V，乍看之下，自然可以针对确定性初始位置，通过下式定义分布式值函数 V_{dist}： $[0,T]\times(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$

$$V_{\mathrm{dist}}(t,\mathbf{x}) := \mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t,\delta_{\mathbf{x}}) := \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{\mathrm{dist}}} \mathcal{J}(t,\delta_{\mathbf{x}},\boldsymbol{\alpha}).$$

然而，动态规划恒等式 (3.8) 在这里不再成立，并且

$$\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t,\boldsymbol{m}) \ne \langle \boldsymbol{m}, V_{\mathrm{dist}}(t,\cdot)\rangle, \quad \text{in general.}$$

根据下文的命题 3.4，若 $\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}$ 是 $C^{1,2}$，则它是无限维偏微分方程的解

$$\begin{cases} -\partial_t \mathcal{V}_{\mathrm{dist}} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^n \langle m^i, \mathrm{Tr}(D_y D_{m^i}\mathcal{V}_{\mathrm{dist}})\rangle + \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \langle m^i, H^i(\cdot, nD_{m^i}\mathcal{V}_{\mathrm{dist}})\rangle = \langle \boldsymbol{m}, F\rangle \\ \mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(T,\boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, G\rangle, \end{cases} \tag{3.13}$$

对于 $(t,\boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，其中我们在第一行将 $\mathcal{V}_{\text{dist}} = \mathcal{V}_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m})$ 记作简写，并且

$$\langle m^i, H^i(\cdot, nD_{m^i}\mathcal{V}_{\text{dist}})\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} H^i(y, nD_{m^i}\mathcal{V}_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m},y))\, m^i(dy),$$
$$\langle m^i, \operatorname{Tr}(D_y D_{m^i}\mathcal{V}_{\text{dist}})\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Tr}(D_y D_{m^i}\mathcal{V}_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m},y))\, m^i(dy).$$

3.3. 偏微分方程方法。本节给出一个验证结果，将分布式控制问题 (3.12) 与方程 (3.13) 联系起来。事实上，第 4 节中的主要估计将完全不使用偏微分方程 (3.13)，而是采用 $\mathcal{V}_{\text{dist}}$ 的控制理论定义。不过，对于全信息价值函数的提升版本 $\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m})$ 所对应的偏微分方程，我们将关键地需要一个验证定理。基于此，本节提出一个广义分布式控制问题的验证定理，该问题涵盖 $\mathcal{V}_{\text{dist}}$ 和 $\mathcal{V}$。

设给定函数 $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$。考虑值函数 $\widehat{\mathcal{V}} = \widehat{\mathcal{V}}(t,\boldsymbol{m}) : [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，其定义为

$$\widehat{\mathcal{V}}(t,\boldsymbol{m}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{\text{dist}}} \widehat{\mathcal{J}}(t,\boldsymbol{m},\boldsymbol{\alpha}), \tag{3.14}$$

其中

$$\widehat{\mathcal{J}}(t,\boldsymbol{m},\alpha) = \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X_s^i, \alpha^i(s,X_s^i)) + \mathcal{F}(\boldsymbol{m}_s)\bigg)ds + \mathcal{G}(\boldsymbol{m}_T)\bigg]$$

其中 $\mathbf{X} = (X^1,\dots,X^n)$ 的定义与 (3.4) 中相同。注意，通过令 $\mathcal{F}(\boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, F\rangle$ 和 $\mathcal{G}(\boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, G\rangle$，$\mathcal{V}_{\text{dist}}$ 就成为该问题的一个特殊情形。相应的偏微分方程为

$$\begin{cases} -\partial_t\widehat{\mathcal{V}} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^n \langle m^i, \operatorname{Tr}(D_y D_{m^i}\widehat{\mathcal{V}})\rangle + \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \langle m^i, H^i(y, nD_{m^i}\widehat{\mathcal{V}})\rangle = \mathcal{F}(\boldsymbol{m}) \\ \widehat{\mathcal{V}}(T,\boldsymbol{m}) = \mathcal{G}(\boldsymbol{m}_T), \end{cases} \tag{3.15}$$

对于 $(t,\boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$。在陈述我们的验证结果之前，我们先给出其证明所需的相关版本的 Itô 公式，这是 $n = 1$ 情形在 [13,定理 5.92] 中所给公式的直接推广。

引理 3.3。设 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}) : [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 是 $C^{1,\,2}$，且 $\mathbf{X}_t = (X^1,\dots,X^n)$ 是形式如下的 Itô 过程

$$dX_t^i = b_t^i dt + dW_t^i, \quad X_0 = \xi \in L^2$$

其中 $\mathbb{E}\int_0^T |b_t|^2 dt < \infty$。假设对每个有界集 $K \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，都有

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\boldsymbol{m}\in K} \langle m^i, |D_y D_{m^i}\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m},\cdot)|^2\rangle < \infty, \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.16}$$

令 $\boldsymbol{m}_t = (\mathcal{L}(X_t^1),\dots,\mathcal{L}(X_t^n))$。则

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t) = \partial_t\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t) + \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}(D_y D_{m^i}\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t,X_t^i)) + \sum_{i=1}^n D_{m^i}\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t,X_t^i)\cdot b_t^i\bigg].$$

特别地，若 $b_t^i = b^i(t,X_t^i)$，并记 $\boldsymbol{m}_t = (\mathcal{L}(X_t^1),\dots,\mathcal{L}(X_t^n))$，则有

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t) = \partial_t\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \langle m^i, \operatorname{Tr}(D_y D_{m^i}\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t,\cdot))\rangle + \sum_{i=1}^n \langle m^i, b(t,\cdot)\cdot D_{m^i}\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t,\cdot)\rangle.$$

有了这个引理，我们现在给出验证结果，将部分信息控制问题 (3.14) 与偏微分方程 (3.15) 联系起来。

命题 3.4. 假设 H^i 满足假设 3.1 中的条件，且 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 上的连续函数。此外，假设 $\mathcal{U}$: $[0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 是 $C^{1,2}$，并且对每个有界集 $K \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，都满足偏微分方程 (3.15) 以及 (3.16)。最后，假设对每个 $t\in[0,T]$ 和 $\boldsymbol{m}\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，McKean–Vlasov 随机微分方程

$$
\begin{aligned}
dX_s^i &= -D_pH(X_s^i, nD_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,X_s^i))ds + dW_s^i, \quad s\in[t,T], \quad \mathbf{X}_t\sim\boldsymbol{m},\\
\boldsymbol{m}_s &= (\mathcal{L}(X_s^1),...,\mathcal{L}(X_s^n))
\end{aligned}
$$

存在一个满足以下条件的强解

$$
\alpha^i(s,x) \coloneqq -D_pH^i(x, nD_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,x)) \tag{3.17}
$$

是可容许的，即 $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)\in\mathcal{A}_{dist}$。事实上， $\mathcal{U}=\widehat{\mathcal{V}}$，并且控制 (3.17) 是 (3.14) 的一个最优解，在以下意义下是唯一的：任何其他最优解 $(\beta^1,\dots,\beta^n)\in\mathcal{A}_{dist}$ 均满足 $\alpha^i=\beta^i$ 在 $[t,T]\times\mathbb{R}^d$ 上几乎处处成立，对于每个 $i=1,\dots,n$。

证明。固定一个候选控制 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{\text{dist}}$，并将相应的状态过程记为 X:

$$
X_s^i = X_t^i + \int_t^s \alpha^i(u,X_u^i)du + (W_s^i - W_t^i), \quad t\le s\le T.
$$

令 $\boldsymbol{m}_s=(m_s^1,\dots,m_s^n)=(\mathcal{L}(X_s^1),...,\mathcal{L}(X_s^n))$，并结合满足偏微分方程 (3.13) 的 $\mathcal{U}$ 以及 H^i的定义，以引理 3.3 的形式使用伊藤公式，计算得

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s) &= \partial_t\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\langle m_s^i, \mathrm{Tr}(D_yD_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,\cdot))\rangle + \sum_{i=1}^n\langle m_s^i, \alpha^i(s,\cdot)\cdot D_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,\cdot)\rangle\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\langle m_s^i, H^i(\cdot, nD_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,\cdot)) + \alpha^i(s,\cdot)\cdot nD_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,\cdot)\rangle - \mathcal{F}(\boldsymbol{m}_s)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\langle m_s^i, H^i(\cdot, nD_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,\cdot)) + \alpha^i(s,\cdot)\cdot nD_{m^i}\mathcal{U}(s,\boldsymbol{m}_s,\cdot) + L^i(\cdot,\alpha^i(s,\cdot))\rangle\\
&\qquad - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\langle m^i, L^i(\cdot,\alpha^i(s,\cdot)\rangle - \mathcal{F}(\boldsymbol{m}_s)\\
&\ge -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\langle m^i, L^i(\cdot,\alpha^i(s,\cdot))\rangle - \mathcal{F}(\boldsymbol{m}_s),
\end{aligned}
$$

当且仅当 α^i 满足（3.17）时取等号。对这个微分不等式进行积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}(t,\boldsymbol{m}_t) &\le \int_t^T\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\langle m_s^i, L^i(\cdot,\alpha^i(s,\cdot))\rangle + \mathcal{F}(\boldsymbol{m}_s)\right)ds + \mathcal{U}(T,\boldsymbol{m}_T)\\
&= \mathbb{E}\left[\int_t^T\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X_s^i,\alpha^i(s,X_s^i)) + \mathcal{F}(\boldsymbol{m}_s)\right)ds + \mathcal{G}(\boldsymbol{m}_T)\right],
\end{aligned}
$$

当且仅当 α^i 满足（3.17）时取等号。 □

3.4. 最优分布式控制的另一种描述。以下简单观察可导出一个有时很有用的最优分布式控制必要条件：若 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)\in\mathcal{A}_{\text{dist}}$ 是 (3.12) 的最优解，则对于每个 $i=1,\dots,n$， α^i 都是一个以 $\mathbb{R}^d$ 为值的状态过程对应的标准控制问题的最优解。具体而言，给定 i，该控制问题为

$$
\inf_\beta \mathbb{E}\left[\int_t^T\left(\frac{1}{n}L^i(X_s,\beta(s,X_s)) + F^i(s,X_s)\right)ds + G^i(X_T)\right], \tag{3.18}
$$

约束条件为

$$dX_s = \beta(s, X_s)ds + dW_s^i, \quad X_t \sim m^i,$$

以及

$$F^i(s, \cdot) = \langle \boldsymbol{m}_s^{-i}, F \rangle, \quad G^i(\cdot) = \langle \boldsymbol{m}_T^{-i}, G \rangle.$$

这里和通常一样，我们使用记号 $\boldsymbol{m}_s = (\mathcal{L}(X_s^1), ..., \mathcal{L}(X_s^n))$ 。因此我们必须有

$$\alpha^i(t, x) = -D_p H^i(t, nDv^i(t, x)),$$

其中 v^i 是与控制问题 (3.18) 相关联的值函数，换言之，是下列方程的唯一经典解

$$\begin{cases} -\partial_t v^i - \frac{1}{2}\Delta v^i + \frac{1}{n}H^i(x, nDv^i) = F^i(t, x), \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d, \\ v^i(T, x) = G^i(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.19}$$

满足适当的增长条件。值得注意的是，(3.19) 类似于文献 [6, 20, 34] 中针对平均场博弈中的分布式纳什均衡出现的偏微分方程。

3.5. 最大值原理。众所周知 [37, 第 6.4 节。2], 完全信息控制问题 (3.7) 的最优解可以用一个前向后向随机微分方程来刻画，

$$\begin{cases} dX_t^i = -D_p H^i(X_t^i, nY_t^i)dt + dW_t^i, \\ dY_t^i = -\left(\frac{1}{n}D_x L^i\big(X_t^i, -D_p H^i(X_t^i, nY_t^i)\big) + D_i F(\mathbf{X}_t)\right)dt + \mathbf{Z}_t^i d\mathbf{W}_t, \\ X_0^i = x^i, \quad Y_T^i = D_i G(\mathbf{X}_T). \end{cases} \tag{3.20}$$

(3.20) 的解是一个由渐进可测过程组成的三元组 (X, Y, Z)，其取值于 $(\mathbb{R}^d)^n \times (\mathbb{R}^d)^n \times (\mathbb{R}^{d\times d})^{n\times n}$ ，并满足 (3.20) 以及

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(|\mathbf{X}_t|^2 + |\mathbf{Y}_t|^2\right) + \int_0^T |\mathbf{Z}_t|^2\, dt\right] < \infty,$$

其中，我们将 $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}^1, ..., \mathbf{Z}^n)$ 记作 $\mathbf{Z}^i = (Z^{i1}, ..., Z^{in})$，且 $Z^{ij} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，并且 $\mathbf{Z}_t^i d\mathbf{W}_t = \sum_{j=1}^n Z_t^{ij} dW_t^j$。

本节旨在说明，(3.12) 的最优解可以通过一个类似的方程来刻画，具体而言，即 McKean-Vlasov 正向-后向随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t^i = -D_p H^i(X_t^i, nY_t^i)dt + dW_t^i, \\ dY_t^i = -\left(\frac{1}{n}D_x L^i\big(X_t^i, -D_p H^i(X_t^i, nY_t^i)\big) + \mathcal{F}^i(X_t^i, \boldsymbol{m}_t)\right)dt + Z_t^i dW_t^i, \\ X_0^i = \xi^i \sim m^i, \quad Y_T^i = \mathcal{G}^i(X_T^i, \boldsymbol{m}_T), \qquad \boldsymbol{m}_t = (\mathcal{L}(X_t^1), ..., \mathcal{L}(X_t^n)), \end{cases} \tag{3.21}$$

其中我们定义 $\mathcal{F}^i, \mathcal{G}^i \colon \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}^d$，其定义如下

$$\mathcal{F}^i(x, \boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i F \rangle(x), \quad \mathcal{G}^i(x, \boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i G \rangle(x)$$

且 $(\xi^i)_{i=1,...,n}$ 是相互独立的平方可积 $\mathcal{F}_0$-可测初始条件。解过程 (X, Y, Z) 同样默认在 $[0, T] \times \Omega$ 上平方可积，此时其取值于 $(\mathbb{R}^d)^n \times (\mathbb{R}^d)^n \times (\mathbb{R}^{d\times d})^n$。(3.20) 与 (3.21) 的一个显著区别是，后者中的 Z 过程只有 n 个分量，而不是 n^2 个分量，因为方程 $i = 1, \ldots, n$ 是解耦的。

为使表述更加简洁，引入分布式控制问题的开环表述将很有帮助；最终，在假设 3.1 下，这种表述与原问题等价。更

pre确切地说，将初始状态 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, ..., \xi^n)$ 视为固定，我们考虑如下问题

$$\inf_{\boldsymbol{\alpha}} J_{\mathrm{OL}}(\boldsymbol{\alpha}), \qquad J_{\mathrm{OL}}(\boldsymbol{\alpha}) := \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X_t^i, \alpha_t^i)ds + F(\mathbf{X}_t)\bigg)dt + G(\mathbf{X}_T)\bigg], \tag{3.22}$$

其中，下确界取遍所有平方可积适应过程 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$，使得 α^i 关于由 W^i 和 ξ^i 生成的增广滤过 $\mathbb{F}^i$ 适应，且 X^i 定义为

$$X_t^i = \xi^i + \int_0^t \alpha_s^i ds + W_t^i.$$

We 首先证明，前向后向随机微分方程（3.21）是最优性的必要条件 y.

命题 3.5。假设假设 3.1 成立，且 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ 是 (3.22) 的极小化解。那么，存在 (3.21) 的一个解 (X, Y, Z)，使得对几乎处处的 t 以及每个 $i = 1, \dots, n$，均有 $\alpha_t^i = -D_p H(X_t^i, nY_t^i)$ a.s.。

证明。证明基于与引理 4.11 中相同的观察：令 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 (3.22) 的最优解，并令 $\mathbf{X}^*$ 为相应的最优状态过程。定义 $\boldsymbol{m}_t = (\mathcal{L}(X^{*,1}_t), ..., \mathcal{L}(X^{*,n}_t))$ 并

$$F^i(t, \cdot) = \langle \boldsymbol{m}_t^{-i}, F\rangle, \quad G^i(\cdot) = \langle \boldsymbol{m}_T^{-i}, G\rangle.$$

那么，对每个 i， α^i 都必须是该控制问题的最优解

$$\inf_{\beta} \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \bigg(\frac{1}{n}L^i(X_s, \beta_s) + F^i(s, X_s)\bigg)ds + G^i(X_T)\bigg], \tag{3.23}$$

满足 $dX_t = \beta_t\, dt + dW_t^i$和 $X_0 = \xi^i$。由标准随机最大值原理即可得到结论，参见例如 [10,定理 4.12]。□

我们现在证明，事实上，(3.21) 的任意解都能给出 (3.12) 的一个最优解。

命题 3.6. 假设假设 3.1 成立，且 (X, Y, Z) 是 (3.21) 的一个解。那么，对于 $i = 1, \dots, n$， $\alpha_t^i = -D_p H^i(X_t^i, nY_t^i)$ 定义了 (3.22) 的一个最优解。

证明. 令 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ 为命题中所给出的形式，并令 $\boldsymbol{m}_t = (\mathcal{L}(X_t^1) \dots, \mathcal{L}(X_t^n))$。假设 $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = (\overline{\alpha}^1, ..., \overline{\alpha}^n)$ 是任意一个竞争者，并令 $\mathbf{X}$ 为相应的状态过程。注意， X^i和 $\overline{X}^i$是适应于由 W^i和 ξ^i 生成的滤过 $\mathbb{F}^i = (\mathcal{F}_t^i)_{t\in[0,T]}$ 的。特别地， $X^1, \dots, X^n$ 相互独立，因此

$$\mathcal{F}^i(X_t^i, \boldsymbol{m}_t) = \mathbb{E}[D_i F(\mathbf{X}_t) \,|\, \mathcal{F}_t^i], \qquad Y_T^i = \mathcal{G}^i(X_T^i, \boldsymbol{m}_T) = \mathbb{E}[D_i G(\mathbf{X}_T) \,|\, \mathcal{F}_T^i].$$

根据 G的凸性，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G(\overline{\mathbf{X}}_T) - G(\mathbf{X}_T)] &\geq \mathbb{E}[DG(\mathbf{X}_T)\cdot(\overline{\mathbf{X}}_T - \mathbf{X}_T)] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[D_i G(\mathbf{X}_T)\cdot(\overline{X}_T^i - X_T^i)] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_T^i \cdot (\overline{X}_T^i - X_T^i)] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\int_0^T \bigg(Y_t^i\cdot(\overline{\alpha}_t^i - \alpha_t^i) - \frac{1}{n}(\overline{X}_t^i - X_t^i)\cdot D_x L^i(X_t^i, \alpha_t^i) - (\overline{X}_t^i - X_t^i)\cdot \mathcal{F}^i(X_t^i, \boldsymbol{m}_t)\bigg)dt \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\int_0^T \bigg(Y_t^i\cdot(\overline{\alpha}_t^i - \alpha_t^i) - \frac{1}{n}(\overline{X}_t^i - X_t^i)\cdot D_x L^i(X_t^i, \alpha_t^i) - (\overline{X}_t^i - X_t^i)\cdot D_i F(\mathbf{X}_t)\bigg)dt.
\end{aligned}$$

Thus

$$J_{\mathrm{OL}}(\overline{\alpha}) - J_{\mathrm{OL}}(\alpha) \geq \mathbb{E}\int_0^T \sum_{i=1}^n \left(Y_t^i \cdot (\overline{\alpha}_t^i - \alpha_t^i) - \frac{1}{n}(\overline{X}_t^i - X_t^i) \cdot D_x L^i(X_t^i, \alpha_t^i) - (\overline{X}_t^i - X_t^i) \cdot D_i F(\mathbf{X}_t) \right) dt$$
$$+ \mathbb{E}\int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}(L^i(\overline{X}_s^i, \overline{\alpha}_s^i) - L^i(X_s^i, \alpha_s^i)) + F(\overline{\mathbf{X}}_t) - F(\mathbf{X}_t) \right) dt$$
$$\geq 0$$

其中，最后一个不等式利用了 F的凸性、(x, a) 关于 $\mapsto L^i(x, a)$ 的凸性，以及 α_t^i使 $a \mapsto \frac{1}{n}L^i(X_t^i, a) + Y_t^i \cdot a$ 最小这一事实。这说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 是最优的。□

下面的命题指出，（3.21）存在唯一解，因此可以利用最大值原理求得分布式控制问题的解。证明直接但繁琐，故推迟到附录 B。

命题 3.7。在假设 3.1 下，前向后向随机微分方程（3.21）存在唯一解。特别地，（3.22）存在唯一最优解。

需要指出的是，事实上（略微滥用记号），（3.22）的唯一开环最优解必然具有形式 $\alpha_t^i = \alpha^i(t, X_t^i)$，其中某个 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, ..., \alpha^n) \in \mathcal{A}_{\mathrm{dist}}$，因此它也是相应闭环问题的唯一最优解。事实上，控制问题（3.18）的开环与闭环表述众所周知是等价的，因此，沿用引理 4.11 的推理可知，我们必有 $\alpha_t^i = -D_p H^i(X_t^i, nDv^i(t, \mathbf{X}_t))$，其中 v^i 是（3.19）的解。我们将这一讨论总结为下面的命题：

命题 3.8. 假设 3.1 成立。则对任意 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，存在 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, ..., \alpha^n) \in \mathcal{A}_{dist}$，其在 $\mathcal{V}_{dist}(t, \boldsymbol{m})$ 的定义下是最优的，即满足

$$\mathcal{V}_{dist}(t, \boldsymbol{m}) = \mathcal{J}(t, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}).$$

它在以下意义下是唯一的：若 $\boldsymbol{\beta}$是任何其他最优解，则对每个 i，在 $[t, T] \times \mathbb{R}^d$ 上几乎处处有 $\alpha^i = \beta^i$；对每个 $i = 1, ..., n$。

