arXiv:2301.02917v1 [math.HO] 7 Jan 2023

狄多问题：古代文学中的神话如何成为一个变分法问题

Dora Musielak

摘要

介绍变分法时，我们可能会借助狄多问题来说明最基本的变分问题：求一条给定周长、所围面积最大的曲线。这类问题促使数学家发明了求极大值与极小值的方法，并推动变分法发展成为分析学的一个独立分支。狄多问题的灵感源自迦太基（北非古城）的建立神话：这座城市由一位腓尼基公主创建，罗马诗人维吉尔和拉丁史学家尤斯蒂努斯分别在公元前两世纪的作品中讲述了这个故事。历史学家曾就迦太基建城的相关事实展开争论；然而，当代数学家接受了维吉尔在其 $Aeneid$中所描述的模糊情节，并为狄多的故事增添细节，以推演出若干诗句，并将其作为等周定理的依据。最先将维吉尔的诗解读为狄多的变分法问题的，是莱昂哈德·欧拉还是开尔文勋爵？本文试图厘清这一历史归属问题，确认是谁最先定义了狄多问题。

关键词：等周问题、变分法、欧拉、开尔文勋爵

1 引言

1937年，卡尔·门格尔[1] 写道：“第一个解决变分法问题的人，似乎是迦太基的狄多女王。”当代数学书籍[2] 在此基础上更进一步，从维吉尔的《埃涅阿斯纪》中取材，为狄多的故事增添了细节，声称狄多运用圆的等周性质，在抵达北非后确保自己买下的土地面积最大，从而建立了迦太基——这座古城如今位于突尼斯。以下是两个例子，我用斜体标出了维吉尔诗中没有提到的狄多故事细节：

[1]Menger（1937年）[2]例如参见 Brunt（2004）；Freguglia 和 Giaquinta（2016年）；Coppersmith（2017）；Nahin（2004）；Rojo 和 Bloch（2018年）。

“狄多是迦太基女王（约公元前850年？），出身于一个关系失和的家庭。她的兄弟皮格马利翁杀害了她的丈夫（同时也是她的叔叔），狄多在众神相助下逃往北非海岸，皮格马利翁则一路追赶。据传，狄多登陆北非后，与当地首领达成协议，取得牛皮所能围住的全部土地。随后，她挑选了一头牛，把牛皮切成极细的长条，再将它们接起来，做成一根两英里半多长的牛皮绳。接着，狄多用这根牛皮绳和北非海岸线来划定她的土地周长……显然，狄多想用牛皮绳和海围出尽可能大的面积。后来，人们在牛皮绳和海岸线围出的范围内建起了迦太基城。狄多将此地命名为拜尔萨，意为公牛皮。”[3]

“狄多……将海岸（假定为直线）作为边界的一部分，她铺开兽皮细条，围出尽可能大的面积。她“知道”这个形状应该是半圆。”[4]

如果这些记载属实，那么狄多将是人类历史上第一位理解数学原理的女性，远早于有文字记载以来最早的数学家。迦太基建于公元前814年，因此狄多的出生时间比米利都的泰勒斯（约公元前624—548年）、萨摩斯的毕达哥拉斯（约公元前570—490年）和亚历山大的欧几里得（公元前325—265年）早数百年，也远早于研究等周问题的希腊数学家，例如撰写了《论等周图形》的泽诺多罗斯（约公元前200—140年）；这部著作现已失传，但亚历山大的塞翁（公元335—405年）和亚历山大的帕普斯（公元290—350年）的注释中保留了相关细节。在《数学汇编》中，帕普斯介绍了古代等周研究的成果[5]，但没有提到狄多。

狄多问题如今被视为最基本的等周问题：给定周长，求能围出最大面积的封闭平面曲线的形状。答案是圆，正如任何一名小学生都知道的那样；但在变分法中，解是通过莱昂哈德·欧拉提出、约瑟夫-路易·拉格朗日加以完善的解析方法求得的。

2 古代文学中的狄多

狄多与迦太基建城的故事，经维吉尔写入《埃涅阿斯纪》，并由三世纪罗马历史学家尤斯蒂努斯记载于《庞培·特罗古斯〈腓力史〉摘要》中，因而流传千古。然而，这些故事中完全没有提到狄多用兽皮条圈出一块圆形土地，

