arXiv:2301.02950v2 [cs.GT] 3 Oct 2023

UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

博士论文

提交以获得
巴黎第一大学先贤祠-索邦大学博士学位
博士生院 ED-465
专业：应用数学

博弈论中集合函数的几何：组合方面与计算方面

par
Dylan Laplace Mermoud

于*2023*年*9*月*8*日答辩，评审委员会由以下人员组成

Philippe Bich	巴黎第一大学先贤祠-索邦大学	主席
Michel Grabisch	巴黎第一大学先贤祠-索邦大学	主任
Jean-Jacques Herings	蒂尔堡大学	评审人
Marina Nuñez	巴塞罗那大学	报告人
Philippe Solal	让·莫内大学	评审人
Tamàs Solymosi	布达佩斯考文纽斯大学	报告人
Peter Sudhölter	南丹麦大学	主任

致谢 / 致谢

我谨向我的导师 Michel Grabisch 和 Peter Sudhölter 致以最诚挚的谢意。与你们进行的数不胜数、弥足珍贵的交流，让我在数学家的成长道路上不断进步，也让我成为更好的人。过去几年里，我从未学到过这么多，对此我深怀感激。我还要诚挚感谢 Marina Nuñez 和 Tamàs Solymosi，他们欣然接受了审阅这篇即将呈现在你面前的作品；也要感谢 Philippe Bich、Jean-Jacques Herings 和 Philippe Solal，感谢他们愿意加入我的委员会。

我也要感谢 Agnieszka Rusinowska 给予我的暖心帮助和建议，也感谢 Arianna Novaro 和 Alexandre Skoda。此外，我还想向 Nadim、Pierre、Victor、Thibault 和 Thomas 致意。和他们一起学习、探讨数学以及许多其他事情的时光十分美好，而这正是我投身数学事业的最大动力。

最后，如果没有 Rosa 每日的支持，这段旅程便不会如此圆满；我也很乐意与她共事。最后，我想对母亲说几句话：为了让我能够成为博士，她付出的努力比我多得多。与她二十六年来的巨大付出相比，这几页数学内容实在微不足道。

摘要

本学位论文的主要目标是推动合作博弈论向组合学、算法学和离散几何方向发展。因此，本文第一章着重阐明可转移效用博弈的联盟函数所具有的几何性质，并着重介绍其与次模集合函数理论及多面体几何之间已有的联系。

为深化与多面体几何的联系，我们定义了一类新的多面体，称为基本多面体，并可在其上应用 Bondareva-Shapley 定理的广义版本来检验其非空性。为使这些计算工具能够在实践中使用，我们基于 Peleg 递归方法提出了一种生成极小平衡集合的算法过程。随后，我们应用 Bondareva-Shapley 定理的广义版本，设计了一系列算法过程，用于检验性质或生成特定的联盟集。

下一章将探讨与组合学的联系。首先，我们证明平衡集合构成一个组合物种，并构造大小为 p、由 k 元均匀超图组成的组合物种，作为构造平衡集合物种的中间步骤。之后，我们介绍若干关于被博弈扭曲的共振排列的结果，从而为预分配空间和核心的面结构提供新的信息。

最后，我们利用前几章的结果探讨核心稳定性问题。首先，我们介绍一种算法，该算法基于 Grabisch 和 Sudhölter 对具有稳定核心的博弈所作的嵌套平衡性刻画，并大量运用了第二章提出的 Bondareva-Shapley 定理的推广。其次，我们描述一种关于核心稳定性的新必要条件，该条件基于将上述推广应用于特定的锥。最后，我们使用投影算子研究预分配之间的支配关系，并给出将点投影到多胞体和仿射子空间交集上的显式公式和算法。

法文摘要

整体大于各部分之和。

亚里士多德，《形而上学》

社会科学数学有一个独特之处：方程的研究对象正是写下这些方程的人。尤其是，方程所描述的行为可能仅仅因为方程被明确写出而发生改变——前提是有人有理由偏离这些方程。此外，博弈论中的优化问题往往具有主观性，一个人的目标函数参数可能是另一个人的目标函数变量。

对此，埃米尔·博雷尔曾表示，博弈论“将成为一门新科学，在这门科学中，心理学与数学同样有用”。[1] 他是少数几位在第二次世界大战和约翰·冯·诺依曼之前发展出战略互动数学理论的人之一，另外两位是尼古拉·德·孔多塞和安托万·奥古斯丁·古诺。博雷尔研究博弈论的目标，是为两个参与者之间的任何零和博弈（一个人的收益就是另一个人的损失）找出每位玩家的“最佳”策略。[2]

毫不意外，博雷尔在寻找完美策略时借助了概率论。他指出，无论某个单一且确定性策略有多么出色，只要对手知道这一策略，就可以采取一种通常可能很差、但恰好能完美克制第一位玩家所用“最佳”策略的策略。这在国际象棋或扑克对局中体现得淋漓尽致：一方可能会偏离“最佳”策略，以利用对手显而易见的弱点。博雷尔强调，鉴于真实博弈的心理复杂性，数学在博弈论中的应用存在局限。[2,3]

心理学在博弈论中的重要性，使冯·诺依曼有别于博雷尔。在一份于1928年寄给博雷尔、并由后者提交给科学院的说明中

[1]博雷尔，埃.，《关于一部概率论著作》，《法国与外国哲学评论》，第 98 卷，第 321–336 页，1924 年。 [在线]。可查阅： https://www.jstor.org/stable/41082164[2]Leonard, R.，《冯·诺依曼、摩根斯坦与博弈论的创立：从国际象棋到社会科学，*1900—1960*》。剑桥大学出版社，2010 年。DOI： 10.1017/CBO9780511778278.021[3]von Neumann, J. 和 Fréchet, M.，《埃米尔·博雷尔在博弈论中的作用》，《政治经济学评论》，第 69 卷，第 2 期，第 139–167 页，1959年。 [在线]。可查阅： https://www.jstor.org/stable/24691720

科学会[4], 冯·诺依曼解释说，他独立研究着同一个问题，并不知道博雷尔的研究成果。在这份说明中，冯·诺依曼还声称，他借助极小极大定理找到了“最佳”策略问题的解。该定理于同年晚些时候发表。[5]

极小极大定理有时也称为双人博弈论基本定理，是泛函分析中一系列极小极大定理中的第一个。它可能启发了线性规划中的强对偶定理，以及纳什关于 n 人非零和博弈的研究，这些研究最终促成了广为人知的纳什均衡概念。

极小极大定理。设 $X \subseteq \mathbb{R}^p$ 和 $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ 是两个紧凸集，且 $f\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足

- 对于任意 $y \in \mathbb{R}^q$，函数 $f(\cdot\ y)\colon\ X \to \mathbb{R}$ 是凹函数，
- 对于任意 $x \in \mathbb{R}^p$，函数 $f(x, \cdot)\colon\ Y \to \mathbb{R}$ 是凸函数。

那么，函数 f 满足

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

对于求解双人零和博弈而言，极小极大定理的适用范围远超所需，因为 x 和 y 只需是离散概率分布，而 f 是双线性的。在这一背景下，可以简单地将$f(x, y)$ 重写为 $y^\top Ax$，其中 A 表示 f 在 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$的标准基下的表示。如果玩家1有 p 种可能的策略，而玩家2有 q 种策略，那么 A 的系数 a_{ij} 表示玩家1选择策略 $i \in \{1, \dots, p\}$ 且玩家2选择策略 $j \in \{1, \dots, q\}$时，玩家1的收益。由于这是一个零和博弈，玩家2的收益为 $-a_{ij}$。参与者可以选择其策略的凸组合，这可以解释为博弈随机化；如果博弈重复进行，也可以解释为频率。凸组合的系数就是向量 x 和 y的分量，这让我们想起博雷尔关于何为良好策略的观点。

极小极大定理的一个推论是，在双人零和博弈中，每位玩家总是存在一种“最佳”策略。最后，我们来解释一下“最佳”策略的含义。由于这是一个零和博弈，玩家1总会试图使 f的像最大化，而玩家2则总会试图使其最小化。因此，对玩家1来说，一个好的起点是采用策略 x_0 ，无论玩家2采取什么行动，该策略都能确保某个值；而玩家2的目标是使 $f(x_0, \cdot)$最小化：$Y \to \mathbb{R}$。我们将策略 x_0所能确保的值记为 γ，其定义为 $\gamma = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,\ y)$。玩家2遵循完全相同的过程，并找到一种策略 y_0 ，确保

[4] von Neumann, J., 《论策略博弈理论》《法国科学院院报》，第186卷，第25期，第1689–91页，1928年。[在线]。可访问： https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3139f

[5] von Neumann, J., 《论策略博弈理论》，S. Bargmann译，《博弈论文集》，第4卷，第13–42页，1959年。DOI： 10.1515/9781400882168-003，译自《论社会博弈理论》，《数学年刊》，第100卷，第1期，第295–320页，1928年

$\delta = -\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,\ y)$。根据极小极大定理，我们有

$$\gamma + \delta = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) - \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = 0,$$

这证实了策略 x_0 和 y_0的最优性。事实上，如果玩家1不再采用 x_0，其策略就不再能使函数 $\min_{y\in Y} f(\cdot\ y)$: $Y \to \mathbb{R}$ 最大化，其收益也会低于 γ。此外，由于 $\gamma+\delta$等于零，两个玩家之间没有额外收益可供分配；而且，正如我们之前所示，任何偏离策略 x_0 或 y_0 的行为都可能受到对手的惩罚。由于当两位玩家采用前面定义的策略时，数值 γ 完全决定了博弈的收益，因此 γ 被称为该博弈的值。许多人认为这一结果是博弈论的起点，后来约翰·纳什[6] 将其推广到有 n 位玩家的非零和博弈。纳什均衡是指每位玩家各自选择一种策略，使得任何玩家都不会因为单方面偏离所选策略而获益。

在同一篇文章中，冯·诺依曼讨论了将这一结果推广到更大的 n 参与者集合（记作 N）的可能性。按照处理两人情形时的相同思路，冯·诺依曼希望为每个 $S \subseteq N$ 玩家集合赋予一个数值，类似于 γ 前例中的数值，并将其解释为：假设组成该集合的玩家 S协调行动，他们能够确保获得的收益。几年后，他与高等研究院的同事奥斯卡·摩根斯坦在著名著作《博弈论与经济行为》中进一步发展了这一思想。[7]

从现在起，我们开始偏离冯·诺依曼和摩根斯坦的定义；他们对玩家集合的价值作出了强假设。我们保留的唯一假设是，空玩家集合的价值为0，并放弃所有零和假设。我们可以将玩家集合 S 的价值解释为：当 S 补集中的所有玩家都试图使其收益最小化时，该集合能够确保获得的最大值。我们用$\mathcal{N}$ 表示 N所有非空子集的集合，并称之为联盟；用 v 表示将每个联盟 $S \in \mathcal{N}$ 映射到其价值 $v(S)$的函数，其中 $v(\emptyset) = 0$。函数 v 称为博弈(N, v)的联盟函数。我们还假设，所有联盟的价值都以相同的单位表示，并且可以在玩家之间、联盟之间转移。

现在要根据 v 来确定哪些联盟会形成。大联盟 N 形成的必要条件是，我们能够将其价值 $v(N)$ 分为 n 个实数 $x_1,\ \ldots,\ x_n$，使得对于每个联盟$S \in \mathcal{N}$，都有 $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$。实际上，如果 S 中的参与者所得总和少于他们各自单独能够获得的收益，他们就没有兴趣加入大联盟 N。为方便起见，我们将由 N中的元素作为索引的 n 个 $\mathbb{R}$的笛卡尔积记作 $\mathbb{R}^N$。于是有 $x \in \mathbb{R}^N$，实数 x_i 称为

[6] Nash, J. F.,《非合作博弈》，《数学年刊》，第54卷，第2期，第286–295页，1951年。DOI: 10.2307/1969529 [7] von Neumann, J. 和 Morgenstern, O.,《博弈论与经济行为》。普林斯顿大学出版社，1944年。[在线]。可访问： http://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2gkx

参与者 i在 x 中的支付 。联盟 $S \in \mathcal{N}$在 x 中的支付记作 $x(S)$，定义为 $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$。 如果支付向量 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足 $x(N) = v(N)$，即将大联盟的价值 N 精确分配为 n 笔支付、每位参与者一笔，则称其为预分配。最后，我们将博弈 (N, v) 的核心 记作 $C(v)$，它是 $\mathbb{R}^N$ 的子集，由所有使每个联盟获得的支付至少等于其价值的预分配构成。

核心的直观而贴切的定义，使其成为博弈论和经济学中研究最广泛的解概念之一。尽管其现代定义以及 Shapley 首次将其确认为解概念的时间距今只有 70 年，[8,9]但[10] 互利分配的思想早在至少 19 世纪末就已开始受到研究。1881年，英裔爱尔兰哲学家和政治经济学家 Francis Edgeworth[11] 研究了两种商品交换市场的结果，并定义了一种类似的解概念，称为契约曲线。

1963年，Olga Bondareva 找到了博弈的核心非空的充要条件[12]，该条件涉及一组称为覆盖的对象，这些对象自然源自将线性规划对偶定理应用于核心的定义。对于每个覆盖，我们都可以在博弈向量空间上构造一个线性形式，而博弈在每个此类线性形式下的像都必须小于或等于大联盟的价值。Lloyd Shapley 独立地沿着相同思路，于 1967 年发表了一篇文章[13]，提出了相同的充要条件，其中覆盖被称为平衡集。他还证明，只需使用这些集合中的一个小子集，即极小平衡集。

直观而言，平衡集合代表了 N 的参与者组织成一个或多个联盟以实现总价值最大化的方式。参与者可以组成所有可能的联盟；如有必要，也可以将时间分配给多个联盟，但须遵守两条规则：

1.) 每位参与者恰好「活跃」一个单位的时间；

2.) 如果若干参与者组成一个联盟，他们在其中花费的时间必须相同 ps.

在平衡集合中，每个联盟都对应一个权重，表示参与者在该联盟中投入的个人时间。参与者也可以加入单人联盟，在一定比例的时间内独自工作。由于每位参与者必须恰好活跃一个单位

[8]Shubik, M.，《普林斯顿的博弈论，1949–1955：个人回忆》，《博弈论史论》，第152卷，1992年。DOI： 10.1215/00182702-24-Supplement-151[9]Zhao, J.，《劳埃德·夏普利鲜为人知但仍具重要意义的三项贡献》，《博弈与经济行为》，第108卷，第592–599页，2018年。DOI： 10.1016/j.geb.2017.05.002 [10]Shapley, L. S.，《作为合作博弈的市场》，兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州，技术报告，1955年。[在线]。可查阅： https://www.rand.org/pubs/papers/P629.html[11]Edgeworth, F. Y.，《数学心理学：数学在道德科学中的应用论》。CK Paul，1881年，第10卷。DOI： 10.2307/2548685[12]Bondareva, O.，《线性规划方法在合作博弈理论中的若干应用》，《控制论问题》，第10卷，第119期，第139页，1963年[13]Shapley, L. S.，《论平衡集与核心》，《海军研究后勤季刊》，第14卷，第4期，第453–460页，1967年。DOI： 10.1002/nav.3800140404

时间，某位参与者所属的所有联盟的权重之和必须等于一。更正式地说，定义如下。

定义。联盟集合$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ $\mathcal{B}$ 是平衡集，当且仅当存在一个集合 $\lambda = \{\lambda_S \mid S \in \mathcal{B}\}$，其中的元素均为正实数，满足

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S \mathbf{1}^S = \mathbf{1}^N,$$

其中 $\mathbf{1}_i^S = 1$ 若 $i \in S$，否则为 $\mathbf{1}_i^S = 0$。极小平衡集合是指不包含任何平衡子集合的平衡集合。

平衡集合的定义与正则超图的定义密切相关。N 的划分是极小平衡集合的例子，在这些集合中，所有玩家在整个单位时间内始终处于同一联盟中。当 N 的玩家按照平衡集合$\mathcal{B}$组织时，总价值等于

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S).$$

如果对于平衡集合$\mathcal{B}$，总价值 $\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S)$ 大于 $v(N)$，那么玩家更愿意按照$\mathcal{B}$ 所述的方式组织，而不是按照平凡集合$\{N\}$所述的方式组织。自然，N 的玩家会寻求使价值加权和最大的平衡集合；只有当对于所有平衡集合$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$，我们都有

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N),$$

这与亚里士多德的名言颇为相似：“整体大于部分之和”。这一条件也等价于核心的非空性。

Bondareva-Shapley 定理。设(N, v) 是一个博弈。核心 $C(v)$ 非空，当且仅当对于任意极小平衡集合 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$，我们有

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N).$$

该定理断言，存在一些预分配，将大联盟的价值 N 分配给参与者，并使每个联盟获得的支付都高于其价值，当且仅当参与者在 N 中能够实现的最大价值可通过组建 N获得。此外，该定理还揭示了特定多胞体的几何性质与集合函数性质之间的联系。

多胞体与集合函数之间的联系在组合优化领域，尤其是次模函数理论中，已得到广泛研究，其中包括杰克·埃德蒙兹、Satoru Fujishige、László Lovász 和 Alexander Schrijver 等人的工作。对于每个满足 $\xi(\emptyset) = 0$ 的集合函数 ξ 在 N上，我们都可以关联一个多胞体，称为基多胞体，记作 B(ξ)，并定义为 B(ξ) $= \{ x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = \xi(N)$ and $x(S) \leq \xi(S)\ \forall S \in \mathcal{N}\}$。集合函数 ξ 通常假定为次模的，也就是说，对于$\mathcal{N}$中的任意 S 和T，都有 $\xi(S \cup T) + \xi(S \cap T) \leq \xi(S) + \xi(T)$。

