arXiv:2301.02908v1 [math.FA] 7 Jan 2023

勒贝格空间的动力学性质及若干非多孔子集类

STEFAN IVKOVI´C、SERAP ¨OZTOP 和 SEYYED MOHAMMAD TABATABAIE*

Abstract. 本文中，我们在一般的勒贝格空间中引入若干类非σ多孔子集。此外，我们研究算子的一些线性动力学，并证明，在 L^p空间上，一列加权平移算子的所有非超循环向量构成的集合不是 σ多孔的。

1. Introduction

σ多孔集作为度量空间中非常稀薄的一类子集，最早于[8] 在一项关于函数边界行为的研究中被引入并加以研究，随后于[3, 14]被应用于微分理论和巴拿赫空间理论。近几十年来，与多孔性相关的概念一直是热门课题，因为它们可以推广到若干类度量空间中的许多已知概念；参见专著 [21]。 σ多孔子集在 $\mathbb{R}$ 中是零测集且为第一纲集，而在任何没有孤立点的完备度量空间中，这两类集合并不相同[20]。另一方面，包括算子理论中的超循环性在内的线性动力学近年来也受到关注；参见著作[2, 11] ，例如 [6, 16, 17]。最近，F. Bayart 在 [1]中通过研究超循环移位（此前已在 [15]中研究；另见 [10]）证明，ℓ^2（$\mathbb{Z}$）上某些类加权移位算子的非超循环向量集合是非σ多孔集。这将成为第一纲但非 σ多孔集的一个新例子。在这项工作中，受[1, 定理1] 证明中的一些想法启发，我们首先引入一般勒贝格空间中的一类非σ多孔子集，随后在离散群和超群的背景下，将 [1]的主要结果推广到一般勒贝格空间上的加权平移算子序列。特别地，我们证明，若 $p \geq 1$， K 是一个离散超群，(a_n) 是K中各项互不相同的序列，且 $w\colon K \to (0,\infty)$ 是一个有界可测函数，使得

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{w(a_0)w(a_1)\dots w(a_n)}\chi_{\{a_{n+1}\}} \in L^p(K),$$

那么，序列（Λ_n）$_n$ 的所有非超循环向量组成的集合不是 σ-多孔的，其中算子 Λ_n 由定义 3.8给出。此外，我们研究

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47A16、28A05、43A15、43A62。

*通讯作者。*Key words and phrases.* 非-σ-孔集、勒贝格空间、 σ-孔算子、局部紧群、局部紧超群、超循环向量。

加权复合算子在配备非负拉东测度的一般测度空间 Ω 上的 $L^\infty(\Omega)$ 中，以及在 $L^p(\mathbb{R},\tau)$ 上的非-σ-多孔性，其中 τ 是 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。我们证明，若 G 是局部紧群，μ 是 G, $a \in G$ 上的左 Haar 测度，并且 $w\colon G \to (0,\infty)$ 是一个权函数，使得

$$\Big(\frac{1}{w(a)w(a^2)\dots w(a^n)}\Big)_n \in L^\infty(G,\mu),$$

那么，加权平移算子$T_{a,w,\infty}$ 在 $L^\infty(G,\mu)$ 上的所有非超循环向量组成的集合不是 σ-孔洞的。

2. Non-σ-porous subsets of Lebesgue spaces

本节将介绍与一个固定函数相关的勒贝格空间中若干类非σ-孔洞子集。首先，我们回顾本文主要概念的定义。

定义 2.1. 设 $0 < \lambda < 1$。度量空间 X 的子集 E 称为在 $x \in E$ 处 λ-孔洞的，如果对每个 $\delta > 0$，都存在一个元素 $y \in B(x;\delta) \setminus \{x\}$，使得

$$B(y;\lambda\, d(x,y)) \cap E = \varnothing.$$

E 称为 λ-孔洞的，如果它在 E 的每个元素处都是 λ-孔洞的。此外，E 称为σ-λ-孔洞的，如果它是 X 的可数个 λ-孔洞子集的并。

下面的引理在证明本节主要结果时起着关键作用。这一事实是 [19, 引理2] 的特例；另见 [1, 引理2]。

引理 2.2. 设 $\mathcal{F}$ 是完备度量空间 X 的一个非空闭子集族，且对每个 $F \in \mathcal{F}$ 和每个 $x \in X$ 以及满足 $B(x;r) \cap F \neq \varnothing$ 的 $r > 0$，都存在一个元素 $J \in \mathcal{F}$，使得

$$\varnothing \neq J \cap B(x;r) \subseteq F \cap B(x;r)$$

并且 $F \cap B(x;\, r)$ 在 $J \cap B(x;\, r)$ 的所有元素处都不是 λ-多孔的。那么，$\mathcal{F}$ 中的每个集合都不是 σ-λ-多孔的。

下面的结果是对 [1, 定理1] 的进一步发展。与 [1], 相同，本定理的证明基于引理 2.2。

定理 2.3. 设 $p \geq 1$、Ω 是一个局部紧豪斯多夫空间，μ 是 Ω 上的一个非负拉东测度，且 $A \subseteq \Omega$ 是一个博雷尔集，满足

$$|f|\chi_A \leq \|f\|_p \ \ a.e. \qquad (f \in L^p(\Omega,\mu)). \tag{2.1}$$

那么，对于 Ω 上满足 $g\chi_A \in L^p(\Omega\ \mu)$ 的每个可测函数 g，集合

$$\Gamma_g := \big\{f \in L^p(\Omega,\mu) : |f| \geq |g|\chi_A \ \text{a.e.}\big\}$$

在 $L^p(\Omega\ \mu)$ 中不是 σ-多孔的。

证明。任取一个数 $0<\lambda\leq\frac{1}{2}$，并取 $0<\beta<\lambda$。记

$$\mathcal{F}:=\big\{\Gamma_g:\ g\chi_A\in L^p(\Omega,\mu)\big\}.$$

我们将证明集合 $\mathcal{F}$ 满足引理 2.2 的条件。设 $g\in L^p(\Omega\ \mu)$。不失一般性，可假设 g 是一个非负函数。显然， $\Gamma_g\neq\varnothing$。令 (f_n) 是 Γ_g 中的一个序列，且 $f_n\to f$ 属于 $L^p(\Omega\ \mu)$。于是，根据 (2.1)， $|f|\geq g\chi_A$ 几乎处处成立，因此 $f\in\Gamma_g$。所以，集合 $\mathcal{F}$ 中的每个元素都是 $L^p(\Omega\ \mu)$ 的闭子集。现在，假设 $f\in L^p(\Omega\ \mu)$ 且 $r>0$ 满足 $B(f;\ r)\cap\Gamma_g\neq\varnothing$。我们找到一个可测函数 h，满足 $0\leq h\chi_A\in L^p(\Omega\ \mu)$，使得

$$\varnothing\neq B(f;r)\cap\Gamma_h\subseteq B(f;r)\cap\Gamma_g,$$

且 $B(f;\ r)\cap\Gamma_g$在 $B(f;\ r)\cap\Gamma_h$的元素处不是 λ-孔隙的。

由于 $\big(|f|+\beta^{-1}g\chi_A\big)^p\in L^1(\Omega\ \mu)$ 且 μ是拉东测度，因此定义映射ν

$$\nu(B):=\int_B\big(|f|+\beta^{-1}g\chi_A\big)^p\,d\mu\qquad(\text{for every Borel set }B\subseteq\Omega)$$