[3]Brunt（2004），第14–15页。[4]Nahin（2004），第45页。[5]据 Pappus 所述，圆的等周性质的第一个证明（采用几何论证）归功于泽诺多罗斯。

也没有提到她利用了圆所围成的面积最大的知识。

维吉尔在《埃涅阿斯纪》[6] 第1卷第365—368行中提到狄多及其人民抵达非洲："他们来到这里，买下了土地——正如你现在所看到的，这里矗立着迦太基新城的宏伟城墙和复兴的堡垒；他们用一头公牛的牛皮裁成的条带所能圈出的土地，尽数买下，并因此将其命名为拜尔萨。"[7]

尤斯蒂努斯以狄多的腓尼基名字艾丽莎称呼她，他在第十八卷中写道："通过这种方式，逃亡者们获得了片刻喘息；艾丽莎抵达非洲的一个海湾后，便争取到了海岸居民的支持。这些居民因外国人的到来，以及与他们进行商品交易的机会而感到欣喜。随后，她谈妥了一块土地，大小足以用一张牛皮覆盖，让她可以在那里安顿那些因长途航行而疲惫不堪的同伴，直到能够适时继续前进。于是，她命人将牛皮切成尽可能细的条带，从而获得了一片比她表面上所要求的更大的土地；因此，这个地方后来便得名拜尔萨。"[8]

因此，如果维吉尔和尤斯廷都没有提供当代数学家所描述的、我们如今所知的狄多问题的细节，那么是谁提供的？狄多的神话故事是如何变成狄多问题的？想必只有科学家才会在"买下土地……用一头公牛的皮带能围起来的所有土地……"（维吉尔，公元前1世纪）与"她铺开皮带，围出尽可能大的面积，并且'知道'它会呈半圆形"（Nahin，2004）之间建立起联系。

3 等周问题与变分法

等周问题为变分方法的发展奠定了基础。变分方法始于古代学者的一项观察：大多数运动似乎沿直线或圆周进行。将直线定义为两点之间最短的路径，是古代几何学家已知的极小化原理的早期表述。古代研究的等周问题（例如，平面上的圆和三维空间中的球体，被认为分别是在给定面积和给定体积条件下周长最短的图形）是通过几何方法解决的。

Pappus称赞泽诺多罗斯（公元前200—140年）解决了求解最优

[6]这首史诗写于公元前29年至公元前19年，共12卷，讲述了特洛伊陷落后罗马的建立。维吉尔在第一卷第297至371行描写了狄多建立迦太基的故事。[7]第365行： *Devenere locos, ubi nunc ingentia cernis moenia surgentemque novae Karthagi-nis arcem mercatique solum facti de nomine Byrsam taurino quantum possent circumdare ,,,. tergo*

[8]马库斯·尤尼亚努斯·尤斯蒂努斯，《庞培·特罗古斯〈腓力史〉节本》。约翰·塞尔比·沃森牧师译。伦敦：康文特花园，亨利·G·博恩出版社（1853年）。

给定周长时的最大面积曲面形式问题。他还阐述了亚历山大城的希罗（或希罗努，约公元10—75年）的研究。希罗研究反射光学，发现反射光以使其传播时间最短的方式行进。光的反射定律——入射角等于反射角——自古以来就已确立。在欧几里得的《反射光学》中，他指出光沿直线传播，并描述了反射定律（公元前300年）。希罗通过几何方法证明，光线从平面镜反射后实际经过的路径，比任何其他可能在光源与观测点之间画出的反射路径都短。

古希腊人最早提出这样一种想法：物体在两点之间移动时，自然界会选择最短、最省力且最直接的路径。十七、十八世纪，自然界的经济性这一观念仍令哲学家和科学家们念念不忘。寻找更复杂的极大值与极小值问题的解析解，吸引了费马、牛顿、莱布尼茨、伯努利兄弟（雅各布和约翰一世）、欧拉、拉格朗日和莫佩尔蒂等最杰出的数学家。

皮埃尔·德·费马（1601—1665）或许受到海伦关于反射光最小化问题的启发，他证明，光线经过一条邻近的虚拟路径所需的时间，与实际所用时间之差是一个二阶小量。这就是著名的费马最短时间原理。