注 3.9. 在 Cole-Hopf 情形 (1.10) 中，为简单起见，设 $d = 1$ 且 $\mathbf{X}_0 = 0$ 且 $T = 1$，关于最优分布式控制的一个较为具体的描述见 [31, 注 2.15]。对于在 $\mathbb{R}^n$ 上密度与 $e^{-nG(\mathbf{x})}$ 成正比的概率测度 P，文中证明存在唯一的极小化解 Q^*，使其在乘积测度集合上极小化 $H(\cdot \mid P)$。于是，分布式控制问题的最优状态过程 $\mathbf{X}$ 由 $\mathbf{X}_0 = 0$、$\mathbf{X}_1 \sim Q^*$ 以及在给定 $\mathbf{X}_1 = x$ 的条件下 $(\mathbf{X}_t)_{t \in [0,1]}$ 的条件分布为从 0 到 x 的布朗桥的分布所刻画。目前尚不清楚能否从偏微分方程（3.19）或前向后向随机微分方程（3.21）中得到这一描述。

4. Near-optimality of distributed controls

本节陈述并证明关于 $|\mathcal{V}(t, \boldsymbol{m}) - \mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t, \boldsymbol{m})|$ 的最一般界。这些界将涉及显式常数，这些常数取决于数据 L^i、H^i、F 和 G 的正则性，以及初始分布 $\boldsymbol{m}$ 的某些集中性质。因此，我们首先在第 4.1 节介绍一些术语和这些常数的记号约定，然后在第 4.2 节详细陈述主要结果。

4.1. 泛函不等式与显式常数。

我们将频繁使用两种不等式，它们由各种受控状态过程的分布律满足：Poincar´e 不等式和输运不等式。

对于 $\mathbb{R}^k$ 上的概率测度 m，如果 m 满足常数为 C 的庞加莱不等式，则称

$$\mathrm{Var}_m(g) := \langle m, g^2 \rangle - \langle m, g \rangle^2 \leq C \langle m, |Dg|^2 \rangle, \tag{4.1}$$

对所有有界利普希茨函数 $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ 均成立。我们称使 (4.1) 成立的最小常数 C 为 m 的庞加莱常数；若不存在这样的常数，则庞加莱常数为 ∞。我们回顾一下约定：$\boldsymbol{m}=(m^1,\dots,m^n)$ 被视为乘积测度 $m^1\otimes\cdots\otimes m^n$。因此，当我们说 $\boldsymbol{m}$ 的庞加莱常数时，指的是 $m^1\otimes\cdots\otimes m^n$ 的庞加莱常数。由于庞加莱不等式具有张量化性质，这一常数等于边缘分布 m^i 的庞加莱常数的最大值。

若可分度量空间 (E,d) 上的概率测度 μ 满足常数为 c的 T_2 不等式，则称其满足该不等式

$$\mathcal{W}_2^2(\mu,\nu)\le cH(\nu\,|\,\mu),\quad \forall\nu\in\mathcal{P}_2(E). \tag{4.2}$$

其中，$\mathcal{W}_2^2$ 为二次 Wasserstein 距离，H 为相对熵，其定义与通常相同：

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_2^2(\mu,\nu)&:=\inf\{\mathbb{E}[d^2(X,Y)]:X\sim\mu,\ Y\sim\nu\},\\ H(\nu\,|\,\mu)&:=\int_E\frac{d\nu}{d\mu}\log\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu,\ \text{if }\nu\ll\mu,\quad H(\nu\,|\,\mu)=\infty\ \text{otherwise.}\end{aligned}$$

T_2 不等式（具有有限常数）适用于 μ 为狄拉克测度、高斯分布或任意强对数凹测度等情形；关于这些研究充分的不等式的更多信息，参见 [27] 。

最后，我们引入一些简写记号，用于表示主要结果中出现的显式但复杂的常数。回顾第2节，$|\cdot|$ 和 $|\cdot|_{op}$ 分别表示 Frobenius 范数和算子范数。

约定 4.1。我们使用不带上标的 L 或 H 来表示适用于 L^i 或H^i 且关于 i一致的界。更确切地说，我们将使用以下量：

$$\begin{aligned}\|D_{pp}H\|_\infty&=\max_{i=1,\dots,n}\||D_{pp}H^i|_{op}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)},\\ \|D_{xp}H\|_\infty&=\max_{i=1,\dots,n}\||D_{xp}H^i|_{op}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)},\\ \|D_{xx}L\|_\infty&=\max_{i=1,\dots,n}\||D_{xx}L^i|_{op}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

我们用 C_F 和 C_G 表示两个常数，使得谱界

$$0\le D^2F(\mathbf{x})\le\frac{C_F}{n}I_{nd\times nd},\quad 0\le D^2G(\mathbf{x})\le\frac{C_G}{n}I_{nd\times nd} \tag{4.3}$$

对所有 $\mathbf{x}\in(\mathbb{R}^d)^n$ 均成立。写作 $\|D_{ij}F\|_{L^\infty}$或 $\|D_{ij}G\|_{L^\infty}$时，我们指的是 $(\mathbb{R}^d)^n$上的 L^∞范数，或 $\mathbb{R}^{d\times d}$上的 Frobenius 范数，例如：

$$\|D_{ij}G\|_{L^\infty}^2=\||D_{ij}G|\|_{L^\infty((\mathbb{R}^d)^n)}^2=\sup_{\mathbf{x}\in(\mathbb{R}^d)^n}\sum_{k,l=1}^d|D_{x_k^ix_l^j}G(\mathbf{x})|^2.$$

我们用 C_S 表示常数

$$C_S=C_G+T(\|D_{xx}L\|_\infty+C_F). \tag{4.4}$$

我们用 C_P 表示常数

$$C_P=\frac{\exp\Big(2T\big(\|D_{xp}H\|_\infty+\|D_{pp}H\|_\infty C_S\big)\Big)-1}{2\big(\|D_{xp}H\|_\infty+\|D_{pp}H\|_\infty C_S\big)}.$$

最后，对于具有 Poincar´e 常数 c_P、且满足常数为c_{T_2}的 T_2 不等式的 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，我们用 $C_P(\boldsymbol{m})$ 和 $C_{T_2}(\boldsymbol{m})$ 表示这些常数

$$C_P(\boldsymbol{m}) := C_P + c_P \exp\Big(2T\big(\|D_{xp}H\|_\infty + \|D_{pp}H\|_\infty C_S\big)\Big), \tag{4.5}$$

$$C_{T_2}(\boldsymbol{m}) := 3(c_{T_2} \wedge 2T) \exp\Big(3T(\|D_{xp}H\|_\infty + \|D_{pp}H\|_\infty C_S)^2\Big). \tag{4.6}$$

注 4.2. 注意，狄拉克测度的 Poincar´e 常数为零，因此对于任意 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$，都有 $C_P(\delta_{x^1}, \dots, \delta_{x^n}) = C_P$。

注 4.3. 我们在 (4.3) 中加入因子 $1/n$，使得在我们的主要例子中，常数 C_F 和 C_G 与维数无关。正如我们将在引理 4.10 中看到的，常数 C_S 给出了 V 的海森矩阵的上界，即对于每个 t，都有 $D^2V(t, \mathbf{x}) \le \frac{C_S}{n}$。$C_P$ 的含义将在引理4.13中变得清晰；该引理表明，C_P 为我们将要研究的某些扩散过程的 Poincar´e 常数提供了一个上界。

4.2. 值函数和最优状态过程的主要估计陈述。我们的主要估计将用以下分布式状态过程来表述。对于 $(s, x, \boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，定义

$$\widehat{\alpha}^i(s, x, \boldsymbol{m}) = -D_p H^i\big(x, n\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V(s, \cdot)\rangle(x)\big). \tag{4.7}$$

这里回顾一下，记号 $\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V(s,\cdot)\rangle(x)$ 表示对变量 $j \neq i$ 积分，并将 x 代入 i^{th} 变量；也就是说，$\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V(s,\cdot)\rangle(x) = \mathbb{E}[D_i V(s, \boldsymbol{\xi}) \,|\, \xi^i = x]$，其中 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n) \sim \boldsymbol{m}$。给定 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，考虑 McKean–Vlasov 随机微分方程

$$\begin{aligned} d\widehat{X}^i_s &= \widehat{\alpha}^i(s, \widehat{X}^i_s, \boldsymbol{m}_s)\, ds + dW^i_s, \quad s \in (t,T), \quad i = 1, \dots, n, \\ \boldsymbol{m}_s &= (\mathcal{L}(\widehat{X}^1_s), ..., \mathcal{L}(\widehat{X}^n_s)), \quad \boldsymbol{m}_t = \boldsymbol{m}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

我们可以将 (4.8) 更简洁地写为

$$d\widehat{X}^i_s = -D_p H^i\big(\widehat{X}^i_s, n\mathbb{E}[D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \,|\, \widehat{X}^i_s]\big)\, ds + dW^i_s, \quad s \in (t,T), \quad i = 1, \dots, n, \quad \widehat{\mathbf{X}}_t \sim \boldsymbol{m}.$$

引理 4.4. 对于 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，随机微分方程 (4.8) 存在唯一的强解。

证明推迟到下一节给出。现在我们陈述全信息值函数（提升后）与分布式值函数 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{V}_{\text{dist}}$ 之间的主要估计，它们分别在 (3.6) 和 (3.12) 中定义。

定理 4.5. 假设假设 3.1 成立。令 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，并令 $\widehat{\mathbf{X}}$ 为 (4.8) 的相应解。我们有

$$0 \le \mathcal{V}_{dist}(t, \boldsymbol{m}) - \mathcal{V}(t, \boldsymbol{m}) \le \mathcal{R}(t, \boldsymbol{m}),$$

其中我们定义

$$\mathcal{R}(t, \boldsymbol{m}) = nC_t(\boldsymbol{m}) \sum_{1 \le i < j \le n} \left((T-t)\mathbb{E}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2 + \int_t^T (s-t)\mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2\, ds \right),$$

$$C_t(\boldsymbol{m}) = \|D_{pp}H\|_\infty C_P(\boldsymbol{m}) \exp\Big((T-t)(1 + 2C_S\|D_{pp}H\|_\infty + 2\|D_{xp}H\|_\infty)\Big).$$

注 4.6. 当然，我们有 $\mathbb{E}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2 \le \|D_{ij}G\|^2_\infty$，对于 F 也同样如此；事实上，这已足以满足我们所设想的应用需求。但我们倾向于陈述最精确的结果，因为在某些情况下，似乎并不需要像假设 3.1 中那样要求二阶导数有界；关于这一点的讨论，参见注 4.16。

对于二次成本 L^i，我们可以得到更精确的常数和一个特别简洁的界。我们将此作为定理 4.5 证明的推论陈述，详细内容见下文定理 4.5 的证明之后。关于放宽 (F, G) 的二阶导数有界这一假设的讨论，也请参见下文注 4.16。

推论 4.7。假设假设 3.1 成立，并且对于每个 $i = 1, \dots, n$，$L^i(x, a) = |a|^2/2$。令 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，其中 $\boldsymbol{m}$ 的 Poincar´e 常数为 c_0。令 $\widehat{\mathbf{X}}$ 为方程 (4.8) 的相应解。则

$$0 \le \mathcal{V}_{dist}(t, \boldsymbol{m}) - \mathcal{V}(t, \boldsymbol{m}) \le n(T-t)\Bigg[\Bigg((T-t+c_0)\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2\Bigg)^{1/2} + \int_t^T \Bigg((s-t+c_0)\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2\Bigg)^{1/2} ds\Bigg]^2.$$

我们的下一个结果说明，如何用一个分布式状态过程来近似全信息问题中的最优状态过程 $\mathbf{X}$。回想一下，无约束控制问题的最优解 $\mathbf{X}$ 满足随机微分方程

$$dX_s^i = -D_p H^i(X_s^i, nD_i V(s, \mathbf{X}_s))ds + dW_s^i, \tag{4.9}$$

其中 V 是式 (3.7) 中定义的全信息价值函数。下一个结果将以定量方式表明，$\mathbf{X}$ 的低维边缘分布与 $\mathbf{X}$ 的低维边缘分布相近，后者在式 (4.8) 中定义。当给定的初始分布 $\boldsymbol{m}$ 满足输运不等式时，该结果适用。

定理 4.8。假设假设 3.1 成立。固定 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0, T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$。令 $\mathbf{X}$ 表示如 (4.9) 中所述、从 $\mathbf{X}_t \sim \boldsymbol{m}$ 初始化的最优状态过程。记 $X^i_{[t,T]}$ 为相应的$C([t, T]; \mathbb{R}^d)$-值随机变量，其中每个 $i = 1, \dots, n$ 均如此。令 $\widehat{\mathbf{X}}$ 为方程 (4.8) 的解，并从 $\mathbf{X}_t \sim \boldsymbol{m}$ 初始化 $\widehat{\ }$。那么，对于每个 $k = 1, \dots, n$，

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{S\subset[n],|S|=k}\mathcal{W}_2^2\big(\mathcal{L}((\widehat{X}^i_{[t,T]})_{i\in S}), \mathcal{L}((X^i_{[t,T]})_{i\in S})\big) \le kC_{T_2}(\boldsymbol{m})\mathcal{R}(t, \boldsymbol{m}), \tag{4.10}$$

其中，$\mathcal{R}(t, \boldsymbol{m})$ 在定理 4.5 中定义，而 $C_{T_2}(\boldsymbol{m})$ 在 (4.6) 中定义。

尽管定理 4.8 是非渐近的，但设想 $n \to \infty$和 $\mathcal{R}(t, \boldsymbol{m}) \to 0$，有助于理解该定理。(4.10) 的含义是，对于固定为 $n \to \infty$ 的 k，“大多数” n-状态向量 $(X^1, \dots, X^n)$ 的 k-状态边缘分布，都接近于 $\widehat{\mathbf{X}}$ 的相应 k-状态边缘分布。在对称情形下，当 $L^i = L$ 不依赖于 i，且 F 和 G 是其 n 个变量的对称函数时，最优状态过程 $\mathbf{X} = (X^1, \dots, X^n)$ 是可交换的，$\widehat{\mathbf{X}}$ 也同样如此。此时，不等式 (4.10) 等价于

$$\mathcal{W}_2^2\big(\mathcal{L}((\widehat{X}^1, \dots, \widehat{X}^k)_{[t,T]}), \mathcal{L}((X^1, \dots, X^k)_{[t,T]})\big) \le C_{T_2}(\boldsymbol{m})k\mathcal{R}(t, \boldsymbol{m}),$$

这意味着一种更传统形式的混沌传播，同样要求 $\mathcal{R}(t, \boldsymbol{m}) \to 0$。一般而言，状态向量 $(X^1, \dots, X^n)$ 并不可交换，界 (4.10) 则改为对从 n 中选取的所有 k 个状态的情况取平均。

本节中，我们用 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathbf{X}$ 表示全信息问题 (3.7) 的最优控制和状态过程。用 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\mathbf{X}$ 表示分布式问题 (3.12) 的最优控制和状态过程；根据命题 3.7，该控制唯一。为简单起见，在这两种情况下，我们都从时刻$t = 0$开始，且初始位置 $(x^1, \dots, x^n)$ 为非随机。

定理 4.9. 令 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, ..., \alpha^n)$ 和 $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = (\overline{\alpha}^1, ..., \overline{\alpha}^n)$ 分别表示全信息问题 (3.7) 和分布式问题 (3.12) 的唯一最优控制，后者由

命题 3.7 保证唯一性。在假设 3.1 下，我们有

$$\mathbb{E}\int_0^T |\boldsymbol{\alpha}_t - \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t|^2 dt \le C_1 n^2 \sum_{1\le i<j\le n} \|D_{ij}F\|_{L^\infty}^2 + C_2 n^2 \sum_{1\le i<j\le n} \|D_{ij}G\|_{L^\infty}^2,$$

其中 $C_1 = C_P T^3/2C_L^2$ 和 $C_2 = C_P T/C_L^2$。

我们注意到，定理 4.9 很容易推出状态过程之间的相应估计：令 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}$ 分别表示全信息问题和分布式问题的最优状态过程。则

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} |\mathbf{X}_t - \overline{\mathbf{X}}_t|^2\Big] \le TC_1 n^2 \sum_{i\ne j} \|D_{ij}F\|_{L^\infty}^2 + TC_2 n^2 \sum_{i\ne j} \|D_{ij}G\|_{L^\infty}^2.$$

本节其余部分将证明定理 4.5、4.8 和 4.9，并先做一些准备工作，涉及对值函数 V 及其提升 $\mathcal{V}$ 的估计，以及针对若干相关受控状态过程的 Poincar´e 不等式。

4.3. 值函数的谱界。首先，我们推导全信息控制问题的值函数 V（定义见 (3.7)）的海森矩阵界。以下引理表明，可以根据数据 L^i、F 和 G 的凸性与半凹性，高效地推导出 V 的凸性与半凹性。

引理 4.10. 假设假设 3.1 成立，并回顾 (4.4) 中 C_S 的定义。那么对于每个 $0 \le t \le T$ 和 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$，$V(t,\cdot)$ 二次可微，且

$$0 \le D^2 V(t,\mathbf{x}) \le \frac{C_S}{n} I_{nd\times nd}.$$

引理 4.10 的证明。在假设 3.1 下，控制问题 (3.7) 在开环控制下表述时与原问题等价。更具体地说，我们有

$$V(t,\mathbf{x}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)} \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X_s^i,\alpha_s^i) + F(\mathbf{X}_s)\bigg)ds + G(\mathbf{X}_T)\bigg] \tag{4.11}$$

其中，下确界取遍开环控制，即平方可积的、$\mathbb{F}$-适应的、取值于 $(\mathbb{R}^d)^n$ 的过程 $\alpha = (\alpha_s)_{t\le s\le T}$，而 $\mathbf{X} = (X^1,\dots,X^n)$ 定义为

$$X_s^i = x^i + \int_t^s \alpha_u^i du + (W_s^i - W_t^i), \quad t \le s \le T. \tag{4.12}$$

我们还将用到这样一个事实：欧几里得空间上的 C^2 函数 g 满足 $D^2 g(x) \le CI_{nd\times nd}$ 对所有 x 成立，当且仅当

$$g(ry+(1-r)z) \ge rg(y) + (1-r)g(z) - \frac{C}{2}r(1-r)|y-z|^2, \quad \forall x,y,z,\ \forall r\in(0,1).$$

关于 $V(t,\cdot)$ 的凸性，请参见 [21] 的引理 10.6（及其证明）。$D^2V(t,\cdot)$ 的上界也可通过简单的控制理论论证得到证明，如 [21], 的引理 9.1 所示；但为了明确追踪各个常数，我们给出完整证明。固定 $t \in [0,T]$，以及 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{z} \in (\mathbb{R}^d)^n$，使得对于某个 $r \in \in (0,1)$，$\mathbf{x} = r\mathbf{y} + (1-r)\mathbf{z}$。令 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示 (4.11) 中的一个最优解。由 (4.12) 定义 $\mathbf{X}$，并由以下公式定义 $\mathbf{Y}$、$\mathbf{Z}$

$$Y_s^i = y^i + \int_t^s \alpha_u^i du + (W_s^i - W_t^i), \quad t \le s \le T,$$
$$Z_s^i = z^i + \int_t^s \alpha_u^i du + (W_s^i - W_t^i), \quad t \le s \le T.$$

利用关系　　在 $\mathbf{X} = r\mathbf{Y} + (1-r)\mathbf{Z}$ 且 $\mathbf{Y} - \mathbf{Z} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ 的条件下，利用 α 的最优性可推出

$$\begin{aligned}
V(t,\mathbf{x}) &= \mathbb{E}\Big[\int_t^T \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X_s^i,\alpha_s^i) + F(\mathbf{X}_s)\Big)ds + G(\mathbf{X}_T)\Big] \\
&\geq \mathbb{E}\Big[\int_t^T \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big(rL^i(Y_s^i,\alpha_s^i) + (1-r)L^i(Z_s^i,\alpha_s^i)\big) - \frac{\|D_{xx}L\|_\infty}{2n} r(1-r)|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2 \\
&\qquad + rF(\mathbf{Y}_s) + (1-r)F(\mathbf{Z}_s) - \frac{C_F}{2n} r(1-r)|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2\Big)ds \\
&\qquad + rG(\mathbf{Y}_T) + (1-r)G(\mathbf{Z}_T) - \frac{C_G}{2n} r(1-r)|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2\Big] \\
&\geq rV(t,\mathbf{y}) + (1-r)V(t,\mathbf{z}) - \frac{C_S}{2n} r(1-r)|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2,
\end{aligned}$$

因此，所声称的估计成立。 □

作为引理 4.10 的一个直接推论，我们可以借助关于 Lipschitz–McKean–Vlasov 方程的已知结果来证明引理 4.4:

引理 4.4 的证明。引理 4.10 意味着 $D_iV(t,x)$ 关于 x 是利普希茨连续的，且对 t 一致。此外，根据假设，$D_{pp}H^i$ 有界，因此映射

$$[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2((\mathbb{R}^d)^n) \ni (t,x,m) \mapsto -D_pH^i\big(x, n\langle m^{-i}, D_iV(s,\cdot)\rangle(x)\big)$$

关于 (x,m) 是利普希茨连续且具有线性增长的，并且对 t 一致；其中测度变量采用二次 Wasserstein 距离度量。这里我们记

$$\langle m^{-i}, D_iV(s,\cdot)\rangle(x) := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} D_iV(s,y^1,\dots,y^{i-1},x,y^{i+1},\dots,y^n)m(d\mathbf{y})$$

对坐标 $j \neq i$ 的积分，其中将 x 代入 i^{th} 参数。因此，McKean–Vlasov 随机微分方程

$$d\widehat{X}_s^i = -D_pH^i(\widehat{X}_s^i, n\langle \boldsymbol{m}_s^{-i}, D_iV(s,\cdot)\rangle(\widehat{X}_s^i))ds + dW_s^i, \quad \boldsymbol{m}_s = \big(\mathcal{L}(\widehat{X}_s^1),\dots,\mathcal{L}(\widehat{X}_s^n)\big),$$