是一个拉东测度[9]。因此，存在某个 $0<\epsilon<1$、一个函数 $k\in B(f;\ r)\cap\Gamma_g$以及 Ω 的一个紧子集 D，满足 $\mu(D)>0$，使得

$$\|k-f\|_p<\epsilon^{1/p}\,r.$$

and

$$\int_{D^c}\big(|f|+\beta^{-1}g\chi_A\big)^p\,d\mu<(1-\epsilon)\,r^p.\tag{2.2}$$

取某个 α，使得

$$\|k-f\|_p<\alpha<\epsilon^{1/p}\,r,$$

并记

$$\delta:=\frac{\epsilon^{1/p}\,r-\alpha}{2\mu(D)^{\frac{1}{p}}}.$$

现在，我们定义两个函数 $h,\xi:\Omega\ \to\mathbb{C}$，如下:

$$h:=(g\chi_A+\delta)\chi_D+\beta^{-1}g\chi_A\,\chi_{\Omega\setminus D}\qquad\text{and}\qquad\xi:=(|k|+\delta)\eta\,\chi_D+h\chi_{\Omega\setminus D},$$

其中

$$\eta(x):=\begin{cases}\frac{k(x)}{|k(x)|}, & \text{if } k(x)\neq0\\[2ex] 1, & \text{if } k(x)=0\end{cases}$$

对所有的 $x\in\Omega$。由于 D 是紧的，我们有 $h\chi_A\in L^p(\Omega\ \mu)$。此外，对于每个 $x\in D$,

$$\begin{aligned}|k(x)-\xi(x)|&=\big|k(x)-\big(|k(x)|+\delta\big)\,\eta(x)\big|\\&=\big|k(x)-k(x)-\delta\,\eta(x)\big|\\&=\delta,\end{aligned}$$

因此

$$\|(\xi - k)\,\chi_D\|_p = \delta\,\mu(D)^{\frac{1}{p}} = \frac{\epsilon^{1/p}\,r - \alpha}{2}.$$

这意味着

$$\begin{aligned}\|(\xi - f)\,\chi_D\|_p &\le \|(\xi - k)\,\chi_D\|_p + \|(k - f)\,\chi_D\|_p \\ &\le \frac{\epsilon^{1/p}\,r - \alpha}{2} + \alpha < \epsilon^{1/p}\,r.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\|\xi - f\|_p^p &= \int_D |\xi - f|^p\,d\mu + \int_{\Omega\setminus D} |\xi - f|^p\,d\mu \\ &< \epsilon\,r^p + \int_{\Omega\setminus D} |\beta^{-1} g\chi_A - f|^p\,d\mu \\ &\le \epsilon\,r^p + \int_{\Omega\setminus D} (\beta^{-1} g\chi_A + |f|)^p\,d\mu \\ &< \epsilon\,r^p + (1-\epsilon)\,r^p = r^p,\end{aligned}$$

因此， $\xi \in B(f;\ r)$。此外,

$$|\xi(x)| = |k(x)| + \delta \ge g(x) + \delta = h(x) \quad \text{a.e. on } D \cap A,$$

并且对于每个 $x \in (\Omega \setminus D) \cap A$，我们都有 $|\xi(x)| = h(x)$。这表明 $\xi \in \Gamma_h$，因此

$$\varnothing \ne B(f;r) \cap \Gamma_h \subseteq B(f;r) \cap \Gamma_g$$

因为 $h \ge g$。现在，令 $u \in B(f;\ r) \cap \Gamma_h$，并令 $r' := \min\{\delta, \lambda(r - \|f-u\|_p)\}$。设 $v \in B(u;\ r')$。我们定义函数 $\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ 为

$$\gamma(x) := \begin{cases} v(x), & \text{if } x \in D \\ \Big(|v(x)| + \beta|u(x) - v(x)|\Big)\,\theta(x), & \text{if } x \in \Omega \setminus D \end{cases}$$

其中

$$\theta(x) := \begin{cases} \frac{v(x)}{|v(x)|}, & \text{if } v(x) \ne 0 \\ 1, & \text{if } v(x) = 0. \end{cases}$$

因此，对于每个 $x \in \Omega \setminus D$，我们有

$$|\gamma(x) - v(x)| = \beta\,|u(x) - v(x)| \qquad \text{and} \qquad |\gamma(x)| \ge \beta\,|u(x)|.$$

显然,

$$\begin{aligned}\|\gamma - v\|_p^p &= \|(\gamma - v)\,\chi_D\|_p^p + \|(\gamma - v)\,\chi_{\Omega\setminus D}\|_p^p \\ &= \|(\gamma - v)\,\chi_{\Omega\setminus D}\|_p^p \\ &= \beta^p\,\|(u - v)\,\chi_{\Omega\setminus D}\|_p^p \\ &\le \beta^p\,\|u - v\|_p^p < \lambda^p\,\|u - v\|_p^p,\end{aligned}$$

因此，

$$\gamma \in B\big(v;\lambda\,\|u-v\|_p\big) \subseteq B(f;r).$$

此外，

$$|\gamma(x)| \geq \beta\,|u(x)| \geq \beta\,h(x) = g(x) \quad \text{for a.e. } x \in (\Omega \setminus D) \cap A$$

and

$$|\gamma(x)| = |v(x)| \geq |u(x)| - \delta \geq g(x) \quad \text{for a.e. } x \in D \cap A,$$

因为 $\|u-v\|_p \leq \delta$ 且 $|u| \geq h$。因此，

$$B\big(v;\lambda\,\|u-v\|_p\big) \cap B(f;r) \cap \Gamma_g \neq \varnothing.$$

由此完成证明。 □

备注 2.4. 请注意，一般而言，定理 2.1 中的条件 (2.3) 并不意味着 Ω 是离散空间。特别是，如果在条件 (2.1) 中令 $A := \Omega$，则它意味着 $L^p(\Omega\ \mu) \subseteq L^\infty(\Omega\ \mu)$，而这一包含关系等价于

$$\alpha := \inf\{\mu(E) :\ \mu(E) > 0\} > 0, \tag{2.3}$$

并且等价地，对于每个 $q > p$，$L^p(\Omega\ \mu) \subseteq L^q(\Omega\ \mu)$；参见 [18]。此外，若 $\mathrm{supp}\mu = \Omega$，则条件 (2.3) 意味着对于每个 $x \in \Omega$，

$$\mu(\{x\}) = \inf\{\mu(F) :\ F \text{ is a compact neighborhood of } x\} > 0.$$