牛顿（1643—1727）研究了物体在阻力介质中的运动，并找出了能使阻力最小的物体形状。

1696年6月，约翰·伯努利（1667—1748）向数学家们提出了以下挑战：已知竖直平面上的两点A和B，求一条路径AMB，使一个可移动的质点M在自身重量的作用下，沿此路径下落所需时间最短（假设M的加速度仅由重力造成）。这就是著名的最速降线问题（源自希腊语*brachistos*，意为“最短”，以及*chronos*，意为“时间”），后来也称为最短时间下降问题。最速降线问题并没有显而易见的解；伯努利兄弟（雅各布和约翰一世）、牛顿、莱布尼茨和洛必达各自采用不同的方法，正确地解决了这一问题。[9]

莱昂哈德·欧拉对极大值与极小值原理的最初研究，始于对这些数学家著作的考察；其中，他尤其受到雅各布·伯努利的工作启发，并在其老师约翰·伯努利的推动下展开研究。后者在1728年寄给身处圣彼得堡的欧拉的一封信中，提请他注意测地线问题，这促使欧拉于1729年初构想出一种解析方法，使人们能够在任意曲面上——无论是凸面还是凹面——求出连接两点的最短线。[10] 欧拉还解决了其他等周问题，取得了一些成果，从而帮助他奠定了变分法的解析基础。

欧拉创立了变分法这一独立的分析学分支，正是为了系统化极大值与极小值的求解方法；他在1744年出版的著作《寻求极大或极小曲线的方法》中出色地首次提出了这些方法。

[9] Fregulia 和 Giaquinta（2016年），第3—4页。[10] 欧拉（1732）

具有这一性质，或以最广义的含义理解的等周问题的解，这是第一部关于变分法的论著。[11] 按照欧拉的方法，变分法提供了一种求取某个量的极值的方法，而该量可以表示为一个（变分）积分。

欧拉的《*Methodus inveniendi*》打破了当时由其前辈确立的传统，其中也包括他早年在这一领域的研究。[12] 在这部论著中，欧拉阐述了力学的变分原理，也就是如今归于莫佩尔蒂名下的最小作用量原理：给定一个投影物体，设其质量为 M，速度平方的一半为 v，弧长微元为 ds。那么，在所有经过同一对端点的曲线中，所求曲线就是使积分 $\int Mdsv^{1/2}$ 取最小值的那条曲线。Goldstine（1980年）以及 Freguglia 和 Giaquinta（2016年）介绍了欧拉阐述这一原理的详情。[13]

欧拉指出："宇宙的结构既然是由最明智的造物主设计得尽善尽美，那么世间发生的一切必定都体现着某种极大或极小规律；因此，毫无疑问，世界上的一切结果，既可以通过极大值和极小值方法从最终原因中同样成功地推导出来，也可以直接从有效原因中推导出来。"[14]

作为力学中最早的变分处理方法，欧拉的最小作用量原理对分析力学的发展作出了重大贡献，并最终成为二十世纪物理学基础的重要组成部分，包括广义相对论和量子力学。

欧拉还以能够背诵维吉尔的《埃涅阿斯纪》而闻名。他是否把狄多的故事解读成了狄多等周问题?

4 在《变分法》中定义狄多问题

随手翻阅十八、十九世纪编写的数学史书籍，并不能找到狄多的神话故事何时、如何成为变分法一部分的线索。要将古代神话与数学联系起来，需要一位才华横溢、想象力丰富的人物。两位人选浮现出来：变分法的创始人莱昂哈德·欧拉（1707—1783），以及英国数学家、物理学家和工程师威廉·汤姆孙，他在物理学界以开尔文勋爵（1824—1907）之名闻名。

4.1 莱昂哈德·欧拉

在《*Methodus inveniendi*》中，欧拉给出了以下例子来展示他的解析方法：在所有围成给定面积的容许曲线中，

[11]欧拉（1744年）[12]Fraser（1993）[13]Goldstine（1980年），第101页；Freguglia 和 Giaquinta（2016年），第181–189页。[14]欧拉（1744年），附录一。

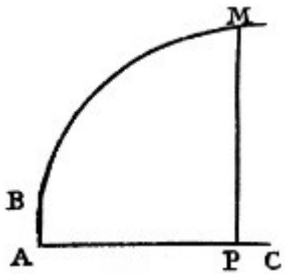


图1：欧拉在《*Methodus inveniendi*》（1744年）中的草图

寻找长度最短的一条。图1是欧拉的草图，用以说明圆的曲弧 BM 最短。用他自己的话说：[15]