对于任意具有有限二阶矩的初始分布律，该方程都有唯一解；例如参见 [10, 定理 1.7]。由于 i^{th} 方程仅依赖于 i^{th} 变量 $\widehat{X}_s^i$，我们推断，对于每个 $s \in$（t，T] 如果时刻-t 位置相互独立），$(\widehat{X}_s^1,\dots,\widehat{X}_s^n)$ 必须相互独立。这证明了所声称的适定性。□

利用式 (3.19) 给出的表示（如第 3.4 节所述），我们可以对分布式控制问题的任意最优解获得类似的界。以下引理对此进行了总结；该引理由第 3.4 节的讨论结合引理 4.10 的证明中所采用的相同论证得到。

引理 4.11。假设 3.1 成立。假设 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}_{dist}$ 在 (3.12) 中 $\mathcal{V}_{dist}$ 的定义下是最优的。那么，使用第 3.4 节的记号，我们有

$$\alpha^i(t,x) = -D_pH^i(x, nDv^i(t,x)),$$

其中，v^i 是方程 (3.19) 的唯一经典解，它满足

$$D^2v^i(t,x) \leq \frac{C_S}{n} I_{d\times d}.$$

4.4. 扩散过程的泛函不等式。对于 $b = b(t,x)$: $[0,T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$，考虑由下式定义的扩散过程 X

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t, \quad X_0 \sim m_0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^k), \tag{4.13}$$

定义在某个承载着 k 维布朗运动 W 和独立随机向量 X_0 的滤过概率空间上。令 $m_t = \mathcal{L}(X_t)$。以下引理陈述了关于该过程 X的已知庞加莱不等式和 T_2 不等式。

引理 4.12。假设 b 满足

- b 联合连续，且 $x \mapsto b(t,x)$ 关于 t 一致地为 L-利普希茨连续并具有线性增长。
- $(b(t,x) - b(t,\bar{x})) \cdot (x - \bar{x}) \le \gamma |x - \bar{x}|^2$，其中某个 $\gamma \in \mathbb{R}$ 存在，且对所有 $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T]$ 均成立。

(i) 若 m_0 满足常数为 c_0 的庞加莱不等式，则对于 $0 \le t \le T$， m_t 满足常数为

$$\frac{e^{2\gamma t} - 1}{2\gamma} + c_0 e^{2\gamma t},$$

(ii) 若 m_0 满足常数为 c_0 的 T_2 不等式，则 $\mathcal{L}(\mathbf{X}^{[0,T]}) \in \mathcal{P}(C([0,T]; \mathbb{R}^k))$ 满足常数为

$$3(c_0 \wedge 2T)e^{3TL^2}.$$

这些结果相当知名。关于 (ii) 的这一精确形式，参见 [30, 命题 C.1] 。部分 (i) 在 [14, 定理 4.2] 中得到证明，当时对 b 作了更强的正则性假设；注意到 Poincar´é 不等式在弱收敛下保持不变后，通过逼近论证即可轻松放宽这些假设。请注意，引理 4.12 中的第二个假设由第一个假设推出（取 $\gamma \ge -L^2$），但我们将其单独列出，以强调 Poincar´é 常数仅取决于 γ，而非 L。若我们只关注时刻 t 的分布律，而非 (ii) 中的路径空间分布，则可以为 m_t 推导出一个 T_2 不等式，其常数仅取决于 γ，而非 L。不过，该常数的表达式有些繁杂；参见 [14, 命题 2.19]。在我们的应用中，可以获得有限的 Lispchitz 常数，因此我们倾向于采用更强的路径空间不等式。

接下来，我们应用引理 4.12，估计与控制问题相关的两个扩散过程的 Poincar´e 常数。

引理 4.13. 固定 $t \in [0,T]$ 和 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$。考虑以下三个控制—状态对：

- 设 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathcal{A}$ 是 (3.8) 中定义的 $\mathcal{V}(t, \boldsymbol{m})$ 的最优控制，其对应的状态过程 X 如 (4.9) 所示。
- 设 $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$和 X 如 (4.7) 和 (4.8) 中所述。
- 设 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 是 (3.12) 中定义的 $\mathcal{V}_{dist}(t, \boldsymbol{m})$ 的最优控制，并令 $\mathbf{X} = (\overline{X}^1, \dots, \overline{X}^n)$ 满足

$$d\overline{X}^i_s = \overline{\alpha}^i(s, \overline{X}^i_s)ds + dW^i_s, \quad s \in (t,T], \quad \overline{\mathbf{X}}_t \sim \boldsymbol{m}.$$

则有如下结论：

(i) 对于每个 $t \le s \le T$，测度 $\mathcal{L}(\mathbf{X}_s)$、 $\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}_s)$ 和 $\mathcal{L}(\overline{\mathbf{X}}_s)$ 均满足 Poincar´e 不等式，其常数为 (4.5) 中定义的 $C_P(\boldsymbol{m})$。(ii) 若 $\boldsymbol{m}$ 满足常数为 c_0 的 T_2 不等式，则 $C([t,T]; (\mathbb{R}^d)^n)$ 上的测度 $\mathcal{L}(\mathbf{X}^{[t,T]})$、 $\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}^{[t,T]})$ 和$\mathcal{L}(\overline{\mathbf{X}}^{[t,T]})$ 满足常数为 (4.6) 中定义的 $C_{T_2}(\boldsymbol{m})$ 的 T_2不等式。

证明。我们只需计算每种情况下漂移的导数。全信息问题的最优控制 $\boldsymbol{\alpha}$ 为

$$\alpha^i(t, \mathbf{x}) = -D_p H^i(x^i, nD_i V(t, \mathbf{x})).$$

其导数为

$$D_j \alpha^i(t, \mathbf{x}) = -1_{i=j} D_{xp} H^i\big(x^i, nD_i V(t, \mathbf{x})\big) - nD_{pp} H^i\big(x^i, nD_i V(t, \mathbf{x})\big) D_{ij} V(t, \mathbf{x}).$$

由引理 4.10 可得 $0 \le D^2 V \le \frac{C_S}{n}$，这意味着

$$\|D\boldsymbol{\alpha}\|_\infty \le \|D_{xp}H\|_\infty + \|D_{pp}H\|_\infty C_S,$$

X 的结果现在可由引理 4.12 得出。同样，对于 $x \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$\begin{aligned} D\widehat{\alpha}^i(s,x,\boldsymbol{m}) = & -D_{xp}H^i\big(x, n\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V(s,\cdot)\rangle(x)\big) \\ & - nD_{pp}H^i\big(x, n\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V(s,\cdot)\rangle(x)\big)\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_{ii}V(s,\cdot)\rangle(x). \end{aligned}$$

再次利用 $0 \le D^2 V \le \frac{C_S}{n}$，可得

$$\|D\widehat{\alpha}^i\|_\infty \le \|D_{xp}H\|_\infty + \|D_{pp}H\|_\infty C_S,$$

$\widehat{\ }$对每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 都成立，而 X 的结果可由引理 4.12 得出。对于$\overline{\mathrm{X}}$，证明相同，只需用引理 4.11 替代引理 4.10。□

4.5. V的提升分析。回忆一下，值函数 $\mathcal{V}$: $[0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 由 3.6 定义，并满足 $\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, V(t,\cdot)\rangle$。因此， $\mathcal{V}$继承了 V的可微性。我们有以下显式公式

$$D_{m^i}\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m},y) = \langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V\rangle(y), \quad D_y D_{m^i}\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m},y) = \langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_{ii}V\rangle(y), \tag{4.14}$$

对于 $y \in \mathbb{R}^d$。特别地，这给出了式 (4.7) 中定义的控制 $\widehat{\alpha}^i$ 的另一种表达形式:

$$\widehat{\alpha}^i(s,x,\boldsymbol{m}) = -D_p H^i\big(x, nD_{m^i}\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m},x)\big). \tag{4.15}$$

下面的引理指出，回顾紧接其后定义的缩写， $\mathcal{V}$ 实际上满足一个类似于 (3.13) 的方程。

引理 4.14. 假设假设 3.1 成立。对于 $t \in (0,T)$ 和 $\boldsymbol{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，提升 $\mathcal{V}$ 满足

$$-\partial_t \mathcal{V} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \langle m^i, \mathrm{Tr}(D_y D_{m^i}\mathcal{V})\rangle + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \langle m^i, H^i(\cdot, nD_{m^i}\mathcal{V})\rangle = \langle \boldsymbol{m}, F\rangle - E(t,\boldsymbol{m}),$$

其中

$$\begin{aligned} E(t,\boldsymbol{m}) &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\langle \boldsymbol{m}, H^i(\cdot, nD_i V)\rangle - \langle m^i, H^i\big(\cdot, n\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V\rangle\big)\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[H^i\big(\xi^i, nD_i V(t,\boldsymbol{\xi})\big) - H^i\big(\xi^i, n\mathbb{E}[D_i V(t,\boldsymbol{\xi})|\xi^i]\big)\Big], \end{aligned}$$

对于 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \sim \boldsymbol{m}$。此外，误差项 E 满足

$$0 \le E(t,\boldsymbol{m}) \le \|D_{pp}H\|_\infty E_Q(t,\boldsymbol{m}) \tag{4.16}$$

其中

$$\begin{aligned} E_Q(t,\boldsymbol{m}) &:= \frac{n}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\langle \boldsymbol{m}, |D^i V|^2\rangle - \langle m^i, \big|\langle \boldsymbol{m}^{-i}, D_i V\rangle\big|^2\rangle\Big) \\ &= \frac{n}{2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big[|D_i V(t,\boldsymbol{\xi})|^2 - |\mathbb{E}[D_i V(t,\boldsymbol{\xi})|\xi^i]|^2\big] \end{aligned} \tag{4.17}$$

证明。通过将关于 V 的方程 (3.9) 乘以 $\boldsymbol{m} = m^1 \otimes ... \otimes m^n$ 后积分，再应用 (4.14) 中的恒等式，可得到关于 $\mathcal{V}$ 的方程。为得到 E 的上界，我们利用以下事实：在假设 3.1 下

$$p \mapsto \frac{\|D_{pp}H\|_\infty n^2}{2}|p|^2 - H^i(x, np)$$

对每个 i 都是凸的，因此由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{\|D_{pp}H\|_\infty n^2}{2}\big|\mathbb{E}[D_iV(t,\xi)\,|\,\xi^i]\big|^2 - H^i\big(\xi^i, n\mathbb{E}[D_iV(t,\boldsymbol{\xi})\,|\,\xi^i]\big)& \\ \le \frac{\|D_{pp}H\|_\infty n^2}{2}\mathbb{E}\big[|D_iV(t,\boldsymbol{\xi})|^2\,|\,\xi^i\big] - \mathbb{E}\big[H^i\big(\xi^i, nD_iV(t,\boldsymbol{\xi})\big)\,|\,\xi^i\big]&.\end{aligned}$$

重新整理并利用 H^i 的凸性，我们有

$$\begin{aligned}0 &\le \mathbb{E}\big[H^i\big(\xi^i, nD_iV(t,\boldsymbol{\xi})\big)\,|\,\xi^i\big] - H^i\big(\xi^i, n\mathbb{E}[D_iV(t,\boldsymbol{\xi})\,|\,\xi^i]\big) \\ &\le \frac{\|D_{pp}H\|_\infty n^2}{2}\Big(\mathbb{E}\big[|D_iV(t,\boldsymbol{\xi})|^2\,|\,\xi^i\big] - \big|\mathbb{E}[D_iV(t,\xi)\,|\,\xi^i]\big|^2\Big).\end{aligned}$$

取期望，然后对 $i = 1$、.....、n 求和，即得所需的界。 □

引理 4.15. 假设假设 3.1 成立。对于 $(t, \boldsymbol{m}) \in [0,T) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，我们有

$$0 \le \mathcal{V}_{dist}(t,\boldsymbol{m}) - \mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) \le \|D_{pp}H\|_\infty \int_t^T E_Q(s, \boldsymbol{m}_s)ds,$$

其中 E_Q 由 (4.17) 给出，而 $\boldsymbol{m}_s := (\mathcal{L}(\widehat{X}^1_s)\,..., \mathcal{L}(\widehat{X}^n_s))$ 是 (4.8) 的解 $\widehat{\mathbf{X}}$ 的分布律。

证明。首先，我们需要检查 V 的提升 $\mathcal{V}$ 是否足够正则，以便应用验证结果命题 3.4。由 (4.14) 中 $D_{m^i}\mathcal{V}$ 的显式公式，以及对某个常数 C 有 $|DV(t,\mathbf{x})| \le C(1 + |\mathbf{x}|)$ 这一事实，可得估计式 (3.16)。根据引理 4.4，McKean–Vlasov 随机微分方程 (4.8) 适定。

因此，我们确实可以应用引理 4.14 和验证结果命题 3.4，其中 $\mathcal{F}(\boldsymbol{m}) := \langle \boldsymbol{m}, F\rangle - E(t,\boldsymbol{m})$ 且 $\mathcal{G}(\boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, G\rangle$，从而得到

$$\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_{\rm dist}} \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(X^i_s, \alpha^i(s, X^i_s)) + F(\mathbf{X}_s) - E(s, \mathcal{L}(X^1_s), ..., \mathcal{L}(X^n_s))\bigg)ds + G(\mathbf{X}_T)\bigg],$$

其中 $\mathbf{X}$ 由 $dX^i_s = \alpha^i(s, X^i_s)ds + dW^i_s$ 给出，且 $\mathbf{X}_t \sim \boldsymbol{m}$。此外，根据命题 3.4 中的最优性准则和公式 (4.15)，我们推得在 (4.7) 中定义的控制 $(\widehat{\alpha}^1, \ldots, \widehat{\alpha}^n) \in \mathcal{A}_{\rm dist}$ 达到了该下确界。特别地，

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}) &= \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L^i(\widehat{X}^i_s, \widehat{\alpha}^i(s,\widehat{X}^i_s)) + F(\widehat{\mathbf{X}}_s) - E(s,\boldsymbol{m}_s)\bigg)ds + G(\widehat{\mathbf{X}}_T)\bigg] \\ &\ge \mathcal{V}_{\rm dist}(t,\boldsymbol{m}) - \int_t^T E(s,\boldsymbol{m}_s)ds,\end{aligned}$$

其中 $\widehat{\mathbf{X}}$ 满足所声称的 McKean–Vlasov 随机微分方程，且 $\boldsymbol{m}_s = (\mathcal{L}(\widehat{X}^1_s)\,..., \mathcal{L}(\widehat{X}^n_s))$。 □

4.6. 定理 4.5 的证明。现在我们开始证明定理 4.5 的主要部分。根据引理 4.15，我们可以专注于估计量 $\int_t^T E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)ds$，其中 $\boldsymbol{m}_s = (\mathcal{L}(\widehat{X}^1_s)\,..., \mathcal{L}(\widehat{X}^1_s))$，并且$\widehat{\ }$，其中 $\mathbf{X}$ 是 McKean–Vlasov 随机微分方程 (4.8) 的解。为简化记号，我们将

$$\widehat{\alpha}^i(s,x) = \widehat{\alpha}^i(s,x,\boldsymbol{m}_s) = -D_pH^i(x, nD_{m^i}\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m}_s,x)), \quad (s,x)\in[t,T]\times\mathbb{R}^d, \tag{4.18}$$

$$\alpha^i(s,\mathbf{x}) = -D_pH^i(x^i, nD_iV(s,\mathbf{x})), \quad (s,\mathbf{x})\in[t,T]\times(\mathbb{R}^d)^n. \tag{4.19}$$

因此， $\alpha \in \mathcal{A}$是全信息控制问题的最优解，而 $\widehat{\alpha} \in \mathcal{A}_{\mathrm{dist}}$ 是与 $\mathbf{X}$ 对应的控制。

我们的目标现在是估计

$$E_Q(s, \boldsymbol{m}_s) = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[|D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)|^2 - \big|\mathbb{E}[D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \,|\, \widehat{X}^i_s]\big|^2 \Big].$$

我们首先在附加假设 DV is $C^{1,2}$ 下推导估计；除假设 3.1 外，若还有 $G \in C^{3,\alpha}_{\mathrm{loc}}$，则该假设成立（这可由内部 Schauder 估计推得，参见 [24] 第 3.4 章中的定理 9）。随后我们将说明如何通过光滑化过程去除这一附加假设。

我们的策略是计算 Itô 过程 $|D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)|^2 - |\mathbb{E}[D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \,|\, \widehat{X}^i_s]|^2$ 的微分。首先，对偏微分方程 (3.9) 求导，以确定 $D_i V$ 所满足的偏微分方程：

$$-\partial_t D_i V - D_i \Delta V + \sum_{j=1}^{n} D_{ij} V D_p H^j(x^j, n D_j V) + \frac{1}{n} D_x H^i(x^i, n D_i V) = D_i F.$$

使用 Itō 公式，接着代入该偏微分方程，并回顾上文 α^i 和 $\widehat{\alpha}^i$ 的定义，可得

$$\begin{aligned} dD_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) = \Big(& \sum_{j=1}^{n} D_{ij} V(s, \widehat{X}^j_s) \big(\widehat{\alpha}^j(s, \widehat{X}^j_s) - \alpha^j(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \big) + \frac{1}{n} D_x H^i(\widehat{X}^i_s, n D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)) \\ & - D_i F(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \Big) ds + \sum_{j=1}^{n} D_{ij} V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) dW^j_s. \end{aligned} \tag{4.20}$$

令 $(\mathcal{F}^i_s)_{s \in [t,T]}$ 为由过程 $(\widehat{X}^i_t, W^i_s)_{s \in [t,T]}$ 生成的滤过。由 $(\widehat{X}^j)_{j \neq i}$ 与 $\mathcal{F}^i_s$ 的独立性，以及 $\widehat{X}^i_s$ 关于 $\mathcal{F}^i_s$ 可测，我们有 $\mathbb{E}[D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \,|\, \widehat{X}^i_s] = \mathbb{E}[D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \,|\, \mathcal{F}^i_s]$，对 $s \in [t, T]$ 均成立。对 (4.20) 中关于 $\mathcal{F}^i_s$ 取条件期望，得到

$$\begin{aligned} d\mathbb{E}[D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \,|\, \mathcal{F}^i_t] = \mathbb{E}\Big[& \sum_{j=1}^{n} D_{ij} V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \big(\widehat{\alpha}^j(s, \widehat{X}^j_s) - \alpha^j(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \big) + \frac{1}{n} D_x H^i(\widehat{X}^i_s, n D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)) \\ & - D_i F(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \;\Big|\; \widehat{X}^i_s \Big] ds + \mathbb{E}[D_{ii} V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \,|\, \widehat{X}^i_s] dW^i_s. \end{aligned} \tag{4.21}$$

由于与 $\mathcal{F}^i_s$ 独立，关于 $(W^j)_{j \neq i}$ 的所有随机积分均为零。利用伊藤公式，我们现在可以使用 (4.20) 计算

$$\begin{aligned} d|D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)|^2 = \Big(& 2 \sum_{j=1}^{n} D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)^\top D_{ij} V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \big(\widehat{\alpha}^j(s, \widehat{X}^j_s) - \alpha^j(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \big) \\ & + \frac{2}{n} D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \cdot D_x H^i(\widehat{X}^i_s, n D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)) \\ & - 2 D_i V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) \cdot D_i F(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) + \sum_{j=1}^{n} |D_{ij} V(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)|^2 \Big) ds + dM^i_s, \end{aligned}$$

其中 M^i 是鞅。同理，我们使用 (4.21) 得到

$$d|\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]|^2 = \Big(2\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]^\top \mathbb{E}[D_{ij}V(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)\big(\widehat{\alpha}^j(s,\widehat{X}^j_s)-\alpha^j(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)\big)|\widehat{X}^i_s]$$
$$+\frac{2}{n}\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\cdot\mathbb{E}[D_xH^i(\widehat{X}^i_s,nD_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s))|\widehat{X}^i_s]$$
$$-2\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\cdot\mathbb{E}[D_iF(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_t]+|\mathbb{E}[D_{ii}V(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]|^2\Big)ds+dN^i_s,$$

其中 N^i 是另一个鞅。

对前两个方程取期望，我们可以计算 $\frac{d}{ds}\mathbb{E}\big[|D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)]^2\big]$。对 i 求和并乘以 $n/2$，得到

$$\frac{d}{ds}E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)=A_1+A_2+A_3+A_4,$$

其中我们定义

$$A_1 \coloneqq n\mathbb{E}\sum_{i,j=1}^n\big(D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big)^\top D_{ij}V(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)\big(\widehat{\alpha}^j(s,\widehat{X}^j_s)-\alpha^j(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)\big),$$

$$A_2 \coloneqq \mathbb{E}\sum_{i=1}^n\big(D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big)\cdot\big(D_xH^i(\widehat{X}^i_s,nD_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_xH^i(\widehat{X}^i_s,nD_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big),$$

$$A_3 \coloneqq -n\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\big(D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big)\cdot\big(D_iF(\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iF(\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big),$$

$$A_4 \coloneqq \frac{n}{2}\mathbb{E}\Big[\sum_{i,j=1}^n|D_{ij}V(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2-\sum_{i=1}^n\big|\mathbb{E}[D_{ii}V(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big|^2\Big].$$

O我们的目标是从下方界定 $\frac{d}{ds}E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)$。我们分别处理每一项

。第一项：为估计 A_1，我们使用

$$|\widehat{\alpha}^j(s,\widehat{X}^j_s)-\alpha^j(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\le n\|D_{pp}H\|_\infty|D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]|$$

再结合界 $0\le D^2V\le C_S/n$，得到

$$|A_1|\le nC_S\|D_{pp}H\|_\infty\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\big|D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big|^2=2C_S\|D_{pp}H\|_\infty E_Q(s,\boldsymbol{m}_s).$$

第二项：对于 A_2，注意到 D_xH^i 关于其第二个自变量是利普希茨连续的 ：

$$\mathbb{E}\Big|\big(D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big)\cdot\big(D_xH^i(\widehat{X}^i_s,nD_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_xH^i(\widehat{X}^i_s,nD_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big)\Big|$$
$$\le n\|D_{xp}H\|_\infty\mathbb{E}\big|D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big|^2.$$