杰克·埃德蒙兹研究了拟阵的秩函数；拟阵是一类特殊的次模集合函数。[14] 他定义了一族具有与拟阵相似性质的多胞体，称为多拟阵，并在其上发展出著名的优化算法。他还详细描述了这些多胞体的面结构，这启发了关于 Shapley 凸博弈核心的一些结果。每个基多胞体经平移后都是一个多拟阵，而二者都是凸博弈的核心。

类似的多胞体在过去十五年间吸引了组合学家的关注。由 Postnikov 定义的广义排列多面体，[16] 是排列多面体的一种推广。排列多面体已被 Guilbaud 和 Rosenstiehl 用于社会科学数学领域，[17] 并由他们命名。排列多面体记作 Π_N，是由 $n!$ 个点构成的集合的凸包；这些点通过置换向量 $(1, \ldots, n) \in \mathbb{R}^N$ 的坐标得到。然而，一些作者将排列多面体定义为任意一个坐标互不相同的向量的所有置换的凸包，这样得到的多胞体具有相同的组合性质：它们拥有相同的面格和相同的“法扇”。

对于任意排列多面体，都可以对其进行变形：将某些面平行平移，且不与任何顶点相交，也就是说，不改变棱的方向。这些变形后的多胞体就是广义排列多面体。事实证明，广义排列多面体、[18] 次模函数的基多面体以及多拟阵（相差一个平移）是同一类多胞体。它们都与凸博弈的核心相同，因此博弈论常常借助组合学或组合优化的研究成果。

本论文旨在沿着上述方向，为合作博弈论的发展作出贡献，推动其与组合学和几何学相结合。本论文由四个彼此独立的章节组成，涵盖我攻读博士学位期间所完成研究的不同方面。

第一章主要介绍本论文中使用的符号和定义。特别地，定义了与 $\mathbb{R}^N$ 相关的主要仿射子空间，并以热带多项式的形式提出了博弈在 $\mathbb{R}^N$ 上的一种新的连续扩展，进一步加强了合作博弈论与离散几何之间的联系。该扩展适用于所有被称为“完全平衡”的博弈，即核心非空且其所有子博弈的核心也非空的博弈。博弈 (N, v) 的子博弈定义为，将联盟函数 v 限制在 N 的某个子集上。

---

[14] Edmonds, J.，《次模函数、拟阵与某些多面体》，组合结构及其应用，1970年。DOI: 10.1007/3-540-36478-1_2 [15] Shapley, L. S.，《凸博弈的核心》，《国际博弈论杂志》，第1卷，第1期，第11–26页，1971年。DOI: 10.1007/BF01753431 [16] Postnikov, A.，《排列多面体、结合多面体及其他》，《国际数学研究通报》，第2009卷，第6期，第1026–1106页，2009年。DOI: 10.1093/imrn/rnn153 [17] Guilbaud, G. T. 和 Rosenstiehl, P.，《选举的代数分析》，《数学与人文科学》，第4卷，第9–33页，1963年。DOI: 10.1515/9783110565911-008 [18] Castillo, F. 和 Liu, F.，《嵌套编织扇的变形锥》，《国际数学研究通报》，第2022卷，第3期，第1973–2026页，2022年。DOI: 10.1093/imrn/rnaa090

第二章在很大程度上借鉴了我与两位博士生导师共同撰写的文章，[19] 在该文中，我们基于 Bezalel Peleg 所描述的一种方法，构造了一种在 N上递归生成最小平衡集合的算法。[20] 其次，我们介绍了一组基于 Bondareva-Shapley 定理实现的算法工具。我们将这些算法方法的应用范围扩展到一类新的多面体，称为基本多面体。这些多面体推广了前文提到的多胞体，在博弈论中经常出现；它们的非空性通常意味着解的存在，或意味着某些对象满足某些性质，尤其是 N的联盟满足这些性质。更形式化地说，基本多面体是一个可以写成如下形式的多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = b_N,\ A_1 x \leq b_1,\ A_2 x < b_2,\ A_3 \geq b_3,\ \text{and } A_4 x > b_4 \right\},$$

矩阵的系数$\{A_i\}_{i=1,\ldots,4}$ 属于{0,1}。本章的主要结果之一，是将 Bondareva-Shapley 定理推广到这些多面体上，进而开发算法工具，用于验证某些类型的解是否存在，或某些性质是否满足。

第三章探讨组合学与集合函数之间的联系。首先，阐明平衡集与均匀或正则超图之间的若干相似之处。接着证明，平衡集（极小平衡集）构成一种组合物种。这一概念由 André Joyal[21] 提出，旨在为识别离散结构的生成函数提供一种抽象且系统的方法。随后，我构造给定两个正整数 k 和 p 时的超图物种 k-均匀且大小为 p，以此作为构造平衡集物种的中间步骤。本章第二部分研究超平面排列理论（包括共振排列）与合作博弈论之间的联系。

最后一章专门介绍前两章内容的应用。首先，介绍一种基于 Grabisch 和 Sudhölter[22]对给定博弈的核心稳定性的刻画的算法。其次，给出一种关于核心稳定性的新的必要条件，该条件基于检验某个特定锥的非空性。最后，介绍一组工具，用于研究预分配到若干相关仿射子空间上的投影。文中给出了一个显式公式以及一些算法程序。我们

[19] Laplace Mermoud, D. 等，《极小平衡集合及其在核心稳定性和博弈论其他主题中的应用》，《离散应用数学》，第341卷，第60–81页，2023年。DOI: 10.1016/j.dam.2023.07.025 [20] Peleg, B.，《构造有限集极小平衡集合的一种归纳方法》，《海军研究后勤季刊》，第12卷，第2期，第155–162页，1965年。DOI: 10.1002/nav.3800120203 [21] Joyal, A.，《形式幂级数的组合理论》，《数学进展》，第42卷，第1期，第1–82页，1981年。DOI: 10.1016/0001-8708(81)90052-9 [22] Grabisch, M. 和 Sudhölter, P.，《通过嵌套平衡性刻画具有稳定核心的可转移效用博弈》，《数学规划》，第1–26页，2021年。DOI: 10.1007/s10107-021-01716-0

以运用这些投影算子研究市场失灵作为本章的结尾，所使用的是 Shapley 和 Shubik 引入的市场博弈 模型。[23]

[23]Shapley, L. S. 和 Shubik, M.，《论市场博弈》《经济理论杂志》，第 1 卷第 1 期，第 9–25 页，1969。doi: 10.1016/0022-0531(69)90008-8

目录

Ackn致谢/致谢 i ii

摘要 v

法文摘要 vii

引言 1

1 T博弈的几何 9
1.1 支付向量的欧几里得空间.9 1.2 预分配的仿射几何.14 1.3 博弈、平衡集合与某些多面体.18

2 非空性的平衡性 33
2.1 算法.34 2.2 非空多面体与集合函数.41 2.3 合作博弈论中的各种应用.45

3 T博弈的组合结构 5 3
3.1 平衡集合的组合学.53 3.2 共振排列.64

4 稳定性、支配与投影 73
4.1 嵌套平衡性.74 4.2 支配锥与增广锥.79 4.3 向核心的投影.82

总结与展望 99

参考文献 101

符号表

N 第 9 页 n 参与者的有限集 N 第 9 页 联盟集，即 $N\mathbb{R}^N$ 的非空子集 第 9 页 以 Nv 为索引的 $|N|$ 个 $\mathbb{R}$的笛卡尔积 第 9 页 博弈$\mathbb{X}(v)$的联盟函数 第 10 页 博弈（N, v）的预分配集$C(v)$ 第 10 页 博弈（N, v）的核心$\mathbb{A}_S(v)$ 第 10 页 仿射子空间 $\mathbb{A}_S = \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) = v(S)\}e(S, x)$ 第 13 页 S在 x处的超额： $e(S, x) = v(S) - x(S)X_{\mathcal{Q}}(v)$ 第 13 页 与可行集族 Q 相关联的区域η^S 第 14 页 $\mathbb{X}(v)$中 $\mathbb{A}_S$ 的法向量Σ 第 14 页 侧支付集 $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = 0\}\pi_K$ 第 14 页 投影算子 π_K： $\mathbb{R}^N \to K\mathsf{aff}(P)$ 第 19 页 多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$的仿射包 $\mathrm{L}(P)$ 第 20 页 多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$的面格 K_P 第 20 页 多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^N\mathfrak{S}_N$ 的法扇 第 24 页 $N\Pi_N(x)$的置换群 第 24 页 x的置换多面体： $\Pi_N(x) = \mathsf{conv}\{x^\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_N\}$ E (v) 第 40 页 满足 $C(v) \subseteq \mathbb{A}_S(\mathrm{F}_P, v_P)$ 的联盟集 S 第 42 页 与多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$相关联的博弈 VE (v) 第 50 页 严格关键精确联盟集$\varsigma^{[p]}$ 第 59 页 p-多重集的组合物种$\wp^{[k]}$ 第 60 页 k-子集的组合物种 $\mathsf{Hyp}_{k,p}$ 第 61 页 大小为 p的 k-均匀超图的组合物种 A_R 第 64 页 超平面 $\mathrm{L}_C(v)$的共振排列 第 69 页 核心 $C(v)\phi(x)$的面格 第 74 页 满足$S \in \mathrm{VE}(x) \mid x(S) < v(S)\delta_S(x)$的联盟集 $\phi(x)$ 第 80 页 关于 S的 x 的支配锥 $\mathrm{Aug}(x)$ 第 80 页 增广锥 $x\mathrm{Q}$ 第 83 页 由$\{\eta^S \mid S \in \mathrm{Q}\}$张成的 Σ 子空间$G_{\mathcal{Q}}$ 第 85 页 集合 Q 的格拉姆矩阵

通常，我们用“黑板粗体”字符表示几何空间，例如 $\mathbb{A}_S$ ，或域，例如 $\mathbb{R}$；大写字母主要用于表示联盟、集合或矩阵；花体大写字母用于表示集合的集合、联盟集；小写字母则用于表示预分配、向量等。

引言

整体大于各部分之和。

亚里士多德，《形而上学》

社会科学数学有一个特别之处：方程所研究的对象，正是编写这些方程的人。这意味着，只要有人有意偏离方程所描述的行为，这种行为就可能仅仅因为方程被明确写出而发生改变。此外，博弈论中的优化问题往往具有主观性；某人的目标函数中的参数，可能就是另一个人的目标函数中的变量。

对此，埃米尔·博雷尔曾说，博弈论“将成为一门新科学，在这门科学中，心理学将与数学同样有用”。[24] 在冯·诺依曼之前的时代，他是少数几位（另外还有尼古拉·德·孔多塞和安托万·奥古斯丁·库尔诺）发展出人际策略互动数学理论的人之一。博雷尔研究博弈论的目标，是为任何双人零和博弈（一方的收益即为另一方的损失）找出每位参与者的“最佳”策略。[25]

不出所料，博雷尔在追求完美策略的过程中借助了概率论。他指出，无论某一独特的确定性策略多么高明，只要对手知道这一策略，她就可以采用一种通常可能很糟糕、但却能完美克制第一位参与者所使用的“最佳”策略。国际象棋或扑克中两位参与者之间的心理博弈，正好说明了这一点：参与者可以偏离“最佳”策略，利用对手显露出的弱点。鉴于现实博弈的心理复杂度，博雷尔强调了数学在博弈论中的局限性。[25,26]

心理学的重要性使冯·诺依曼有别于博雷尔。在1928年寄给博雷尔、并由后者提交给法国科学院的一份便笺中，[27]冯·诺依曼解释说，他当时正在独立研究同一个问题，却不知道博雷尔的研究成果。在这份便笺中，冯·诺依曼还声称

[24]博雷尔，埃。，《关于一部概率论著作》，《法国与外国哲学评论》，第98卷，第321—336页，1924年。 [在线]。可用： https://www.jstor.org/stable/41082164[25]Leonard, R.，《冯·诺依曼、摩根斯坦与博弈论的创立：从国际象棋到社会科学，*1900—1960*》。剑桥大学出版社，2010年。DOI： 10.1017/CBO9780511778278.021[26]冯·诺依曼，J.与弗雷歇，M.，《埃米尔·博雷尔在博弈论中的作用》，《政治经济学评论》，第69卷，第2期，第139—167页，1959年。 [在线]。可用： https://www.jstor.org/stable/24691720[27]冯·诺依曼，J.，《论博弈理论》，《法国科学院院报》，第186卷，第25期，第1689—1691页，1928年。 [在线]。可用： https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3139f

他找到了“最佳”策略问题的解，并提出了极小极大定理；该定理于同年晚些时候发表。[28]

极小极大定理有时也称为双人博弈论的基本定理。它是泛函分析中一系列“极小极大”定理的开篇之作，也可能启发了线性规划中的强对偶定理，以及纳什关于 n 人一般和博弈的研究，并由此引出了著名的纳什均衡概念。

极小极大定理。设 $X \subseteq \mathbb{R}^p$ 和 $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ 是紧凸集，且 $f\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}$ 是连续函数，满足

- 对所有 $y \in \mathbb{R}^q$，映射 $f(\cdot\ y)\colon\ X \to \mathbb{R}$ 是凹函数，
- 对所有 $x \in \mathbb{R}^p$，映射 $f(x, \cdot)\colon\ Y \to \mathbb{R}$ 是凸函数。

那么我们有

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

极小极大定理比解决双人零和博弈所需的定理一般得多，因为 x 和 y 只需是离散概率分布，而 f只需是双线性的。在此背景下，我们只需将 $f(x,\ y)$改写为 $y^\top Ax$，其中 A 表示 f在 $\mathbb{R}^p$ 和 $\mathbb{R}^q$的典范基下的表示。如果玩家1有 p 种可能的策略，而玩家2有 q 种策略，那么 a_{ij} 是 A 的系数，表示玩家1选择策略 $i \in \{1,\ \ldots\ldots,\ p\}$ 且玩家2选择策略 $j \in \{1,\ \ldots\ldots,\ q\}$时玩家1的收益。由于这是零和博弈，玩家2的收益为 $-a_{ij}$。参与者可以采用各自策略的凸组合，这可以理解为对博弈过程进行随机化；如果重复进行博弈，也可以将其理解为各策略的使用频率。凸组合的系数就是向量 x 和 y的各分量，这让我们想起博雷尔关于何为良好策略的看法。

极小极大定理的一个推论是，在双人零和博弈中，每位参与者总是存在一个“最佳”策略。最后，让我们解释一下我们所理解的“最佳”策略。由于这是一个零和博弈，玩家1总是试图使 f 的像最大化，而玩家2则总是试图使其最小化。因此，对玩家1而言，一个好的起点是采用策略 x_0，无论玩家2采取什么行动，该策略都能确保他获得某个值；而玩家2的目标是最小化$f(x_0,\ \cdot)\colon\ Y \to \mathbb{R}$。我们将策略 x_0 所确保的值记为 γ，其定义为$\gamma = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,\ y)$。玩家2遵循完全相同的过程，并找到一个策略 y_0，确保 $\delta = -\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,\ y)$。根据极小极大定理，我们有

$$\gamma + \delta = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) - \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = 0,$$

这断言了策略 x_0 和 y_0的最优性。事实上，如果玩家1偏离 x_0，其策略将不再使映射 $\min_{y \in Y} f(\cdot\ y)\colon\ Y \to \mathbb{R}$达到最大值，那么她的收益将低于 γ。此外，由于 γ 和 δ 之和为零，因此两个参与者之间没有额外的收益可供分配；正如我们之前所展示的，任何偏离 x_0 或 y_0 的行为都可能受到对手的惩罚。因为

[28]冯·诺依曼, J.,《论策略博弈理论》，Bargmann, S. 译，《博弈论文集》，第4卷，第13–42页，1959年。DOI: 10.1515/9781400882168-003，“Zur Theorie derGesellschaftsspiele”的译文，《数学年刊》，第100卷，第1期，第295–320页，1928年

数值 γ 完全决定了两个参与者都采用上述定义的策略时博弈的收益，因此， γ 被称为博弈的值。许多人认为，这一结果是博弈论的起点，后来约翰·纳什[29]将其推广到了 n人非零和博弈。纳什均衡是每个参与者各自选择一种策略，使得任何参与者都没有兴趣单方面偏离其所选策略。

在同一篇论文中，冯·诺依曼探讨了将这一结果推广到更大一组参与者的可能性，这组参与者记作 N。沿用两人情形的思路，冯·诺依曼希望为每一组参与者 $S \subseteq N$ 赋予一个价值，类似于前例中的价值 γ；假设组成集合 S 的参与者协调行动，这便是他们能够为自己确保的价值。几年后，他与高等研究院的同事奥斯卡·摩根斯坦在著名的《博弈论与经济行为》中进一步发展了这一思想。[30]

从现在起，我们不再沿用冯·诺依曼和摩根斯坦的定义，因为他们对参与者集合的价值作出了很强的假设。我们保留的唯一假设是，空参与者集合的价值为 0，并舍弃所有零和假设。我们可以将参与者集合 S 的价值解释为：当其补集 S 中的所有参与者都试图将他们的收益降至最低时，该集合能够为自己确保的最大收益。我们用$\mathcal{N}$ 表示 N的所有非空子集组成的集合，并称这些子集为联盟；用 v 表示一个映射，它将每个联盟 $S \in \mathcal{N}$映射到其价值 $v(S)$，使得 $v(\emptyset) = 0$。映射 v 称为博弈 (N, v) 的特征函数。此外，我们假设各联盟的价值都采用相同的单位，并且可以在参与者之间、联盟之间转移。