特别地，如果 Ω 是一个局部紧群（或超群），并且 μ 是其左 Haar 测度，那么条件（2.1）意味着 Ω 是一个离散拓扑空间。

下一个结果是定理 2.3的直接推论。

推论 2.5. 设 Ω 是一个离散拓扑空间，并且 $\varphi := (\varphi_j)_{j\in\Omega} \subseteq[1,\infty)$ 使得对于每个 j，$\varphi_j \geq 1$。令 $\mu_\varphi := \sum_{j\in\Omega} \varphi_j\,\delta_j$，其中 δ_j 是 j 处的点质量测度。那么，对于每个 $g \in L^p(\Omega\mu_\varphi)$，集合

$$\Gamma_g := \big\{f \in L^p(\Omega,\mu_\varphi) :\ |f| \geq |g|\big\}$$

不是 σ-孔隙的于 $L^p(\Omega\mu_\varphi)$ 中。

证明。只需注意，对于每个 $k \in \Omega$ 和 $f \in L^p(\Omega\mu_\varphi)$，

$$\|f\|_p^p = \sum_{j\in\Omega} |f(j)|^p\,\mu_\varphi(\{j\}) \geq |f(k)|\,\varphi_k \geq |f(k)|^p.$$

□

特别地，如果一个集合赋予计数测度，我们就得到这一事实。

推论 2.6. 设 $p \geq 1$ 和 A 是非空集合。那么，对于每个 $g \in \ell^p(A)$，集合

$$\Gamma_g := \big\{f \in \ell^p(A) :\ |f| \geq |g|\big\}$$

在 $\ell^p(A)$中不是 σ-孔隙的。

L^∞空间的情况则有所不同。

定理 2.7. 设 Ω 是一个局部紧豪斯多夫空间，且 μ 是 Ω 上的非负拉东测度。那么，对于每个 $g \in L^\infty(\Omega\ \mu)$，集合

$$\Gamma_g := \{f \in L^\infty(\Omega, \mu) : |f| \geq |g| \text{ a.e.}\}$$

在 $L^\infty(\Omega\ \mu)$ 中不是 σ-稀疏的。

证明。 与定理的证明相同 2.3 固定 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$，并设

$$\mathcal{F} := \{\Gamma_g : g \in L^\infty(\Omega, \mu)\}.$$

该集合满足引理 2.2 的条件。显然，对于所有 $g \in L^\infty(\Omega\ \mu)$，$\Gamma_g$ 都是 $L^\infty(\Omega\ \mu)$ 的闭子集。令假设 $0 \leq g \in L^\infty(\Omega\ \mu)$，并设 $f \in L^\infty(\Omega\ \mu)$ 且 $r > 0$。若 $B(f; r) \cap \Gamma_g \neq \varnothing$，我们选取某个$k \in B(f; r) \cap \Gamma_g$，并找到某个 $\varepsilon \in (0, 1)$ 使得 $\|k - f\|_\infty < \varepsilon r$。取某个 $\delta \in (0, (1-\varepsilon)r)$，并设

$$h := g + \delta \qquad \text{and} \qquad \xi := (|k| + \delta)\eta,$$

其中 η 与定理 2.3的证明中相同。于是得到

$$\|\xi - f\|_\infty \leq \|\xi - k\|_\infty + \|k - f\|_\infty \leq \delta + \varepsilon r < (1-\varepsilon)r + \varepsilon r = r,$$

因此 $\xi \in B(f; r)$，并且 $\xi \in \Gamma_h$，因为 $|k| \geq g$。接下来，令 $u \in B(f; r) \cap \Gamma_h$，并设$r' := \min\{\delta, \lambda(r - \|f - u\|_\infty)\}$。任取某个 $v \in B(u; r')$。那么，$\|u - v\|_\infty < r' \leq \delta$，所以 $|v| \geq |u| - \delta \geq h - \delta = g$ 几乎处处成立，因此 $v \in \Gamma_g$。于是，

$$v \in B(v; \lambda\|u - v\|_\infty) \cap B(f; r) \cap \Gamma_g.$$

证明至此完成。 □

注 2.8。 主定理 2.3 对序列空间 c_0也成立，因为有限个非零系数的序列在 c_0 中稠密。

在本节末尾，我们给出实数轴上的 σ-疏松子集的一个类L^p空间。在这一结果的证明中，我们同样基于引理2.2，并应用定理 2.3的证明中定义的一些函数。

定理 2.9. 设 $p \geq 1$，且 τ 为 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度。对每个 $g \in L^p(\mathbb{R}, \tau)$，令

$$\Theta_g := \{f \in L^p(\mathbb{R}, \tau) : \|f\chi_{[m,m+1]}\|_p \geq \|g\chi_{[m,m+1]}\|_p \ \textit{for all}\ m \in \mathbb{Z}\}.$$

那么，Θ_g 在 $L^p(\mathbb{R}, \tau)$ 中不是 σ-孔隙的。

证明. 设 $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$，且 $0 < \beta < \lambda$。记

$$\mathcal{F} := \{\Theta_g : g \in L^p(\mathbb{R}, \tau)\}.$$

我们证明集合 $\mathcal{F}$ 满足引理2.2的条件。设$0 \leq g \in L^p(\mathbb{R}, \tau)$。那么，显然 $\Theta_g \neq \varnothing$且它在 $L^p(\mathbb{R}, \tau)$ 中是闭的。现在，假设 $f \in L^p(\mathbb{R}, \tau)$ 且 $r > 0$满足 $B(f;\ r) \cap \Theta_g \neq \varnothing$。那么，存在

一个足够大的数 $N \in \mathbb{N}$、一些 $0 < \epsilon < 1$ 以及一个函数 $k \in B(f;\, r) \cap \Theta_g$，使得

$$\|k - f\|_p < \epsilon^{\frac{1}{p}}\, r \qquad \text{and} \qquad \int_{[-N,N]^c} \left(|f| + \beta^{-1} g\right)^p d\tau < (1-\epsilon)\, r^p.$$

取某个 α，使得 $\|k - f\|_p < \alpha < \epsilon^{\frac{1}{p}}\, r$，并记 $\delta := \frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}\, r - \alpha}{2\ 2N^{\ \frac{1}{p}}}()$。令

$$A_1 := \{m \in [N] :\ g = 0 \ \text{ a.e. on } [m, m+1]\}, \quad A_2 := [N] \setminus A_1$$

and

$$B_1 := \{m \in [N] :\ k = 0 \ \text{ a.e. on } [m, m+1]\}, \quad B_2 := [N] \setminus B_1,$$

其中 $[N] := \{-N, \ldots, N-1\}$，然后定义

$$\rho := \sum_{m \in A_1} \chi_{[m,m+1]} + \sum_{m \in A_2} \frac{g\chi_{[m,m+1]}}{\|g\chi_{[m,m+1]}\|_p},$$

and

$$\eta := \sum_{m \in B_1} \chi_{[m,m+1]} + \sum_{m \in B_2} \frac{k\chi_{[m,m+1]}}{\|k\chi_{[m,m+1]}\|_p}.$$