对 $i=1,\dots,n$ 求和，得到

$$|A_2|\le 2\|D_{xp}H\|_\infty E_Q(s,\boldsymbol{m}_s).$$

第三项：对于 A_3，我们使用杨氏不等式，得到

$$|A_3|\le\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\big|D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big|^2+\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\big|D_iF(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iF(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s]\big|^2.$$

对于第二项，使用 $(\widehat{X}_s^j)_{j\neq i}$ 满足的庞加莱不等式（引理 4.12）；它们独立于 $\widehat{X}_s^i$，得到

$$\mathbb{E}\Big[\big|D_iF(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)-\mathbb{E}[D_iF(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}_s^i]\big|^2\,\Big|\,\widehat{X}_s^i\Big]=C_P(\boldsymbol{m})\sum_{j\neq i}\mathbb{E}\big[|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2\,|\,\widehat{X}_s^i\big],$$

对于每个 i。因此，根据对称性，

$$|A_3|\le E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)+nC_P(\boldsymbol{m})\mathbb{E}\sum_{1\le i<j\le n}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|. \tag{4.22}$$

第四项：显然有 $A_4\ge 0$，因为 $\mathbb{E}|D_{ii}V(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2\ge\mathbb{E}|\mathbb{E}[D_{ii}V(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}_s^i]|^2$。

结合上述计算可得，若 $C:=2C_S\|D_{pp}H\|_\infty+2\|D_{xp}H\|_\infty+1$，则

$$\frac{d}{ds}E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)\ge-\widetilde{C}E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)-nC_P(\boldsymbol{m})\mathbb{E}\sum_{1\le i<j\le n}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2.$$

由格朗沃尔不等式可得

$$E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)\le e^{\widetilde{C}(T-s)}E_Q(T,\boldsymbol{m}_T)+nC_P(\boldsymbol{m})\int_s^T e^{\widetilde{C}(u-s)}\mathbb{E}\sum_{1\le i<j\le n}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_u)|^2\,du.$$

仿照式 (4.22) 进行推导，由 Poincaré 不等式（引理 4.12）可得

$$\begin{aligned}E_Q(T,\boldsymbol{m}_T)&=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\Big[|D_iG(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2-\big|\mathbb{E}[D_iG(\widehat{\mathbf{X}}_T)\,|\,\widehat{X}_T^i]\big|^2\Big]\\&\le nC_P(\boldsymbol{m})\mathbb{E}\sum_{1\le i<j\le n}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2.\end{aligned}$$

将 $e^{\widetilde{C}(T-s)}$ 和 $e^{\widetilde{C}(u-s)}$ 用 $e^{\widetilde{C}(T-t)}$ 界定，并以 $\int_t^T\int_s^T h(u)\,duds=\int_t^T(u-t)h(u)\,du$ with $h(u)=|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_u)|^2$ 的形式使用富比尼定理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_t^T E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)\,ds\le{}&(T-t)e^{\widetilde{C}(T-t)}nC_P(\boldsymbol{m})\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2\\&+e^{\widetilde{C}(T-t)}nC_P(\boldsymbol{m})\int_t^T\sum_{1\le i<j\le n}(s-t)\mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2\,ds.\end{aligned} \tag{4.23}$$

结合引理 4.15，即可完成定理 4.5 的证明。

现在，在额外假设 $DV\in C^{1,2}$ 下，我们已证明 (4.23)；特别是，当 $G\in C^{3,\alpha}_{\text{loc}}$ 时，除假设 3.1 外，该假设也成立。现在我们说明如何通过光滑化论证去掉这一条件。令 $G^\epsilon=\int_{(\mathbb{R}^d)_n}G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho^\epsilon(\mathbf{y})$，其中 $(\rho^\epsilon)_{\epsilon>0}$ 是 $(\mathbb{R}^d)^n$ 上的标准单位逼近。定义 V^ϵ，其方式与 V 完全相同，但以 $\widehat{\ }$ 替换 G^ϵ。定义 $\mathbf{X}^\epsilon$、$\boldsymbol{m}_s^\epsilon$ 和 $E_Q^\epsilon(s,\boldsymbol{m}_s)$，其方式与 $\mathbf{X}$、$\boldsymbol{m}_s$ 和 $E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)$ 完全相同，但以 V 替换 V^ϵ。于是，由恒等式

$$D_{ij}G^\epsilon(\mathbf{x})=\int_{(\mathbb{R}^d)^n}D_{ij}G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho^\epsilon(\mathbf{y}),$$

容易验证，对于每个 $\epsilon>0$，我们都有

$$\|D_{ij}G^\epsilon\|_{L^\infty}\le\|D_{ij}G\|_{L^\infty},\quad D^2G^\epsilon(\mathbf{x})\le\frac{C_G}{n}I_{nd\times nd}$$

对所有 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$。对于每个 $\epsilon > 0$，我们知道 $E_Q^\epsilon(s, \boldsymbol{m}_s^\epsilon)$ 有界于 (4.23)$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$右端，但其中 G 和 $\mathbf{X}$ 被替换为 G^ϵ 和 $\mathbf{X}^\epsilon$。要得出 (4.23) 实际上成立的结论，我们只需确认，当 $\epsilon \downarrow 0$ 时，

$$E_Q^\epsilon(s, \boldsymbol{m}_s^\epsilon) \to E_Q(s, \boldsymbol{m}_s), \tag{4.24}$$

$$\mathbb{E}|D_{ij}G^\epsilon(\widehat{\mathbf{X}}_T^\epsilon)|^2 \to \mathbb{E}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2, \quad \mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s^\epsilon)|^2 \to \mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2. \tag{4.25}$$

但通常可以证明，函数序列 V^ϵ 在 $C^{2,\ \alpha\ \text{局部}}$ 中关于 ϵ 一致，因此由紧性论证可知

$$V^\epsilon \to V, \quad DV^\epsilon \to DV, \quad D^2V^\epsilon \to D^2V,$$

在 $[0,T] \times (\mathbb{R}^d)^n$ 上局部一致。结合标准的随机微分方程稳定性估计，这意味着 $\widehat{\ }\mathbf{X}_s^\epsilon \xrightarrow{L^2} \widehat{\ }\mathbf{X}_s$，特别是 $\boldsymbol{m}_s^\epsilon \to \boldsymbol{m}_s$ 属于 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，由此可得 (4.24) 和 (4.25)。因此，事实上，即使不附加正则性假设，(4.23) 仍然成立。□

4.7. 推论 4.7 的证明。假设 $L^i(x,a) = |a|^2/2$ 意味着 $H^i(x,p) = |p|^2/2$，因此 $D_{pp}H^i(x,p) = I_d$。谱界 $D\boldsymbol{\alpha} \le -nD^2V \le 0$ 和引理 4.12 意味着，对每个 $s \in [t,T]$，$\widehat{X}_s$ 满足常数为 $s - t + c_0$ 的 Poincaré 不等式。仿照定理 4.5 的证明，并使用 $\alpha^j = -nD_jV$ 和 $\widehat{\alpha}^j(s, \widehat{X}_s^j) = -n\mathbb{E}[D_jV(s, \widehat{\boldsymbol{X}_s}) \mid \widehat{X}_s^j]$，可得 $A_2 = 0$ 和 $A_1, A_4 \ge 0$，因此

$$\frac{d}{ds}E_Q(s, \boldsymbol{m}_s) \ge -n\mathbb{E}\sum_{i=1}^n \big(D_iV(s, \widehat{\mathbf{X}}_s) - \mathbb{E}[D_iV(s, \widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}_s^i]\big) \cdot \big(D_iF(\widehat{\mathbf{X}}_s) - \mathbb{E}[D_iF(\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}_s^i]\big).$$

由柯西-施瓦茨不等式和庞加莱不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}E_Q(s, \boldsymbol{m}_s) &\ge -2E_Q(s, \boldsymbol{m}_s)^{1/2}\left(\frac{n}{2}\mathbb{E}\sum_{i=1}^n \big|D_iF(\widehat{\mathbf{X}}_s) - \mathbb{E}[D_iF(\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}_s^i]\big|^2\right)^{1/2} \\ &\ge -2E_Q(s, \boldsymbol{m}_s)^{1/2}\left(n(s - t + c_0)\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{d}{ds}\big(E_Q(s, \boldsymbol{m}_s)^{1/2}\big) \ge -\left((s - t + c_0)\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_s)|^2\right)^{1/2}.$$

积分可得，对于 $s \in [t,T]$，

$$E_Q(s, \boldsymbol{m}_s)^{1/2} \le E_Q(T, \boldsymbol{m}_T)^{1/2} + \int_s^T \left(n(u - t + c_0)\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_u)|^2\right)^{1/2} du.$$

再次使用庞加莱不等式，我们得到

$$\begin{aligned}E_Q(T, \boldsymbol{m}_T) &= \frac{n}{2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[|D_iG(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2 - \big|\mathbb{E}[D_iG(\widehat{\mathbf{X}}_T) \mid \widehat{X}_T^i]\big|^2\Big] \\ &\le n(T - t + c_0)\mathbb{E}\sum_{1\le i<j\le n}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2.\end{aligned}$$

注意到在二次情形下，

$$\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}(t,\boldsymbol{m})-\mathcal{V}(t,\boldsymbol{m})\le n\int_t^T\Bigg[\Bigg((T-t+c_0)\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}G(\widehat{\mathbf{X}}_T)|^2\Bigg)^{1/2}+\int_s^T\Bigg((u-t+c_0)\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}|D_{ij}F(\widehat{\mathbf{X}}_u)|^2\Bigg)^{1/2}du\Bigg]^2 ds.$$

证明至此完成。 □

注 4.16. 值得注意的是，在某些情况下，我们的结果可以推广到 (F,G,H,L) 的二阶导数不有界的情形。对于推论 4.7 涉及的二次哈密顿量情形，上述证明实际上并未用到 F 或 G 的海森矩阵的任何上界，唯一的例外是为了保证 V 的 HJB 方程适定，尽管在许多情况下，这一点可能也可以绕过。类似地，在维数为 $d=1$ 且一般的（凸）哈密顿量仅依赖于 p 的情况下，对于所有 i，我们有 $D_{pp}H^i\ge 0$，因而有 $D\boldsymbol{\alpha}\le 0$；即使 (F,G,H,L) 的二阶导数不有界，Poincaré 不等式仍可改进为 $C_P(\boldsymbol{m})=T+c_0$。不过，在这种情况下，定理 4.5 的证明似乎仍需要 D^2V 的上界，而这要求 (F,G,L) 的二阶导数有界。

4.8. 定理 4.8 的证明。根据扩散过程的一个著名熵估计（例如 [30]中的引理 4.4），我们可以估计

$$\begin{aligned}H(\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}_{[t,T]})\,|\,\mathcal{L}(\mathbf{X}_{[t,T]}))&\le\frac{1}{2}\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\int_t^T\left|D_pH^i(\widehat{X}^i_s,nD_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)))-D_pH^i(\widehat{X}^i_s,n\mathbb{E}[D_iV(s,\widehat{\mathbf{X}}_s)|\widehat{X}^i_s])\right|^2ds\\&=\frac{1}{2}n\int_t^T E(s,\boldsymbol{m}_s)\,ds\le\frac{1}{2}n\|D_{pp}H\|_\infty\int_t^T E_Q(s,\boldsymbol{m}_s)\,ds\\&\le\frac{n}{2}\mathcal{R}(t,\boldsymbol{m}),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{m}_s=\mathcal{L}(\widehat{X}^1_s,\dots,\widehat{X}^n_s)$，且 E和 E_Q的定义与引理 4.14 中相同，最后一个不等式已在 (4.23) 中证明。

应用引理 4.13(ii)可知，$\mathcal{L}(\mathbf{X}_{[t,T]})$满足熵不等式，其常数为$C_{T_2}(\boldsymbol{m})$，定义见 (4.6)。特别地，

$$\mathcal{W}_2^2\big(\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}_{[t,T]}),\mathcal{L}(\mathbf{X}_{[t,T]})\big)\le C_{T_2}(\boldsymbol{m})H(\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}_{[t,T]})\,|\,\mathcal{L}(\mathbf{X}_{[t,T]}))\le C_{T_2}(\boldsymbol{m})\frac{n}{2}\mathcal{R}(t,\boldsymbol{m}).$$

接下来，我们使用一个关于 $\mathcal{W}_2^2$的著名次可加不等式，该不等式指出 t

$$\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{S\subset[n],|S|=k}\mathcal{W}_2^2\big(\mathcal{L}((\widehat{X}^i_{[t,T]})_{i\in S}),\mathcal{L}((X^i_{[t,T]})_{i\in S})\big)\le\frac{1}{\lfloor n/k\rfloor}\mathcal{W}_2^2\big(\mathcal{L}(\widehat{\mathbf{X}}_{[t,T]}),\mathcal{L}(\mathbf{X}_{[t,T]})\big).$$

简短证明见 [31, 第3节。4]结合前两个不等式，并注意到$\lfloor n/k\rfloor\ge n/2k$，即可完成证明。□

4.9. 定理 4.9 的证明。记 (X, Y, Z) 为 (3.20) 的解，记 (X, Y, Z) 为 (3.21) 的解。进一步，记 $\alpha^i_t=-D_pH^i(X^i_t,N\widehat{X}^i_t)$ 为全信息控制问题的最优（开环）控制，记 $\overline{\alpha}^i_t=-D_pH^i(\overline{X}^i_t,N\overline{Y}^i_t)$ 为分布式问题的最优（开环）控制。最后，令 $\boldsymbol{m}_t=(\mathcal{L}(\overline{X}^1_t),\dots,\mathcal{L}(\overline{X}^n_t))$。我们可以将方程

(X,Y, Z) 满足的 (3.21) 重写为

$$\begin{cases} d\overline{X}^i_t = -\alpha^i_t dt + dW^i_t, \ , \\ d\overline{Y}^i_t = -\big(\frac{1}{n} D_x L^i\big(\overline{X}^i_t, \alpha^i_t\big) + D_i F(\overline{\mathbf{X}}_t) + E^{F,i}_t\big) dt + \overline{Z}^i_t dW^i_t, \\ \overline{X}^i_0 = x^i, \quad \overline{Y}^i_T = G^i(\overline{X}_T) + E^{G,i}_T, \end{cases} \tag{4.26}$$

其中我们定义

$$E^{F,i}_t = \mathcal{F}^i(\overline{\mathbf{X}}_t, \boldsymbol{m}_t) - D_i F(\overline{\mathbf{X}}_t), \quad E^{G,i}_T = \mathcal{G}^i(\overline{\mathbf{X}}_T, \boldsymbol{m}_T) - D_i G(\overline{\mathbf{X}}_T).$$

根据引理 4.12 和 4.13， $\mathcal{L}(\mathbf{X}_t)$满足一个常数为 C_P的庞加莱不等式。因此，回顾 $\mathcal{F}^i$ 和 $\mathcal{G}^i$的定义，我们有

$$\mathbb{E}|E^{F,i}_t|^2 \le C_P \mathbb{E} \sum_{j=1,\, j\neq i}^n |D_{ij} F(\mathbf{X}_t)|^2, \tag{4.27}$$

$$\mathbb{E}|E^{G,i}_T|^2 \le C_P \mathbb{E} \sum_{j=1,\, j\neq i}^n |D_{ij} G\mathbf{X}_T)|^2. \tag{4.28}$$

现在令

$$\Delta \mathbf{X}_t = \overline{\mathbf{X}}_t - \mathbf{X}_t, \quad \Delta \mathbf{Y}_t = \overline{\mathbf{Y}}_t - \mathbf{Y}_t, \quad \Delta \boldsymbol{\alpha}_t = \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t - \boldsymbol{\alpha}_t.$$

于是，对于某个鞅 M^i，我们得到

$$\begin{aligned} d(\Delta X^i_t \cdot \Delta Y^i_t) &= -\Delta X^i_t \cdot \bigg(\frac{1}{n} D_x L^i(\overline{X}^i_t, \overline{\alpha}^i_t) - \frac{1}{n} D_x L^i(X^i_t, \alpha^i_t) + D_i F(\overline{\mathbf{X}}_t) - D_i F(\mathbf{X}_t) + E^{F,i}_t \bigg) dt \\ &\quad + \Delta Y^i_t \cdot \Delta \alpha^i_t dt + dM^i_t \\ &= -\bigg(\frac{1}{n} \big(D_a L^i(\overline{X}^i_t, \overline{\alpha}^i_t) - D_a L^i(X^i_t, \alpha^i_t) \big) \cdot \Delta \alpha^i_t + \frac{1}{n} \big(D_x L^i(\overline{X}^i_t, \overline{\alpha}^i_t) - D_x L^i(X^i_t, \alpha^i_t) \big) \cdot \Delta X^i_t \\ &\quad + \big(D_i F(\overline{\mathbf{X}}_t) - D_i F(\mathbf{X}_t) \big) \cdot \Delta X^i_t + E^{F,i}_t \cdot \Delta X^i_t \bigg) dt + dM^i_t, \end{aligned} \tag{4.29}$$

其中，第二个等号源于以下事实：α^i_t使 $a \mapsto -L^i(X^i_t, a) - nY^i_t$达到最大值，因此$Y^i_t = -\frac{1}{n} D_a L^i(X^i_t, \alpha^i_t)$，同理 $\overline{Y}^i_t = -\frac{1}{n} D_a L^i(\overline{X}^i_t, \overline{\alpha}^i_t)$。由于 $\Delta \mathbf{X}_0 = 0$，我们可以对(4.29)关于时间积分并取期望，得到

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \int_0^T \bigg(\frac{1}{n} \big(D_a L^i(\overline{X}^i_t, \overline{\alpha}^i_t) - D_a L^i(X^i_t, \alpha^i_t) \big) \cdot \Delta \alpha^i_t + \frac{1}{n} \big(D_x L^i(\overline{X}^i_t, \overline{\alpha}^i_t) - D_x L^i(X^i_t, \alpha^i_t) \big) \cdot \Delta X^i_t \\ &\qquad + \big(D_i F(\overline{\mathbf{X}}_t) - D_i F(\mathbf{X}_t) \big) \cdot \Delta X^i_t + E^{F,i}_t \cdot \Delta X^i_t \bigg) dt \\ &= -\mathbb{E}\big[\Delta X^i_T \cdot \Delta Y^i_T \big] = -\mathbb{E}\big[\Delta X^i_T \cdot (D_i G(\mathbf{X}_T) - D_i G(\overline{\mathbf{X}}_T)) + E^{G,i}_T \cdot \Delta X^i_T \big]. \end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{E}^F_t = (E^{F,\ }{}_t{}^{\ i}, \dots, E^{F,\ }{}_t{}^{\ n})$ 和 $\boldsymbol{E}^G_T = (E^{G,\ }{}_T{}^{\ i}, \dots, E^{G,\ }{}_T{}^{\ n})$。对 i 求和，并利用 F 和 G 的凸性以及 (3.2)，得到估计

$$\begin{aligned} \frac{C_L}{n} \mathbb{E} \int_0^T |\Delta \boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt &\le \mathbb{E}\bigg[\int_0^T |\Delta \mathbf{X}_t| |\boldsymbol{E}^F_t| dt + |\Delta \mathbf{X}_T| |\boldsymbol{E}^G_T| \bigg] \\ &\le \frac{\delta}{2} \mathbb{E} \int_0^T |\Delta \mathbf{X}_t|^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \mathbb{E} |\Delta \mathbf{X}_T|^2 + \frac{1}{2\delta} \mathbb{E} \int_0^T |\boldsymbol{E}^F_t|^2 dt + \frac{1}{2\epsilon} \mathbb{E} |\boldsymbol{E}^G|^2, \end{aligned} \tag{4.30}$$

对每个 ϵ、$\delta > 0$。为继续推导，我们注意到 $|\Delta \mathbf{X}_t| = |\int_0^t \Delta \boldsymbol{\alpha}_s ds|$，由此可得

$$\mathbb{E}|\Delta \mathbf{X}_t|^2 \le t\mathbb{E}\int_0^T |\Delta \boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt, \tag{4.31}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T |\Delta \mathbf{X}_t|^2 dt \le \frac{T^2}{2}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta \boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt. \tag{4.32}$$

将 (4.31) 和 (4.32) 代入 (4.30) 得到

$$\frac{C_L}{n}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta \boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt \le \left(\frac{T^2\delta}{4} + \frac{T\epsilon}{2}\right)\mathbb{E}\int_0^T |\Delta \boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt + \frac{1}{2\delta}\mathbb{E}\int_0^T |\boldsymbol{E}_t^F|^2 dt + \frac{1}{2\epsilon}\mathbb{E}|\boldsymbol{E}_T^G|^2.$$

现在我们选择 $\delta = \frac{C_L}{T^2 n}$ 和 $\epsilon = \frac{C_L}{2nT}$，从而得到

$$\frac{C_L}{2n}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta \boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt \le \frac{T^2 n}{2C_L}\mathbb{E}\int_0^T |\boldsymbol{E}_t^F|^2 dt + \frac{nT}{C_L}\mathbb{E}|\boldsymbol{E}_T^G|^2.$$

代入估计式 (4.27) 和 (4.28)，证明即告完成。 □

5. Application to mean field control

本节阐述第 4 节的结果在平均场情形下的含义。我们在滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ 上工作，其中 $\mathbb{F}$ 满足通常条件，并承载相互独立的布朗运动 $W, W^1, W^2, W^3, ...$，且配备（增广）滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$，其中 $\mathcal{F}_t$。此外，我们假设 $\mathcal{F}_0$ 是无原子的。对于平均场情形，给定函数

$$L = L(x,a) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(m) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(m) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$$