现在的问题是，根据联盟函数 v，要找出哪些联盟会形成。大联盟 N 形成的一个必要条件是，我们能够将其价值 $v(N)$ 分成 n 个数 $x_1, \ldots, x_n$，使得对于每个联盟 $S \in \mathbf{N}$，都有 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$。事实上，如果联盟 S 中的参与者获得的总支付低于他们各自单独行动所能获得的价值，那么他们就没有兴趣加入大联盟 N。为方便起见，我们用 $\mathbb{R}^N$ 表示由 N的元素索引的 $\mathbb{R}$的 n 重笛卡尔积。于是，我们有 $x \in \mathbb{R}^N$，实数 x_i 称为参与者 i在 x 处的支付。联盟 $S \in \mathbf{N}$ 在 x 处的支付记作 $x(S)$，定义为 $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$。若支付向量 $x \in \mathbb{R}^N$ 满足 $x(N) = v(N)$，则称其为预分配；也就是说，它将大联盟 N的价值精确地分成 n笔支付，每位参与者一笔。最后，我们将博弈 (N, v) 的核心记作 $C(v)$，它是 $\mathbb{R}^N$ 的子集，由所有预分配组成，且每个联盟获得的支付都至少与其价值相等。

核心的定义直观而有意义，因此它成为研究历史最悠久的解概念之一。尽管其现代定义以及将其视为一种

[29]Nash, J. F.,《非合作博弈》，《数学年刊》，第54卷，第2期，第286–295页，1951年。DOI: 10.2307/1969529[30]von Neumann, J. 和 Morgenstern, O.,《博弈论与经济行为》。普林斯顿大学出版社，1944年。[在线]。可查阅： http://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2gkx

解概念的观点最早由 Shapley 提出，[31,32] 至今不过 70 年，[33] 但市场或合作带来互利结果这一理念，至少自 19 世纪末起便已有人研究。1881年，英爱哲学家、政治经济学家 Francis Edgeworth[34] 研究了两种商品的交换市场结果，并定义了一种类似的解概念，称为契约曲线。

1963年，Olga Bondareva 找到了博弈核心非空的一个充要条件[35]，该条件涉及一组称为覆盖的对象。这些对象自然源于将线性规划对偶定理应用于核心的定义。对于每个覆盖，我们都可以构造一个定义在博弈向量空间上的线性形式，而对于这些线性形式中的每一个，博弈的像都应小于或等于大联盟的价值。Lloyd Shapley 独立地沿着同一思路，于1967年发表了一篇论文[36]，提出了相同的充要条件，并将这些覆盖称为平衡集合。他还证明，只需考虑其中一个很小的子集，即极小的平衡集合。

粗略地说，平衡集合表示参与者如何组织成一个或多个联盟，以使其总价值最大化。参与者可以组成任何可能的联盟，必要时甚至可以将时间分配给多个联盟，只要遵循两条自然规则：

1. 每位参与者恰好处于“活跃”状态一个单位时间，
2. 如果一些参与者组成一个联盟，他们在其中花费的时间都相同。

在平衡集合中，每个联盟都对应一个权重，该权重表示参与者在该联盟中各自花费的时间。参与者也可以组成单人联盟，在一定比例的时间内独自工作。由于每位参与者都必须恰好处于活跃状态一个单位时间，因此某位参与者所属的所有联盟的权重之和必须为一。更正式地说，我们有如下定义。

定义。 设 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ 是一个联盟集合。若存在一组 $\lambda = \{\lambda_S \mid S \in \mathcal{B}\}$ 正实数，使得

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S \mathbf{1}^S = \mathbf{1}^N,$$

其中，$\mathbf{1}_i^S = 1$ 若 $i \in S$，否则为 $\mathbf{1}_i^S = 0$。极小平衡集 是指不存在任何平衡子集的平衡集合。

平衡集合的定义与正则超图的定义密切相关。注意，N 的划分是极小平衡集合，其中所有

[31]Shubik, M.，《普林斯顿的博弈论，1949–1955：个人回忆》，《博弈论史论》，第152卷，1992年。DOI: 10.1215/00182702-24-Supplement-151[32]Zhao, J.，《劳埃德·夏普利鲜为人知但仍具重要意义的三项贡献》，《博弈与经济行为》，第108卷，第592–599页，2018年。DOI: 10.1016/j.geb.2017.05.002[33]Shapley, L. S.，《作为合作博弈的市场》，兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州，技术报告，1955年。[在线]。可访问: https://www.rand.org/pubs/papers/P629.html[34]Edgeworth, F. Y.，《数学心理学：数学在道德科学中的应用论》。CK Paul，1881年，第10卷。DOI: 10.2307/2548685[35]Bondareva, O.，《线性规划方法在合作博弈理论中的若干应用》，《控制论问题》，第10卷，第119期，第139页，1963年[36]Shapley, L. S.，《关于平衡集与核心》，《海军研究后勤季刊》，第14卷，第4期，第453–460页，1967年。DOI: 10.1002/nav.3800140404

参与者在整个时间单位内都留在同一个联盟中。当N 中的参与者按照平衡集合$\mathcal{B}$组织时，总价值等于

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S v(S).$$

如果对于一个平衡集合 $\mathcal{B}$，总价值 $\sum_{S\in\mathcal{B}}\ \lambda_S v(S)$ 大于 $v(N)$，那么参与者更愿意按照 $\mathcal{B}$ 所描述的方式组织，而不是按照平凡集合 $\{N\}$所描述的方式组织。自然， N 中的参与者会寻求使价值加权和最大的平衡集合；只有当对于所有平衡集合 $\mathcal{B}\ \subseteq \mathcal{N}$，我们都有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N),$$

这类似于亚里士多德的“整体大于部分之和”。这一条件也等价于核心的非空性。

Bondareva-Shapley 定理。 设(N, v) 是一个博弈。那么，核心 $C(v)$ 非空，当且仅当对于所有极小平衡集合 $B\ \subseteq N$，我们都有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N).$$

该定理指出，存在一些预分配，在分配大联盟 N 的价值的同时，向所有联盟支付高于其价值的款项，当且仅当参与者在 N 中通过组成 N所能实现的最大价值确实能够实现。此外，该定理还建立了特定多胞体的几何性质与集合函数性质之间的联系。

多胞体与集合函数之间的联系在组合优化领域得到了广泛研究，更具体地说，是在次模函数理论中，杰克·埃德蒙兹、Satoru Fujishige、László Lovász 和 Alexander Schrijver 等人对此做出了重要研究。对于定义在 N 上的每个归零的集合函数 ξ，即满足 $\xi(\emptyset) = 0$ 的 $\xi: 2^N \to \mathbb{R}$，我们将一个多胞体与之关联，称为基多胞体，记作 $\mathrm{B}(\xi)$，其定义为

$$\mathrm{B}(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = \xi(N) \text{ and } x(S) \leq \xi(S), \forall S \in \mathcal{N}\}.$$

集合函数 ξ 通常假定为次模，即对于$\mathcal{N}$中的所有 S 和 T，都有

$$\xi(S \cup T) + \xi(S \cap T) \leq \xi(S) + \xi(T).$$

杰克·埃德蒙兹研究了一类特殊的次模集合函数，即拟阵秩函数。[37] 他定义了一族具有类似拟阵性质的多胞体，称为多拟阵，并以此为基础提出了著名的优化算法。他还详细描述了这些多胞体的面结构，

[37]Edmonds, J.，《次模函数、拟阵与某些多面体》，组合结构及其应用，1970年。doi: 10.1007/3-540-36478-1_2

这启发了 Shapley 关于凸博弈的核心的一些结果。任何基多面体经平移后都是一个多拟阵，二者也都是凸博弈的核心。

在过去十五年里，类似的多胞体一直受到组合学家的关注。Postnikov 定义的广义置换多面体，[39] 是置换多面体的推广；Guilbaud 和 Rosenstiehl 已在社会科学数学中使用置换多面体，[40] 并为其命名。标准置换多面体记作 Π_N，是由向量 $(1, \ldots\ldots, n) \in \mathbb{R}^N$ 的坐标置换所定义的 $n!$ 个点构成的凸包。然而，有些作者将任意坐标互不相同的向量的置换的凸包定义为置换多面体；这样得到的多胞体具有相同的组合性质：它们有相同的面格和法扇。

对任意置换多面体，都可以进行形变，即在不穿过任何顶点、也就是说不改变任何棱方向的前提下，将其中一些面作平行平移。这些形变后的多胞体就是广义置换多面体。事实证明，广义置换多面体、[41] 次模函数的基多胞体以及多拟阵（相差一个平移）是同一类多胞体。它们都与凸博弈的核心相同，而博弈论也常常借鉴组合优化或组合学中的成果。

本学位论文旨在推动（合作）博弈论沿着上述方向发展，迈向组合学与几何学。论文由四个各自独立的章节组成，涵盖了我博士研究的不同方面。

第一章介绍预备知识，包括术语和符号。第二章基于我与导师合著的论文，[42] 我们在文中构造了一种生成极小平衡集合的算法，该算法基于 Bezalel Peleg 所述的一种方法。[43] 其次，我们介绍了一组计算工具，这些工具基于 Bondareva-Shapley 定理的算法实现。我们将这些计算工具的应用范围扩展到一类新的多面体，称为基本多面体。

第三章探讨了组合学与集合函数之间的联系。首先，指出平衡集合与组合学中研究的其他对象，尤其是均匀超图和正则超图之间的一些相似之处。接着，我证明（极小）平衡集合构成一个组合物种。这一概念由 André Joyal[44] 提出，旨在为推导离散结构的生成函数提供一种抽象、系统的方法。

---

[38] Shapley, L. S.，《凸博弈的核心》，《国际博弈论杂志》，第1卷，第1期，第11–26页，1971年。doi: 10.1007/BF01753431 [39] Postnikov, A.，《排列多面体、结合多面体及其他》，《国际数学研究通报》，第2009年卷，第6期，第1026–1106页，2009年。doi: 10.1093/imrn/rnn153 [40] Guilbaud, G. T. 和 Rosenstiehl, P.，《选举的代数分析》，Mathématiques et Sciences Humaines，第4卷，第9–33页，1963年。doi: 10.1515/9783110565911-008 [41] Castillo, F. 和 Liu, F.，《嵌套编织扇的变形锥》，《国际数学研究通报》，第2022年卷，第3期，第1973–2026页，2022年。doi: 10.1093/imrn/rnaa090 [42] Laplace Mermoud, D. 等，《极小平衡集合及其在核心稳定性和博弈论其他主题中的应用》，《离散应用数学》，第341卷，第60–81页，2023年。doi: 10.1016/j.dam.2023.07.025 [43] Peleg, B.，《构造有限集极小平衡集合的一种归纳方法》，《海军研究后勤季刊》，第12卷，第2期，第155–162页，1965年。doi: 10.1002/nav.3800120203 [44] Joyal, A.，《形式幂级数的组合理论》，《数学进展》，第42卷，第1期，第1–82页，1981年。doi: 10.1016/0001-8708(81)90052-9

随后，我构造了给定两个正整数 k 和 p 时，大小为 p 的物种 k-均匀超图，并以此作为构造平衡集合物种的中间步骤。本章的第二部分介绍并研究超平面排列理论，尤其是共振排列，与合作博弈论之间的联系。

最后一章致力于应用前两章的内容。首先，介绍一种基于 Grabisch 和 Sudhölter[45] 对给定博弈的核心稳定性所作刻画的算法。其次，提出核心稳定性的一项新必要条件，其依据是验证特定锥的非空性。最后，介绍一套工具，用于研究预分配之间以及投影到相关仿射子空间上的投影。文中给出了一个显式公式，以及若干算法过程。本章最后运用这些投影算子，借助 Shapley 和 Shubik 提出的市场博弈模型研究市场失灵。[46]

[45]Grabisch, M. 和 Sudhölter, P.，《具有嵌套平衡性稳定核心的可转移效用博弈的刻画》，《数学规划》，第 1–26 页，2021年。DOI: 10.1007/s10107-021-01716-0[46]Shapley, L. S. 和 Shubik, M.，《论市场博弈》，《经济理论杂志》，第 1 卷，第 1 期，第 9–25 页，1969。DOI: 10.1016/0022-0531(69)90008-8

第1章

博弈的几何

本章主要介绍本学位论文的预备知识。首先，我们回顾博弈论、线性代数、多面体理论和欧几里得几何中的一些常用记号。我们还引入一些新的几何性质记号，旨在通过空间表示呈现博弈的特定特征。

第二部分介绍核心和平衡集合族，它们是本学位论文的主要研究对象。我们着重阐述凸博弈的核心与合作博弈论相邻领域中定义的多胞体之间的深层联系，例如组合优化或组合学。循着这一思路，我们介绍并举例说明完全平衡博弈，并探究它们与离散数学之间的联系，如同对凸博弈所做的研究。

1.1 支付向量的欧几里得空间

设 N 是一个基数为 n的有限非空集，并用 2^N 表示其幂集，即 N的所有子集构成的集合。 N 上的（实值）集合函数是一个映射 $\xi: 2^N \to \mathbb{R}$，它为 N的任意子集 S 赋予一个实数 $\xi(S)$。根据冯·诺依曼 [100],的定义，（合作型可转移效用）博弈是一个有序对（N，v），其中 N 是一个有限集，其元素称为参与者，而 v 是一个满足 $v(\emptyset) = 0$ 的集合函数，称为该博弈的联盟函数或特征函数。

我们将 N 的非空子集的集合记为 $\mathcal{N}$，称其为 联盟。数值$v(S)$ 称为 $S \in \mathcal{N}$ 的价值。在本学位论文中，我们用 ξ 表示一个典型的集合函数，用 v 表示博弈的一个典型联盟函数。在本文中，我们采用 Peleg 和 Sudhölter [69] 对联盟函数的解释：如果联盟 S 形成，则其成员可获得金额 $v(S)$。

合作博弈论的很大一部分内容关注如何在 S 的成员之间分配$v(S)$。合作博弈论中的另一个问题，也是本学位论文所关注的问题，是了解合作可以在哪种规模上发生。更具体地说，我们希望知道，共同获得的资金在哪个层级上能够使任何子联盟受益，以及随后特定子联盟中的参与者是否能够威胁停止合作，以确保获得满足自身需求的数量。这两种性质分别称为 平衡性 和 稳定性，将在下文中定义。

在本文中，我们用 $\mathbb{R}^N$ 表示由 n 个 $\mathbb{R}$ 的笛卡尔乘积构成的欧几里得向量空间，其中每个参与者 N 对应一个副本。我们使用相同的记号 $\mathbb{R}^S$，但该记号仅考虑属于联盟 S 的参与者。元素 $x \in \mathbb{R}^N$ 是

称为支付向量，并为任意参与者 $i \in N$ 关联一个实数 x_i。我们用 $x(S)$ 表示与 S 中参与者对应的坐标之和：$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$，这称为 S 在 x 时的支付。

定义 1.1.1。支付向量 $x \in \mathbb{R}^N$ 称为

- 一个预分配，如果 N 对 x而言是有效的，即如果 $x(N) = v(N)$。我们用 $\mathbb{X}(v)$ 表示预分配的集合。
- 一个上向量，如果对于所有 $S \in \mathcal{N}$，都有 $x(S) \geq v(S)$。我们用 $U(v)$ 表示上向量的集合。

集合 $\mathbb{X}(v)$ 构成 $\mathbb{R}^N$ 的一个超平面，而集合 $U(v)$ 是一个向上无界的多面体集合 [97]。我们用 $\mathbb{X}^{\leq}(v)$ 表示 N 的可负担的支付向量集合，即 $\mathbb{X}^{\leq}(v) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v(N)\}$。$\mathbb{X}^{\leq}(v)$ 中的一个元素表示一种可由 N 的价值实现的分配。预分配表示在其参与者之间分配大联盟 N 的价值，而上向量则是一种使任何联盟受益的分配。设 $S \in \mathcal{N} \setminus \{N\}$ 是一个联盟。我们用 $\mathbb{A}_S(v)$ 表示使 S 有效的预分配集合，即

$$\mathbb{A}_S(v) := \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) = v(S)\}.$$

如果不会对博弈造成混淆，我们将这些集合记为 $\mathbb{A}_S$。注意，这些集合是维数为 $n-2$的仿射子空间，并且对于任意博弈 v，它们都有相同的法向量；也就是说，它们始终与同一组向量正交。博弈只决定这些仿射子空间的相对位置，因为提高联盟 $v(S)$的价值，只会使子空间沿其法向量平移。

每个仿射子空间 $\mathbb{A}_S$ 将超平面 $\mathbb{X}(v)$分成两部分，分别记为

$$\mathbb{A}_S^{\geq} := \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) \geq v(S)\} \qquad \text{and} \qquad \mathbb{A}_S^{\leq} := \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) \leq v(S)\}.$$

$\mathbb{A}_S^{\geq}$ 是使 S受益的预分配集合，而 $\mathbb{A}_S^{\leq}$ 是对 S而言可负担的预分配集合。使每个联盟都受益的预分配，也就是同时为上向量的预分配，称为联盟理性，其集合记为

$$C(v) := \bigcap_{S \in \mathcal{N}} \mathbb{A}_S^{\geq} = \mathbb{X}(v) \cap U(v),$$

称为核心 [81]。核心是有界凸多面体集合，即一个多胞体，它位于超平面 $\mathbb{X}(v)$内。

核心非空的博弈，即存在一种使每个联盟都受益的预分配的博弈，称为平衡博弈，原因将在第 1.3 节中讨论（见定理 1.3.1）。特别是，不存在这样的联盟结构（见 Aumann and Drèze [4]），即 N 的一种划分，使得该联盟结构中各元素的价值之和严格大于 N 的价值。举例来说，设 v 是一个博弈 $v: N = \{a, b, c\} \to \mathbb{R}$，定义如下：