“在 AP 轴上作线段 BM，使得截取给定大小的面积 ABMP 后，与该面积相对应的曲弧 BM 为所有曲弧中最短的。”解出变分积分后，欧拉证明解曲线是一段圆弧，其圆心位于 AP 轴上的某处，例如图1中的 C 点。

然而，欧拉的《*Methodus inveniendi*》以及他在该领域发表的其他论文中，都从未提及狄多。

1783年10月，孔多塞侯爵[16] 发表了《欧拉颂词》，献给巴黎科学院的成员。在这篇庄严的颂词中，孔多塞阐述了欧拉的天才，并提出《埃涅阿斯纪》中的一行诗曾让欧拉首次想到撰写一篇探讨力学问题的论文。用孔多塞自己的话来说：

古代文学和博学语言的学习曾是他所受教育的一部分；他一生都对此保有兴趣，也从未忘记学过的东西；但他始终没有时间，也没有兴趣在最初的学业之外继续钻研：他没有读过现代诗人的作品，却能将《埃涅阿斯纪》倒背如流。然而，即使在朗诵维吉尔的诗句时，欧拉也没有忽略数学；万事万物都可能让他想起这个几乎是他思想中唯一的主题。我们在他的著作中发现了一篇关于力学问题的学术论文，他曾说，自己最初的灵感来自《埃涅阿斯纪》中的一句诗。[17] [古代文学和博学语言的学习曾是他所受教育的一部分；他一生都对此保有兴趣，也

[15]欧拉（1744年），第四章，第135页，例二：9。 *Super axe AP construere lineam BM ita comparatant ut abscissa area ABMP datæ magnitudinis arcus curvæ BM illi areæ ,,,,. respondens sit omnium minimus*

[16] 孔多塞，Jean-Antoine-Nicolas de Caritat，孔多塞侯爵（1743-1794）。[17] 《欧拉颂词》：孔多塞在科学院所作的颂词，科学院院史……1783年，第64页。

从未忘记学过的东西；但他始终没有时间，也没有兴趣在最初的学业之外继续钻研：他没有读过现代诗人的作品，却能将《埃涅阿斯纪》倒背如流。然而，即使在朗诵维吉尔的诗句时，欧拉也没有忽略数学；万事万物都可能让他想起这个几乎是他思想中唯一的主题。我们在他的著作中发现了一篇关于力学问题的学术论文，他曾说，自己最初的灵感来自《埃涅阿斯纪》中的一句诗。]

欧拉确实从诗作《埃涅阿斯纪》中摘取诗句，作为他提交给法国科学院的竞争论文的箴言。[18] 这些内容概述于表1。这是否就是孔多塞所指的内容?

表1. 欧拉的论文及摘自维吉尔《埃涅阿斯纪》的箴言。

Year	论文标题	箴言
1753 (E. 413)	“关于船舶运动 没有风力的推动。” 第七篇获奖论文	*Tali remigio navis se* 缓慢地移动. 维吉尔《埃涅阿斯纪》第五卷
1759 (E. 415)	“关于投掷 并翻滚。” 第九篇获奖论文	人们的喧嚣随之而来 绳索的吱嘎声。 维吉尔《埃涅阿斯纪》，《利维坦》第1卷
1770 (E. 485)	“月球理论” 1770年奖项 第十篇获奖论文	歌唱徘徊的月亮 维吉尔《埃涅阿斯纪》《利维坦》第1卷
1772 (E. 486)	“改进的月球理论” 1772年奖项 第11篇获奖论文	这是漫长征途的最后一程 这便是此后道路的终点 我们离去后，便抵达你们的海岸 维吉尔《埃涅阿斯纪》，第3卷

不过，欧拉精心挑选这些箴言，使之与竞赛的研究主题相契合。[19] 除了引用维吉尔的诗句，他还引用了马库斯·图利乌斯·西塞罗、普罗佩提乌斯等其他古代作家的作品，并创作了其他格言，还向克里斯蒂安·戈德巴赫征求建议。最终，孔多塞的这句话“在他的著作中，人们还发现了一篇博学的 ´力学论文， ´他曾说，自己从《埃涅阿斯纪》的一句诗中获得了这篇论文的 ´最初 `构 ´想”并不意味着欧拉是受维吉尔启发才提出狄多问题的。