现在，我们定义 $h, \xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 如下:

$$h := g\chi_{[-N,N]} + \delta\rho + \beta^{-1} g\, \chi_{[-N,N]^c}$$

and

$$\xi := |k|\, \chi_{[-N,N]} + \delta\eta + h\chi_{[-N,N]^c}.$$

显然，$h \in L^p(\mathbb{R}, \tau)$。对于每个 $x \in [-N, N]$，我们有 $|k(x) - \xi(x)| = \delta\, |\eta(x)|$，因此

$$\begin{aligned} \|(k-\xi)\chi_{[-N,N]}\|_p^p &= \delta^p\, \|\eta\chi_{[-N,N]}\|_p^p \\ &= \delta^p \sum_{m \in [N]} \|\eta\chi_{[m,m+1]}\|_p^p \\ &= \delta^p\, 2N. \end{aligned}$$

[1]因此，$\|(k-\xi)\chi_{[-N,N]}\|_p = \delta\, (2N)^{\frac{1}{p}}$。现在，类似于定理2.3 的证明，我们有 $\xi \in B(f;\ r)$。此外，

$$\|\xi\chi_{[m,m+1]}\|_p = \|k\chi_{[m,m+1]}\|_p + \delta \geq \|g\chi_{[m,m+1]}\|_p + \delta = \|h\chi_{[m,m+1]}\|_p$$

对所有 $m \in [N]$ 均成立。此外，对每个 $m \notin [N]$,

$$\|\xi\chi_{[m,m+1]}\|_p = \|h\chi_{[m,m+1]}\|_p \geq \|g\chi_{[m,m+1]}\|_p.$$

So,

$$\xi \in B(f;r) \cap \Theta_h \subseteq B(f;r) \cap \Theta_g.$$

现在，令 $u \in B(f;\, r) \cap \Theta_h$ 并设 $r' := \min\{\delta, \lambda(r - \|f - u\|_p)\}$。令 $v \in B(u; r')$。我们定义函数 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 为

$$\gamma(x) := \begin{cases} v(x), & \text{if } x \in [-N, N] \\ \Big(|v(x)| + \beta|u(x) - v(x)|\Big)\,\theta(x), & \text{if } x \in [-N, N]^c \end{cases}$$

其中

$$\theta(x) := \begin{cases} \frac{v(x)}{|v(x)|}, & \text{if } v(x) \neq 0 \\ 1, & \text{if } v(x) = 0. \end{cases}$$

与定理 2.3 的证明类似，我们有 $\gamma \in B\big(v; \lambda\|u - v\|_p\big)$。现在，对每个 $m \notin [N]$,

$$|\gamma|\chi_{(m,m+1)} = (|v| + \beta|u - v|)\chi_{(m,m+1)} \geq \beta|u|\chi_{(m,m+1)}.$$

因此,

$$\|\gamma\chi_{[m,m+1]}\|_p \geq \beta\,\|u\chi_{[m,m+1]}\|_p \geq \beta\,\|h\chi_{[m,m+1]}\|_p$$

因为 $u \in B(f;\, r) \cap \Theta_h$。然而，在这种情况下，我们有 $(m, m+1) \in [-N, N]^c$，所以 $h\chi_{(m,m+1)} = \beta^{-1} g\chi_{(m,m+1)}$。因此，$\beta\|h\chi_{[m,m+1]}\|_p = \|g\chi_{[m,m+1]}\|_p$。如果 $m \notin [N]$，我们有 $\gamma\chi_{[m,m+1]} = v\chi_{[m,m+1]}$，因为 $\gamma\chi_{[-N,N]} = v\chi_{[-N,N]}$ 且 $[m, m+1] \subseteq [-N, N]$。我们得到

$$\big|\,\|u\chi_{[m,m+1]}\|_p - \|v\chi_{[m,m+1]}\|_p\big| \leq \|(u - v)\chi_{[m,m+1]}\|_p \leq \|u - v\|_p < \delta$$

因为 $v \in B(u; r')$，因此

$$\begin{aligned} \|\gamma\chi_{[m,m+1]}\|_p &= \|v\chi_{[m,m+1]}\|_p \\ &\geq \|u\chi_{[m,m+1]}\|_p - \delta \\ &\geq \|h\chi_{[m,m+1]}\|_p - \delta \\ &= \|g\chi_{[m,m+1]}\|_p. \end{aligned}$$

因此,

$$\gamma \in B\big(v; \lambda\|u - v\|_p\big) \cap B(f; r) \cap \Theta_g,$$

证明完毕。 □

3. Applications

本节中，我们将应用上一节的结果，证明某些加权平移算子序列的所有非超循环向量构成的集合是非-σ-孔洞的。

定义 3.1. 设 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间。若算子序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 满足存在一个元素 $x \in \mathcal{X}$（称为超循环向量），使得轨道 $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ 在 $\mathcal{X}$中稠密，则称该序列为超循环序列。序列 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的所有超循环向量组成的集合记为 $HC((T_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$。若算子 $T \in B(\mathcal{X})$满足序列 $(T^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是超循环的，则称该算子为超循环算子。

设 G 是一个局部紧群，且 $a \in G$。于是，对每个函数$f\colon G \to \mathbb{C}$，我们定义 $L_a f\colon G \to \mathbb{C}$ 为 $L_a f(x) := f(a^{-1}x)$，对所有 $x \in G$均成立。注意，若 $p \geq 1$，则左平移算子

$$L_a : L^p(G) \to L^p(G), \quad f \mapsto L_a f$$

由于 $\|L_a\| \leq 1$，它不是超循环的。关于 $L^p(G)$ 上加权平移算子的超循环性，以及与非周期元素 a 相关的问题，已在 [5] 中研究过（如果由 G 中的 a 生成的闭子群不是紧群，则称元素 $a \in G$ 为非周期元素）。

定义 3.2. 设 G 为带有左 Haar 测度 μ 的局部紧群。固定 $p \geq 1$。记 $L^p(G) := L^p(G, \mu)$。假设 $w\colon G \to (0, \infty)$ 是一个有界可测函数（称为权函数），且 $a \in G$。那么，加权平移算子 $T_{a,\ w,\ p} : L^p(G) \to L^p(G)$ 定义为

$$T_{a,w,p}(f) := w\, L_a f, \qquad (f \in L^p(G)).$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$，记 $\varphi_n := w\, L_a w \ldots L_{a^{n-1}} w$，其中 $a^0 := e$ 是 G 的单位元。

定理 3.3。设 $p \geq 1$, G 是一个离散群，且 $a \in G$。设 μ 是 G 上的左 Haar 测度，满足 $\mu(\{e\}) \geq 1$，并且 $(\gamma_n)_n$ 是一个由非负整数组成的无界序列。设 $w\colon G \to (0, \infty)$ 是一个有界函数，使得对于某个有限非空集 $F \subseteq G$ 和某个 $N > 0$，有

$$a^{\gamma_n} F \cap F = \varnothing \qquad (n \geq N),$$

and

$$\beta := \inf \left\{ \prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k t) : \ n \geq N,\, t \in F \right\} > 0.$$