S	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	N
$v(S)$	5	0	0	8	8	8	10

设 $x \in \mathbb{X}(v)$ 是一个预分配。如果 x 满足 $x(\{b,\ c\}) \geq 8$，那么 $x(\{a\}) \leq 2$。因此，不等式 $x(\{b,\ c\}) \geq 8$ 和 $x(\{a\}) \geq 5$ 互不相容，而 $C(v)$ 为空。反过来，我们可以看到，参与者更愿意按照联盟结构 $\{\{a\},\ \{b,\ c\}\}$ 组织起来，以获得 13，而不是组成大联盟 N，只得到 10。但仅考察联盟结构，并不足以判断核心是否非空。设 $(N,\ v')$ 是另一个博弈 $v'\colon\ N = \{a,\ b,\ c\} \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} S & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a,b\} & \{a,c\} & \{b,c\} & N \\ \hline v'(S) & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 8 & 10 \end{array}. \tag{1.1.1}$$

这些博弈之间唯一的差异是 $v(\{a\})$，但这足以使参与者更倾向于大联盟，而非联盟结构 $\{\{a\}, \{b,c\}\}$。然而，核心仍然为空。事实上，设 $x \in U(v)$ 是一个上向量。那么 $x(\{a,b\})\ x(\{a,c\})\ x(\{b,c\}) \geq 8$，因此 $2x(N) = x(\{a,b\}) + x(\{a,c\}) + x(\{b,c\}) \geq 24$，从而 $x(N) \geq 12$。因此，没有上向量能够成为预分配，且 $C(v) = \emptyset$。让我们放宽联盟结构的概念，并考虑以下三个两人联盟：$\{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$。每个参与者都属于其中两个联盟。我们可以设想，参与者能够将一半时间投入每个联盟。由于每个联盟只存在一半时间，其价值也减半。于是，参与者总共获得

$$\frac{1}{2}v(\{a,b\}) + \frac{1}{2}v(\{a,c\}) + \frac{1}{2}v(\{b,c\}) = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12,$$

这仍然大于 10，而他们组成大联盟就能获得这个数值。集合 $\mathrm{B} = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ 与权重系统 $\lambda^{\mathcal{B}} = (\lambda_{\{a,b\}} = \frac{1}{2}, \lambda_{\{a,c\}} = \frac{1}{2}, \lambda_{\{b,c\}} = \frac{1}{2})$，以及集合 $\mathrm{B}' = \{\{a\}, \{b,c\}\}$ 与权重 $\lambda^{\mathcal{B}'} = (\bar{\lambda}_{\{a\}} = 1, \bar{\lambda}_{\{b,c\}} = 1)$，$\bar{}$都是平衡联盟集的例子。

定义 1.1.2. 设 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ 是一个联盟集。我们称 $\mathcal{B}$ 为一个平衡集合，如果对每个 $S \in \mathcal{B}$，都存在一个正权重 λ_S，使得对于每个参与者 $i \in N$，都有 $\sum_{S \in \mathcal{B}_i} \lambda_S = 1$，其中 $\mathcal{B}_i = \{S \in \mathcal{B} \mid i \in S\}$。这些量 $\{\lambda_S \mid S \in \mathcal{B}\}$ 构成一个平衡权重系统。

平衡集合由 Bondareva [18] 以“$(q,\ \theta)$-覆盖”的名称提出，后来由 Shapley [82] 重新命名。他们分别独立地基于平衡集合，给出了平衡博弈集合的刻画。平衡博弈恰好是这样一类博弈：对于任意平衡集合，其中各联盟的价值加权和都不超过大联盟的价值。也就是说，对于任意带有权重系统 $\lambda^{\mathcal{B}}$ 的平衡集合 $\mathcal{B}$，都有 $\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v(S) \leq v(N)$。在同一篇论文中，Shapley 指出了平衡集合中的一个子集，在该子集上，平衡博弈的这一刻画仍然成立。如今，这一刻画被称为 Bondareva-Shapley 定理，无疑是研究合作行为的一条基础定理。第 1.3 节将讨论 Bondareva-Shapley 定理。

现在，让我们关注一个给定的联盟 $S \subsetneq N$。如果所提出的预分配 $x \in \mathbb{X}(v)$ 满足 $x(S) < v(S)$，联盟 S 就可以离开大联盟，获得其价值 $v(S)$，从而得到更高的支付。设 $y \in \mathbb{X}(v)$ 是另一个预分配。

定义 1.1.3。 如果 y 通过 S支配 x ，记作 $y \operatorname{dom}_S x$，则称

- y 可负担的，即 $y(S) \leq v(S)$,
- y 改进 x 于 S，即对于所有 $i \in S$，都有 $y_i > x_i$， 。

我们说如果存在一个联盟 S ，使得 $y \operatorname{dom}_S x$，则称 y 支配 x，记作 $y \operatorname{dom} x$.

例如，考虑表（1.1.1）所述的博弈。那么，支付向量 $x = (5, 3, 2)$、 $y = (3, 2, 5)$ 和 $z = (2,5,3)$ 是预分配。我们有 $x \operatorname{dom}_{\{a,b\}} y$，还有 $y \operatorname{dom}_{\{a,c\}} z$ 和 $z \operatorname{dom}_{\{b,c\}} x$。特别地，我们可以看到支配关系不是传递的。然而，通过特定联盟发生被支配的关系是传递的。

根据 Gillies [37], ，如果存在两个预支付向量 x 和 y ，使得 y 支配 $_S x$，且这种支配并非通过 S 的任何子集实现，那么联盟 S 就称为关键。他还证明，在研究稳定性时，我们可以忽略所有非关键联盟。我们将在第2章进一步讨论关键联盟。

支配的第一个条件，即 y 的可负担性，表示联盟 S 的成员能够通过组成联盟来实现 $y_{|S}$ 。第二个条件，即 y 按照 y 改善了 x 相对于 S 的状况，要求联盟 S 中的每个人根据 y 获得的支付都优于根据 x 获得的支付。按照我们对联盟函数的解释，这正是 $v(S)$ 所代表的含义：联盟 S 的参与者为接受合作所要求的金额。

在较新的文献中，解是一个映射，它为每个博弈关联一个 $\mathbb{X}^{\leq}(v)$ 的子集。但在首次提出广义上的解概念时，von Neumann 和 Morgenstern [102], 将解定义为 $\mathbb{X}^{\leq}(v)$ 的一个子集，也就是我们今天所说的稳定集，或*von Neumann-Morgenstern* 稳定集。

定义 1.1.4 （von Neumann 和 Morgenstern [102],Shapley [80]） 。 K 的子集 $V \subseteq \mathbb{X}^{\leq}(v)$ 是一个 V-稳定集 ，当且仅当它满足

- 内稳定，即对所有 $x \in K$，不存在这样的 $y \in K$ ，使得 y 被 x支配,
- 外部稳定，即对所有 $x \in V \setminus K$，都存在这样的 $y \in K$ ，使得 y 被 x支配 .

我们将稳定集 简称为 $\mathbb{X}^{\leq}(v)$-稳定集。

这是 Shapley [80], 提出的定义，他扩展了 von Neumann 和 Morgenstern [102]的定义。最初，von Neumann 和 Morgenstern 在一个较小的支付向量集合上定义了博弈的解。我们用 $I(v)$表示个体理性的预分配集合，即

$$I(v) \coloneqq \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x_i \geq v(\{i\}), \text{ for all } i \in N\}.$$

$I(v)$中的元素称为分配。von Neumann 和 Morgenstern 的解被定义为 $I(v)$-稳定集。方便起见，若一个 $I(v)$-稳定集 K 满足：对每个 $i \in N$，都存在一个元素 $x \in K$ 使得 $x_i = v(\{i\})$，那么它就是一个稳定集。事实上，满足 $y_i < v(\{i\})$ 的预分配 y 会通过$\{i\}$被 x 支配，这一点 Shapley [80]已经指出。

请注意，没有任何预分配会被 N 支配，没有任何分配会被单元素联盟支配，而且核心元素根本不会被支配。

稳定集的定义十分引人注目，但稳定集可能不存在，也可能有多个，甚至有连续统多个，而且很难识别它们 [60,61]。因此，迄今为止，稳定集这一概念并不十分成功。所以，核心已成为主要的解。

事实上，只要核心非空，它就是唯一的；核心由所有联盟理性预分配构成，并且是由有限个不等式定义的多胞体。此外，由于没有核心元素被支配，核心始终是内稳定的，并且包含于所有稳定集中。然而，核心未必外部稳定：可能存在一些预分配，它们仅被不属于核心的预分配所支配。尽管如此，如果核心外部稳定，它就是唯一的稳定集 [29]。研究核心稳定性是本学位论文的最初动机，将在第4章讨论。

根据定义，只有当联盟 S 能够通过退出大联盟来改善 x 时，预分配 x 才会被支配，即 $x(S) < v(S)$。下文中，我们用 $e(S,\ x)$表示联盟 S 单独能够获得的额外金额，即 $e(S,\ x) \coloneqq v(S) - x(S)$，我们称之为在 x处的超额。设$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{N}$ 为一个联盟集。我们用 $X_{\mathcal{Q}}(v)$表示联盟能够改善的预分配集合，当且仅当该联盟属于$\mathcal{Q}$时，才可以改善这些预分配，即

$$X_{\mathcal{Q}}(v) \coloneqq \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) < v(S) \text{ if and only if } S \in \mathcal{Q}\}.$$

如果其关联的区域 $X_{\mathcal{Q}}(v)$非空，则称集合$\mathcal{Q}$ 是可行的。注意，核心是与空联盟集合 $\mathcal{Q} = \emptyset$相关联的区域，因此非空区域构成了 $\mathbb{X}(v)$的一个划分。

在全文中，我们为欧几里得向量空间 $\mathbb{R}^N$，从而也为$\mathbb{X}(v)$，赋予通常的标量积，记作$\langle\cdot,\cdot\rangle$，并赋予相应的范数，记作 $\|\cdot\|$，其对所有 $x, y \in \mathbb{R}^N$定义为

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i \in N} x_i y_i, \quad \text{and} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

如果对于每个元素$y \in Y$，都有$\langle x, y\rangle = 0$，则称向量 $x \in \mathbb{R}^N$ 是子集 $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ 的法向量。

定理 1.1.5（希尔伯特投影定理）。
对于每个 $x \in \mathbb{R}^N$ 以及每个非空闭凸 $K \subseteq \mathbb{R}^N$，存在唯一的元素 $z \in K$，使得 $\|x - z\|$ 等于$\inf_{y \in K}\|x - y\|$。

元素 z 称为 x 在 K上的投影。我们用 $\pi_K\colon \mathbb{R}^N \mapsto K$表示将 $x \in \mathbb{R}^N$ 映射到其在 K上的投影 $\pi_K(x)$ 的映射。映射 π_K 称为到 K上的投影算子，或到 K上的投影算子。以下结果由 Bauschke 和 Combettes [7]表述。

定理 1.1.6（投影定理）。设 K是 $\mathbb{R}^N$的非空闭凸子集。那么，对所有 x和 y 属于 $\mathbb{R}^N$的情形，

$$y = \pi_K(x) \quad \textit{if and only if} \quad \Big[y \in K \quad \textit{and for all } z \in K,\ \langle z - y, x - y\rangle \leq 0\Big].$$

如果 K 是 $\mathbb{R}^N$的非空仿射子空间，那么对所有 x 和 y 属于 $\mathbb{R}^N$的情形，

$$y = \pi_K(x) \quad \textit{if and only if} \quad \Big[y \in K \quad \textit{and for all } z \in K, \langle z - y, x - y\rangle = 0\Big].$$

1.2 预分配的仿射几何

本小节重点讨论仿射子空间 $\mathbb{X}(v) \subseteq \mathbb{R}^N$。与 $\mathbb{X}(v)$ 平行的 $\mathbb{R}^N$ 线性子空间记为 Σ，其元素称为侧支付。侧支付表示预分配空间中的一种平移，也就是参与者之间的资金再分配。事实上，预分配 x 必须满足 $x(N) = v(N)$，因此侧支付 σ 满足 $\sigma(N) = 0$。回顾一下，仿射子空间 $\mathbb{A}_S$ 和仿射半子空间 $\mathbb{A}_S^{\geq}$ 定义如下：

$$\mathbb{A}_S = \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) = v(S)\}, \quad \text{and} \quad \mathbb{A}_S^{\geq} = \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) \geq v(S)\}.$$

命题1.2.1. 设 S 为一个联盟。向量 η^S定义为

$$\eta^S = \mathbf{1}^S - \frac{|S|}{n}\mathbf{1}^N, \qquad \textit{with} \quad \mathbf{1}_i^S = \begin{cases} 1, & \textit{if } i \in S, \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

是一个侧支付，也是 $\mathbb{A}_S$的法向量。

证明。对于任意联盟 S，我们有 $\eta^S(N) = \mathbf{1}^S(N) - \frac{|S|}{n}\mathbf{1}^N(N) = |S| - |S| = 0$，因此 η^S 是一个侧支付。设 x 和 y 是 $\mathbb{A}_S$ 中的两个元素。我们有

$$\langle \eta^S, x - y\rangle = \langle \eta^S, x\rangle - \langle \eta^S, y\rangle = x(S) - \frac{|S|}{n}x(N) - y(S) + \frac{|S|}{n}y(N).$$

由于 $x(S) = y(S) = v(S)$ 且 $x(N) = y(N) = v(N)$，$\langle \eta^S, x - y\rangle = 0$。 □

我们通过设定 $\eta^{\emptyset} = \vec{o}$ 来扩展上述定义，这与 η^N 一致。向量集 $\{\eta^S \mid S \in \mathcal{N}\}$ 和子空间 Σ 不依赖于我们所考虑的博弈，而联盟函数只确定 $\mathbb{A}_S$ 在由 η^S 生成的直线上的位置。现在我们定义本文中使用的投影算子。

命题1.2.2。设 $S \in \mathcal{N} \setminus \{N\}$ 为一个联盟，且 x 为一个预分配。那么

$$\pi_{\mathbb{A}_S}(x) = x + \gamma_S(x)\eta^S,$$

其中 $\gamma_S(x) := e(S, x)/\|\eta^S\|^2$。此外，若 $x(S) < v(S)$，则有 $\pi_{\mathbb{A}_S}(x)\, \textit{dom}_S\, x$。

证明。首先，注意到 $\|\eta^S\|^2 = \langle \eta^S, \eta^S\rangle = \eta^S(S)$。根据投影定理，我们先证明 $\pi_{\mathbb{A}_S}(x)$ 属于 $\mathbb{A}_S$。

$$(x + \gamma_S(x)\eta^S)(S) = x(S) + \gamma_S(x)\eta^S(S) = x(S) + \frac{e(S, x)}{\|\eta^S\|^2}\|\eta^S\|^2 = v(S).$$

设 z 是 $\mathbb{A}_S$ 的一个元素。我们有

$$\begin{aligned}\langle z-(x+\gamma_S(x)\eta^S), x-(x+\gamma_S(x)\eta^S)\rangle &= \langle z-x-\gamma_S(x)\eta^S, -\gamma_S(x)\eta^S\rangle\\ &= -\gamma_S(x)\left(\langle z,\eta^S\rangle - \langle x,\eta^S\rangle - \gamma_S(x)\langle\eta^S,\eta^S\rangle\right)\\ &= -\gamma_S(x)\left(z(S)-x(S)-\gamma_S(x)\|\eta^S\|^2\right)\\ &= -\gamma_S(x)\left(e(S,x)-e(S,x)\right)=0.\end{aligned}$$

我们利用投影定理得出投影算子的构造。为结束这个证明，请注意，若对所有 $i\in S$，$e(S,\ x)>0$，则有 $\eta_i^S = 1-\frac{|S|}{n}>0$。 — □

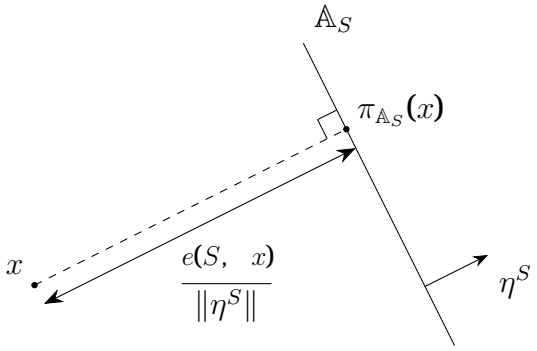


图 1.1：将 x 投影到 $\mathbb{A}_S$ 上。

若联盟 S 能够通过预分配 $x\in\mathbb{X}(v)$ 获益，则投影 $\pi_{\mathbb{A}_S}(x)$ 会将 S 在 x 处的超额平均分配给 S 中的参与者，因此该投影通过 S 支配 x。这一事实促使我们在本研究中使用这些投影算子，来考察支付向量之间，更具体地说，预分配与核心元素之间的支配关系。此外，$\gamma_S(x)\eta^S$ 是能够将预分配 x 映射为使联盟 S 受益的预分配的最短侧支付（见图 1.1）。它是满足联盟 S 这一条件所需的最短侧支付问题的解。

预分配之间的投影这一想法，早已存在于 Cesco [24]定义的转移方案中。转移方案最初由 Stearns [94],定义并使用，是由转移序列定义的一系列预分配，即通过侧支付进行平移。Cesco 定义的预分配序列通过递归方式定义：将最后生成的预分配投影到 $\mathbb{A}_S$ 上。对于每个预分配 x，他的投影算子定义如下：

$$\pi_{\mathbb{A}_S}(x) = x + e(S,x)\left(\frac{\mathbf{1}^S}{|S|}-\frac{\mathbf{1}^{N\setminus S}}{|N\setminus S|}\right).$$

Cesco 的投影算子与我们的完全相同，但法向量的选择不同。他选择了范数不同的法向量，以便得到一个显式依赖于超额 $e(S,\ x)$ 的表达式。我们选择法向量的依据是以下定理。

定理 1.2.3. 设 S 和 T 为联盟。我们有

$$\eta^S+\eta^T=\eta^{S\cup T}+\eta^{S\cap T}\qquad and\qquad \langle\eta^S,\eta^T\rangle=\eta^S(T).$$