作为一名历史学家，我不能依靠讣告来提取事实信息，即使讣告出自一位杰出学者之手。年轻得多的孔多塞从未见过欧拉，´而他撰写的颂词 和大多数颂词一样，依据的是传闻，转述法国院士可能还记得的欧拉生平与著作情况。

[18]参赛论文以匿名方式提交，并以箴言作为标识；作者姓名装在密封信封中，只有在评审结束、确定获奖论文后才会拆封。[19]关于欧拉所选箴言的意义，参见 Musielak（2022年）。

一部当代传记（发表于2016年）进一步暗示欧拉解决了狄多问题。作者提到一份八页手稿的副本（现藏于莫斯科），据说其中载有欧拉的解答。这份手稿是否就是那份能够确凿证明欧拉将狄多的故事与变分法联系起来的文献？遗憾的是，据说这份手稿“并非欧拉亲笔所写”。因此，其可信度有所降低。欧拉著述颇丰，由他人代笔的手稿出自他手，这种可能性实在不大。此外，他本应在1764年发表的一篇论文中收录这一解法；在那篇论文里，欧拉借助变分算子概述了《变分法》的研究成果。

约瑟夫-路易·拉格朗日（1736—1813年）拓展了变分法。在1755年8月写给欧拉的第二封信中，拉格朗日概述了他的 $delta$算法（用于求解约束优化问题），欧拉采纳了这一方法，并因此构想出“变分法”这一术语。在1764年发表的一篇论文摘要中，欧拉赞扬拉格朗日丰富了这门科学[20]他们的共同工作最终促成了欧拉-拉格朗日方程，该方程是变分积分极小值的平衡方程。[21]

欧拉去世五年后，拉格朗日出版了$M´ecanique\ analytique$，这是他关于分析力学的汇编著作；他运用变分思想，从统一的分析视角阐述力学。在1799年于综合理工学院任教期间，拉格朗日出版了$Le\c cons\ sur\ le\ calcul\ des\ f onctions$，并解释了变分法。拉格朗日简要概述了极大值与极小值问题的发展，只提到了希腊数学家阿波罗尼奥斯（公元前262—190年）；该著作仅涉及从给定点向圆锥曲线的弧所能作出的最长和最短直线。[22] 这里没有提到狄多问题，在拉格朗日其他已发表的著作中也没有提及。

4.2 威廉·汤姆孙，开尔文勋爵

狄多之名首次出现在相关语境中，是在威廉·汤姆孙于1893年发表的一场公开演讲中。他是一位杰出的物理学家，今人称其为开尔文勋爵。他的贡献包括在热力学第二定律的发展中发挥重要作用；创立绝对温标（以开尔文为单位）；提出热的动力学理论；开展电与磁的数学分析，其中包含电磁光理论的基本思想；以及诸多其他成就。他将物理学中彼此分散的领域汇聚起来——热、热力学、力学、流体力学、磁学，以及

[20]欧拉（1764）。. . . *ex quo Auctori occasio est oblata hanc scientiam novo Calculi genere locupletandi quem Calculum variationum appellat et cuis elementa hic tradere ac dilucide explicare constituit.* [21]关于欧拉—拉格朗日方程的精彩阐述，包括历史视角，请参阅 Freguglia 和 Giaquinta（2016年）。[22]拉格朗日（1806年）。 *Les questions de maximis et minimis n'ont pas été incounues aux anciens géomètres ; car on a un livre entier d'Apollonius qui traite presqu'uniquement des plus grandes et des plus petites lignes droites qui peuvent être menées de points donnés aux arcs des sections coniques.* 424 页。.

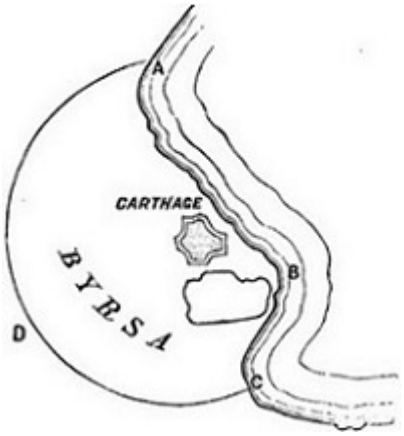


图2：开尔文勋爵于1893年描述的狄多问题。

电学。开尔文勋爵在19世纪科学最终综合的过程中发挥了关键作用；当时的科学将一切物理变化都视为与能量相关的现象。[23]