那么，集合

$$\Lambda := \left\{ f \in L^p(G, \mu) : \ \|T_{a,w,p}^{\gamma_n} f - \chi_F\|_p \geq \mu(F)^{\frac{1}{p}} \ \textit{for all } n \geq N \right\}$$

是非-σ-孔隙的。

证明。设 $\Gamma := \{f \in L^p(G,\mu) : |f| \geq \frac{1}{\beta}\chi_F\}$。那么，$\Gamma$ 在 σ-孔隙$L^p(G,\mu)$中不是孔隙的，这归功于定理 2.7。此外，对每个 $f \in \Gamma$ 和 $n \geq N$，我们有

$$\begin{aligned}
\|T^{\gamma_n}_{a,w,p} f - \chi_F\|_p^p &= \int_G |\prod_{k=1}^{n} w(a^{-\gamma_n+k}x)\, f(a^{-\gamma_n}x) - \chi_F(x)|^p \, d\mu(x) \\
&= \int_G |\prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k x)\, f(x) - \chi_F(a^{\gamma_n}x)|^p \, d\mu(x) \\
&= \int_G |\prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k x)\, f(x) - \chi_{a^{-\gamma_n}F}(x)|^p \, d\mu(x) \\
&\geq \int_F |\prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k x)\, f(x) - \chi_{a^{-\gamma_n}F}(x)|^p \, d\mu(x) \\
&= \int_F |\prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k x)\, f(x)|^p \, d\mu(x) \\
&\geq \int_F |\beta \frac{1}{\beta}|^p \, d\mu(x) \\
&= \mu(F).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

例 3.4. 设 G 是配备计数测度的加法群 $\mathbb{Z}$。设 F 是 $\mathbb{Z}$ 的有限非空子集。令 $N := \max\{|j| : j \in F\}$。若 $w := (w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq (0,\infty)$ 是一个有界序列，且对所有 $n \geq N$ 都有 $w_n \geq 1$，则前一个定理中的所需条件相对于 F 和 a: $= 1$ 成立。

以下事实可直接由前一个定理得出。

推论 3.5. 设 $p \geq 1$, G 是一个离散群，且 $a \in G$ 为无限阶。设 μ 是 G 上的计数测度，且 $(\gamma_n)_n$ 是一个无界的非负整数序列。设 $w : G \to (0,\infty)$ 是一个有界函数，使得对某个 $t \in G$,

$$\inf\left\{\prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k t) : n \in \mathbb{N}\right\} > 0.$$

那么，该集合

$$\left\{f \in L^p(G,\mu) : \|T^{\gamma_n}_{a,w} f - \chi_{\{t\}}\|_p \geq 1 \ \textit{for all } n\right\}$$

是非-σ-孔隙的。

定理 3.6. 设 $p \geq 1$, G 是一个离散群，且 $a \in G$。设 μ 是 G 上的左 Haar 测度，满足 $\mu(\{e\}) \geq 1$。设 $(\gamma_n)_n$ 是一个非负整数无界序列，并设 $w : G \to (0,\infty)$ 是一个有界函数，使得

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k) > 0.$$

那么，集合

$$\Gamma := \left\{ f \in L^p(G,\mu) : |f(e)| \inf_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k) \geq 1 \right\}$$

是非-σ-多孔的。特别地，令 $T_n := T_a^{\gamma_n}$, w, p 对所有 n成立，则序列 $(T_n)_n$ 的所有非超循环向量组成的集合在 $L^p(G,\mu)$ 中不是 σ-多孔的。

证明。 由于 $\mu(\{e\}) \geq 1$，应用定理 2.3 可知集合 Γ 是非-σ-多孔的，因为

$$[\inf_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k)]^{-1} \chi_{\{e\}} \in L^p(G,\mu).$$

设 $f \in \Gamma$。若 n 是非负整数，则对每个属于 G 的 x，有

$$\|T_n f\|_p \geq \left|\varphi_{\gamma_n}(x)\, L_{a^{\gamma_n}} f(x)\right|,$$

因此，令 $x = a^{\gamma_n}$，有

$$\begin{aligned}\|T_n f\|_p &\geq \left|\varphi_n(a^{\gamma_n})\, L_{a^{\gamma_n}} f(a^{\gamma_n})\right| \\ &= \Big[\prod_{k=1}^{\gamma_n} w(a^k)\Big] |f(e)| \\ &\geq |f(e)| \inf_{m\in\mathbb{N}} \prod_{k=1}^{\gamma_m} w(a^k) \geq 1.\end{aligned}$$

这意味着集合 $\{T_n f : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $L^p(G,\mu)$ 中不是稠密的，因此 Γ是 T 的所有非超循环向量所组成集合的子集。证明完毕。□

现在，我们回顾超群的定义。超群是局部紧群的推广；更多细节请参见专著 [4] 和基础论文 [12] 。在局部紧超群中，两个狄拉克测度的卷积不一定是狄拉克测度。设 K 为局部紧豪斯多夫空间。我们用 $\mathbb{M}(K)$表示 K上所有正则复博雷尔测度构成的空间，用 δ_x 表示点 x处的狄拉克测度。测度 $\mu \in \mathbb{M}(K)$的支集记为 $\mathrm{supp}(\mu)$。

定义3.7. 设 K 为局部紧豪斯多夫空间，$(\mu,\nu) \mapsto \mu * \nu$是从 $\mathbb{M}(K) \times \mathbb{M}(K)$到 $\mathbb{M}(K)$的双线性正连续映射（称为卷积），且 $x \mapsto x^-$ 是 K 上的一个对合自同胚（称为对合），并具有以下性质：

(i) $\mathbb{M}(K)$ 在 $*$ 下是一个复结合代数；(ii) 若 $x, y \in K$，则 $\delta_x * \delta_y$ 是一个具有紧支集的概率测度；(iii) 映射 $(x,y) \mapsto \mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y)$ 从 $K \times K$ 到 $\mathsf{C}(K)$ 是连续的，其中 $\mathsf{C}(K)$ 是 K中所有非空紧子集组成的集合，并赋予迈克尔拓扑；(iv) 存在一个（必然唯一的）元素 $e \in K$ （称为单位元），使得对所有 $x \in K$, $\delta_x * \delta_e = \delta_e * \delta_x = \delta_x$;

(v) 对所有 $x, y \in K$, $e \in \mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y$, 当且仅当 $x = y^{-}$;
那么, $K \equiv (K, *, ^{-}, e)$ 称为局部紧超群。

称非零非负正则博雷尔测度 m 在 K 上为（左）哈尔测度，若对每个 $x \in K$, $\delta_x * m = m$。对每个 x, $y \in K$, 以及可测函数 $f : K \to \mathbb{C}$, 我们记

$$f(x * y) := \int_K f \, d(\delta_x * \delta_y),$$

其中该积分存在。

定义 3.8. 设 $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是超群K中的一个序列，且 w 是 K上的权函数。对每个 $n \in \mathbb{N}_0$, 我们定义 $L^p(K)$ 上的有界线性算子 Λ_{n+1} 为

$$\Lambda_{n+1} f(x) := w(a_0 * x)\, w(a_1 * x) \ldots w(a_n * x)\, f(a_{n+1} * x) \qquad (f \in L^p(K))$$