并考虑一个由粒子数 $n \in \mathbb{N}$ 索引的控制问题序列。再次需要定义哈密顿量

$$H(x,p) = \sup_{a\in\mathbb{R}^d} \big(- a \cdot p - L(x,a)\big).$$

回顾一下，$m_{\mathbf{x}}^n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x^i}$ 表示向量 $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$ 的经验测度。

n^{th} 控制问题的值函数是映射 $V^n = V^n(t, \mathbf{x}) : [0,T] \times (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$，定义为

$$V^n(t,\mathbf{x}) = \inf_{\alpha=(\alpha^1,...,\alpha^n)\in\mathcal{A}^n} \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X_s^i, \alpha^i(s, X_s)) + \mathcal{F}(m_{\mathbf{X}_s}^n)\bigg) ds + \mathcal{G}(m_{\mathbf{X}_T^n})\bigg], \tag{5.1}$$

满足

$$dX_s^i = \alpha^i(s, \mathbf{X}_s)dt + dW_s^i, \quad X_t^i = x^i, \tag{5.2}$$

其中，$\mathcal{A}^n$ 表示博雷尔函数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, ..., \alpha^n) : [0,T] \times (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 的集合，这些函数使随机微分方程 (5.2) 从任意初始位置出发时存在唯一强解。与上文一样，我们还考虑 V^n 的提升，即函数 $\mathcal{V}^n = \mathcal{V}^n(t, \boldsymbol{m}) : [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$，定义为

$$\mathcal{V}^n(t, \boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, V^n(t, \cdot)\rangle.$$

当 n 较大时，预计这个 n 粒子问题可由一个均值场控制问题很好地近似，其值函数是映射 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t, m) : [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$，定义为

$$\mathcal{U}(t,m) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}^1} \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(X_s, \alpha(s, X_s)) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s))\Big) dt + \mathcal{G}(\mathcal{L}(X_s))]\bigg], \tag{5.3}$$

其中

$$dX_s = \alpha(s, X_s)ds + dW_s, \quad X_t \sim m. \tag{5.4}$$

最后，对于每个 n，我们还可以引入相应的分布式控制问题，其值函数 $\mathcal{V}^n_{\text{dist}} = \mathcal{V}^n_{\text{dist}}(t, \boldsymbol{m}) : [0,T] \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{V}^n_{\text{dist}}(t, \boldsymbol{m}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}^n_{\text{dist}}} E\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L(X^i_s, \alpha^i(s, X_s)) + \mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s}) \bigg) ds + \mathcal{G}(m_{\mathbf{X}^n_T}) \bigg], \tag{5.5}$$

满足

$$dX^i_s = \alpha^i(s, X^i_s) dt + dW^i_s, \quad \mathbf{X}_t \sim \boldsymbol{m}, \tag{5.6}$$

其中，$\mathcal{A}^n_{\text{dist}} \subset \mathcal{A}^n$ 是分布式控制的子集，即 $\alpha^i(t, \mathbf{x}) = \alpha^i(t, x^i)$。

为了陈述我们针对平均场设定的主要假设，我们考虑函数 $f = f(m) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

$$\begin{cases} \text{存在一个递增函数 } \kappa \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \text{ 使得} \\ \quad \mathbb{E}\bigg[\sup_{\overline{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)} \Big| \frac{\delta f}{\delta m}(\overline{m}, \xi^1) \Big| + \sup_{\overline{m} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)} \Big| \frac{\delta^2 f}{\delta m^2}(\overline{m}, \xi^1, \xi^2) \Big| \bigg] \le \kappa\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 dm \Big), \\ \text{whenever } (\xi^1, \xi^2) \sim m \otimes m. \end{cases} \tag{CST}$$

这里，$\frac{\delta}{\delta m}$ 表示线性导数；定义见 [8, 第2.2节。1] 或 [16, 第2.1节。1]。条件（CST）的要点是，根据 [16, 定理 2.11] 的（证明），我们有如下估计

$$|f(m) - \mathbb{E}[f(m^n_{\boldsymbol{\xi}})]| \le \frac{C}{n} \tag{5.7}$$

对于常数 C dep 仅通过其二阶矩依赖于 m，每当 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \cdots \xi^n) \sim m^{\otimes n}$。回顾一下，若函数 $\mathcal{G} = \mathcal{G}(m) : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ 满足：其提升 $\tilde{\mathcal{G}} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ 定义为 $\tilde{\mathcal{G}}(X) = \mathcal{G}(\mathcal{L}(X))$，且该提升在通常意义下是凸的，则称其为位移凸函数。我们还记得，当 $\mathcal{G}$ 光滑且位移凸时，其 Lions 导数 $D_m \mathcal{G}$ 满足

$$\mathbb{E}\Big[\big(D_m \mathcal{G}(\mathcal{L}(\xi^1), \xi^1) - D_m \mathcal{G}(\mathcal{L}(\xi^2), \xi^2) \big) \cdot (\xi^1 - \xi^2) \Big] \ge 0 \tag{5.8}$$

对于任意平方可积随机变量 ξ^1、ξ^2。

现在我们作出以下假设，它是前文所用假设 3.1 的一种对称形式。

假设 5.1。函数 L、H：$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是 C^2，且具有有界二阶导数（但一阶导数不一定有界）。此外，L 满足强制性条件

$$L(x, a) \ge -C + \frac{1}{C}|a|^2, \quad (x, a) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \tag{5.9}$$

对于某个 $C > 0$，并满足谱界

$$D^2 L(x, a) = \begin{pmatrix} D_{xx} L(x, a) & D_{xa} L(x, a) \\ D_{ax} L(x, a) & D_{aa} L(x, a) \end{pmatrix} \ge C_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{d \times d} \end{pmatrix}, \quad \textit{for all } x, a \in \mathbb{R}^d \tag{5.10}$$

或者等价地

$$\big(D_x L(x, a) - D_x L(\bar{x}, \bar{a}) \big) \cdot (x - \bar{x}) + \big(D_a L^i(x, a) - D_a L^i(\bar{x}, \bar{a}) \big) \cdot (a - \bar{a}) \ge C_L |a - \bar{a}|^2, \tag{5.11}$$

对所有 x、$\bar{x}$、a、$\bar{a} \in \mathbb{R}^d$，以及某个常数 $C_L > 0$。此外，函数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 有下界，且位移凸；C^2 连同 $D_y D_m \mathcal{F}$、$D_{mm} \mathcal{F}$、$D_y D_m \mathcal{G}$、$D_{mm} \mathcal{G}$ 均有界。此外，我们假设映射

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \ni (m, x) \mapsto D_y D_m \mathcal{G}(m, x), \quad \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (m, x, y) \mapsto D_{mm} \mathcal{G}(m, x, y) \tag{5.12}$$

对某个 $\alpha \in \in(0,1)$，局部满足 α-H ¨older 连续。最后，我们假设 $f = \mathcal{F}$、$\mathcal{G}$ 满足条件（CST）。

对于本节余下部分陈述的某些结果，我们还需要以下假设。

假设 5.2。函数

$$f(m) = D_m\mathcal{F}(m,x), \quad f(m) = D_m\mathcal{G}(m,x)$$

在 x 中一致地满足条件（CST），即使用递增函数 $\kappa\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，其与 x 无关。

为了使估计结果明确，本节采用以下记号约定。

约定 5.3。我们将使用记号

$$\begin{aligned}\|D_{pp}H\|_\infty &= \||D_{pp}H|_{op}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)},\\ \|D_{xp}H\|_\infty &= \||D_{pp}H|_{op}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)},\\ \|D_{xx}L\|_\infty &= \||D_{xx}L^i|_{op}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

我们用 $C_\mathcal{F}$ 和 $C_\mathcal{G}$ 表示常数

$$\begin{aligned}C_\mathcal{F} &= \||D_{mm}\mathcal{F}|_{op}\|_{L^\infty(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)} + \||D_yD_m\mathcal{F}|_{op}\|_{L^\infty(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d)},\\ C_\mathcal{G} &= \||D_{mm}\mathcal{G}|_{op}\|_{L^\infty(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)} + \||D_yD_m\mathcal{G}|_{op}\|_{L^\infty(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

我们用 C_S 表示常数

$$C_S = C_\mathcal{G} + T(\|D_{xx}L\|_\infty + C_\mathcal{F}),$$

并用 C_P 表示常数

$$C_P = \frac{\exp\Big(2T\big(\|D_{xp}H\|_\infty + \|D_{pp}H\|_\infty C_S\big)\Big) - 1}{2\big(\|D_{xp}H\|_\infty + \|D_{pp}H\|_\infty C_S\big)}.$$

对于带有 Poincar ´e 常数 c_0 的 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，我们用 $C_P(m)$ 表示常数 $\qquad t$

$$C_P(m) = C_P + c_0\exp\Big(2T\big(\|D_{xp}H\|_\infty + \|D_{pp}H\|_\infty C_S\big)\Big).$$

5.1. 值函数的收敛。本节中，我们证明 V^n 在某种意义下收敛到 U。我们首先应用定理 4.5 中的估计，得到以下结果：

Coro论 5.4. 在假设 5.1 下，对于每个 $(t,\boldsymbol{m}) \in [0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$，我们有

$$0 \le \mathcal{V}^n_{dist}(t,\boldsymbol{m}) - \mathcal{V}^n(t,\boldsymbol{m}) \le \frac{C(\boldsymbol{m})}{n},$$

其中常数 C 由下式给出

$$C(\boldsymbol{m}) = \left(\frac{T-t}{2}\|D_{mm}\mathcal{G}\|^2_{L^\infty} + \frac{(T-t)^2}{4}\|D_{mm}\mathcal{F}\|^2_{L^\infty}\right)\|D_{pp}H\|_\infty C_P(\boldsymbol{m})e^{(T-t)(1+2C_S+2\|D_{xp}H\|_\infty)}.$$

证明。映射 $G^n, F^n : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 由下式给出

$$G^n(\mathbf{x}) = \mathcal{G}(m^n_\mathbf{x}), \quad F^n(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(m^n_\mathbf{x})$$

是凸的（因为 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{F}$ 是位移凸的）。此外，计算

$$D_{ij}G^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n^2}D_{mm}\mathcal{G}(\mathbf{x},x^i,x^j) + \frac{1}{n}D_yD_m\mathcal{G}(m^n_\mathbf{x},x^i)1_{i=j},$$

以及对 F^n进行的类似计算，很容易得出谱估计

$$D^2G^n \le \frac{C_{\mathcal{G}}}{n} I_{nd\times nd}, \quad D^2F^n \le \frac{C_{\mathcal{F}}}{n} I_{nd\times nd}.$$

此外，我们可以估计

$$n \sum_{1\le i<j\le n} \|D_{ij}G^n\|_{L^\infty}^2 \le \frac{1}{2n}\|D_{mm}\mathcal{G}\|_{L^\infty}^2, \quad n \sum_{1\le i<j\le n} \|D_{ij}F^n\|_{L^\infty}^2 \le \frac{1}{2n}\|D_{mm}\mathcal{F}\|_{L^\infty}^2.$$

应用定理 4.5 即得所需结果。 □

也可以按以下意义比较 $\mathcal{V}^n_{\text{dist}}$ 与 $\mathcal{U}$:

命题 5.5. 假设假设 5.1 成立。对于每个 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，存在一个常数$C$，它仅取决于 m 的二阶矩，以及假设 5.1 和约定 5.3 中列出的常数，使得

$$|\mathcal{V}^n_{dist}(t, m, ..., m) - \mathcal{U}(t, m)| \le \frac{C}{n}.$$

证明. 固定 (t, m)，并令 $\alpha = \alpha(s, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为从 (t, m) 出发的均值场控制问题的一个最优解。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\boldsymbol{\alpha}^n \in \mathcal{A}^n$ 如下：$\alpha^{n,\,i}(s, x) = \alpha(s, x)$，即 $\boldsymbol{\alpha}^n = (\alpha, ..., \alpha)$。令 $\mathbf{X} = (X^1, ..., X^n)$ 为相应的状态过程，

$$dX^i_s = \alpha(s, X^i_s)ds + dW^i_s, \quad \mathbf{X}^i_t \sim m^{\otimes n},$$

此外 进一步，令 X 表示该平均场控制问题的最优状态过程 :

$$dX_s = \alpha(s, X_s)ds + dW_s, \quad X_t \sim m.$$

注意，对每个 s，$(X^1_s,...,X^n_s) \sim (\mathcal{L}(X_s))^{\otimes n}$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^n_{\text{dist}}(t, m, ..., m) &\le \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X^i_s, \alpha(s, X^i_s)) + \mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s})\bigg)ds + \mathcal{G}(m^n_{\mathbf{X}_T})\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(X_s, \alpha(s, X_s)) + \mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s})\Big)ds + \mathcal{G}(m_{\mathbf{X}^n_T})\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(X_s, \alpha(s, X_s)) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s))\Big)ds + \mathcal{G}(\mathcal{L}(X_s))\bigg] \\
&\quad + \int_t^T \mathbb{E}[\mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s}) - \mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s))]ds + \mathbb{E}[\mathcal{G}(m^n_{\mathbf{X}_T}) - \mathcal{G}(\mathcal{L}(X_T))] \\
&= \mathcal{U}(t, m) + \int_t^T \mathbb{E}[\mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s}) - \mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s))]ds + \mathbb{E}[\mathcal{G}(m^n_{\mathbf{X}_T}) - \mathcal{G}(\mathcal{L}(X_T))]
\end{aligned}$$

利用强制性条件 (5.9) 可以直接得到 $\sup_{0\le t\le T} \mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$。然后我们可以应用 (5.7) 得到

$$\mathcal{V}^n_{\text{dist}}(t, m, ..., m) \le \mathcal{U}(t, m) + \frac{C}{n}.$$

反过来，由唯一性（见命题 3.8）可知，分布式控制问题的最优解必定具有形式 $\boldsymbol{\alpha}^n = (\alpha, ..., \alpha)$，其中 $\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。

按照上述方式定义 X^i, X 。这一次，我们可以估计

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t,m) &\le \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(X_s,\alpha(s,X_s)) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s))\Big)ds + \mathcal{G}(\mathcal{L}(X_s))\bigg] \\ &= \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X_s^i,\alpha(s,X_s^i)) + \mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s})\Big)ds + \mathcal{G}(m^n_{\mathbf{X}_T})\bigg] \\ &\quad + \int_t^T \mathbb{E}[\mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s)) - \mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s})]ds + \mathbb{E}[\mathcal{G}(\mathcal{L}(X_T)) - \mathcal{G}(m^n_{\mathbf{X}_T})] \\ &= \mathcal{V}^n_{\mathrm{dist}}(t,m,...,m) + \int_t^T \mathbb{E}[\mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s)) - \mathcal{F}(m^n_{\mathbf{X}_s})]ds + \mathbb{E}[\mathcal{G}(\mathcal{L}(X_T)) - \mathcal{G}(m^n_{\mathbf{X}_T})]\end{aligned}$$

再次可以直接利用强制性条件 (5.9)，得到关于 $\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}|X_t^i|^2$ 的一个估计，该估计与 n 无关，因此我们可以再次应用 (5.7)，得到

$$\mathcal{U}(t,m) \le \mathcal{V}^n_{\mathrm{dist}}(t,m,...,m) + \frac{C}{n},$$

由此完成证明。 □

结合推论 5.4 与命题 5.5，我们得到 $\mathcal{V}^n$ 到 $\mathcal{U}$ 的如下收敛速率：

定理 5.6. 假设假设 5.1 成立。固定满足 Poincar´e 不等式的 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$。则存在一个常数 C，它仅取决于 m 的二阶矩和 Poincar´e 常数，以及假设 5.1 和约定 5.3 中列出的常数，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathcal{V}^n(t,m,...,m) - \mathcal{U}(t,m)| \le \frac{C}{n}.$$

5.2. 混沌传播。接下来，我们转而讨论混沌传播。首先介绍一些在本小节中通用的记号。为简单起见，我们取初始时刻为 0。固定 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，并且对每个 n，固定 $\boldsymbol{\xi}^n = (\xi^1,...,\xi^n)$，使得

$$\boldsymbol{\xi}^n \sim m \otimes ... \otimes m.$$

令 $\boldsymbol{\alpha}^n = (\alpha^{n,1}, ..., \alpha^{n,n}) \in \mathcal{A}^n$ 和 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^n = (\overline{\alpha}^{n,1}, ..., \overline{\alpha}^{n,n}) \in \mathcal{A}^n_{\mathrm{dist}}$ 分别表示全信息问题和分布式 n 粒子问题（初始时刻 0 的状态为 m ）的最优解。令 $\mathbf{X}^n = (X^{n,1}, ..., X^{n,n})$ 和 $\overline{\mathbf{X}}^n = (\overline{X}^{n,1}, ..., \overline{X}^{n,n})$ 表示相应的最优状态过程，即满足下式的过程

$$\begin{aligned}X_t^{n,i} &= \xi^i + \int_0^t \alpha^{n,i}(s,\mathbf{X}_s^n)ds + W_t^i, \\ \overline{X}_t^{n,i} &= \xi^i + \int_0^t \overline{\alpha}^{n,i}(s,\overline{X}_s^{n,i})ds + W_t^i.\end{aligned}$$

通过如下设定，我们将 $\boldsymbol{\alpha}^n$ 和 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^n$ 视为过程（开环优化器）：

$$\boldsymbol{\alpha}_t^n = \boldsymbol{\alpha}^n(t,\mathbf{X}_t^n), \quad \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t^n = \overline{\boldsymbol{\alpha}}^n(t,\overline{\mathbf{X}}_t^n).$$

我们还需要为均值场最优解的独立副本引入一些记号，记作 $(\alpha^{\mathrm{MF},\ i})_{i\in\mathbb{N}}$。更确切地说，在本节余下部分中，我们用$\alpha^{\mathrm{MF}} = \alpha^{\mathrm{MF}}(t,x) \in \mathcal{A}^1$ 表示控制问题 (5.3) 的最优解（在时刻 0 从初始测度 m 出发），然后定义

$$\alpha_t^{\mathrm{MF},i} = \alpha^{\mathrm{MF}}(t, X_t^{\mathrm{MF},i}),$$

其中 $X^{\mathrm{MF},\,i}$ 满足

$$X_t^{\mathrm{MF},i} = \xi^i + \int_0^t \alpha^{\mathrm{MF}}(s, X_s^{\mathrm{MF},i})ds + W_t^i.$$

我们先在平均场情形下应用定理 4.9，得到一个推论，以界定 $\alpha^{n,\,i}$ 与 $\overline{\alpha}^{n,\,i}$之间的差异。

推论 5.7. 假设 m 满足 Poincar´é 不等式，且假设 5.1 成立。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, ..., n\}$，我们有

$$\mathbb{E}\int_0^T |\alpha_t^{n,i} - \overline{\alpha}_t^{n,i}|^2\, dt \le \frac{C(m)}{n},$$

其中常数 C 由下式给出

$$C(m) = \frac{C_P T^3 \|D_{mm}\mathcal{F}\|_{L^\infty}^2}{C_L^2} + \frac{2C_P T \|D_{mm}\mathcal{G}\|_{L^\infty}^2}{C_L^2}$$

证明. 注意到

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^n \int_0^T |\alpha_t^{n,i} - \overline{\alpha}_t^{n,i}|^2\, dt \le C(m)$$

可直接由定理 4.9 得出，正如推论 5.4 可由定理 4.5 得出一样。再利用对称性即可完成证明。□

推论 5.7 将最优的全信息 n 粒子控制 $\boldsymbol{\alpha}^n$ 与最优的分布式 n 粒子控制 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^n$ 进行比较。接下来，我们将 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^n$ 与平均场优化器的独立副本进行比较。

命题 5.8. 假设 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，且假设 5.1 成立。那么存在一个常数 C，它对 m 的依赖仅通过其二阶矩体现，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, ..., n\}$

$$\mathbb{E}\int_0^T |\overline{\alpha}_t^{n,i} - \alpha_t^{MF,i}|^2\, dt \le \frac{C}{n^2}$$

证明. 在本证明中，C 表示一个与 n 无关的常数，该常数可能随推导步骤而变化。根据命题 3.5，我们知道分布式最优解 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 满足

$$\overline{\alpha}_t^i = -D_p H^i(\overline{X}_t^i, n\overline{Y}_t^i),$$

其中 $(\overline{\boldsymbol{X}}^n, \overline{\boldsymbol{Y}}^n, \overline{\boldsymbol{Z}}^n)$ 满足

$$\begin{cases} d\overline{X}_t^{n,i} = \overline{\alpha}_t^{n,i}dt + dW_t^i, \\ d\overline{Y}_t^{n,i} = -\left(\frac{1}{n}D_x L^i\big(\overline{X}_t^{n,i}, \overline{\alpha}_t^{n,i}\big) + \frac{1}{n}\mathbb{E}\big[D_m\mathcal{F}(m^n_{\overline{\mathbf{X}}_t^n}, \overline{X}_t^{n,i}) \,|\, \overline{X}_t^{n,i}\big]\right)dt + \overline{Z}_t^{n,i}dW_t^i, \\ \overline{X}_0^{n,i} = \xi^i, \quad \overline{Y}_T^{n,i} = \frac{1}{n}\mathbb{E}\big[D_m\mathcal{G}(m^n_{\overline{\mathbf{X}}_T^n}, \overline{X}_T^{n,i}) \,|\, \overline{X}_T^{n,i}\big]. \end{cases} \tag{5.13}$$

与此同时，McKean–Vlasov 动力学的最优控制最大值原理（例如，参见 [12] 中的定理 4.5）表明，$\alpha^{\mathrm{MF},\,t}{}^{\,i}$ 满足

$$\alpha_t^{\mathrm{MF},i} = -D_p H(X_t^{\mathrm{MF},i}, Y_t^{\mathrm{MF},i}),$$

其中（$X^{\mathrm{MF},\,t}{}^{\,i}$、$Y_{\mathrm{MF}_t}{}^{\,i}$、$Z^{\mathrm{MF},\,t}{}^{\,i}$）满足

$$\begin{cases} dX_t^{\mathrm{MF},i} = \alpha_t^{\mathrm{MF},i}dt + dW_t^i, \\ dY_t^{\mathrm{MF},i} = -\Big(D_x L^i\big(X_t^{\mathrm{MF},i}, \alpha_t^{\mathrm{MF},i}\big) + D_m\mathcal{F}(m_t^{\mathrm{MF}}, X_t^{\mathrm{MF},i})\Big)dt + Z_t^{\mathrm{MF},i}dW_t^i, \\ X_0^{\mathrm{MF},i} = \xi^i, \quad Y_T^{\mathrm{MF},i} = D_m\mathcal{G}(m_T^{\mathrm{MF}}, X_T^{\mathrm{MF},i}), \end{cases} \tag{5.14}$$