证明. 注意，若 S 和 T 不相交，则有

$$\eta^S + \eta^T = \mathbf{1}^S - \frac{|S|}{n}\mathbf{1}^N + \mathbf{1}^T - \frac{|T|}{n}\mathbf{1}^N = \mathbf{1}^{S\cup T} - \frac{|S|+|T|}{n}\mathbf{1}^N = \eta^{S\cup T}.$$

否则，我们将 $\eta^S = \eta^{S\setminus T} + \eta^{S\cap T}$ 分解；对 η^T 也同样处理，于是得到

$$\eta^S + \eta^T = \eta^{S\setminus T} + \eta^{S\cap T} + \eta^{T\setminus S} + \eta^{S\cap T} = \eta^{S\cup T} + \eta^{S\cap T}.$$

对于第二个性质， η^S 是侧支付这一事实意味着

$$\langle \eta^S, \eta^T\rangle = \langle \eta^S, \mathbf{1}^T\rangle - \frac{|T|}{n}\langle \eta^S, \mathbf{1}^N\rangle = \eta^S(T) - \frac{|T|}{n}\eta^S(N) = \eta^S(T).$$

□

由此定理，我们可以推导出集合 $\{\eta^S \mid S \in \mathcal{N}\}$ 的若干性质，特别是， η^S 的重新分配围绕 Σ 的原点平衡。

定理 1.2.4. 联盟集合 $\mathcal{C} \subseteq N$ 是平衡的，当且仅当存在一组正数 $\{\theta_S \mid S \in \mathcal{C}\}$，使得

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \theta_S \eta^S = 0$$

证明。 设 $\mathcal{C}$ 是一个平衡集合。那么，存在一组正数 $\{\lambda_S \mid S \in \mathcal{C}\}$，使得

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \mathbf{1}^S = \mathbf{1}^N.$$

将等式两边的系数相加，得到以下恒等式:

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S |S| = n.$$

于是我们有

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \eta^S = \sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S \mathbf{1}^S - \frac{1}{n}\sum_{S\in\mathcal{C}} \lambda_S |S| \mathbf{1}^N = \mathbf{1}^N - \frac{1}{n} n \mathbf{1}^N = 0_{\mathbb{R}^N}.$$

现在假设存在正数 $\{\theta_S \mid S \in \mathcal{C}\}$ 使得

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \theta_S \eta^S = 0_{\mathbb{R}^N},$$

并令 $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{S\in\mathcal{C}} \theta_S |S| > 0$。由此可得

$$\sum_{S\in\mathcal{C}} \theta_S \left(\mathbf{1}^S - \frac{|S|}{|N|}\mathbf{1}^N\right) = 0_{\mathbb{R}^N} \iff \sum_{S\in\mathcal{C}} \theta_S \mathbf{1}^S = \alpha \mathbf{1}^N \iff \sum_{S\in\mathcal{C}} \left(\alpha^{-1}\theta_S\right) \mathbf{1}^S = \mathbf{1}^N,$$

于是 $\mathcal{C}$ 是一个权重为 $\{\alpha^{-1}\theta_S \mid S \in \mathcal{C}\}$ 的平衡集合。 □

由该定理得出的另一个令人惊讶的结果是，对于任意联盟 S和 T （二者均不同于 N），如果 n 是素数，那么 η^S 和 η^T 就不可能正交，

因为

$$\langle \eta^S, \eta^T \rangle = \eta^S(T) = \mathbf{1}^S(T) - \frac{|S|}{n}\mathbf{1}^N(T) = |S \cap T| - \frac{|S| \cdot |T|}{n},$$

且 $|S| \cdot |T|$ 不可能是 n的倍数。法向量η^S 及其相关仿射子空间的组合性质将在第2章中作更详细的研究。

由命题1.2.2可知，对于预分配 x，若 $x(S) < v(S)$，则有$\pi_{\mathbb{A}_S}(x)$ dom_S x。但是，我们无法控制投影的位置。对于任意预分配 x， $\pi_{\mathbb{A}_S}(x)$相对于 $\mathbb{A}_T$ 的位置，取决于超额 $e(S, x)$ 和 $e(T, x)$，也取决于标量积 $\eta^S(T) = \langle \eta^S, \eta^T \rangle$。

$\langle \eta^S, \eta^T \rangle$ 的值和符号表明联盟S 与 T 的支付相关程度如何，以及它们的利益重叠程度。将侧支付 η^S 加入预分配 x必然会使联盟 S受益，而$\langle \eta^S, \eta^T \rangle$ 的值则表明平移 η^S 使联盟 T受益的程度。事实上，

$$\left(x + \eta^S\right)(T) = x(T) + \eta^S(T) = x(T) + \langle \eta^S, \eta^T \rangle.$$

为总结所有这些信息，我们定义

$$\chi_S(T, x) \coloneqq e(S, x)\langle \eta^S, \eta^T \rangle - e(T, x)\|\eta^S\|^2.$$

命题 1.2.5. 设 S 和 T 是两个联盟，并设 $x \in \mathbb{X}(v)$。则

$$\pi_{\mathbb{A}_S}(x) \in \mathbb{A}_T^{\geq} \quad \textit{if and only if} \quad \chi_S(T, x) \geq 0.$$

证明。 首先，我们研究 T 在投影到 $\mathbb{A}_S$时的超额：

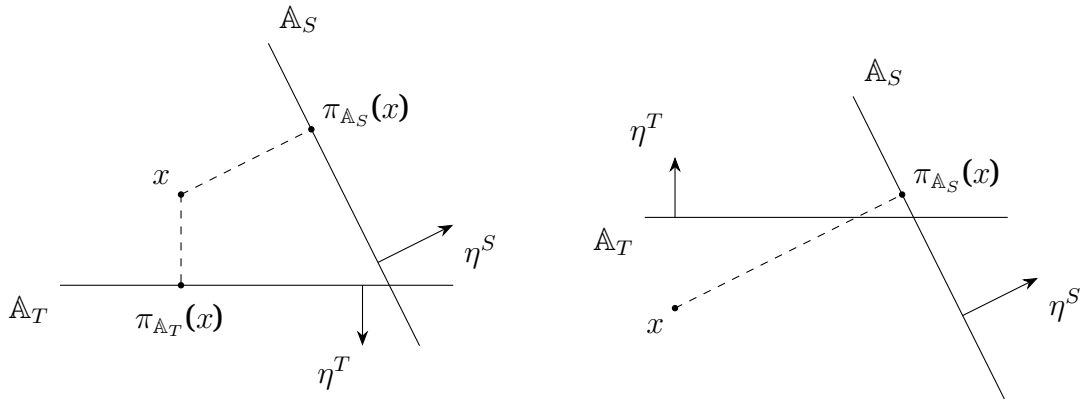
$$\begin{aligned} e(T, \pi_{\mathbb{A}_S}(x)) &= v(T) - x(T) - \gamma_S(x)\eta^S(T) \\ &= e(T, x) - \frac{e(S, x)}{\|\eta^S\|^2}\langle \eta^S, \eta^T \rangle \\ &= \frac{1}{\|\eta^S\|^2}\left(e(T, x)\|\eta^S\|^2 - e(S, x)\langle \eta^S, \eta^T \rangle\right) = \frac{-1}{\|\eta^S\|^2}\chi_S(T, x). \end{aligned}$$

当且仅当 $e(T, \pi_{\mathbb{A}_S}(x))$ 非正时，投影才落在 $\mathbb{A}_T^{\geq}$ 中，因此当且仅当 $\chi_S(T, x)$ 非负。

□

这一结果有直观的含义。如果 $\langle \eta^S, \eta^T \rangle \geq 0$，沿着 η^S 平移给定的预分配，从而提高联盟 S 的支付，也会提高联盟 T的支付。因此，假设 $e(S, x)$ 足够大， x 与 $\pi_{\mathbb{A}_S}(x)$ 之间的侧支付 σ 会同时提高 S 和 T 的支付，并且我们有 $\pi_{\mathbb{A}_S}(x)(T) = x(T) + \sigma(T) \geq v(T)$，如图 1.2 所示。

对于大多数预分配，投影到仿射子空间 $\mathbb{A}_S$ 上并不足以使其投影到核心中。为此，我们需要能够定义到任意仿射子空间交集上的投影算子，从而同时改善所有能够改善所考虑预分配的联盟的支付。这一研究将在第4章第4.3节继续展开。



(a) 情形 $\chi_S(T,\ x) < 0$。 (b) 情形 $\chi_S(T,\ x) > 0$。

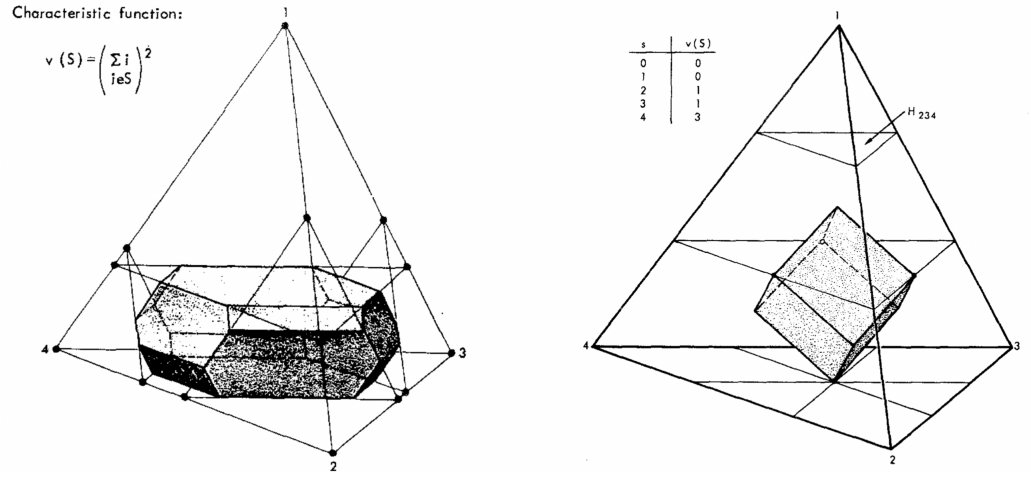
图 1.2：命题 1.2.5 的示例。

1.3 博弈、平衡集合与某些多面体

本节讨论核心及其性质、它在经济学或任何合作环境中的含义，以及这一特殊概念如何也出现在数学的其他领域，尤其是集合函数理论和组合优化中。核心的现代定义和用法源自 Shapley [81]（参见 [91, 103]）。对于一个博弈 $(N,\ v)$，核心 记作 $C(v)$，是预分配集合与上向量集合的交集，也就是说，是使每个联盟都受益的预分配集合：

$$C(v) = \mathbb{X}(v) \cap U(v) = \bigcap_{S \in \mathcal{N}} \mathbb{A}_S^{\geq}.$$

设 v 和 w 是定义在同一论域 2^N 上的两个集合函数。若对于每个 $S \in 2^N$，都有 $w(S) \geq v(S)$，则记作 $w \geq v$。因此， v 的核心可视为满足 $w \geq v$ 的可加集合函数 w 的集合，其中约束为 $w(N) = v(N)$。



Shapley [83] 的核心的图示。

在本学位论文中，我们将核心非空视为大联盟 N 形成的必要条件，但不视为充分条件。这是必要的

因为如果核心为空，就不存在能让每个联盟都获益的预分配，因此有些参与者会更愿意组成其他联盟，而非 N。然而，即使核心非空，也可能不存在一种机制，能让参与者达成这些联盟理性的预分配，因为没有任何迹象表明所有参与者和联盟都能成功维护自身利益。这种机制可以源自外部干预，例如，由一位有权决定采用哪些预分配来在参与者之间分配价值 $v(N)$ 的规划者来促成；在这种情况下，核心非空就是充分条件。

不过，如果参与者之间没有外部调解，那么能够改善当前预分配的联盟 S 可以威胁退出大联盟N。由于博弈具有平衡性，不存在包含联盟 S 且总价值大于 $v(N)$的平衡集合，于是 S中的参与者离开会损害S 之外的所有参与者。因此， N 中的参与者绝不会同意接受被支配的预分配。如果核心稳定，那么核心之外的每个预分配都被某个核心元素支配，讨价还价过程最终会收敛到一个核心元素，合作行为也将随之出现。

1.3.1 多面体与多胞体

在深入讨论核心的性质之前，我们先回顾一些关于凸多胞体的记号和基本结果。本小节的大部分记号来自 Ziegler 的著名教材 [104]。首先，在本文中，我们将 $\mathbb{R}^N$ 中的多胞体 P 视为凸有界多面体，而多面体则定义为 $\mathbb{R}^N$ 中满足有限个线性不等式的元素集合。

由单个线性不等式定义的多面体称为半空间；由一组线性不等式定义、且这些不等式都能在元素 $x \in \mathbb{R}^N$ 处取等号（即成为等式）的多面体，称为（仿射）锥，而 x 称为该锥的顶点 。通过收紧定义 P 的不等式集合中可能为空的某个子集，从 P 得到的多面体 P' 称为 P的面 。

另一种刻画多胞体的方法是给出一组极点，多胞体中的每个元素都是这些点的凸组合。由于我们不假设线性不等式是弱不等式还是严格不等式，多胞体在拓扑意义上不一定是闭集，也不一定是开集，并且某些极点可能不属于该多胞体。对于多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$，其仿射包 aff(P) 定义为包含 P 的最小仿射子空间，维数 dim(P) 则定义为 P 的仿射包 aff(P) 的维数。

多胞体在组合优化中非常常见，尤其是在线性规划中，它们表示可行解的集合，即满足优化问题所有约束的元素所组成的集合。多胞体 P 的一个面 F 是 P 的一个子集，某个定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的线性形式 L 在 P 上取得最小值，即

$$F = \left\{ x \in P \;\middle|\; L(x) = \min_{y \in P} L(y) \right\}.$$

我们将空集视为任意多胞体的一个面，称之为空面。由单个点构成的面称为 P的顶点 ，并与

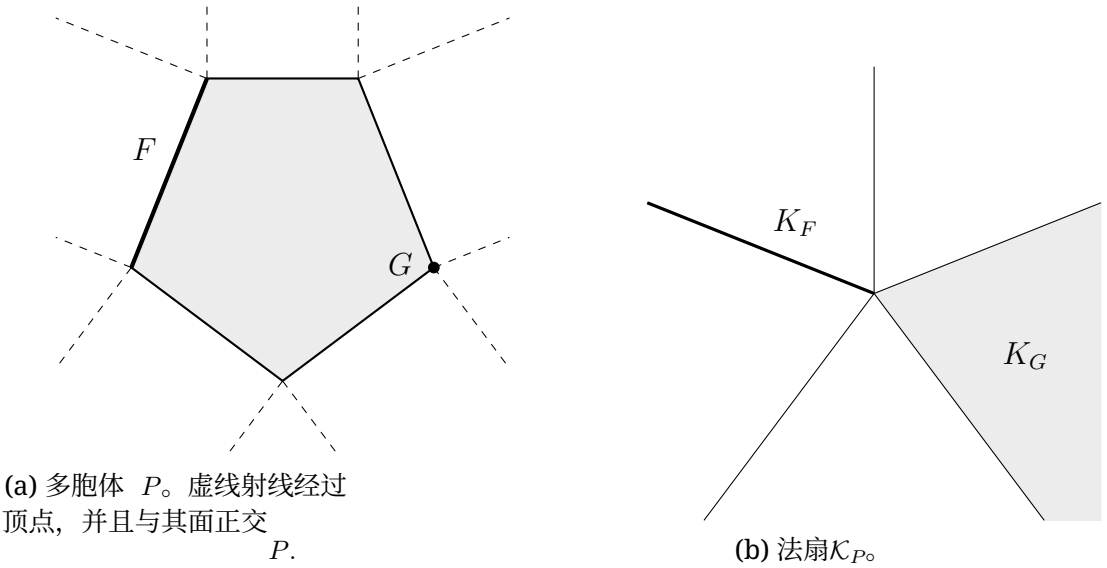
多胞体的极点相对应。一维面称为 P的边，而（$d-1$）维面称为 P的面，其中 d是 P的维数。

我们称偏序集为有限偏序集，即配备了自反、传递且反对称的二元关系的有限集。如果偏序集中的每一对元素在该偏序集中都有上确界（称为并）和下确界（称为交），则该偏序集称为格。多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$ 的面集按包含关系排序后构成一个格，称为面格，记作$\mathcal{L}(P)$。如果两个多胞体的面格同构，我们就称它们组合等价。我们交替使用记号$\mathcal{L}(P)$表示面集或面格。

设 F 是多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$ 的一个面。我们将 K_F 定义为 F 的法锥，即由满足 $\min_{x\in P}\langle y, x\rangle$ 在 F 上取到的元素 $y \in \mathbb{R}^N$ 构成的集合，也就是说，

$$K_F := \left\{ y \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; F \subseteq \arg\min_{x\in P} \langle y, x\rangle \right\}.$$

集合$\mathcal{K}_P := \{K_F \mid F \in \mathcal{L}(P)\}$，称为 P的法扇 。



(a) 多胞体 P。虚线射线经过顶点，并且与其面正交 P.