对所有 $x \in K$均成立。此外，我们假设 Λ_0 是 $L^p(K)$ 上的恒等算子。

文献 [13]研究了这一算子序列的一些线性动力学性质。序列 $\{\Lambda_n\}_n$ 是 $L^p(G)$ 上单个加权平移算子通常幂次的推广，其中 G 是一个局部紧群。事实上，任意局部紧群 G及映射

$$\mu * \nu \mapsto \int_G \int_G \delta_{xy} d\mu(x) d\nu(y) \qquad (\mu, \nu \in \mathbb{M}(G))$$

作为卷积，并且 $x \mapsto x^{-1}$ 从 G 到 G 作为对合，是一个局部紧超群。设 $\eta := (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 G中的一个序列，且 w 是 G上的权函数。那么对于每个 $f \in L^p(G)$, $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $x \in G$, 我们有

$$\Lambda_{n+1} f(x) = w(a_0 x)\, w(a_1 x) \ldots w(a_n x)\, f(a_{n+1} x).$$

特别地，令 $a \in G$ 并对每个 $n \in \mathbb{N}_0$, 设 $a_n := a^{-n}$。那么，$\Lambda_n = T^n_{a,\ w,\ p}$对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。在这种情况下，算子 $T_{a,\ w,\ p}$ 是超循环的，当且仅当序列 $(\Lambda_n)_n$ 是超循环的。

设 K 是一个离散超群，其卷积 $*$ 定义在 K 上的拉东测度之间，并具有对合 $\cdot^{-} : K \to K$。那么，根据 [12, Theorem7.1A]，由下式给出的 K 上的测度 μ

$$\mu(\{x\}) := \frac{1}{\delta_x * \delta_{x^-}(\{e\})}, \qquad (x \in K) \tag{3.1}$$

是 K上的左 Haar 测度。

命题 3.9。设 K 是一个离散超群， μ 是哈尔测度(3.1)，且 $p \geq 1$。那么对每个 $g \in L^p(K, \mu)$，集合

$$\{f \in L^p(K, \mu) : |f| \geq |g|\}$$

在 $L^p(K, \mu)$ 中不是 σ-多孔的。

证明。只需注意，对每个 $x \in K$，我们都有 $\mu(\{x\}) \geq 1$，因为

$$1 = \delta_x * \delta_{x^-}(K) \geq \delta_x * \delta_{x^-}(\{e\}).$$

因此，测度空间（K，μ）满足推论 2.5的条件。 □

设 $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是离散超群中的一个序列 K，满足$a_n \neq a_m$ 对每个 $m \neq n$ 均成立，并设 $w\colon K \to (0,\infty)$ 有界。我们定义$h_{a,\,w}\colon K \to \mathbb{C}$ 为

$$h_{a,w} := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{w(a_0)w(a_1)\dots w(a_n)}\chi_{\{a_{n+1}\}}.$$

定理 3.10. 设 $p \geq 1$，且 K 是赋有左 Haar 测度（3.1）的离散超群。设 $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq K$ 的项互不相同，且 w 是 K 上的权函数，满足 $h_{a,\,w} \in L^p(K)$。则序列 $(\Lambda_n)_n$ 的所有非超循环向量构成的集合不是 σ-多孔的。

证明。首先，根据命题 3.9，集合

$$E := \left\{ f \in L^p(K) : |f(a_{n+1})| \geq \frac{1}{w(a_0)w(a_1)\dots w(a_n)} \text{ for all } n \right\}$$

不是 σ-孔洞的，因为它等于集合 $\left\{ f \in L^p(K) : |f| \geq h_{a,\,w} \right\}$. 现在，对于每个 $f \in E$,

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{n+1} f\|_p &\geq \sup_{x\in K} w(a_0 * x)\, w(a_1 * x) \dots w(a_n * x)\, |f(a_{n+1} * x)| \\ &\geq w(a_0)\, w(a_1) \dots w(a_n)\, |f(a_{n+1})| \geq 1 \end{aligned}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 都成立。这意味着 0 不属于 $\{\Lambda_n f : n \in \mathbb{N}\}$ 在 $L^p(K)$ 中的闭包，因此 $E \subseteq [HC((\Lambda_n)_n)]^c$。证明完毕。□

由于任何群都是超群，我们可以给出以下事实。

推论 3.11。设 $p \geq 1$，且 G 是一个离散群。设 $a \in G$ 的阶为无限阶，$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{N}$ 的各项互不相同，并且 $w\colon G \to (0,\infty)$ 是一个权函数，满足

$$\left(\frac{1}{w(a^{\gamma_0})w(a^{\gamma_1})\dots w(a^{\gamma_n})}\right)_n \in \ell^p(G).$$

那么，序列 $(T_a^{\gamma_n,\,w,\,p})_n$ 的所有非超循环向量组成的集合，在 $\ell^p(G)$ 中不是 σ-孔洞的。

现在，我们可以写出下一个推论，它是 [1, 定理1] 的推广。

推论 3.12. 设 $p \geq 1$，$(\gamma_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ 严格递增，且 $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是 $(0,\infty)$ 中的有界序列，使得

$$\left(\frac{1}{w_{\gamma_0} w_{\gamma_1} w_{\gamma_2} \dots w_{\gamma_n}}\right)_n \in \ell^p(\mathbb{Z}).$$

那么，序列 $(T_n)_n$ 的所有非超循环向量构成的集合不是 σ-疏松的，其中

$$(T_{n+1}a)_k := w_{\gamma_0} w_{\gamma_1} w_{\gamma_2} \dots w_{\gamma_n} a_{k+\gamma_{n+1}} \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

对所有 $a := (a_j)_j \in \ell^p(\mathbb{Z})$。

应用定理2.7，我们可以讨论 $p = \infty$ 情形下更一般的情况。设 Ω 是一个赋有非负拉东测度 μ 的局部紧豪斯多夫空间。设 $w : \Omega \to (0, \infty)$ 是一个有界可测函数，且 $\alpha : \Omega \to \Omega$ 是一个双可测映射，满足 $\|f \circ \alpha^{\pm 1}\|_\infty = \|f\|_\infty$ 对所有 $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ 均成立。于是，我们定义 $T_{\alpha, w, \infty} : L^\infty(\Omega, \mu) \to L^\infty(\Omega, \mu)$ 如下：

$$T_{\alpha,w,\infty}(f) := w\,(f \circ \alpha) \qquad (f \in L^\infty(\Omega, \mu)).$$

若 Ω 是一个局部紧群且 $a \in \Omega$，令 $\alpha_a(x) := ax$ 对所有 $x \in \Omega$ 均成立，我们记 $T_{a, w, \infty} := T_{\alpha_a, w, \infty}$。注意，$\alpha^{-1}$ 表示 α 的反函数，且对每个 $k \in \mathbb{N}$, $\alpha^{-k} := (\alpha^{-1})^k$。