其中 m_t^{MF} 是随机变量 $X^{\mathrm{MF}}, {}_t \quad {}^i$ 的共同分布。我们将（5.13）改写为

$$\begin{cases} d\overline{X}_t^{n,i} = \overline{\alpha}_t^{n,i}dt + dW_t^i, \\ d\overline{Y}_t^{n,i} = -\Big(\frac{1}{n}D_xL^i\big(\overline{X}_t^{n,i}, \overline{\alpha}_t^{n,i}\big) + \frac{1}{n}D_m\mathcal{F}\big(\overline{m}_t^n, \overline{X}_t^{n,i}\big) + \frac{1}{n}E_t^{\mathcal{F},i}\Big)dt + \overline{Z}_t^{n,i}dW_t^i, \\ \overline{X}_0^{n,i} = \xi^i, \quad \overline{Y}_T^{n,i} = \frac{1}{n}D_m\mathcal{G}\big(\overline{m}_T^n, \overline{X}_T^{n,i}\big) + \frac{1}{n}E_T^{\mathcal{G},i}, \end{cases} \tag{5.15}$$

其中，$\overline{m}_t^n$ 是随机变量 $\overline{X}^n, {}_t \; {}^i$ and 的共同分布

$$E_t^{\mathcal{F},i} = \mathbb{E}\big[D_m\mathcal{F}(m^n_{\overline{\mathbf{X}}_t^n}, \overline{X}_t^{n,})|\overline{X}_t^{n,i}\big] - D_m\mathcal{F}\big(\overline{m}_t^n, \overline{X}_t^{n,i}\big),$$
$$E_T^{\mathcal{G},i} = \mathbb{E}\big[D_m\mathcal{G}(m^n_{\overline{\mathbf{X}}_T^n}, \overline{X}_T^{n,})|\overline{X}_T^{n,i}\big] - D_m\mathcal{G}\big(\overline{m}_T^n, \overline{X}_T^{n,i}\big).$$

注意到，假设 5.2 和 (5.7) 很容易推出

$$\mathbb{E}|E_t^{\mathcal{F},i}|^2 \le C/n^2, \quad \mathbb{E}|E_T^{\mathcal{G},i}|^2 \le C/n^2. \tag{5.16}$$

现在令

$$\Delta X_t^i = \overline{X}_t^{n,i} - X_t^{\mathrm{MF},i}, \quad \Delta Y_t^i = n\overline{Y}_t^{n,i} - Y_t^{\mathrm{MF},i}, \quad \Delta\alpha_t^i = \overline{\alpha}_t^{n,i} - \alpha_t^{\mathrm{MF},i},$$

注意到 n 在 ΔY_t^i 的定义中所占的因子。现在我们进行与定理 4.9 证明中类似的计算，不过，我们不再考察 $\sum_i \Delta X_t^i \cdot \Delta Y_t^i$ 的动力学；在本例中，我们只需研究 $\Delta X_t^i \cdot \Delta Y_t^i$ 的动力学。按照计算 (4.29)，可得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\bigg[\int_0^T \Big(\big(D_aL^i(\overline{X}_t^{n,i}, \overline{\alpha}_t^{n,i}) - D_aL^i(X_t^{\mathrm{MF},i}, \alpha_t^{\mathrm{MF},i})\big)\cdot\Delta\alpha_t^i + \big(D_xL^i(\overline{X}_t^{n,i}, \overline{\alpha}_t^{n,i}) - D_xL^i(X_t^{n,i}, \alpha_t^{n,i})\big)\cdot\Delta X_t^i \\ &\quad + \big(D_m\mathcal{F}(\overline{m}_t^n, \overline{X}_t^{n,i}) - D_m\mathcal{F}(m_t^{\mathrm{MF}}, X_t^{\mathrm{MF},i})\big)\cdot\Delta X_t^i + E_t^{\mathcal{F},i}\cdot\Delta X_t^i\Big)dt\bigg] \\ &= -\mathbb{E}\big[\Delta X_T^i \cdot \Delta Y_T^i\big] = -\mathbb{E}\big[\big(D_m\mathcal{G}(\overline{m}_T^n, \overline{X}_T^{n,i}) - D_m\mathcal{G}(m_T^{\mathrm{MF}}, X_T^{\mathrm{MF},i})\big)\cdot\Delta X_T^i + E_T^{\mathcal{G},i}\cdot\Delta X_T^i\big]. \end{aligned} \tag{5.17}$$

假设 5.1 中的凸性给出

$$\begin{aligned} C_L\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\alpha_t^i|^2dt \le \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \Big(&\big(D_aL^i(\overline{X}_t^{n,i}, \overline{\alpha}_t^{n,i}) - D_aL^i(X_t^{\mathrm{MF},i}, \alpha_t^{\mathrm{MF},i})\big)\cdot\Delta\alpha_t^i \\ &+ \big(D_xL^i(\overline{X}_t^{n,i}, \overline{\alpha}_t^{n,i}) - D_xL^i(X_t^{n,i}, \alpha_t^{n,i})\big)\cdot\Delta X_t^i\Big)dt\bigg]. \end{aligned}$$

结合　这一点与 (5.17)，以及 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的位移凸性（见 (5.8)），可得　s

$$C_L\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\alpha_t^i|^2dt \le -\mathbb{E}\bigg[\int_0^T E_t^{\mathcal{F},i}\cdot\Delta X_t^i dt + E_T^{\mathcal{G},i}\cdot\Delta X_T^i\bigg].$$

结合估计 (5.16) 应用杨氏不等式，即可完成证明；这与定理 4.9 的证明完全相同。□

结合推论 5.7 和命题 5.8，即可得到本小节的主要估计。

定理 5.9. 假设 $m \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 满足 Poincar´e 不等式，且假设 5.1 和 5.2 均成立。那么存在一个常数 C，它仅通过 m 的二阶矩和 Poincar´e 常数依赖于 m，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\mathbb{E}\int_0^T |\alpha_t^{n,i} - \alpha_t^{MF,i}|^2\, dt \le \frac{C}{n}.$$

注意，定理 5.9 立即蕴含了关于 $X^{\mathrm{MF},\,i} - X^{n,\,i}$ 的一个估计，其形式更接近混沌传播，即我们得到

$$\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}|X_t^{\mathrm{MF},i}-X_t^{n,i}|^2\le\frac{C}{n}.$$

特别地，这意味着关于 k 个体边缘分布在二次 Wasserstein 距离下的一个估计：

$$\mathcal{W}_2^2\Big(\mathcal{L}(X_{[0,T]}^{n,1},....,X_{[0,T]}^{n,k}),(m_{[0,T]}^{\mathrm{MF}})^{\otimes k}\Big)\le\frac{Ck}{n},\tag{5.18}$$

其中，$m_{[0,T]}^{\mathrm{MF}}=\mathcal{L}(X^{\mathrm{MF}}{}_{[0,T]}^{1})$ 是均值场最优状态过程的分布律。

注 5.10。如第 1.1.1 节所述，这两种逼近 $\mathcal{U}\approx\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}^n$ 和 $\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}^n\approx\mathcal{V}^n$ 在本质上截然不同：$\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}^n(t,m,\ldots,m)\to\mathcal{U}(t,m)$ 的收敛速率基本取决于独立同分布经验测度收敛至其极限的速率。由于我们对泛函 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 施加了光滑性假设，并依赖 [16] 的结果，因此在命题 5.5 中得到了 $O(1/n)$ 的一个界。若仅假设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 关于 Wasserstein 距离为利普希茨函数，则 $|\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}-V_{\mathrm{MF}}|$ 的收敛速率将与 $\mathbb{R}^d$ 中独立同分布随机变量的经验测度在期望 Wasserstein 距离下的收敛速率相同；众所周知，该速率会随着维数 [23] 的增加而恶化。凸性在命题 5.5 中几乎不起作用。检查证明可知，凸性仅用于保证 (5.5) 存在一个对称的最优解 $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^n$，即存在某个 $\overline{\alpha}^n\in\mathcal{A}^1$，使得 $\overline{\alpha}^{n,i}(t,x^i)=\overline{\alpha}^n(t,x^i)$。因此，若能证明（或假设）对称最优解的存在性，命题 5.5 的结论仍然成立。这表明，即使没有凸性，也应当预期界 $|\mathcal{V}_{\mathrm{dist}}^n(t,m,\ldots,m)-\mathcal{U}(t,m)|=O(1/n)$ 成立。

注 5.11. 读者可能已经注意到，推论 5.7 和命题 5.8 对 n 的依赖不同。特别是，将命题 5.8 转化为关于状态过程的估计时，可得

$$\mathcal{W}_2^2\Big(\mathcal{L}(\overline{X}_{[0,T]}^{n,1},....,\overline{X}_{[0,T]}^{n,k}),(m_{[0,T]}^{\mathrm{MF}})^{\otimes k}\Big)\le\frac{Ck}{n^2},\tag{5.19}$$

这表明，对于分布式问题，混沌传播的收敛速率优于我们在完全信息设定下得到的结果（命题 5.8）。特别地，(5.19) 对 n 的依赖与第二作者近期关于无控制设定下混沌传播的工作 [30] 相同。一个尚待解决的问题是，能否在完全信息情形下获得相同的收敛速率；也就是说，对于每个固定的 k，(5.18) 是否可以改进为 $O(1/n^2)$。

6. Application to heterogeneous doubly stochastic interactions

本节中，我们说明第 4 节的结果对一种控制问题的意义，该问题中的相互作用由图决定。我们在与上一节相同的滤过概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\mathbb{F})$ 上进行讨论。给定函数 $L\colon\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 和 $G_1,G_2,F_1,F_2\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$，以及相互作用矩阵 J^n，它是一个 $n\times n$ 对称矩阵，元素非负且对角线为零。我们定义

$$F^n(\mathbf{x}):=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n F_1(x^i)+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J_{ij}^nF_2(x^i-x^j),$$

$$G^n(\mathbf{x}):=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_1(x^i)+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J_{ij}^nG_2(x^i-x^j).$$

我们再次将哈密顿量定义为

$$H(x,p) = \sup_{a\in\mathbb{R}^d} \big(- a\cdot p - L(x,a)\big).$$

我们考虑以下由 $n \in \mathbb{N}$ 索引的控制问题序列。 n^{th} 控制问题的值函数是映射 $V^n = V^n(t, \mathbf{x}) : [0,T]\times(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$，定义为

$$V^n(t,\mathbf{x}) = \inf_{\alpha=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)\in\mathcal{A}^n} \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X_s^i,\alpha^i(s,X_s)) + F^n(\mathbf{X}_s)\bigg)ds + G^n(\mathbf{X}_T)\bigg], \tag{6.1}$$

服从动力学方程 (5.2)。如上所述，我们还考虑 V^n 的提升，即函数 $\mathcal{V}^n = \mathcal{V}^n(t,\boldsymbol{m}) : [0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$，定义为

$$\mathcal{V}^n(t,\boldsymbol{m}) = \langle \boldsymbol{m}, V^n(t,\cdot)\rangle.$$

我们定义平均场值函数 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t,m) : [0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$，其定义方式与 (5.3) 完全相同，其中函数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(m) &:= \langle m, F_1\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} F_2(x-y)\, m(dx)m(dy) \\ \mathcal{G}(m) &:= \langle m, G_1\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} G_2(x-y)\, m(dx)m(dy). \end{aligned} \tag{6.2}$$

最后，对于每个 n，我们还可以引入相应的分布式控制问题，其值函数 $\mathcal{V}^n_{\text{dist}} = \mathcal{V}^n_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m}) : [0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{V}^n_{\text{dist}}(t,\boldsymbol{m}) = \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{A}_d^n} \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X_s^i,\alpha^i(s,X_s^i)) + F^n(\mathbf{X}_s)\bigg)ds + G^n(\mathbf{X}_T)\bigg], \tag{6.3}$$

满足动力学方程 (5.6)。

我们作出以下假设，与 (5.1) 类似。

假设 6.1。函数 (L,H) 满足 (5.1) 的条件。函数 (F_1,F_2,G_1,G_2) 是凸的， C^2 具有有界二阶导数，并且此外 $G^1, G^2 \in C^{2,\ \alpha}_{loc}$ 对于某个$\alpha \in (0,1)$。相互作用矩阵 J^n 是对称的，具有非负元素且对角线上的元素为零，并且是双随机的；即，对于所有 $i = 1,\ \dots\dots,\ n,\ \sum_{j=1}^n J^n_{ij} = \sum_{j=1}^n J^n_{ji} = 1$。

这里或许最重要的一点，是假设 J^n 是双随机的。这一条件可能可以放宽为近似形式，即行和的经验测度应在某个 Wasserstein 距离下收敛到 δ_1；我们在此不进一步探讨这一推广，但可参见 [2]，其中在伊辛模型和波茨模型的背景下实现了这一想法。最重要的特殊情形是 $J^n = A^n/d_n$，此时 $d_n \in \mathbb{N}$，而 A^n 是一个 d_n-正则图的邻接矩阵。下面的引理证明了关于双随机情形的一个重要结论：分布式控制问题实际上与均值场问题相同。这与 [31, 定理 2 的证明5], 中恒等式 (4.5) 十分相似；该证明基本涵盖了 $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$和 $m = \delta_0$的情形。

引理 6.2。在假设 6.1 下，对于每个 $(t,m) \in [0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\mathcal{V}^n_{dist}(t,m,m,\dots,m) = \mathcal{U}(t,m).$$

得知这一点后，我们通过将定理 4 特化，推导出一个收敛速率。 5:

推论 6.3。在假设 6.1 下，对于每个 $(t,m) \in [0,T]\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n$ 满足庞加莱不等式的 $\boldsymbol{m}$，我们有

$$0 \le \mathcal{U}(t,m,m,\dots,m) - \mathcal{V}^n(t,m) \le C\mathrm{Tr}((J^n)^2)/n,$$

其中，常数 C 仅取决于 $T-t$、(F_1,F_2,G_1,G_2,L,H) 的二阶导数界，以及 m的 Poincar´e 常数。

再次，一种典型情形是 $J_{ij}^n = A^n/d_n$，其中 $d_n \in \mathbb{N}$，且 A^n 是某个 d_n-正则图的邻接矩阵。此时 $\mathrm{Tr}((J^n)^2) = n/d_n$，由推论 6.3 可得 $|\mathcal{U} - \mathcal{V}^n| \le C/d_n$；只要 $d_n \to \infty$，它就会趋于零。在极稀疏情形下，若 $\sup_n d_n < \infty$，我们不认为通常的平均场近似仍然成立；关于平均场博弈与控制中稠密情形和稀疏情形的讨论，参见 [32] 。

推论 6.3 的证明。根据引理 6.2，只需证明将 $\mathcal{U}$ 替换为 $\mathcal{V}^n_{\mathrm{dist}}$ 后的结论。为应用定理 4.5，我们将验证假设 3.1。首先验证 G^n 上的谱界； F^n 上的界可类似验证。回顾 J^n 是对称的，我们计算得

$$D_{ij}G^n(\mathbf{x}) = -\frac{1}{n}J_{ij}^n\big(D^2G_2(x^i - x^j) + D^2G_2(x^j - x^i)\big), \quad i \ne j,$$
$$D_{ii}G^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}D^2G_1(x^i) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n J_{ij}^n\big(D^2G_2(x^i - x^j) + D^2G_2(x^j - x^i)\big).$$

对于向量 $\mathbf{z} \in (\mathbb{R}^d)^n$，

$$\begin{aligned} &n\mathbf{z}^\top D^2G^n(\mathbf{x})\mathbf{z} \\ &= \sum_{i=1}^n z_i^\top D^2G_1(x^i)z_i + \sum_{i,j=1}^n z_i^\top J_{ij}^n\big(D^2G_2(x^i - x^j) + D^2G_2(x^j - x^i)\big)(z_i - z_j) \\ &= \sum_{i=1}^n z_i^\top D^2G_1(x^i)z_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (z_i - z_j)^\top J_{ij}^n\big(D^2G_2(x^i - x^j) + D^2G_2(x^j - x^i)\big)(z_i - z_j). \end{aligned}$$

回顾 $J_{ij}^n \ge 0$ 和 G_2 是凸的，对于每个 (i,j)，我们可推出

$$\begin{aligned} 0 &\le (z_i - z_j)^\top J_{ij}^n\big(D^2G_2(x^i - x^j) + D^2G_2(x^j - x^i)\big)(z_i - z_j) \\ &\le 2J_{ij}^n\|D^2G_2\|_\infty|z_i - z_j|^2 \\ &\le 4J_{ij}^n\|D^2G_2\|_\infty(|z_i|^2 + |z_j|^2). \end{aligned}$$

回顾 $\sum_{j=1}^n J_{ij}^n = \sum_{j=1}^n J_{ji}^n = 1$ 和 G_1 是凸的，我们可推出

$$0 \le nD^2G^n(\mathbf{x}) \le \big(\|D^2G_1\|_\infty + 4\|D^2G_2\|_\infty\big)I_{nd\times nd}.$$

最后，回顾 $i \ne j$ 时 $D_{ij}G^n$ 的形式，以及对所有 i 都有 $J_{ii}^n = 0$，可得

$$n\sum_{1\le i<j\le n}\|D_{ij}G^n\|_{L^\infty}^2 \le \frac{4}{n}\|D^2G_2\|_{L^\infty}^2\sum_{1\le i<j\le n}(J_{ij}^n)^2 = \frac{4}{n}\|D^2G_2\|_{L^\infty}^2\,\mathrm{Tr}((J^n)^2).$$

现在我们可以应用定理 4.5 来完成证明。 □

引理 6.2 的证明。我们首先验证较容易的不等式 $\mathcal{V}^n_{\mathrm{dist}}(t,m,m,\dots,m) \le \mathcal{U}(t,m)$。令 $\alpha \in \mathbb{A}^1$ 为 $\mathcal{U}$ 的任意控制。定义 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1,\dots,\alpha^n) \in \mathcal{A}^n_{\mathrm{dist}}$，使得 $\alpha^i(t,x^i) = \alpha(t,x^i)$。相应的状态过程 $\mathbf{X} = (X^1,\dots,X^n)$ 满足 (5.2)，且独立同分布，分布律与满足 (5.4) 的 $\widetilde{X}$ 相同。令 X 表示 X 的一个独立副本。然后，回顾 (6.2) 中 $\mathcal{G}$ 的形式，

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{L}(X_T)) &= \mathbb{E}\bigg[G_1(X_T) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_2(X_T - \widetilde{X}_T)\bigg] \\ &= \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_1(X_T) + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J_{ij}^nG_2(X_T - \widetilde{X}_T)\bigg] \\ &= \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_1(X_T^i) + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J_{ij}^nG_2(X_T^i - X_T^j)\bigg] = \mathbb{E}[G^n(\mathbf{X}_T)]. \end{aligned}$$

事实上，第二步是由 J^n 的行和为 1 这一假设得出的，第三步则是由对所有 i 都有 $J^n_{ii}=0$ 这一假设得出的。对 $\mathcal{F}(\mathcal{L}(X_t))$ 作类似论证，我们可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\int_t^T\Big(L(X_s,\alpha(s,X_s))+\mathcal{F}(\mathcal{L}(X_s))\Big)ds+\mathcal{G}(\mathcal{L}(X_T))\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[\int_t^T\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X^i_s,\alpha^i(s,X^i_s))+F^n(\mathbf{X}_s)\Big)ds+G^n(\mathbf{X}_T)\Big]\\&\geq \mathcal{V}^n_{\rm dist}(t,m,m,\dots,m).\end{aligned}$$

为证明反向不等式 $\mathcal{V}^n_{\rm dist}(t,m,m,\dots,m)\geq\mathcal{U}(t,m)$，固定一个最优控制 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha^1,\dots,\alpha^n)\in\mathcal{A}^n_{\rm dist}$。令 $\mathbf{X}=(X^1,\dots,X^n)$ 为相应的状态过程，它是方程 (5.2) 的解，由相互独立的布朗运动 $W^1,\dots,W^n$ 驱动。回忆一下，W 表示一个额外的独立布朗运动，并固定某个随机变量 $\xi\sim m$。现在，我们将 $\mathbf{X}=(\overline{X}^1,\dots,\overline{X}^n)$ 构造为以下方程的解

$$d\overline{X}^i_s=\alpha^i(s,\overline{X}^i_s)ds+dW_s,\quad \overline{X}^i_t=\xi.$$

这样，$\overline{X}^i\overset{d}{=}X^i$ 对每个 $i=1,\dots,n$ 都成立，尽管这些 $\overline{X}^i$ 并非独立。令 $\widetilde{\mathbf{X}}=(\widetilde{X}^1,\dots,\widetilde{X}^n)$ 为 $\mathbf{X}=(X^1,\dots,X^n)$ 的一个独立副本，并令 $\widetilde{\mathbf{X}}=(\widetilde{\overline{X}}^1,\dots,\widetilde{\overline{X}}^n)$ 为 $\mathbf{X}=(\overline{X}^1,\dots,\overline{X}^n)$ 的一个独立副本。定义

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\overline{X}^i,\quad \widetilde{\overline{X}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\widetilde{\overline{X}}^i,\quad \overline{\alpha}_s=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\alpha^i(s,\overline{X}^i_s).$$

由 G_2的凸性，并且因为对于所有 i和$\frac{1}{n}\sum_{i,\ j=1}^n J^n_{ij}=1$，$J^n_{ii}=0$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G^n(\mathbf{X}_T)]&=\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_1(X^i_T)+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J^n_{ij}G_2(X^i_T-X^j_T)\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n G_1(\overline{X}^i_T)+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J^n_{ij}G_2(\overline{X}^i_T-\widetilde{\overline{X}}^j_T)\Big]\\&\geq\mathbb{E}\Big[G_1\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\overline{X}^i_T\Big)+G_2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n J^n_{ij}(\overline{X}^i_T-\widetilde{\overline{X}}^j_T)\Big)\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[G_1(\overline{X}_T)+G_2(\overline{X}_T-\widetilde{\overline{X}}_T)\Big]\\&=\mathcal{G}(\mathcal{L}(\overline{X}_T)).\end{aligned}$$