开尔文勋爵借助图2中的草图说明狄多问题，并这样讲述狄多巧妙地通过土地谈判获得土地的方式：

“. . . 她把牛皮切成一条极长的带子，并成功地在牛皮与海之间围出一片价值极高的领土，随后在此建立了迦太基。狄多问题要解决的是：如何用给定长度的线围出价值最大的土地。如果土地的价值处处相等，这个问题的一般解表明，她应将牛皮带围成一个圆。一般解还表明，若海也构成边界的一部分，那么假设从海岸上任意给定的点 A 向南出发，内陆边界线的末端必须与海岸线垂直相交。这样一来，要完成求解，我们还需回答一个十分奇妙有趣、但绝不简单的几何问题：已知圆弧 ADC 的长度，圆弧的半径应为多少，又应以什么方向从点 A 出发，才能在某个未知点 C 与给定曲线 ABC 垂直相交？”[24]

开尔文勋爵还补充说，只要具备足够的数学知识，狄多就会得出结论：边界必须是一个圆。当然，如图 2 所示，为了尽可能多地获得所提供土地中价值更高的部分，她会让边界的不同部分具有不同的曲率，“尽管不同部分曲率的差异会导致围成的总面积小于同等长度的圆形边界所围成的面积。”[25]

[23]Gray（1910年）[24]Thomson（1894年），第572-574页。[25]同上，第574页。

如今，作为变分法的入门内容，狄多问题的解要求求出满足约束的极值解，也就是说，在弧 $L = \int ds$ 长度为给定值 L的条件下，使面积 $A = \int ydx$最大化。换言之，我们希望在另一个积分 L 取给定常数值的条件下，使积分 A 最大化。请注意，这是一个约束优化问题，我们使用拉格朗日的方法，在等式约束下求函数的局部极大值和极小值。

显然，在没有原始可靠来源的情况下，我无法断定欧拉是在维吉尔的《埃涅阿斯纪》启发下首次提出狄多问题的，正如孔多塞所暗示的那样。证据表明，开尔文勋爵在1893年描述了这一问题。正如他所说，无论严厉的批评家会将狄多的故事视为神话，还是承认它具有历史真实性，它仍然充满科学趣味。

对我而言，狄多问题是向学生介绍变分法的绝佳例子，因为它体现了一个界定明确的等周问题案例，阐释了欧拉和拉格朗日在十八世纪提出的基本原理。

5 狄多与古代数学

关于狄多的知识水平，我们一无所知。作为一位腓尼基公主，她很可能受过良好教育。从维吉尔和尤斯蒂努斯的故事中，我们隐约得知，狄多是一位令人敬畏的女性：聪慧、雄心勃勃；她是一位外来的领袖，带着忠诚的追随者离开推罗（位于如今黎巴嫩的海岸线上），航行穿过地中海，最终在北非海岸登陆。在那里，她建立并统治了迦太基（今突尼斯），这座重要的港口城市在公元前二世纪达到鼎盛，之后罗马崛起为霸主并接管了该地区。

对于地中海地区周边繁荣发展的古代文明来说，几何学是其发展的基础。巴比伦人在美索不达米亚河谷繁衍生息，并通过地中海地区开展贸易，这需要相当高的数学技能。泥板保存了他们所掌握知识的记录。例如，来自巴比伦的泥板表明，巴比伦人已具备高深的几何学和算术知识。巴比伦位于美索不达米亚南部，距今巴格达（伊拉克）以南约五十英里。

事实上，一些学者认为，巴比伦人在萨摩斯的毕达哥拉斯之前一千年就已知晓勾股定理。在苏萨——一座距巴比伦两百多英里的古城——1936年，人们发现了一批泥板，上面记载着正多边形的面积和周长与其各边长度之间的比值。现存最著名的一块泥板（估计制作于公元前1900年至公元前1600年）列出了一组勾股数。这表明，巴比伦人不仅了解勾股定理，还掌握某些代数恒等式。