定理 3.13。设$T_{\alpha,w,\infty}$ 为如上定义的加权复合算子，并设 $\{\gamma_n\}_n \subseteq \mathbb{N}$ 为一个固定的无界序列。假设存在由互不相交子集构成的序列 $\{A_n\}_n$，使得对所有 n，$\mu(A_n) > 0$

$$j_{\alpha,w} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(w \circ \alpha^{-\gamma_n})\,(w \circ \alpha^{-\gamma_n+1}) \dots (w \circ \alpha^{-1})} \chi_{A_n} \in L^\infty(\Omega, \mu).$$

那么，集合 $\{f \in L^\infty(\Omega, \mu) : \|T_\alpha^{\gamma_n}{}_{,w,\infty}(f)\|_\infty \geq 1 \text{对所有 } n\}$ 均成立，不是 σ-疏的。特别地，序列 $\{T^{\gamma_n}_{\alpha,w,\infty}\}_n$的所有非超循环向量组成的集合不是 σ-疏的。

证明。令 $E := \{f \in L^\infty(\Omega, \mu) : |f| \geq j_{\alpha,w}\}$. 那么，$E$不是 σ-疏的，这由定理2.7得出。对每个 $f \in E$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
\|T^{\gamma_n}_{\alpha,w,\infty}(f)\|_\infty &= \|\prod_{k=1}^{\gamma_n} (w \circ \alpha^{\gamma_n - k})\,(f \circ \alpha^{\gamma_n})\|_\infty \\
&= \|\prod_{k=1}^{\gamma_n} (w \circ \alpha^{-k})\, f\|_\infty \\
&\geq \|\prod_{k=1}^{\gamma_n} (w \circ \alpha^{-k})\, \chi_{A_n} f\|_\infty \\
&\geq \|\prod_{k=1}^{\gamma_n} (w \circ \alpha^{-k})\, \chi_{A_n} j_{\alpha,w}\|_\infty \\
&= 1.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

推论 3.14。设 G 为局部紧群， μ 是 G 上的左 Haar 测度。设 $a \in G$ 和 $w: G \to (0, \infty)$ 为有界可测函数。那么，若

$$\Big(\frac{1}{w(a)w(a^2)\dots w(a^n)}\Big)_n \in L^\infty(G, \mu),$$

那么，算子 $T_{a,\ w,\ \infty}$ 在 $L^\infty(G, \mu)$ 上的所有非超循环向量构成的集合不是 σ-多孔的。

推论 3.15. 若 $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个有界序列，且满足

$$\Big(\frac{1}{w_1 \dots w_n}\Big)_n \in \ell^\infty,$$

那么，序列 $(T_{\gamma_n,\ w})_n$ 的所有非超循环向量构成的集合在 ℓ^∞ 中不是 σ-多孔的。

定理 3.16. 设 $T_{\alpha,\ w,\ \infty}$ 是 Ω 上的加权复合算子，且 $F \subseteq \Omega$ 是一个博雷尔集，其中 $0 < \mu(F) < \infty$。设存在常数 $N > 0$，使得对所有 $n \geq N$,

$$\alpha^n(F) \cap F = \varnothing, \tag{3.2}$$

and

$$\beta := \inf\{\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{-k})(t) : n \geq N, t \in F\} \neq 0.$$

那么，集合

$$\{f \in L^\infty(\Omega, \mu) : \|T^n_{\alpha,w,\infty} f - \chi_F\|_\infty \geq 1 \, for \ all \ n \geq N\}$$

在 $L^\infty(\Omega\ \mu)$ 中不是 σ-孔隙的。

证明。 设 $\Gamma := \{f \in L^\infty(\Omega\ \mu) : |f| \geq \frac{1}{\beta}\chi_F\}$。那么根据定理 2.7， Γ 不是σ-孔洞的，在 $L^\infty(\Omega\ \mu)$ 中。此外，对于每个 $f \in \Gamma$ 我们有

$$\begin{aligned}
\|T^n_{\alpha,w,\infty} f - \chi_F\|_\infty &= \|\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{n-k})\,(f \circ \alpha^n) - \chi_F\|_\infty \\
&= \|\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{-k})\, f - \chi_F \circ \alpha^n\|_\infty \\
&= \|\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{-k})\, f - \chi_{\alpha^n(F)}\|_\infty \\
&\geq \|\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{-k})\, f\chi_F - \chi_{\alpha^n(F)}\chi_F\|_\infty \\
&= \|\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{-k})\, f\chi_F\|_\infty \\
&\geq \beta\|f\chi_F\|_\infty \geq \beta\,\frac{1}{\beta}\,\|\chi_F\|_\infty = 1.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

例 3.17. 设 $\Omega := \mathbb{R}$，且 μ 为勒贝格测度。令 $\alpha(t) := t-1$，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立，且 $F := [0,1]$。若 $w \in C_b(\mathbb{R})$ 满足 $|w(t)| \geq 1$，对所有 $t \geq k > 0$均成立，并且 $\inf\{|w(t)| : t \in [0,1]\} > 0$，则前一个定理中的条件相对于 F成立。

通过类似的证明，可以在不满足条件（3.2）的情况下证明下一个结论。

定理 3.18. 设 $T_{\alpha,w,\infty}$ 是定义在 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 上的加权复合算子，并设 $F \subseteq \Omega$ 是一个博雷尔集，满足 $0 < \mu(F) < \infty$，且

$$\inf\{\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t) : n \geq N, t \in F\} \neq 0.$$

那么，集合

$$\{f \in L^\infty(\Omega, \mu) : \|T^n_{\alpha,w,\infty} f\|_\infty \geq 1 \, for \ all \ n \geq N\}$$

在 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 中不是 σ-多孔的。特别地，算子 $T_{\alpha,w,\infty}$ 的所有非超循环向量组成的集合不是 σ-多孔的。

接下来，我们将给出定理 2.9 关于移位算子超循环性的若干应用，该定理涉及在 $L^p(\mathbb{R}, \tau)$ 上的情形。

定理 3.19. 考虑加权平移算子 $T_{\alpha,w}$，它作用于 $L^p(\mathbb{R}, \tau)$，由 $T_{\alpha,w} f := w \cdot (f \circ \alpha)$ 给出，其中 $0 < w, w^{-1} \in C_b(\mathbb{R})$ 且 $\alpha(t) = t+1$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $A_n := [n, n+1] = \alpha^n([0,1])$。设

$$y_{\alpha,w} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\inf_{t \in A_n} \prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)} \chi_{A_n}$$

并假设 $y_{\alpha,w} \in L^p(\mathbb{R}, \tau)$（特别地，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\inf_{t \in A_n} \prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t) > 0$）。那么，该集合

$$\{f \in L^p(\mathbb{R}, \tau) : \|T^n_{\alpha,w}(f)\|_p \geq 1 \, for \ all \ n \in \mathbb{N}\}$$

不是 σ-疏的。

证明。 由定理 2.9，该集合

$$E := \{f \in L^p(\mathbb{R}, \tau) : \|f\chi_{A_n}\|_p \geq \|y_{\alpha,w}\chi_{A_n}\|_p \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$$