(b) 法扇$\mathcal{K}_P$。

图 1.4：多胞体 P 及其法扇$\mathcal{K}_P$。

设 P是一个多胞体，令 $F, G \in \mathcal{L}(P)$，并用$\mathcal{K}_P$表示其法扇。那么：

- $\mathcal{K}_P$ 中锥的每个非空面也是$\mathcal{K}_P$中的锥，
- $\mathcal{K}_P$ 中任意两个锥的交集是它们各自的一个面，
- 若 $F \subseteq G$，则 $K_F \supseteq K_G$，
- 锥 $K_F \cap K_G$ 是$\mathcal{L}(P)$ 中 F 和 G 的上确界的法锥。

1.3.2 极小平衡集合

设 (N, v) 是一个博弈。回顾一下，N 上的平衡集合是由联盟组成的集合 $\mathcal{B}$，并配有一组正权重 $\{\lambda_S\}_{S\in\mathcal{B}}$，称为平衡

权重，满足对于每个参与者 $i \in N$，总和 $\sum_{S\in\mathcal{B}^i}\lambda_S$ 等于一，其中 $\mathcal{B}^i$是$\mathcal{B}$ 中包含参与者 i的联盟所组成的集合。换言之，我们有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}}\lambda_S\mathbf{1}^S=\mathbf{1}^N.$$

从几何视角看，如果 $\mathbf{1}^N$ 位于$\mathcal{B}$ 的锥包的相对内部，则集合$\{\mathbf{1}^S \mid S \in\mathcal{B}\}$是平衡的。Bondareva [18],随后与 Shapley [82] 利用平衡集合，对具有非空核心的博弈给出了刻画。

定理 1.3.1（Bondareva-Shapley 定理，第一种形式）。博弈(N, v) 具有非空核心，当且仅当对于 N 上的每个平衡集合 B 及其任意一组平衡权重 $\{\lambda_S\}_{S\in\mathcal{B}}$，都有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}}\lambda_S v(S)\le v(N). \tag{1.3.1}$$

这个著名定理提供了形容词平衡，用来描述具有非空核心的博弈。该结果的解释十分自然：平衡集合是一种可能的参与者组织形式，他们可以将时间分配给不同的联盟。加权和是在博弈结束时，参与者在 N 中筹集到的资金总额。因此，如果不等式 (1.3.1) 不成立，就存在一种平衡集合，其组织形式比$\{N\}$对参与者更有利，所以 N 不会形成。注意，不存在能使所有联盟都受益的预分配，这等价于存在一种比$\{N\}$对参与者更有利的组织形式。这个事实是线性规划对偶定理的一种博弈论解释，可用来证明该定理。

事实上，考虑线性规划 $\min_{x\in U(v)} x(N)$。将 $U(v)$ 替换为其定义，可得以下形式：

$$(P)\qquad \begin{cases}\min\ x(N)\\ \text{s.t. } x(S)\ge v(S),\quad \text{for all } S\in\mathcal{N}.\end{cases}$$

请注意，该程序始终可行，并且博弈的核心非空，当且仅当该程序的值为 $v(N)$。对偶规划为：

$$(D)\qquad \begin{cases}\max\displaystyle\sum_{S\in\mathcal{N}}\lambda_S v(S)\\ \text{s.t. } \begin{cases}\displaystyle\sum_{S\in\mathcal{N}}\lambda_S\mathbf{1}^S=\mathbf{1}^N,\ \text{and}\\ \lambda_S\ge 0,\ \text{for all } S\in\mathcal{N}.\end{cases}\end{cases}$$

对偶规划的约束定义了上述平衡集合。由于由$\lambda_S^*=0$ 对所有 $S\in\mathcal{N}$ 以及$\lambda_N^*=1$ 定义的向量 λ^* 满足这些约束，因此该程序有解。此外， λ^* 的目标函数值为 $v(N)$。由对偶定理可知，博弈的核心非空，当且仅当(D)的值为 $v(N)$，也就是说，对于$\mathcal{B}$ 上的所有平衡集合

N 及其平衡权重$\{\lambda_S\}_{S\in\mathcal{B}}$,

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N).$$

在实践中，这种刻画无法用于算法目的，因为大多数平衡集合可能有无穷多个平衡权重。注意，平衡权重在 $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ 中构成一个多胞体，其描述为

$$F = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}_{+} \;\middle|\; \sum_{S\in\mathcal{N}} \lambda_S \mathbf{1}^S = \mathbf{1}^N \right\}. \tag{1.3.2}$$

每个点 $\lambda \in F$ 都表示一个平衡集合$\mathcal{B}$ ，它对应于 λ 的支撑，而$\mathcal{B}$ 的平衡权重则是 λ 中对应的正系数。同样，我们可以将每个联盟函数 v 识别为一个 (2^n-1) 维向量；因此，向量空间 $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ 可视为博弈空间。然后，平衡权重多胞体的环境空间与博弈向量空间，连同通常的标量积，构成一个对偶配对</style)，这是泛函分析研究的对象。

由于平衡集合及其权重与一个多胞体相关联，它们可由该多胞体顶点的凸组合确定。

定义 1.3.2. 如果一个平衡集合不包含任何适当的平衡子集，则称其为极小。

Shapley 证明，极小平衡集合的集合与 F 的极端点集合相对应，因此极小平衡集 $\mathcal{B}$ 有唯一一组平衡权重 $\lambda^{\mathcal{B}}$。基于此，他提出了 Bondareva-Shapley 定理的这一锐化版本。有关详情，请参阅 Grabisch 的专著 [39]。

定理 1.3.3 （Bondareva-Shapley，锐化版本）。
博弈 (N, v) 的核心非空，当且仅当对于每个极小平衡集合 B，都有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda^{\mathcal{B}}_S v(S) \leq v(N).$$

此外，除了 $B = \{N\}$ 之外，这些不等式均不可删去。

这一结果之所以锐化，是因为若选取一个极小平衡集合 $\mathcal{B}$，就能找到一个博弈，使其满足除 $\mathcal{B}$ 以外所有极小平衡集合对应的不等式，却不满足与 $\mathcal{B}$ 对应的不等式。如果已知 N 上的极小平衡集合，这一新刻画所需检验的不等式数量便会大幅减少。

在第2章中，我们介绍了一种用于检验核心非空性的算法，并证明该算法显著快于线性规划中通常使用的算法。使用类似 Bondareva-Shapley 的算法，唯一的要求是已知极小平衡集合。为此，我们完善并略微改进了 Peleg [68], 提出的归纳方法，并将其实现为可运行的计算机程序。我们能够计算 $|N| = 7$上的极小平衡集合以及 N的任意子集上的极小平衡集合。这一生成过程将在第2.1节中讨论。

1.3.3 凸博弈的核

到目前为止，我们一直在一个非常一般的框架下研究博弈，这些博弈源自任意的归零集函数。在本学位论文中，我们主要关注核心以及预分配之间的支配关系。此外，许多采用此处所述博弈论框架建模的经济问题，都具有一些共同且便于利用的性质。

定义 1.3.4. 设 $\xi\colon 2^N \to \mathbb{R}$ 是一个集合函数。称 ξ 为

- 归零的，如果 $\xi(\emptyset) = 0$,
- 超模 当且仅当，对所有 $S, T \in \mathcal{N}$，都有 $\xi(S) + \xi(T) \leq \xi(S \cup T) + \xi(S \cap T)$,
- 次模 当且仅当，对所有 $S, T \in \mathcal{N}$，都有 $\xi(S) + \xi(T) \geq \xi(S \cup T) + \xi(S \cap T)$。

具有超模联盟函数的博弈称为凸 [83]。许多互动情形都可以用这类博弈建模，例如：土地所有者参与的生产经济 [85, 29], 破产博弈 [5, 29], 具有线性成本函数的公共池博弈 [65, 29], 等。Shapley [83] 借助 Edmonds [32]对次模集合函数，尤其是多拟阵的深入研究，对凸博弈的性质进行了极为深入的研究。特别地，凸博弈具有非空核心，并且其核心是（外部）稳定的。核心非空性的结果源于次模集合函数理论。关于这一理论的论述，参见 Fujishige [36]的专著。

设 $\xi\colon 2^N \to \mathbb{R}$ 是一个归零的次模集合函数。我们用 $\mathrm{P}(\xi)$ 表示 ξ的次模多面体，其定义为

$$\mathrm{P}(\xi) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(A) \leq \xi(A), \text{ for all } A \in \mathcal{N}\},$$

并以 $\mathrm{B}(\xi)$ 表示 ξ 的基多面体，定义为 $\mathrm{B}(\xi) \coloneqq \{x \in \mathrm{P}(\xi) \mid x(N) = \xi(N)\}$。以 $\xi^{\#}$ 表示 ξ 的共轭集合函数，对所有 $S \subseteq N$，定义为

$$\xi^{\#}(N \setminus S) = \xi(N) - \xi(S).$$

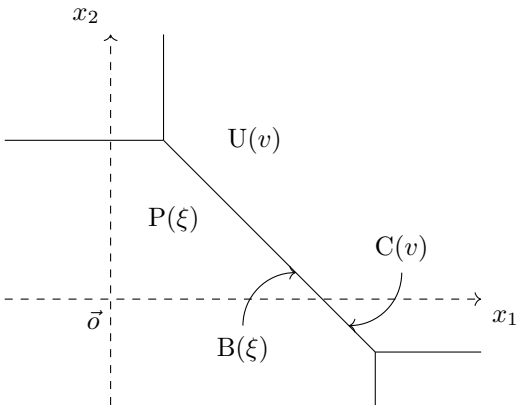


图1.5：集合函数 ξ 的次模多面体和基多面体，以及 $v = \xi^{\#}$的核心和上向量集合示例。

注 1.3.5。已知，次模集合函数 ξ 的共轭集合函数 $\xi^{\#}$ 是超模的，并且 $B(\xi) = C(v)$，其中 $v = \xi^{\#}$（见 [36, 引理 2.4][39]）。最后一个恒等式成立并不要求次模性或超模性。

因此，次模函数 [32, 36, 等]的理论在某种程度上是 Shapley 凸博弈理论的对偶。这两种理论之间仍有一个重要区别：核/基多面体的外部稳定性概念。集合函数理论中没有与之对应的概念。

最初，Edmonds 研究了他称为多拟阵的一种多胞体。其定义不同于 Fujishige 的定义；Fujishige 将次模集合函数称为多拟阵。不过，这两个定义之间有着深刻的联系。对于两个向量 x，$y \in \mathbb{R}^N$，我们记作 $x \leq y$，若对所有 $i \in N$，都有 $x_i \leq y_i$。

定义1.3.6 (Edmonds [32], Schrijver [78])。
在 $\mathbb{R}^N_+$ 中的一个多拟阵 P 是 $\mathbb{R}^N_+$ 的一个紧致非空子集，并且满足

1. 若 $\vec{o} \leq y \leq x \in P$，则 $y \in P$；2. 对每个 $z \in \mathbb{R}^N_+$，存在一个数 $\rho(z)$，使得 $P \cap \{x \mid x \leq z\}$ 的每个极大向量 x 都满足 $x(N) = \rho(z)$。

这个定义类似于拟阵的下述多面体等价定义：拟阵是一个对 $M = (N, B)$，其中 N 是一个有限集，B 是其所谓的<，由 N 的子集组成的非空线性无关子集族，并满足

1. 线性无关集的每个子集都是线性无关集，
2. 对每个 $A \subseteq B$，A 的每个极大线性无关子集都具有相同的基数，称为 A（关于 M）的秩 $r(A)$。

定义1.3.7 (Fujishige [36])。
设 $\rho\colon\ 2^N \to \mathbb{R}$ 是一个归零的集合函数，满足

1. $A \subseteq B \subseteq N$ 蕴含 $\rho(A) \leq \rho(B)$，2. 对所有 A，$B \subseteq N$，都有 $\rho(A) + \rho(B) \geq \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B)$。

这 pair (N, ρ) 称为多拟阵，而 ρ 称为该多拟阵的秩函数 .

以下定理揭示了这两个定义之间的联系。

定理 1.3.8 (Edmonds [32])。
设 $\xi\colon\ 2^N \to \mathbb{R}$ 是一个归零的、非递减的次模集合函数。那么，对于所有 $A \in N\}$，$P(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^N_+ \mid x(A) \leq \xi(A)$ 是一个多拟阵。

多面体组合学文献中另一个与核心相关的有趣多胞体是（广义）置换多面体，它由置换多面体导出。

定义 1.3.9 (Postnikov [71])。
令 $x \in \mathbb{R}^N$，使得对于所有 i，$j \in N$，$x_i \neq x_j$。置换多面体 $\Pi_N(x)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的凸多面体，定义为将 x 的坐标进行置换后得到的所有向量的凸包：$\Pi_N(x) :=$ conv $\{x^\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_N\}$，其中 $\mathfrak{S}_N$是 N的置换群，且 $x^\sigma = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$。

然而，对于某些作者，标准置换多面体 Π_N 定义为

$$\Pi_N = \Pi_N((n, n-1, \ldots, 2, 1)).$$

例 1.3.10（Lancia 和 Serafini [55]）。
标准置换多面体是严格凸博弈（N， v）的核心，该博弈对所有 $S \in \mathcal{N}$ 定义为 $v(S) = {}^{|S|}{}_{(|S|+1)\ 2}$。图 1.6 展示了 $n = 3$ 的情形。

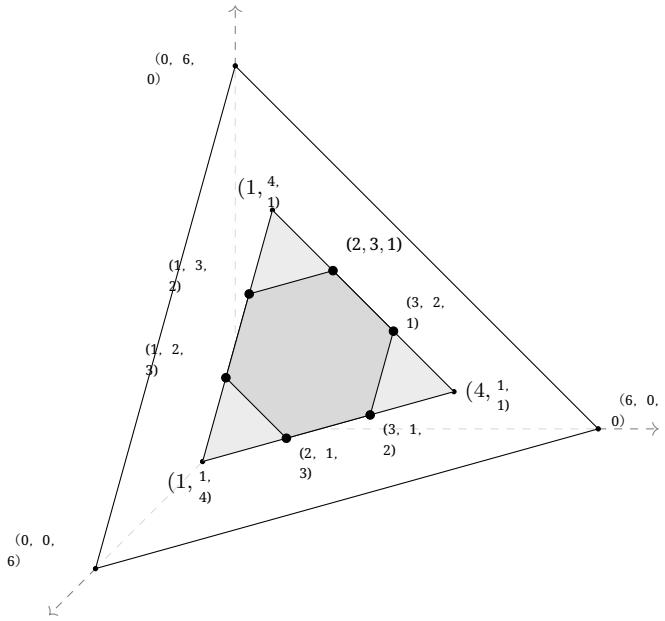
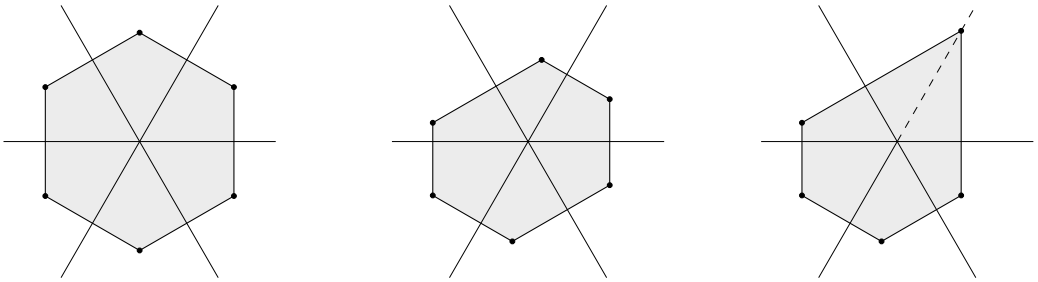


图 1.6：(N， v) 的核心（灰色）示意图。白色区域为集合$\mathbb{X}(v) \cap \mathbb{R}^N_+$，浅灰色区域为分配集合 $I(v)$。

◊

在多面体组合学中，自 Postnikov [71], 以来，人们一直在研究排列多面体的形变，以处理更广义的一类多胞体。广义排列多面体 是通过平移置换多面体的面而得到的多胞体，使得边的方向保持不变（即彼此平行），但某些边可能会意外退化为一个点。



(a) 标准置换多面体。 （b）广义置换多面体。

图 1.7：三个广义置换多面体。直线表示坐标置换的对称轴。

更形式化地说，我们有如下定义。

定义 1.3.11 (Postnikov [71])。
广义置换多面体是由 $n!$ 个点 x^w 构成的凸包，这些点由 $w \in \mathfrak{S}_N$ 标记，并且对于任意 $w \in \mathfrak{S}_N$ 和任意相邻换位 $\tau_i = (i, i+1)$，都有

$$x^w - x^{\tau_i(w)} = \alpha^{w,i}\left(\mathbf{1}^{\{w(i)\}} - \mathbf{1}^{\{w(i+1)\}}\right) \qquad \text{where } \alpha_{w,i} \geq 0.$$

Postnikov 证明了所有置换多面体在组合上等价（即其面格同构），并重新表述了 Rado 的不等式 [72]，证明任意置换多面体 Π_N 与$\mathcal{N}$的面之间都存在双射。由此，广义置换多面体由一组坐标 $2^n - 1$ 来参数化$\{z_S\}_{S\in\mathcal{N}}$，每个联盟对应一个坐标。然而，并非所有这些 $2^n - 1$ 数值集合都能生成广义置换多面体。每个广义置换多面体都具有如下形式

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = z_N, \text{ and } x(S) \geq z_S \text{ for all } S \in \mathcal{N}\right\}.$$

在这里，我们可以看出核心的定义，其中参数$\{z_S \mid S \in \mathcal{N}\}$ 是价值 $v(S)$。Castillo 和 Liu [21] 将这些参数称为形变向量。

凸博弈会诱导出标准置换多面体的形变。此外，广义置换多面体与次模函数通过次模性定理 [21]有着密切联系。

定理 1.3.12 （次模性定理）。
广义置换多面体 P与 2^N上的归零次模集合函数之间存在双射，且$\dim(P) \leq n-1$。

次模性定理的另一种证明见 Rehberg [75]。这些多胞体之间的关系总结如下表。

集合函数	多拟阵	排列多面体	凸博弈
次模 多面体	扩展 多拟阵	-	上向量
-	多拟阵	-	-
基多面体	基多胞体	广义 置换多面体	Core
-	-	置换多面体	$C(v)$ 与 $v: S \mapsto \frac{|S|(|S|+1)}{2}$
Schrijver [78], Fujishige [36]	Edmonds [32], Schrijver [78]	Postnikov [71], Castillo 和 Liu [21]	Shapley [83], Grabisch [39]