此外，关于古代女性懂得数学的记载也相当丰富。例如，毕达哥拉斯学派中就有女性，其中一些声名远扬，比如数学家泰阿诺，她是毕达哥拉斯的妻子。古代数学家兼音乐理论家杰拉萨的尼科马库斯（约公元60—120年）在《和声学导论》的献词中，将课程献给了一位女士，她也是他的学生。[26] 在这本书中，尼科马库斯探讨了音乐理论的一种形式——毕达哥拉斯和声学，并将数及数值比赋予音符和音程。我们当然也知道亚历山大的希帕提娅（约公元370—415年），她被视为首位在数学家和天文学家领域取得卓越成就的女性学者。[27]

我认为狄多受过数学教育，因此运用了等周定理，智胜了那位把非洲北端（今突尼斯）的土地卖给她的国王。因此，狄多问题不仅应被视为阐释变分法基本问题的例子，也应被视为一堂数学史课程，让我们了解古代女性在数学发展中所发挥的作用。

参考文献

B. van Brunt（2004）。《变分法》。施普林格纽约出版。ISBN：978-0-387-40247-5。DOI：10.1007/b97436。J. Coppersmith（2017）。《懒惰的宇宙：最小作用量原理导论》。牛津大学出版社。L. 欧拉（1732）。《曲面上连接任意两点的最短线》（曲面上连接两点的最短线）。《彼得堡科学院评论》，第 3 卷，1732 年，第 110–124 页。（E. 9）

L. 欧拉（1738）。《广义等周问题的一般解》（Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis）。《圣彼得堡科学院论丛》6（1732/3），123-155页。《欧拉全集》125，13-40页。（E. 27）

L. 欧拉（1741）。《具有最大或最小性质的曲线的新简易求法》（Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis）。载于《圣彼得堡科学院论丛》8（1736），159-190页。后收入 L. 欧拉《欧拉全集》I 25，54-80页。（E. 56）

L. 欧拉（1744年）。《求最大或最小性质曲线的新方法，或广义等周问题的解法》（Methodus inveniendi curvas h’neas maximi minimive proprietate gaudentes sive solution problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti）。洛桑、日内瓦：M.-M. Bousquet。后收入 L. 欧拉《欧拉全集》I 24。（E. 65）。据 Enestr¨om 所述，欧拉于1743年4月前完成了这部著作的手稿。

L. 欧拉（1764）。《变分法基础》（《变分法基础》）。《圣彼得堡科学院新纪事》第10卷（1764），

[26]尼各马可传记注，载于《西方世界伟大著作》，罗伯特·梅纳德·哈钦斯编，第11卷，第807页。
[27]Musielak（2020），第206-207页。

1766年，第51–93页。这项研究（E. 296）于1756年在柏林科学院宣读。Freguglia, P. 和 Giaquinta, M.（2016）。《变分法的早期发展》。由 Birkh¨auser 出版。Gelfand, I. M. 和 Fomin, S. V.（1963）。《变分法》。修订版英文版，由 R. A. Silverman 翻译并编辑。Prentice-Hall, Inc.，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州。Goldstine, H.（1980）。《从17世纪到19世纪的变分法史》。Springer-Verlag。Gray, A.（1910）。《威廉·汤姆孙（开尔文男爵）传》。《自然》83，61–65（1910）。拉格朗日（1806）。《函数演算讲义》。新版，由作者 [J.-L. 拉格朗日]修订、校正并增补。该书最初于1799年以讲义形式出版，当时拉格朗日在巴黎综合理工学院任教，并于1804年再版。1806年，拉格朗日出版了包含两篇新课程的新版本。Menger, K.（1937）。《什么是变分法？它有哪些应用？》《科学月刊》45（3）（1937），250–253。Musielak, D.（2022）。《莱昂哈德·欧拉与天体力学的基础》。Springer物理学史丛书。Springer Nature Switzerland。ISBN 978-3-031-12321-4。Musielak, D.（2020）。《索菲·热尔曼：革命性的数学家》。Springe

r

传记。Springer Nature Switzerland。ISBN 978-3030383770。Nahin，J.P.（2004）。《当最小即是最好》。普林斯顿大学出版社，2004。Rojo，A. 和 Bloch，A.（2018）。《最小作用量原理：历史与物理学》。剑桥大学出版社。doi:10.1017/9781139021029 Thomson，W.（1894）。《威廉·汤姆逊爵士（开尔文男爵）通俗演讲与演说》，共三卷。Nature丛书，MacMillan and Co.，伦敦，1894年。

Dora Musielak；德克萨斯大学阿灵顿分校，2023年1月6日