不是 σ-多孔的，因为它等于

$$\{f \in L^p(\mathbb{R}, \tau) : \|f\chi_{[m,m+1]}\|_p \geq \|y_{\alpha,w}\chi_{[m,m+1]}\|_p \text{ for all } m \in \mathbb{Z}\},$$

对于所有满足 $m \leq 0$ 的 $m \in \mathbb{Z}$，都有 $y_{\alpha,w}\chi_{[m,m+1]} = 0$。现在注意，对于每个 $f \in E$ 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|T^n_{\alpha,w}(f)\|^p_p &= \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{n-k})(t)\right]^p |(f \circ \alpha^n)(t)|^p \, d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)\right]^p |f(t)|^p \, d\tau \\
&\geq \int_{A_n} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)\right]^p |f(t)|^p \, d\tau \\
&\geq \inf_{t\in A_n} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)\right]^p \|y_{\alpha,w}\chi_{A_n}\|^p_p \\
&= \inf_{t\in A_n} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)\right]^p \frac{1}{\inf_{t\in A_n}[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)]^p} \tau(A_n) = 1.
\end{aligned}$$

□

现在假设存在某个 $l \in \mathbb{Z}$，使得

$$\beta := \inf\{\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t) : t \in [l, l+1], n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Put

$$F := \{f \in L^p(\mathbb{R}, \tau) : \|f\chi_{[m,m+1]}\|_p \geq \|\frac{1}{\beta}\chi_{[l,l+1]}\chi_{[m,m+1]}\|_p \text{ for all } m \in \mathbb{Z}\}.$$

因此，由定理 2.9， F 不是 σ-多孔的。对于每个 $f \in F$，我们有

$$\begin{aligned}
\|T^n_{\alpha,w}(f)\|^p_p &= \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{n-k})(t)\right]^p |(f \circ \alpha^n)(t)|^p \, d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)\right]^p |f(t)|^p \, d\tau \\
&\geq \int_{[l,l+1]} \left[\prod_{k=1}^{n}(w \circ \alpha^{-k})(t)\right]^p |f(t)|^p \, d\tau \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

因此，集合

$$\{f \in L^p(\mathbb{R}, \tau) : \|T^n_{\alpha,w}(f)\|_p \geq 1 \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$$

不是 σ-多孔的。

接下来，假设 α 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非周期函数（这意味着，对于每个紧集 $C \subset \mathbb{R}$，都存在一个常数 $N > 0$，使得对所有 $n \geq N$ 都有 $\alpha^n(C) \cap C = \varnothing$），且 $\beta > 0$，其中 β 如上所述。那么，集合

$$\{f \in L^p(\mathbb{R}, \tau) : \|T^n_{\alpha,w}(f) - \chi_{[l,l+1]}\|_p \geq 1 \text{ for all } n \geq N\}$$

不是 σ-多孔的。事实上，对于所有 $f \in F$ 和 $n \geq N$，我们有

$$\|T^n_{\alpha,w}(f) - \chi_{[l,l+1]}\|_p \geq \|\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{-k})\, f\chi_{[l,l+1]}\|_p$$

通过与定理3.16的证明中类似的计算。然而，

$$\|\prod_{k=1}^{n} (w \circ \alpha^{-k})\, f\chi_{[l,l+1]}\|_p \geq \beta\, \|f\chi_{[l,l+1]}\|_p \geq 1.$$

References

1. F. Bayart, *Porosity and hypercyclic operators*, 《美国数学会会刊》133(11) (2005) 3309-3316。2. F. Bayart 和 ´E. Matheron, 《线性算子的动力学》, 《剑桥数学丛书》179, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2009。3. C. L. Belna、M. J. Evans 和 P.D.Humke, *Symmetric and ordinary differentiation*, 《美国数学会会刊》72(2) (1978) 261-267。4. W.R. Bloom 和 H. Heyer, *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, De Kruyter, 柏林, 1995。5. C-C. Chen 和 C-H. Chu, *Hypercyclic weighted translations on groups*, 《美国数学会会刊》139 (2011) 2839-2846。6. C-C. Chen、S. ¨Oztop 和 S. M. Tabatabaie, *Disjoint dynamics on weighted Orlicz spaces*, *Disjoint dynamics on weighted Orlicz spaces* **14** 72 , 《复分析与算子理论》, ( ) (2020)。https://doi.org/10.1007/s11785-020-01034-x 7. C.-C. Chen 和 S. M. Tabatabaie, *Chaotic operators on hypergroups*, 《算子数学》12(1) (2018) 143-156。8. E. P. Dol˘zenko, *Boundary properties of arbitrary functions*, 《苏联科学院数学系列通报》31 (1967) 3-14。9. G.B. Folland, *Real Analysis*, *Modern Techniques and Their Applications; Second Edition*, 约翰·威立父子公司, 纽约（1999）。10. K-G. Grosse-Erdmann, *Hypercyclic and chaotic weighted shifts*, 《数学研究》139 (2000) 47-68。11. K-G. Grosse-Erdmann 和 A. Peris, 《线性混沌》, 《大学教材系列》, 施普林格, 2011。12. R. I. Jewett, *Spaces with an abstract convolution of measures*, 《数学进展》18 (1975) 1-101。13. V. Kumar 和 S. M. Tabatabaie, *Hypercyclic sequences of weighted translations on hypergroups* **103** 2021 916 934 , 《半群论坛》, ( ) – 。14. D. Preiss 和 L. Zaj´ı˘cek, *Fréchet differentiation of convex functions in a Banach space with a separable dual* **91** 2 1984 202 204 《美国数学会会刊》( ) ( ) – 。15. H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995) 993-1004。16. Y. Sawano、S. M. Tabatabaie 和 F. Shahhoseini, *Disjoint Dynamics of Weighted Translations on Solid Spaces* **298**, 107709, 14 2021 , 《拓扑学应用》页码 ( ) DOI:10 107709 17 1016 2021 。17. S. M. Tabatabaie 和 S. Ivkovic, *Linear dynamics of cosine operator functions on solid Banach function spaces* **25** 2021 1437 1448 , 《正性》, ( ) – 。18. A. Villani, *Another note on the inclusion $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$*, 《美国数学月刊》92 (1985) 485–487。19. L. Z´aji˘cek, *Porosity and σ-porous*, 《Real Anal. Exchange》13 (1987/1988) 314-350。20. L. Zaj´ı˘cek, *Small non-σ-porous sets in topologically complete metric spaces*, 《数学讨论会》77(2) (1998) 293-304。21. L. Z´aji˘cek, *On σ-porous sets in abstract spaces*, 《Abstr. Appl. Anal.》5 (2005) 509-534。

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts p.p. , , , , 367 Kneza Mihaila 36 11000 Beograd Serbia.
Email address: stefan.iv10@outlook.com

Department of Mathematics, Faculty of Science, Istanbul University, Istan-bul, Turkey*Email address*: oztops@istanbul.edu.tr

Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.*Email address*: sm.tabatabaie@qom.ac.ir