同理，对每个 $s\in[t,T]$，$\mathbb{E}[F^n(\mathbf{X}_s)]\geq\mathcal{F}(\mathcal{L}(\overline{X}_s))$，并且

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X^i_s,\alpha^i(s,X^i_s))\Big]=\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(\overline{X}^i_s,\alpha^i(s,\overline{X}^i_s))\Big]\geq\mathbb{E}\big[L(\overline{X}_s,\overline{\alpha}_s)\big].$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^n_{\rm dist}(t,m,m,\dots,m)&=\mathbb{E}\Big[\int_t^T\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n L(X^i_s,\alpha^i(s,X^i_s))+F^n(\mathbf{X}_s)\Big)ds+G^n(\mathbf{X}_T)\Big]\\&\geq\mathbb{E}\Big[\int_t^T\Big(L(\overline{X}_s,\overline{\alpha}_s)+\mathcal{F}(\mathcal{L}(\overline{X}_s))\Big)ds+\mathcal{G}(\mathcal{L}(\overline{X}_T))\Big].\end{aligned}$$

现在，如果我们能找到某个 $\alpha\in\mathcal{A}^1$，使得 $\overline{\alpha}_s=\alpha(s,\overline{X}_s)$，那么就可以得出结论：右侧至少为 $\mathcal{U}(t,m)$，从而完成证明。

然而，我们不确定一般情况下是否能找到这样的 $\alpha \in \mathcal{A}^1$。不过，一个简单的逼近就能解决这个问题。注意，$\overline{X}$ 满足

$$d\overline{X}_s = \overline{\alpha}_s ds + dW_s, \quad \overline{X}_t = \xi.$$

令 $\overline{\alpha}^n_s$ 为 $\overline{\alpha}_s$ 在半径为 n 的球上的投影，并定义 $\overline{X}^n$ 为

$$d\overline{X}^n_s = \overline{\alpha}^n_s ds + dW_s, \quad \overline{X}^n_t = \xi.$$

显然，$\mathbb{E}\sup_{s\in[t,T]} |\overline{X}^n_s - \overline{X}_s|^2 \to 0$ 且 $\mathbb{E}\int_s^T |\overline{\alpha}^n_s - \overline{\alpha}_s|^2\, ds \to 0$。利用 (L, F, G) 的连续性及其二次增长（由二阶导数有界可知），可以直接推出

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(\overline{X}^n_s, \overline{\alpha}^n_s) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(\overline{X}^n_s))\Big) ds + \mathcal{G}(\mathcal{L}(\overline{X}^n_T))\bigg] \\ = \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(\overline{X}_s, \overline{\alpha}_s) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(\overline{X}_s))\Big) ds + \mathcal{G}(\mathcal{L}(\overline{X}_T))\bigg].\end{aligned}$$

因此，为完成证明，只需证明对每个 n，

$$\mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(\overline{X}^n_s, \overline{\alpha}^n_s) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(\overline{X}^n_s))\Big) ds + \mathcal{G}(\mathcal{L}(\overline{X}^n_T))\bigg] \geq \mathcal{U}(t, m). \tag{6.4}$$

为此，令　　我们固定 n，并找到一个博雷尔可测函数 $\widehat{\alpha}\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使其满足　g

$$\widehat{\alpha}(s,x) = \mathbb{E}[\overline{\alpha}^n_s \,|\, \overline{X}^n_s = x]. \tag{6.5}$$

事实上，根据 [5, 命题 5.1], ，存在一个联合可测版本；由于 $\overline{\alpha}^n$ 有界，我们可以取 $\widehat{\alpha}$ 为有界函数。根据马尔可夫投影定理 [5, 推论 3.7], ，我们可以找到随机微分方程的一个弱解⌢X

$$d\widehat{X}_s = \widehat{\alpha}(s, \widehat{X}_s) ds + dW_s,$$

对所有 $s \in [t,T]$都满足 $\widehat{X}_s \overset{d}{=} \overline{X}^n_s$。由 $\widehat{\alpha}$的有界性以及韦列特尼科夫的一个结果 [39], 可知，这个随机微分方程实际上在强意义下适定，因此 $\widehat{\alpha} \in \mathcal{A}^1$。利用（6.5）、富比尼定理以及（$L$， F， G）的凸性，我们得到

$$\mathbb{E}\int_t^T L(\overline{X}^n_s, \overline{\alpha}^n_s) ds \geq \mathbb{E}\int_t^T L(\overline{X}^n_s, \widehat{\alpha}(s, \overline{X}^n_s)) ds.$$

利用对所有 s都成立的事实 $\widehat{X}_s \overset{d}{=} \overline{X}^n_s$，我们推出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(\overline{X}^n_s, \overline{\alpha}^n_s) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(\overline{X}^n_s))\Big) ds + \mathcal{G}(\mathcal{L}(\overline{X}^n_T))\bigg] \\ \geq \mathbb{E}\bigg[\int_t^T \Big(L(\widehat{X}_s, \widehat{\alpha}(s, \widehat{X}_s)) + \mathcal{F}(\mathcal{L}(\widehat{X}_s))\Big) ds + \mathcal{G}(\mathcal{L}(\widehat{X}_T))\bigg].\end{aligned}$$

右端至少为 $\mathcal{U}$（t， m），从而完成（6.4）的证明。 □

7. Tradeoffs between convexity and smallness

本节旨在说明，当用某种形式的小性来取代数据的凸性时，如何获得主要估计的各种版本。

我们先非正式地讨论一下，在缺乏凸性的情况下，我们能期望得到哪些结果。首先需要指出的是，我们不能指望主要估计的各种形式在一般情况下都成立。

事实上，如果能在一般的非凸情形下得到类似定理 4.5 中的估计，就可以将其与第 5 节中的论证结合起来，得到如下形式的估计：

$$|\mathcal{V}^n_{\mathrm{dist}}(t,m,...,m)-\mathcal{U}(t,m)|\le\frac{C}{n} \tag{7.1}$$

对于成本函数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 既非凸也非位移凸的均值场控制问题。目前尚无已知的反例，但在非凸情形下得到 (7.1) 仍令人意外，因为数据非凸的均值场控制问题中的收敛问题存在严重困难，而且速率 $1/n$ 将显著优于现有估计。关于非凸情形下均值场控制的收敛问题，参见 [7] 及其中的参考文献；有限状态空间情形下的结果见 [15] 。

不过，检查定理 4.5 和 4.8 的证明可知，所得估计对 L^i、 F和 G 凸性的依赖仅体现在以下界中

$$\sup_{(t,\mathbf{x})\in[0,T]\times(\mathbb{R}^d)^n}|D^2V(t,\mathbf{x})|_{\mathrm{op}}\le\frac{C_S}{n} \tag{7.2}$$

该界已在引理 4.10 中证明。因此，如果能够在不要求凸性的情况下得到关于 D^2V 算子范数的类似界，就可以推广定理 4.5 和 4.8。若假设 T 较小（相对于数据的正则性而言），则可以实施这一策略；但为简洁起见，我们不进一步讨论这一推广。

不过，我们将在以下假设下证明定理 4.9 的一个版本。该假设以利普希茨连续性以及一个小性条件取代了 F 和 G 的凸性。

假设 7.1。函数 F、G ： $(\mathbb{R}^d)^n\to\mathbb{R}$ 有下界， C^2 且具有一阶和二阶有界导数。函数 L^i、 H^i : $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是 C^2，具有有界二阶导数（但一阶导数不一定有界）。此外， L^i 有下界并满足

$$D^2L^i(x,a)=\begin{pmatrix}D_{xx}L^i(x,a) & D_{xa}L^i(x,a)\\ D_{ax}L^i(x,a) & D_{aa}L^i(x,a)\end{pmatrix}\ge C_L\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{d\times d}\end{pmatrix},\quad \textit{for all } x,a\in\mathbb{R}^d \tag{7.3}$$

或者等价地

$$\big(D_xL^i(x,a)-D_xL^i(\bar{x},\bar{a})\big)\cdot(x-\bar{x})+\big(D_aL^i(x,a)-D_aL^i(\bar{x},\bar{a})\big)\cdot(a-\bar{a})\ge C_L|a-\bar{a}|^2, \tag{7.4}$$

对所有 x、$\bar{x}$、a、$\bar{a}\in\mathbb{R}^d$ 以及某个常数 $C_L>0$ 成立。我们记 C_F 和 C_G 为满足以下谱下界的两个常数：

$$D^2F(\mathbf{x})\ge-\frac{C_F}{n}I_{nd\times nd},\quad D^2G(\mathbf{x})\ge-\frac{C_G}{n}I_{nd\times nd}.$$

需要指出的是，在假设 7.1 下，McKean-Vlasov 正向-后向随机微分方程（3.21）的解的存在性可直接由 [11]，得到，并且它为最优性提供了一个必要条件。然而，在缺少关于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的额外凸性假设时，最大值原理是否为充分条件并不明确；也就是说，命题 3.5 的结论成立，但命题 3.6 的结论不一定成立。因此，在下面的定理中，我们不主张分布式问题的最优解存在，而只是说明：如果最优解存在，那么它将接近标准控制问题的最优解（在假设 7.1 下，后者的存在性和唯一性是众所周知的）。此外，我们还对最优状态过程假设一个 Poincar´e 不等式，随后命题 7.3 将给出一些充分条件。

定理 7.2. 假设假设 7.1 成立，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 (3.22) 的一个最优解， $\overline{\boldsymbol{\alpha}}$是全信息控制问题的一个最优（开环）控制。假设对于每个 $t\in[0,T]$， $\mathcal{L}(\mathrm{X}_t)$ 满足常数为 C_P 的 Poincar´e 不等式。此外，假设

$$\frac{1}{2}C_FT^2+C_GT<C_L. \tag{7.5}$$

那么我们有

$$\mathbb{E}\int_0^T |\boldsymbol{\alpha}_t - \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t|^2 dt \le Cn^2 \sum_{1\le i<j\le n} \big(\|D_{ij}F\|_{L^\infty}^2 + \|D_{ij}G\|_{L^\infty}^2\big),$$

其中 C仅取决于（C_P、 C_L、 C_F、 C_S、 T）。

证明。证明的开头与定理 4.9 的证明完全相同。我们将满足 $\alpha^i = -D_p H^i(X^i, NY^i)$ 的 (3.20) 的解记为 (X, Y, Z)，将满足 $\overline{\alpha} = -D_p H^i(\overline{X}^i, N\overline{Y}^i)$ 的 (3.21) 的解记为 (X, Y, $\overline{\text{Z}}$)。最后，我们设 $\boldsymbol{m}_t = (\mathcal{L}(\overline{X}_t^1)\,..., \mathcal{L}(\overline{X}_t^n))$，并设

$$\Delta\mathbf{X}_t = \overline{\mathbf{X}}_t - \mathbf{X}_t, \quad \Delta\mathbf{Y}_t = \overline{\mathbf{Y}}_t - \mathbf{Y}_t, \quad \Delta\boldsymbol{\alpha}_t = \overline{\boldsymbol{\alpha}}_t - \boldsymbol{\alpha}_t.$$

与 定理 4.9 的证明一样，我们研究过程 $\Delta\text{X}_t\Delta\text{Y}_t$ 的动力学，得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \bigg(\frac{1}{n}\big(D_a L^i(\overline{X}_t^i, \overline{\alpha}_t^i) - D_a L^i(X_t^i, \alpha_t^i)\big)\cdot\Delta\alpha_t^i + \frac{1}{n}\big(D_x L^i(\overline{X}_t^i, \overline{\alpha}_t^i) - D_x L^i(X_t^i, \alpha_t^i)\big)\cdot\Delta X_t^i \\
&\qquad + \big(D_i F(\overline{\mathbf{X}}_t) - D_i F(\mathbf{X}_t)\big)\cdot\Delta X_t^i + E_t^{F,i}\cdot\Delta X_t^i\bigg)dt \\
&= -\mathbb{E}\big[\Delta X_T^i \cdot \Delta Y_T^i\big] = -\mathbb{E}\big[\Delta X_T^i \cdot (D_i G(\mathbf{X}_T) - D_i G(\overline{\mathbf{X}}_T)) + E_T^{G,i}\cdot\Delta X_T^i\big].
\end{aligned}$$

其中 $E^{F}{}_{,t}{}^{i}$ 和 $E^{G}{}_{,T}{}^{i}$ 按照定理 4.9 的证明中的定义，并满足

$$\mathbb{E}|E_t^{F,i}|^2 \le C_P\mathbb{E}[\sum_{j\ne i}|D_{ij}F(\mathbf{X}_t)|^2], \tag{7.6}$$

$$\mathbb{E}|E_T^{G,i}|^2 \le C_P\mathbb{E}[\sum_{j\ne i}|D_{ij}G\mathbf{X}_T)|^2]. \tag{7.7}$$

与定理 4.9 的证明不同，这次我们无法利用 F 和 G 的凸性来控制D_iF 和 D_iG 项。相反，对 i 求和并使用假设 7.1 只能得到

$$\begin{aligned}
\frac{C_L}{n}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt &\le \mathbb{E}\bigg[\int_0^T |\Delta\mathbf{X}_t||\boldsymbol{E}_t^F|dt + |\Delta\mathbf{X}_T||\boldsymbol{E}_T^G|\bigg] \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\bigg[\int_0^T \Delta X_t^i\cdot\big(D_iF(\overline{\mathbf{X}}_t) - D_iF(\mathbf{X}_t)\big)\,dt - \Delta X_t^i\cdot\big(D_iG(\overline{\mathbf{X}}_T) - D_iG(\mathbf{X}_T)\big)\bigg] \\
&\le \frac{\delta}{2n}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\mathbf{X}_t|^2 dt + \frac{\epsilon}{2n}\mathbb{E}|\Delta\mathbf{X}_T|^2 + \frac{n}{2\delta}\mathbb{E}\int_0^T |\boldsymbol{E}_t^F|^2 dt + \frac{n}{2\epsilon}\mathbb{E}|\boldsymbol{E}_T^G|^2 \\
&\quad + \frac{C_F}{n}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\mathbf{X}_t|^2 dt + \frac{C_G}{n}\mathbb{E}|\Delta\mathbf{X}_T|^2,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

对任意 δ、 $\epsilon > 0$均成立。我们使用以下估计

$$\mathbb{E}|\Delta\mathbf{X}_t|^2 \le t\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt, \tag{7.9}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\mathbf{X}_t|^2 dt \le \frac{T^2}{2}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt. \tag{7.10}$$

以获得

$$\begin{aligned}
\frac{C_L}{n}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt &\le \bigg(\frac{T^2\delta}{4n} + \frac{T\epsilon}{2n} + \frac{C_F T^2}{2n} + \frac{C_G T}{n}\bigg)\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt \\
&\quad + \frac{n}{2\delta}\mathbb{E}\int_0^T |\boldsymbol{E}_t^F|^2 dt + \frac{n}{2\epsilon}\mathbb{E}|\boldsymbol{E}_T^G|^2.
\end{aligned}$$

利用假设（7.5），我们可以将 ϵ, δ 取足够小，使得 $C < C_L$，其中 C 定义为

$$C = \frac{T^2\delta}{4} + \frac{T\epsilon}{2} + \frac{C_F T^2}{2} + C_G T.$$

这就得到

$$\frac{C_L - C}{n}\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt \le \frac{n}{2\delta}\mathbb{E}\int_0^T |\boldsymbol{E}_t^F|^2 dt + \frac{n}{2\epsilon}\mathbb{E}|\boldsymbol{E}_T^G|^2.$$

回顾估计式 (7.6) 和 (7.7)，证明即告完成。 □

当然，要使这一结果有用，就需要对最优控制状态过程的 Poincar´e 常数给出一个（无维度依赖的）估计，且不能像引理 4.12 的证明那样依赖凸性。下面的命题在以下假设下给出了这样的结果：

$$\begin{aligned} \|D_i F\|_{L^\infty} \le \frac{C_0}{n}, \quad \|D_{ii} F\|_{L^\infty} \le \frac{C_0}{n}, \\ \|D_i G\|_{L^\infty} \le \frac{C_0}{n}, \quad \|D_{ii} G\|_{L^\infty} \le \frac{C_0}{n} \end{aligned} \tag{7.11}$$

对每个 $i = 1, ..., n$，且

$$|D_x H^i(x, 0)| \le C_0, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{7.12}$$

对于某个常数 C_0。请注意，对于具有有界的一阶和二阶导数的函数，这些条件在平均场情形下均成立；例如，若 $F(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(m_{\mathbf{x}}^n)$，则 $\|D_i F\|_\infty \le \frac{1}{n}\|D_m \mathcal{F}\|_\infty$

命题 7.3. 假设假设 7.1 成立，且 (7.11) 和 (7.12) 成立。设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 (3.22) 的一个最优解，$\mathbf{X}$ 是相应的状态过程。那么存在一个常数 C_P，仅依赖于 C_0、$\|D_{xx}H\|_\infty$、$\|D_{xp}H\|_\infty$、$\|D_{pp}H\|_\infty$、d 和 T，使得 $\mathcal{L}(\mathbf{X}_t)$ 对每个 $0 \le t \le T$ 都满足常数为 C_P 的 Poincar´e 不等式。

证明. 在本证明中，C 表示一个可能随行而变、但仅依赖于命题 7.3 中所述参数的常数。为简单起见，我们给出特殊情形 $d = 1$ 下的证明；一般情形的论证相同，但记号更多。我们还假设 DV 和 D^2V 均为 $C^{1,\,2}$，这一假设很容易通过采用定理 4.5 证明中的光滑化论证予以去除。

我们再次利用这一观察：最优控制 $\boldsymbol{\alpha}$ 必须满足 $\alpha^i(t,x) = -D_p H^i(x, nDv^i(t,x))$，其中某个解 v^i 满足方程 (3.19)。固定 i 并令 $w^1 = Dv^i$，对 (3.19) 关于空间变量求导可得

$$\begin{cases} -\partial_t w^1 - \Delta w^1 + \frac{1}{n} D_x H^i(x, nw^1) + D_p H^i(x, nw^1) Dw^1 = DF^i(t,x), \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ w^1(T,x) = DG^i(t,x). \end{cases}$$

回忆 $dX_t^i = \alpha_t^i dt + dW_t^i$，我们看到 $Y_t^1 := w^1(t, X_t^i)$ 和 $Z_t^1 := Dw^1(t, X_t^i)$ 满足

$$dY_t^1 = \left(\frac{1}{n} D_x H^i(X_t^i, nY_t^1) - DF^i(t, X_t^i)\right) dt + Z_t^1 dW_t^i,$$

终端条件为 $Y_T = D_i G(X_T^i)$。由于 $|D_i G| \le C_0/n$、$|D_i F| \le C_0/n$ 和 $|\frac{1}{n} D_x H^i(X_t^i, nY_t)| \le C_0/n + \|D_{xp}H^i\|_\infty Y_t^i$，通过标准的 BSDE 论证（展开 $d|Y_t|^2$）可得

$$\left\| \mathbb{E}\left[\int_t^T |Z_s^1|^2 ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \right\|_{L^\infty} \le \frac{C}{n^2}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{7.13}$$

现在我们再次对偏微分方程求导，得到 $w^2 := D^2 v^i$ 满足

$$\begin{cases} -\partial_t w^2 - \Delta w^2 + \frac{1}{n} D_{xx} H^i(x, nw^1) + D_p H^i(x, nw^1) Dw^2 \\ \qquad +2D_{xp} H^i(x, nDv^i) w^2 + nD_{pp} H^i(x, nw^1)|w^2|^2 = D^2 F^i(t,x), \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ w^2(T,x) = D^2 G^i(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

因此，过程 $Y^2 = w^2(t, X_t)$ 和 $Z^2 = Dw^2(t, X_t)$ 满足

$$dY_t^2 = \left(\frac{1}{n} D_{xx} H^i(x, nY_t^1) + 2D_{xp} H^i(x, nY_t^1) Y_t^2 + nD_{pp} H^i(x, nY_t^1)|Z^1|^2 - D^2 F^i(t, X_t) \right) dt + Z_t^2 dW_t^i,$$

其终端条件为 $Y_T^2 = D^2 G^i(X_T^i)$。积分并取条件期望可得

$$\begin{aligned} Y_t^2 = \mathbb{E}\Bigg[D^2 G(T, X_T^i) - \int_t^T \Bigg(& \frac{1}{n} D_{xx} H^i(X_s^i, nY_s^i) \\ & + 2D_{xp} H^i(X_s^i, nY_s^1) Y_s^2 + nD_{pp} H^i(X_s^i, nY_s^1)|Z_s^1|^2 - D^2 F^i(s, X_s^i) \Bigg) ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Bigg]. \end{aligned} \tag{7.14}$$

利用 (7.13)，我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T nD_{pp} H^i(X_s^i, nY_s^i)|Z_s^1|^2 \, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t \right] \le \frac{C}{n},$$

此外，由 (7.11) 和 (7.12) 可得

$$\|D^2 F^i(t, X_t)\|_{L^\infty} \le C_0/n, \quad \|D^2 G^i(t, X_t)\|_{L^\infty} \le C_0/n.$$

因此，由 (7.14) 和格朗沃尔不等式，我们得到估计 $|Y_t^2| \le C/n$ ，对所有 t 几乎必然成立，由此可推得 $\|D^2 v^i\|_{L^\infty} \le C/n$。对最优控制 α^i 求导即可完成证明，得到

$$D\alpha^i(t,x) = -D_{xp} H^i(x, nDv^i(t,x)) - nD_{pp} H^i(x, nDv^i(t,x)) D^2 v^i(t,x) \le C,$$