图 1.8：不同理论中类似定义的多面体。

最后，在结束关于凸博弈的这一部分时，我们来介绍其核心的一些性质。我们用 F_S 表示由 $F_S := C(v) \cap \mathbb{A}_S$定义的核心的面。如果对于每个联盟 $S \in \mathcal{N}$，F_S 都非空，则称该博弈为精确 博弈（Schmeidler, [77]）。如果对于所有 $S, T \in \mathcal{N}$, 都有$F_S \cap F_T \subseteq F_{S\cap T} \cap F_{S\cup T}$，则称平衡博弈 (N, v) 的核心具有正则构型 。

命题 1.3.13 (Shapley [83])。
平衡博弈是凸博弈，当且仅当其核心具有正则构型。此外，凸博弈是精确的。

对于任意平衡博弈，我们都可以关联到一个具有相同核心的唯一精确博弈。

定义 1.3.14。 设 (N, v) 是一个平衡博弈。(N, v) 的下包络，或称精确覆盖，是博弈 (N, v_*)，对所有 $S \in \mathcal{N}$，定义为 $v_*(S) = \min_{x \in C(v)} x(S)$。

从几何上看，博弈的下包络是通过将超平面 $\mathbb{A}_S$ “推向”核心，直到它们与核心相接来构造的。事实上，博弈的核心与其下包络的核心重合 [39]。

命题 1.3.15。 博弈 (N, v) 的下包络是凸的，当且仅当$C(v)$ 是一个广义置换多面体。

证明。 这是次模性定理的一个推论。由于 $C(v)$ 是广义置换多面体，因此存在唯一的次模函数 ξ，使得 $B(\xi) = C(v)$。利用注 1.3.5，我们将这个集合函数 ξ 转化为凸博弈的联盟函数 $v' \equiv \xi^{\#}$。于是 $C(v') = C(v)$，并且由于 (N, v') 是凸的，因此它是精确的。然而，核心是一个紧多面体，博弈的下包络是唯一的，因此 (N, v') 是 (N, v) 的下包络。 □

总而言之，凸博弈及其核心的理论已经相当成熟。然而，超模联盟函数是一项限制性条件，许多社会互动或经济情境无法用凸博弈建模。要对这些问题建模，我们需要一种更一般的理论。

1.3.4 完全平衡博弈

博弈的理论模型，以及不具备任何特定结构的联盟函数这一数学概念，由于需要繁琐地计数所有联盟的价值，在实践中很难应用。然而，合作博弈理论涵盖了若干更精确的理论，这些理论源于具体情境，并对联盟函数作出了明确界定。这些更精确的理论使合作博弈的研究具有现实意义，因为每一种理论都继承了我们在此探讨的更宏观抽象理论中的结果和性质。

在本小节中，我们将介绍线性生产博弈、市场博弈 和流博弈。关于这些博弈的更多详情，请参阅 Tijs 关于组合优化博弈的综述 [96]。随后，我们将回顾每个平衡博弈都与上述各类中的一个博弈“等价”，并解释“等价”的含义。因此，任何不具有 先验 结构的平衡博弈，都可以转化为属于这三类之一的博弈。还有许多与这三类等价的其他博弈类别，我们无法在此深入探讨，例如 Apartsin 和 Holzman 定义的手套市场博弈 [3], ，以及 Csóka、Herings 和 Kóczy 定义的风险分配博弈 [26]。

定义 1.3.16。 设 (N, v) 是一个博弈，且 $S \in \mathcal{N}$ 是一个联盟。子博弈 $(S, v_{|S})$ 是定义在 S 上的博弈，其联盟函数 $v_{|S}$ 在 S的子联盟上与 v 一致。如果一个博弈的所有子博弈都是平衡博弈，则称其为完全平衡 博弈。

Kroupa 和 Studený [52] 研究了完全平衡博弈所形成的锥，并确定了构成其面的博弈。

线性生产博弈。线性生产博弈的定义归功于 Owen [67]。设 N 是参与者的有限非空集合， $b^i \in \mathbb{R}^m$ 是分配给参与者 $i \in N$的非负资源向量。利用这些资源，参与者可以生产p 种不同的商品，并以给定的市场价格出售。对于任意合适的 (j,k)，第j种商品需要 $a_{kj} > 0$ 单位的第 k种资源，且售价为 $c_j \geq 0$。我们用 A 表示由系数 a_{kj}构成的矩阵。属于$S \in \mathsf{N}$ 的参与者将其资源汇集起来，以 $b^S := \sum_{i\in S} b^i$表示，从而生产成品以使利润最大化。于是，对于所有 $S \in \mathsf{N}$，关联于 $(A, b = \{b^i\}_{i\in N}, c)$ 的线性生产博弈 (N, v) 定义为 $v(S) = \max_{x\in\mathbb{R}^p} \left\{c, x \mid Ax \leq b^S\right\}$。

定理 1.3.17 (Rosenmüller [76])。
A n非负博弈是线性生产博弈，当且仅当它是完全平衡的 $d.$

市场博弈。市场博弈的定义源自 Shapley 和 Shubik[86]。令 N 为参与者（或交易者）的有限集，令 G 为有限维向量空间的非负正交象限，称为商品空间；令 $A = \{a^i \mid i \in N\} \in G^N$为 G中的元素的指标集，称为初始禀赋；令 $U = \{u^i \mid i \in N\}$为连续凹函数的指标集 $u^i : G \to \mathbb{R}$，称为效用函数。对于任意联盟 $S \in \mathsf{N}$，一组禀赋 $\{x^i\}_{i\in S} \subseteq G$，若满足$\sum_{i\in S} x^i = \sum_{i\in S} a^i$，则称为市场 (N, G, A, U) 的可行 S-分配；我们将它们的集合记为 X^S。由该市场生成的市场博弈是一个博弈 (N, v)，对于所有 $S \in \mathsf{N}$，均有 $v(S) = \max_{x\in X^S} \sum_{i\in S} u^i(x^i)$。

定理 1.3.18 （Shapley 和 Shubik [86]）。
一个博弈是市场博弈，当且仅当它是完全平衡的。

对于一类称为指派博弈的特殊市场博弈，Solymosi 和 Raghavan [93]找到了具有稳定核心的博弈集合。

流博弈。另一类应用广泛的博弈是流博弈。Kalai 和 Zemel [48] 指出，这类博弈可用于模拟集成生产系统中通过不同生产路径进行利润分配的问题。设 $G = (V, E)$ 为一个有向图，其中 V 是包含一个初始节点 s 和一个终端节点 t的顶点集， E 为边集， N 为有限参与者集。设 $u : E \mapsto \mathbb{R}$ 将每条边映射到其容量，并设$p : E \mapsto N$ 将每条边映射到拥有该边的参与者。

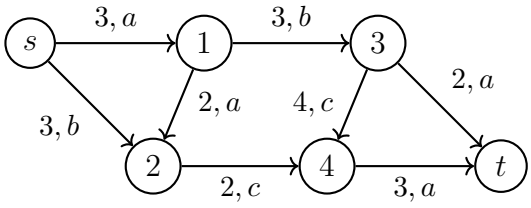


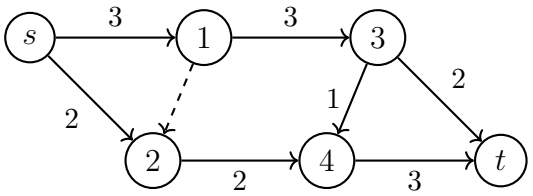
图 1.9：描述一个流博弈的有向图，其中包含 $N = \{a,\ b,\ c\}$。

对于联盟 $S \in \mathcal{N}$，设 G^S 为仅由联盟 S 中参与者拥有的边构成的子图。于是，与 G 相关联的流博弈 (N, v) 的联盟函数 v 将联盟 S 映射为在 G^S 中从节点 s 到节点 t 所能承载的最大流量。根据图 1.9 所示的例子，相应流博弈的联盟函数为

S	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	N
$v(S)$	0	0	0	2	2	0	5

.

与联盟 N 相对应的流为



虚线连接上没有流通过。每条棱旁的数字表示通过该棱的流量，并且满足每条棱的容量约束。

定理 1.3.19 (Kalai 和 Zemel [48])。一个非负博弈是流博弈，当且仅当它是完全平衡的。

这些例子表明，与凸博弈相比，完全平衡博弈所代表的经济情境范围广得多；它们仅根据核心非空这一性质来定义，而与大联盟的选择无关。完全平衡博弈至少还有另外两项重要优势，下面将予以介绍。

Shapley 和 Shubik [86] 认为，若两个博弈的分配集相同，且其上的支配关系也相同，则称这两个博弈为支配等价。两个支配等价的博弈具有相同的核心，而且它们的稳定集也完全相同。

在同一篇论文中，他们定义了博弈的完全平衡覆盖。

定义 1.3.20 （Shapley 和 Shubik [86]）。
设 (N, v) 是一个博弈，并用 $\mathbb{B}(S)$ 表示 S 上极小平衡集合的集合。(N, v) 的（完全平衡）覆盖是博弈 $(N, \overline{v})$，其定义为：对所有 $S \in \mathcal{N}$，

$$\overline{v}(S) = \max_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}(S)} \sum_{T \in \mathcal{B}} \lambda_T^{\mathcal{B}} v(T).$$

命题 1.3.21 （Shapley 和 Shubik [86]）。
平衡博弈与其完全平衡覆盖支配等价。

这一结果将对平衡博弈的核心的外部稳定性的研究，归结为对完全平衡博弈的核心的外部稳定性的研究。因此，研究完全平衡博弈不仅使我们能够研究一大类博弈，也能通过 d-等价研究所有平衡博弈。这就是为什么本学位论文在需要时总是考虑完全平衡博弈。与凸博弈不同，目前尚不清楚哪类集合函数刻画了完全平衡博弈；然而，Kalai 和 Zemel [48]在研究流博弈时，发现了一种非常有趣且实用的刻画。我们将联盟函数可加的博弈称为非本质博弈。

若存在一个由有限个非本质博弈组成的有限集$\{(N,\ w^i)\mid i\in I\}$，使得 $v=\bigwedge_{i\in I} w^i$，即对所有 $S\in\mathcal{N}$，都有，则称博弈 $(N,\ v)$ 具有有限表示 [76]

$$v(S)=\min_{i\in I} w^i(S).$$

定理1.3.22（Kalai 和 Zemel [48]）。
当且仅当一个博弈具有有限表示时，它才是完全平衡的。

这一刻画将完全平衡博弈与热带多项式联系起来。

定义1.3.23。热带多项式是一个映射 $\psi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$，定义为有限个仿射映射的最小值，这些仿射映射的线性部分具有有理系数，即

$$\psi: x\in\mathbb{R}^N\mapsto \min_{i\in I}\{c^i+\langle z^i,x\rangle\}\in\mathbb{R},$$

其中所有 z^i 的系数都是有理数。

在热带多项式的标准定义中，系数 c^i 通常允许取值 $+\infty$，前提是至少有一个有限系数。因为当 c^i 为无穷大时，最小值运算符不会考虑项 $c^i+l^i(x)$，所以它不会对映射 ψ产生作用。

如果博弈 $(N,\ v)$ 的联盟函数只取有理数值，我们就称它为有理的。假设博弈是有理的，并不会过多限制其经济应用范围，因为货币数量很少用无理数表示，也可以用有理数近似。

命题1.3.24. 对于每个有理的完全平衡博弈(N,v)，都存在一个热带多项式 $\psi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$，使得对所有 $S\in N$，都有 $\psi\left(\mathbf{1}^S\right)=v(S)$。如果$\psi$ 是一个热带多项式，且对所有 $i\in I$都有 $c^i=0$，那么存在一个完全平衡博弈可以扩展到该多项式。

证明。这是定理1.3.22和Riesz-Fréchet表示定理的推论。设 v 是一个完全平衡博弈的联盟函数。根据定理1.3.22，存在一个由可加联盟函数组成的有限集$\{a^i\mid i\in I\}$，使得 $v(S)=\min_{i\in I} a^i(S)$。然后，我们利用表示定理扩展每个 a^i，从而得到一个热带多项式。现在设 ψ 是一个所有系数 c^i 均为零的热带多项式。那么，它被定义为若干线性形式的最小值，这些线性形式与n维向量相关，而这些向量又与非本质博弈相关；这些非本质博弈构成了一个完全平衡博弈的表示。

□

博弈论文献中早已存在不同的博弈扩展概念。早在1972年，Owen [66] 就为任意博弈（$N,\ v$）定义了多线性扩展 。Algaba 等人 [2], 在合作博弈论的背景下研究了Choquet积分（也称为Lovász延拓，参见Grabisch [39]）。Choquet积分和Sugeno积分也被用作决策理论中容量的扩展 [39]。但这种将其扩展为热带多项式的做法，旨在与组合优化和离散几何建立更深层的联系。

总而言之，本章介绍了构成本学位论文基础的内容。首先，我们介绍了将要研究的主要对象：

预分配、稳定集、核心和平衡集合（极小平衡集合）。接下来，我们给出了研究支付向量的欧几里得空间和预分配的仿射子空间时所用的记号，并说明这些概念与投影研究密切相关；投影研究将构成本论文对合作博弈论的重要贡献之一。随后，我们介绍了凸博弈的核心的一些结果，以及它们与数学其他领域所研究对象之间的若干相似之处，尤其是与组合优化和离散几何中的对象之间的相似之处。关于凸博弈的核心的结果，是研究完全平衡博弈的核心的起点，特别是研究它们与冯·诺依曼—摩根斯坦稳定集相重合这一问题的起点，而这正是本学位论文的主要目标。

第2章

非空性的平衡性

本章有三个目标：描述极小平衡集合的生成过程，将 Bondareva-Shapley 定理实现为算法，并将此方法与著名的线性规划算法进行比较；最后，将这些算法的应用范围扩展到更大一类多面体。这些成果中有很大一部分来自 Laplace Mermoud 等人。 [56]。

我们用于生成极小平衡集合的算法基于 Peleg 的归纳方法 [68]。借助四种构造过程，我们可以从参与者集合N上的极小平衡集合，构造出 $N \cup \{p\}$上的极小平衡集合，其中 p是一个不属于 N的参与者。这些构造过程中的三种，是在集合族中找出特定的联盟集，我们可以在其中加入新参与者，并可能将单元素联盟$\{p\}$ 加入新集合。第四种过程则从 N上的成对集合生成 $N \cup \{p\}$ 上的极小平衡集合，并确保构造出所有集合。借助这一算法，我们得以给出截至 $n = 7$的极小平衡集合数量；对于 $n \leq 4$ ，这些数量与 Shapley 给出的数量一致 [82]。这些数量的列表可在在线整数数列百科全书中以编号 A355042 查阅 [92]。

在第二部分中，我们将展示我们的算法具有实际价值，因为它生成极小平衡集合的速度超过了以往的方法。事实上，生成这些集合等价于对特定多胞体进行顶点枚举。我们使用 Avis-Fukuda 算法，将其性能与我们的算法进行比较。利用极小平衡集合，我们将 Bondareva-Shapley 定理实现为计算机程序，并将其与经典线性规划算法进行比较。结果表明，我们对 Bondareva-Shapley 定理的实现速度比 Python 原生实现的修正单纯形法快七倍以上。

最后，我们定义一类新的多面体，称为基本多面体，并可在其上应用 Bondareva-Shapley 定理（定理 2.2.2）的推广。粗略地说，基本多面体是这样一种多面体：其闭包是某个经过恰当选择的联盟函数的核心。这类多面体在合作博弈论中十分常见，因为它们通常要么被定义为具有特定性质的解的集合（例如核心），要么其非空性等价于某个性质成立。对于后一种情况，精确性就是一个很好的例子：由核心元素组成、且这些元素向联盟支付 $v(S)$ 的基本多面体，其非空性等价于 S 的精确性。此外，所有与基本多面体非空性等价的性质都是繁荣性质。

2.1 算法

迄今为止，已知有两种生成极小平衡集合的方法。第一种方法由 Peleg [68], 提出，专门用于生成极小平衡集合，并按照参与者 n 的数量进行归纳。第二种方法是在式 (1.3.2) 所描述的特定多胞体上，应用任意一种凸多面体顶点枚举方法。一种常用的顶点枚举算法是 Avis 和 Fukuda [6], 提出的算法，我们将用它进行性能比较。

Peleg 方法从定义在集合N上的极小平衡集合出发，构造出所有定义在集合 $N' = N \cup \{p\}$ 上的极小平衡集合，其中 p 是一个此前不属于 N 的新参与者。据我们所知，Peleg 归纳法从未被实现为算法，或许是因为其描述方式相当抽象，与任何算法方面的考量相去甚远。因此，我们从算法的角度阐述 Peleg 的方法和结果，并在新的形式化框架中重新证明其结果，以确保清晰和完整。下文将主要结果分为四种情况，其中第四种情况相较于 Peleg 方法略作了推广。

设 $\mathcal{C} = \{S_1, \dots, S_k\}$ 是定义在 N 上的 k 个联盟构成的平衡集合，且 p 是一个不属于 N 的新参与者。对于任意正整数 k，记集合 $\{1, \dots, k\}$ 为 $[k]$。若 $\lambda^{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的平衡权重系统，且 $I \subseteq [k]$ 是一个指标子集，则记其和 $\sum_{i \in I} \lambda^{\mathcal{C}}_{S_i}$ 为 $\lambda^{\mathcal{C}}_I$。此外，记由 k 个列向量 $\mathbf{1}^{S_1}, \dots, \mathbf{1}^{S_k}$ 构成的关联 $(n \times k)$ 矩阵为 $A^{\mathcal{C}}$。记矩阵 $A^{\mathcal{C}}$ 的秩为 $\mathrm{rk}\left(A^{\mathcal{C}}\right)$，即由其各列张成的欧几里得空间的维数，这些列视为 n 维向量。