然后应用引理 4.12。 □

Appendix A. Well-posedness of maximum principle FBSDE

本附录包含命题 3.7 的证明。该命题指出，在假设 3.1 下，McKean-Vlasov 正向-后向随机微分方程 (3.7) 实际上存在唯一解。

命题 3.7 的证明。为证明唯一性，我们假设有两个解 (X, Y, Z) 和 (X, Y, Z)。令 $\Delta X = X - \overline{X}$ 和 $\Delta Y = Y - \overline{Y}$。此外，设 $\alpha_t^i = -D_p H^i(X_t^i, nY_t^i)$，$\overline{\alpha}_t^i = -D_p H^i(\overline{X}_t^i, n\overline{Y}_t^i)$，和 $\Delta \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} - \overline{\boldsymbol{\alpha}}$。令 $(\mathcal{F}_t^i)_{t \in [0,T]}$ 表示由 $(W_t^i)_{t \in [0,T]}$ 生成的滤过。我们计算

$$\begin{aligned} d(\Delta X_t^i \cdot \Delta Y_t^i) &= \Big(\Delta Y_t^i \Delta \alpha_t^i - \frac{1}{n}(D_x L^i(X_t^i, \alpha_t^i) - D_x L^i(\overline{X}_t^i, \overline{\alpha}_t)) \cdot \Delta X_t^i \\ &\qquad - \mathbb{E}[D_i F(X_t) - D_i F(\overline{X}_t) \,|\, \mathcal{F}_t^i] \cdot \Delta X_t^i \Big) dt + dM_t^i \\ &= \Big(-\frac{1}{n}(D_a L^i(X_t^i, \alpha_t^i) - D_a L^i(\overline{X}_t^i, \overline{\alpha}_t^i)) \cdot \Delta \alpha_t^i - \frac{1}{n}(D_x L^i(X_t^i, \alpha_t^i) - D_x L^i(\overline{X}_t^i, \overline{\alpha}_t)) \cdot \Delta X_t^i \\ &\qquad - \mathbb{E}[D_i F(X_t) - D_i F(\overline{X}_t) \,|\, \mathcal{F}_t^i] \cdot \Delta X_t^i \Big) dt + dM_t^i \end{aligned}$$

其中 M^i 是一个鞅。这里我们用到了这样一个事实： α_t^i 使 $a \mapsto -a\cdot nY_t^i - L^i(X_t^i, a)$ 取得最大值，因此 $Y_t^i = -\frac{1}{n}D_aL^i(X_t^i,\alpha_t^i)$，同理 $\overline{\alpha}_t^i = -\frac{1}{n}D_aL^i(\overline{X}_t^i,\overline{\alpha}_t^i)$。我们还用到了以下恒等式

$$\mathcal{F}^i(X_t^i, \boldsymbol{m}_t) = \mathbb{E}[D_iF(\mathbf{X}_t)\,|\,X_t^i] = \mathbb{E}[D_iF(\mathbf{X}_t)\,|\,\mathcal{F}_t^i],$$

前者源自 $\mathcal{F}^i$ 的定义，后者则源自 (X^j) 的独立性以及 $j\neq i$ 和 $\mathcal{F}_t^i$ 关于 X_t^i 的可测性。积分、对 i 求和并取期望后，我们得到

$$\begin{aligned}
&C_L\mathbb{E}\int_0^T |\Delta\boldsymbol{\alpha}_t|^2dt\\
&\quad\le -\mathbb{E}\bigg[\int_0^T\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[D_iF(\mathbf{X}_t) - D_iF(\overline{\mathbf{X}}_t)\,|\,\mathcal{F}_t^i]\cdot\Delta X_t^i\,dt + \sum_{i=1}^n\big(\mathbb{E}[D_iG(\mathbf{X}_T) - D_iF(\overline{\mathbf{X}}_T)\,|\,\mathcal{F}_T^i]\cdot\Delta X_T^i\big)\bigg]\\
&\quad= -\mathbb{E}\bigg[\int_0^T\sum_{i=1}^n (D_iF(\mathbf{X}_t) - D_iF(\overline{\mathbf{X}}_t))\cdot\Delta X_t^i\,dt + \sum_{i=1}^n (D_iG(\mathbf{X}_T) - D_iG(\overline{\mathbf{X}}_T))\cdot\Delta X_T^i\bigg]\\
&\quad\le 0,
\end{aligned}$$

因此 $\Delta\boldsymbol{\alpha} = 0$。但一旦我们知道 $\Delta\alpha = 0$，显然 $\Delta\mathbf{X} = 0$，这很容易推出实际上 $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = (\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$。

现在我们转而讨论存在性。若除假设 3.1 外，还假设 F 和 G 满足利普希茨条件，则存在性可直接由 [11] 的主要结果推出。当 F 和 G 不满足利普希茨条件，但如假设 3.1 所示为凸函数且二阶导数有界时，我们可以用序列 $F^{(k)}$、$G^{(k)}$ 近似 F 和 G，使得

(1) $F^{(k)}$ 和 $G^{(k)}$ 属于 $C^2((\mathbb{R}^d)^n)$，且满足利普希茨条件；(2) 对每个 $k\in\mathbb{N}$，$0\le D^2F^{(k)}\le C$、$0\le D^2G^{(k)}\le C$ 均满足 C，其中 C 与 k 无关；(3) $F^{(k)}$ 和 $G^{(k)}$ 有统一的下界，该下界与 k 无关；(4) $F = F^{(k)}$ 和 $G = G^{(k)}$ 在 $(\mathbb{R}^d)^n$ 中半径为 k 的球上。

然后，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，我们都可以构造一个三元组 $(\mathbf{X}^{(k)},\mathbf{Y}^{(k)},\mathbf{Z}^{(k)})$，使其满足

$$\begin{cases}
dX_t^{(k),i} = -D_pH^i(X_t^{(k),i}, NY_t^{(k),i})dt + dW_t^i,\ ,\\
dY_t^{(k),i} = -\big(\frac{1}{n}D_xL^i\big(X_t^{(k),i}, -D_pH^i(X_t^{(k),i}, NY_t^{(k),i})\big) + \mathcal{F}^{(k),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)})\big)dt + Z_t^{(k),i}dW_t^i,\\
X_0^{(k),i} = \xi^i,\quad Y_T^i = \mathcal{G}^{(k),i}(X_T^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)}),
\end{cases}\tag{A.1}$$

其中

$$\boldsymbol{m}_t^{(k)} = (\mathcal{L}(X_t^{(k),1}),...,\mathcal{L}(X_t^{(k),n})),$$

并且 $\mathcal{F}^{(k),\,i}$、$\mathcal{G}^{(k),\,i}$：$\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)^n\to\mathbb{R}^d$ 由下式给出

$$\mathcal{F}^{(k),i}(x,\boldsymbol{m}^{(k)}) = \langle\boldsymbol{m}^{(k),-i}, D_iF^{(k)}\rangle(x),\quad \mathcal{G}^{(k),i}(x,\boldsymbol{m}^{(k)}) = \langle\boldsymbol{m}^{(k),-i}, D_iG^{(k)}\rangle(x)$$

我们的目标是证明序列 $(\mathbf{X}^{(k)},\mathbf{Y}^{(k)},\mathbf{Z}^{(k)})$ 在 $\mathcal{S}^2\times\mathcal{S}^2\times L^2$ 中是柯西序列，这显然将推出存在性。事实上，为了做到这一点，我们将引入一个额外假设，即 $\xi^i\in L^p$ 对某个 $p>2$ 成立。稍后我们将通过逼近去掉这一假设。我们令 $\alpha_t^{(k),\,i} = -D_pH^i(X_t^{(k),\,i}, nY_t^{(k),\,i})$，并且对于 $k,j\in\mathbb{N}$，令 $\Delta^{j,\,k}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(j)} - \mathbf{X}^{(k)}$，对于 $\Delta^{j,\,k}\mathbf{Y}$、$\Delta^{j,\,k}\boldsymbol{\alpha}$、$\Delta^{j,\,k}\mathbf{Z}$ 也同样处理。完全按照唯一性论证中的做法展开 $d(\Delta^{j,\,k}\mathbf{X}\cdot\Delta^{j,\,k}\mathbf{Y})$

如上所述，我们得到以下估计

$$C_L\mathbb{E}\int_0^T |\Delta^{j,k}\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt \le \mathbb{E}\Big[\int_0^T \sum_{i=1}^n \Delta^{j,k}X_t^i \cdot (\mathcal{F}^{(j),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)}) - \mathcal{F}^{(k),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)}))\big)dt + \sum_{i=1}^n \Delta^{j,k}X_T^i \cdot (\mathcal{G}^{(j),i}(X_T^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)}) - \mathcal{G}^{(k),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)}))\Big] \quad \text{(A.2)}$$

将杨氏不等式应用于 (A.2)，并结合观察结果 $\Delta^{j,\ k}X_t^i = \int_0^t \Delta^{j,\ k}\alpha_t^i\, dt$，我们可以得到一个与 k 和 j 无关的常数 C，使得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T |\Delta^{j,k}\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt &\le C\mathbb{E}\Big[\int_0^T \sum_{i=1}^n |\mathcal{F}^{(j),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(j)}) - \mathcal{F}^{(k),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)})|^2\, dt \\
&\qquad + \sum_{i=1}^n |\mathcal{G}^{(j),i}(X_T^{(k),i}, \boldsymbol{m}_T^{(j)}) - \mathcal{G}^{(k),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_T^{(k)})|^2\Big] \\
&= C\mathbb{E}\Big[\int_0^T \sum_{i=1}^n |\mathbb{E}[D_iF^{(j)}(\mathbf{X}_t^{(k)}) - D_iF^{(k)}(\mathbf{X}_t^{(k)}) \,|\, \mathcal{F}_t^i]|^2\, dt \\
&\qquad + \sum_{i=1}^n |\mathbb{E}[D_iG^{(j)}(\mathbf{X}_T^{(k)}) - D_iG^{(k)}(\mathbf{X}_T^{(k)}) \,|\, \mathcal{F}_T^i]|^2\Big] \\
&\le C\mathbb{E}\Big[\int_0^T \sum_{i=1}^n |D_iF^{(j)}(\mathbf{X}_t^{(k)}) - D_iF^{(k)}(\mathbf{X}_t^{(k)})|^2\, dt \\
&\qquad + \sum_{i=1}^n |D_iG^{(j)}(\mathbf{X}_t^{(k)}) - D_iG^{(k)}(\mathbf{X}_t^{(k)})|^2\Big] \\
&\le C\mathbb{E}\Big[\int_0^T (1+|\mathbf{X}_t^{(k)}|^2)1_{\{|\mathbf{X}_t^{(k)}|\ge k\wedge j\}}dt + (1+|\mathbf{X}_T^{(k)}|^2)1_{\{|\mathbf{X}_T^{(k)}|\ge k\wedge j\}}\Big]. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

显然，

$$\|\Delta^{j,k}\mathbf{X}\|_{\mathcal{S}^2} + \|\Delta^{j,k}\mathbf{Y}\|_{\mathcal{S}^2} + \|\Delta^{j,k}\mathbf{Z}\|_{L^2} \le C\|\Delta^{j,k}\boldsymbol{\alpha}\|_{L^2},$$

因此，事实上，(A.3) 表明，只要证明$^{(k)}$，序列 ($\mathrm{X}^{(k)}$、$\mathrm{Y}^{(k)}$、$\mathrm{Z}^{(k)}$) 就是柯西序列

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T (1+|\mathbf{X}_t^{(k)}|^2)1_{\{|\mathbf{X}_t^{(k)}|\ge k\}}dt + (1+|\mathbf{X}_T^{(k)}|^2)1_{\{|\mathbf{X}_T^{(k)}|\ge k\}}\Big] \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

这　　进而可由估计式推出（通过一致可积性论证）　　te

$$\sup_k \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|\mathbf{X}_t^{(k)}|^p\Big] < \infty, \qquad \text{(A.4)}$$

对于某个 $p > 2$。为此，我们首先注意到，将 $k = 1$ 代入 (A.2) 已可得到较弱的估计

$$\sup_k \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|\mathbf{X}_t^{(k)}|^2\Big] < \infty. \qquad \text{(A.5)}$$

由此可见，这些函数

$$F^{(k),i}(\cdot) = \langle m^{(k),-i}, F\rangle, \quad G^{(k),i}(\cdot) = \langle m^{(k),-i}, G\rangle$$

满足

$$|F^{(k),i}(x)| \le C(1+|x|^2), \quad |DF^{(k),i}(x)| \le C(1+|x|), \quad |D^2F^{(k),i}(x)| \le C,$$
$$|G^{(k),i}(x)| \le C(1+|x|^2), \quad |DG^{(k),i}(x)| \le C(1+|x|), \quad |D^2G^{(k),i}(x)| \le C, \tag{A.6}$$

对于某个与 k 独立的 C。但根据引理 4.11，我们知道

$$\alpha_t^{(k),i} = -D_pH^i(X_t^{(k),i}, nDv^{(k),i}(t, X_t^{(k),i})),$$

其中 $v^{(k),\,i}$ 满足偏微分方程

$$\begin{cases} -\partial_t v^{(k),i} - \Delta v^{(k),i} + \frac{1}{n}H^i(x, nDv^{(k),i}) = F^{(k),i}(t,x), \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ v^{(k),i}(T,x) = G^i(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

由 (A.6) 可推得 $v^{(k),\,i}$ 满足

$$|Dv^{(k),i}(x)| \le C(1+|x|)$$

对于某个与 k 无关的常数 C，因此对每个 k，我们有 $|\alpha^{(k),\,t}{}^{i}| \le C(1+|X^{(k),\,t}{}^{i}|)$。由于 $dX^{(k),\,t}{}^{i} = \alpha^{(k),\,t}{}^{i}dt + dW_t^i$ 且 $X^{(k),\,0}{}^{i} = x^i$，由此可按标准方法证明 (A.4) 成立。

这就完成了 $\xi^i \in L^p$ 对某个 $p > 2$ 成立这一特殊情形下的证明。为去除这一附加假设，我们再次进行逼近（此处沿用证明前文中的记号），对每个 $k \in \mathbb{N}$ 求解方程

$$\begin{cases} dX_t^{(k),i} = -D_pH^i(X_t^{(k),i}, NY_t^{(k),i})dt + dW_t^i, \ , \\ dY_t^{(k),i} = -\big(\frac{1}{n}D_xL^i\big(X_t^{(k),i}, -D_pH^i(X_t^{(k),i}, NY_t^{(k),i})\big) + \mathcal{F}^{(k),i}(X_t^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)})\big)dt + Z_t^{(k),i}dW_t^i, \\ X_0^{(k),i} = \xi^{(k),i}, \quad Y_T^i = \mathcal{G}^{(k),i}(X_T^{(k),i}, \boldsymbol{m}_t^{(k)}), \end{cases} \tag{A.7}$$

其中 $\xi^{(k),\,i} = \xi^i 1_{|\xi^i| \le k}$。按照上文的定义，$\Delta^{j,\,k}\boldsymbol{\alpha}$、$\Delta^{j,\,k}\boldsymbol{X}$、$\Delta^{j,\,k}\boldsymbol{Y}$，进行完全相同的计算（展开 $\Delta^{j,\,k}\boldsymbol{X} \cdot \Delta^{j,\,k}\boldsymbol{Y}$ 的动力学）后得到

$$\mathbb{E}\bigg[\int_0^T |\Delta^{j,k}\boldsymbol{\alpha}_t|^2 dt\bigg] \le C\mathbb{E}[|\Delta^{j,k}\boldsymbol{\xi}||\Delta^{j,k}\boldsymbol{Y}_0|].$$

对右端应用 H¨older 不等式，并利用序列 $\boldsymbol{Y}_0^{(k)}$ 在 L^2 中有界这一事实，可知解序列是柯西序列，从而可以取极限并完成证明。□

References

[1] A. Aurell、R. Carmona 和 M. Lauriere。随机 graphon 博弈：II. 线性二次情形。 *Applied Mathematics & Optimization* 85 3 1 33, 2022

[2] A. Basak 和 S. Mukherjee。波茨模型平均场的普适性。 *Probability Theory and Related Fields* 168 3 557 600, 2017

[3] E. Bayraktar、R. Wu 和 X. Zhang。具有 graphon 相互作用的前向-后向随机微分方程的混沌传播。 *arXiv preprint arXiv:2202.08163*，2022年。[4] A. Bensoussan。 *Stochastic control of partially observable systems*。剑桥大学出版社，1992年。[5] G. Brunick 和 S. Shreve。用随机微分方程的解模仿 Itˆo 过程。 *The Annals of Applied Probability* 23 4 1584 1628, 2013

[6] P. Cardaliaguet。 *On the Convergence of Open Loop Nash Equilibria in Mean Field Games with a Local Coupling*，第105–122页。2019年7月。[7] P. Cardaliaguet、S. Daudin、J. Jackson 和 P. Souganidis。McKean–Vlasov 动力学最优控制的代数收敛速率，2022年。[8] P. Cardaliaguet、F. Delarue、J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions。 *The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games: (AMS-201)* 2019

[9] P. Cardaliaguet 和 P. Souganidis。值函数的正则性及平均场控制问题的定量混沌传播。 *arXiv preprint arXiv:2204.01314*，2022年。

[10] R. Carmona。
Lectures on BSDEs Stochastic Control and Stochastic Differential Games with Financial Appli-，[11]。
cations 2016 *Electronic Commu-*
SIAM, *nications in Probability* 18 1 15, 2013 。

[12] R. Carmona 和 F. Delarue。平均场前向-后向随机微分方程。 *The Annals of Probability*, （无）：–。[13] R. Carmona 和 F. Delarue。前向-后向随机微分方程与受控 McKean–Vlasov 动力学。
Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I : Mean Field FBSDEs，第43卷第5期：2647–2700，2015年。
Control and Games 2018 R.
Carmona 和 F. Delarue。[14]， *Séminaire de probabilités XLVI*，[15]。施普林格，
ESAIM: Control Optimisation and Calculus。[16] P.
of Variations 2021
Cattiaux 和 A. Guillin。半对数凹马尔可夫扩散。载于 *The Annals of Applied Probability*，第231–292页。施普林格，2014年。[17] A. Cecchin。有限状态 n 人与平均场控制问题。 *The Annals of Probability*，[18]，
arXiv preprint arXiv:2108.02992。[19] J.-F. Chassagneux、L. Szpruch 和 A. Tse。通过测度空间上的微分学实现弱定量混沌传播。¨，2022年。 *Mathematics of Operations Research*F. Delarue、D. Lacker 和 K. Ramanan。从主方程到平均场博弈极限理论：大偏差与测度集中。[20]，第48卷第1期：211–263，2020年。 *Dynamic Games*
and Applications 3 4 523 536, 2013 M. F.

Djete。通过控制和公共噪声产生相互作用的大规模群体博弈：收敛结果以及开环控制与闭环控制的等价性。[21]，2021年。
*Controlled Markov processes and viscosity solutions*M. F. Djete、D. Possama[22] ı 和 X. Tan。McKean–Vlasov最优控制：极限理论及不同表述之间的等价性。 *Controlled Markov processes and viscosity solutions*，2022年。[23] E. Feleqi。多个参与者群体的遍历平均场博弈方程的推导。*Probability Theory and Related Fields*，（）：–。[24] W. H. Fleming 和 H. M. Soner。 *Partial differential equations of parabolic type*。施普林格，1992年。[25] W. H. Fleming 和 H. M. Soner。 *arXiv preprint*
arXiv:2006.03964 2020 ，第25卷。

施普林格科学与商业媒体，2006年。[26] N. Fournier 和 A. Guillin。经验测度在 Wasserstein 距离下的收敛速率。
Journal of Applied Probability，第162卷第3期：707–738，2015年。[27] A. Friedman。´。Prentice-Hall，1964年。
*arXiv preprint arXiv:1003.3852*S. Gao、R. F. Tchuendom 和 P. E. Caines。线性二次 graphon 场博弈。[28]。
*SIAM Journal on Control and Optimization*M. Germain、H. Pham 和 X. Warin。测度空间上偏微分方程粒子近似的收敛速率。[29]，第59卷第4期：992–1008，2022年。 *The Annals of Applied*
Probability 30 4 1693 1761, 2020 N.

Gozlan 和 C. L[30] eonard。输运不等式：综述。[31]，2010年。 *arXiv preprint*
arXiv:2206.01260 2022 D.

Lacker。受控 McKean–Vlasov 动力学的极限理论。[32]，第55卷第3期：1641–1672，2017年（）：–。
*Mathematics of Operations Research*D. Lacker。闭环纳什均衡收敛至平均场博弈极限的问题。[33]，（）：–。
*arXiv preprint arXiv:2204.09642*D. Lacker。平均场扩散的层级、熵与定量混沌传播，2021年。[34] D. Lacker、S. Mukherjee 和 L. C. Yeung。通过对数凹性实现平均场近似。 *Japanese journal of mathematics*。[35] D. Lacker 和 A. Soret。大型图和稀疏情形下随机博弈的案例研究：平均场与稀疏状态。 *Russian Mathematical Surveys*，第47卷第2期：1530–1565，2022年。[36] D. Lacker 和 A. Soret。随机 graphon 博弈的标签-状态表述及大型网络上的近似均衡。
Journal of Statistical Physics，2022年。[37] J.-M. Lasry 和 P.-L. Lions。平均场博弈。
Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications，第2卷第1期：229–260，2007年。[38] J.-L. Lions。分布式系统的最优控制。¨，第28卷第4期：13，1973年。 *arXiv preprint arXiv:2105.00484*R. I. Oliveira 和 G. H. Reis。平均度发散的随机图上的相互作用扩散：水动力学与大偏差。[39]，第176卷第5期：1057–1087，2019年。 *Sbornik:*
Mathematics 1981 H. Pha

m。[40]，第61卷。施普林格科学与商业媒体，2009年。 *Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations*
D. Possamaı 和 L. Tangpi。平均场博弈的非渐近收敛速率：弱表述与 McKean–Vlasov倒向随机微分方程。，2021年。A. Veretennikov。关于随机积分方程解的强解与显式公式。。J. Yong 和 X. Y. Zhou。，第43卷。施普林格科学与商业媒体，1999年。

The University of Texas at Austin
Email address: jjackso1@utexas.edu

Columbia University*Email address*:
daniel.lacker@columbia.edu