第一种情况。 设 $\mathcal{C}$ 是 N 上的一个极小平衡集。取 $I \subseteq [k]$ 使得$\lambda^{\mathcal{C}}_I = 1$。记 $\mathcal{C}'$ 为新集合，其中联盟 $\{S_i \mid i \in I\}$ 将新参与者 p 作为额外成员，而其他联盟 $\{S_j \mid j \in [k] \setminus I\}$保持不变。

引理 2.1.1。 $\mathcal{C}'$ 是 N' 上的一个极小平衡集。

证明。 由于 $\mathcal{C}$ 是一个极小平衡集，对于任意参与者 $i \in N$，等式 $\sum_{S \in \mathcal{C}', S \ni i} \lambda^{\mathcal{C}}_S = 1$ 均已成立。根据 I 的定义，我们还有$\sum_{S \in \mathcal{C}', S \ni p} \lambda^{\mathcal{C}}_S = \lambda^{\mathcal{C}}_I = 1$。因此，$\mathcal{C}$ 是平衡的。此外，$\mathcal{C}'$ 的极小性蕴含$\mathcal{C}$的极小性。

□

第二种情况。 设 $\mathcal{C}$ 是 N 上的一个极小平衡集。取 $I \subseteq [k]$ 使得$\lambda^{\mathcal{C}}_I < 1$。记 $\mathcal{C}'$ 为新集合，其中联盟 $\{S_i \mid i \in I\}$ 将新参与者 p 作为额外成员，而其他联盟 $\{S_j \mid j \in [k] \setminus I\}$保持不变，并加入联盟 $\{p\}$：

$$\mathcal{C}' = \{S_i \cup \{p\} \mid i \in I\} \cup \{S_j \mid j \in [k] \setminus I\} \cup \{\{p\}\}.$$

引理 2.1.2。 $\mathcal{C}'$ 是 N' 上的极小平衡集。

证明。 由于$\mathcal{C}$ 是一个极小平衡集，因此对于任意参与者 $i \in N$，等式 $\sum_{S \in \mathcal{C}', S \ni i} \lambda^{\mathcal{C}}_S = 1$ 均已成立。定义 $\lambda^{\mathcal{C}'}$，使得 $\lambda^{\mathcal{C}'}_S = \lambda^{\mathcal{C}}_S$ 对于 $S \in \mathcal{C}$ 成立，并且

$\lambda^{\mathcal{C}'}{}_{\{p\}} = 1 - \lambda_I^{\mathcal{C}}$。因此，

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{C}'\\ S\ni p}} \lambda_S^{\mathcal{C}'} = \lambda_{\{p\}}^{\mathcal{C}'} + \lambda_I^{\mathcal{C}} = 1 - \lambda_I^{\mathcal{C}} + \lambda_I^{\mathcal{C}} = 1.$$

那么$\mathcal{C}'$ 是平衡的。我们不能通过从$\mathcal{C}'$ 中删去$\{S_i \mid i \in I\}$ 的一个元素来得到平衡子集，因为$\mathcal{C}$ 是极小的；我们也不能删去联盟$\{p\}$，因为 $\lambda_I^{\mathcal{C}} < 1$。所以$\mathcal{C}'$ 是极小的。 □

第三种情况。设$\mathcal{C}$ 是 N上的一个极小平衡集合。取一个子集 $I \subseteq [k]$和一个指标 $\delta \in [k] \setminus I$，使得 $1 > \lambda_I^{\mathcal{C}} > 1 - \lambda_{S_\delta}^{\mathcal{C}}$。记$\mathcal{C}'$ 为新集合，其中联盟$\{S_i \mid i \in I\}$ 包含新参与者 p 作为额外成员，其他联盟$\{S_j \mid j \in [k]\setminus I\}$ 保持不变，并加入联盟$S_\delta \cup \{p\}$：

$$\mathcal{C}' = \{S_i \cup \{p\} \mid i \in I\} \cup \{S_j \mid j \in [k] \setminus I\} \cup \{S_\delta \cup \{p\}\}.$$

引理 2.1.3. *$\mathcal{C}'$ 是 N'上的一个极小平衡集合。*

证明。定义 $\lambda^{\mathcal{C}'}$ 如下：对于 $S \in \mathcal{C} \setminus \{S_\delta\}$</style}，令其为 $\lambda_S^{\mathcal{C}'} = \lambda_S^{\mathcal{C}}$，并且

$$\lambda_{S_\delta\cup\{p\}}^{\mathcal{C}'} = 1 - \lambda_I^{\mathcal{C}} \qquad \text{and} \qquad \lambda_{S_\delta}^{\mathcal{C}'} = \lambda_{S_\delta}^{\mathcal{C}} - \lambda_{S_\delta\cup\{p\}}^{\mathcal{C}'} > 0 \text{ (by assumption).}$$

设 $i \in N$ 是一个参与者。若 $i \notin S_\delta$，根据 $\mathcal{C}$ 的平衡性，$\sum_{S\in\mathcal{C}', S\ni i} \lambda_S^{\mathcal{C}'} = 1$。若 $i \in S_\delta$，则

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{C}'\\ S\ni i}} \lambda_S^{\mathcal{C}'} = \lambda_{S_\delta\cup\{p\}}^{\mathcal{C}'} + \lambda_{S_\delta}^{\mathcal{C}'} + \sum_{\substack{S\in\mathcal{C}\setminus\{S_\delta\}\\ S\ni i}} \lambda_S^{\mathcal{C}'} = \lambda_{S_\delta}^{\mathcal{C}} + \sum_{\substack{S\in\mathcal{C}\setminus\{S_\delta\}\\ S\ni i}} \lambda_S^{\mathcal{C}} = \sum_{\substack{S\in\mathcal{C}\\ S\ni i}} \lambda_S^{\mathcal{C}},$$

根据 $\mathcal{C}$ 的平衡性，该值等于 $\mathbf{1}$。对于参与者 p，

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{C}'\\ S\ni p}} \lambda_{S_\delta\cup\{p\}}^{\mathcal{C}'} = \lambda_{S_\delta\cup\{p\}}^{\mathcal{C}'} + \lambda_I^{\mathcal{C}'} = 1 - \lambda_I^{\mathcal{C}} + \lambda_I^{\mathcal{C}} = 1.$$

那么 $\mathcal{C}$ 是平衡的。由于无法丢弃联盟 $S \in \mathcal{C}$ 或 $S_\delta \cup \{p\}$ 中的任何一个来得到平衡子集，证明即告完成。 □

第四种情况。设 $\mathcal{C}^1$ 和$\mathcal{C}^2$ 是 N 上两个不同的极小平衡集合，且 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$ 满足 $|\mathcal{C}| = k$ 且 $\mathbf{rk}\left(A^{\mathcal{C}}\right) = k - 1$。定义 $\mathcal{C}$ 的两个平衡权重系统，对所有 $S \in \mathcal{C}$，定义如下：

$$\mu_S = \begin{cases} \lambda^{\mathcal{C}^1} \text{ if } S \in \mathcal{C}^1, \\ 0 \text{ otherwise,} \end{cases} \qquad \nu_S = \begin{cases} \lambda^{\mathcal{C}^2} \text{ if } S \in \mathcal{C}^2, \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

假设存在 $I \subseteq [k]$ 使得 $\mu_I = \sum_{i\in I} \mu_{S_i} \neq \nu_I = \sum_{i\in I} \nu_{S_i}$ 并且

$$t^I = \frac{1 - \mu_I}{\nu_I - \mu_I} \in (0, 1).$$

将$\mathcal{C}'$记为新的集合，其中联盟$\{S_i \mid i \in I\}$将新参与者 p作为额外成员，而其他联盟$\{S_j \mid j \in [k] \setminus I\}$保持不变。

引理 2.1.4. *$\mathcal{C}'$ 是 N'上的极小平衡集。*

证明。 对所有 $S \in \mathcal{C}'$，定义 $\lambda^{\mathcal{C}'}$为 $\lambda^{\mathcal{C}'} = (1-t^I)\mu_S + t^I\nu_S$。由于 $\lambda^{\mathcal{C}'}$是$\mathcal{C}$的两个平衡权重系统的凸组合，因此对所有参与者 $i \in N$，我们有$\sum_{S\in\mathcal{C}', S\ni i} \lambda_S^{\mathcal{C}'} = 1$。对于参与者 p,

$$\sum_{\substack{S\in\mathcal{C}'\\ S\ni p}} \lambda_S^{\mathcal{C}'} = \lambda_I^{\mathcal{C}'} = \left(1-t^I\right)\mu_I + t^I\nu_I = \mu_I + t^I\left(\nu_I - \mu_I\right) = \mu_I + 1 - \mu_I = 1.$$

那么$\mathcal{C}'$是一个平衡集合。现在，我们证明$\mathcal{C}'$作为平衡集合的极小性，也就是说，$\lambda^{\mathcal{C}'}$作为$\mathcal{C}'$的平衡权重系统的唯一性。$\mathcal{C}$的平衡权重系统记为 $\Lambda(\mathcal{C})$，是凸集 $\Lambda(\mathcal{C}) = \mathrm{conv}(\mu,\nu)$，于是 $\Lambda(\mathcal{C}') \subseteq \Lambda(\mathcal{C})$。更准确地说，为满足参与者 p 的平衡性，我们有$\Lambda(\mathcal{C}') \subseteq \{\lambda \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \lambda_I = 1\} \cap \mathrm{conv}(\mu,\nu)$。由于它是两个不平行的一维集合的交集，$\lambda(\mathcal{C}')$至多包含一个解，即 $\lambda^{\mathcal{C}'}$。 □

最终算法。 现在可以从集合 N 上的所有极小平衡集合构造另一个集合 $N\prime=N\cup\{p\}$上的所有极小平衡集合（参见算法 1：AddNewPlayer ）。

算法1 AddNewPlayer

要求： 在集合 N 上的极小平衡集 $\mathbb{B}(N)$
确保： 在集合 $N' = N \cup$ 上的极小平衡集 $\mathbb{B}(N')\{p\}$

过程 AddNewPlayer($\mathbb{B}_N, p$)
  对 $(\mathcal{C}^1,\mathcal{C}^2) \in \mathbb{B}_N \times \mathbb{B}_N$ **执行**
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}^1 \cup \mathcal{C}^2$ 和 $k \leftarrow |\mathcal{C}|$
    如果 $\mathrm{rk}(A^{\mathcal{C}}) = k-1$ **则**
      对于满足 $t^I \in]0,1[$ **的** $I \subseteq [k]$**，执行**
        对于 $i \in I$**执行** 将 $S_i \cup \{p\}$ 以权重 $(1-t^I)\mu_{S_i} - t^I\nu_{S_i}$添加到 $\mathcal{C}'$
        对于 $i \notin I$**执行** 将 S_i以权重 $(1-t^I)\mu_{S_i} - t^I\nu_{S_i}$添加到 $\mathcal{C}'$
        将 $\mathcal{C}'$ 添加到 $\mathbb{B}(N')$
  对于 $\mathcal{C} \in \mathbb{B}_N$ **执行**
    $k \leftarrow |\mathcal{C}|$
    对于满足 $I \subseteq [k]$ **的** $\lambda_I^{\mathcal{C}} \leq 1$**，执行**
      $C' \leftarrow \varnothing$
      对于 $i \in I$**，执行** 添加 $S_i \cup \{p\}$，权重为 $\lambda_{S_i}^{\mathcal{C}}$，添加到 $\mathcal{C}'$
      对于 $i \notin I$**，执行** 添加 S_i，权重为 $\lambda_{S_i}^{\mathcal{C}}$，添加到 $\mathcal{C}'$
      如果 $\lambda_I^{\mathcal{C}} < 1$**，则** 添加 $\{p\}$，权重为 $1-\lambda_I^{\mathcal{C}}$，添加到 $\mathcal{C}'$
      将 $\mathcal{C}'$ 添加到 $\mathbb{B}(N')$
      对于 $\delta \in [k] \setminus I$**，使得** $\lambda_{S_\delta} > 1-\lambda_I^{\mathcal{C}}$**执行**
        $C' \leftarrow \varnothing$
        对于 $i \in I \setminus \{\delta\}$ **执行** 将 $S_i \cup \{p\}$ 以权重 $\lambda_{S_i}^{\mathcal{C}}$ 添加到 $\mathcal{C}'$
        对于 $i \notin I \cup \{\delta\}$ **执行** 将 S_i 以权重 $\lambda_{S_i}^{\mathcal{C}}$ 添加到 $\mathcal{C}'$

将 $S_\delta \cup \{p\}$ 以权重 $1-\lambda_I^{\mathcal{C}}$ 加入$\mathcal{C}'$
将 S_δ 以权重 $\lambda_{S_\delta}^{\mathcal{C}}+\lambda_I^{\mathcal{C}}-1$ 加入$\mathcal{C}'$
将$\mathcal{C}$ 加入 $\mathbb{B}(N')$
返回 $\mathbb{B}(N')$

定理 2.1.5。 设 N 是一个有限集。算法*1* AddNewPlayer以 N 上的所有极小平衡集合作为输入，生成 $N'=N\cup\{p\}$ 上的所有极小平衡集合。

证明。 得益于前面的四个引理，该算法仅生成 N' 上的极小平衡集合。接下来需要证明，每个极小平衡集合都能由该算法生成。设$\mathcal{B}$ 是 N' 上的一个极小平衡集合。若从$\mathcal{B}$的每个联盟中移除参与者 p，所得集合族仍然平衡。将这个新集合族记为$\mathcal{B}_{-p}$。

如果 $\{p\}\notin\mathcal{B}$ 且 $\mathcal{B}_{-p}$ 是极小平衡集合，那么 $\mathcal{B}$ 由第一种情况生成（引理 2.1.1）

如果 $\{p\}\in\mathcal{B}$：由于 $\mathcal{B}$ 具有唯一的平衡权重系统，$\mathcal{B}_{-p}$ 只有一个平衡权重系统，因此它是极小平衡集合，而 $\mathcal{B}$ 由第二种情况生成（引理 2.1.2）。

如果 $\{p\}\notin\mathcal{B}$ 且 $\mathcal{B}_{-p}$ 中有两个相同的联盟：$\mathcal{B}$ 的极小性意味着，将这两个相同的联盟合并并将其权重相加后，$\mathcal{B}_{-p}$ 仍具有极小性。于是 $\mathcal{B}$ 由第三种情况生成（引理 2.1.3）。

假设 $\{p\}\notin\mathcal{B}$，$\mathcal{B}_{-p}$ 中没有相同的联盟，并且 $\mathcal{B}_{-p}$ 不是极小平衡集合。由于 $\mathcal{B}$ 是由 k 个联盟构成的极小平衡集合，$\mathbf{rk}(A^{\mathcal{B}})=k$，因此 $\mathbf{rk}(A^{\mathcal{B}_{-p}})=k-1$。因此，以下不等式系统的解集

$$A^{\mathcal{B}_{-p}}\lambda=\mathbf{1}^N,\quad \lambda\geq\vec{o}, \tag{2.1.1}$$

是一维的，且具有 $\lambda=\lambda_0+t\lambda_1$ 的形式，其中 λ_0 是$\mathcal{B}_{-p}$的平衡权重系统，t 是一个实数，λ_1 是齐次系统的非零解

$$A^{\mathcal{B}_{-p}}\lambda=\vec{o},\quad \lambda\geq\vec{o}.$$

(2.1.1) 的解集有界且为一维，因此它是一个非退化线段 $[\alpha,\beta]$。令 $U_\alpha=\{i\mid\alpha_i>0\}$ 和 $U_\beta=\{i\mid\beta_i>0\}$。显然，$U_\alpha$ 和 U_β是 $[k]$ 和 $U_\alpha\cup U_\beta=[k]$ 的子集。令 $\mathrm{B}^\alpha=\{S_i\in\mathrm{B}\mid i\in U_\alpha\}$ 和 $\mathrm{B}^\beta=\{S_i\in\mathrm{B}\mid i\in U_\beta\}$。$\alpha^*$，$\alpha$ 在 U_α 上的限制是 B^α的平衡权重系统；β^*，β 在 U_β上的限制是 B^β的平衡权重系统。由于 α和 β 是系统 (2.1.1) 的极端解，B^α 和 B^β 是极小平衡集合。因此，B 是 B^α 和 B^β 的并集，并由第四种情况生成（引理 2.1.4）。

□

通过递归使用 AddNewPlayer 过程，可以从{1，2}的极小平衡集合生成 N 上的所有极小平衡集合。

例 2.1.6. 设 $N=\{a,b,c,d\}$ 和 $N'=N\cup\{e\}$。设 $S_1=\{a,b\}$，$S_2=\{a,c\}$，$S_3=\{a,d\}$ 和 $S_4=\{b,c,d\}$。那么，$\mathsf{C}=\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$ 是一个极小平衡集合，其权重系统为 $\lambda=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$。

第一种情况。注意，集合 $I=\{1,4\}$ 满足方程 $\lambda_I=1$。因此，我们构造极小平衡集：$\mathcal{C}_1=\{\{a,b,e\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c,d,e\}\}$，其权重系统为 $\lambda^{\mathcal{C}_1}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$。

第二种情况。设 $I=\{4\}$。我们有 $\lambda_I=\frac{2}{3}<1$，因此，构造极小平衡集：$\mathcal{C}_2=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c,d,e\},\{e\}\}$，其权重系统为 $\lambda^{\mathcal{C}_2}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$。

第三种情况。设 $I=\{1,2\}$ 和 $\delta=4$。则 $\lambda_I=\frac{2}{3}$和 $1-\lambda_{S_\delta}=\frac{1}{3}$。因此，$1>\lambda_I>1-\lambda_{S_\delta}$，可构造出以下极小平衡集合：$\mathsf{C}_3=\{\{a,b,e\},\{a,c,e\},\{a,d\},\{b,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$，其权重系统为 $\lambda^{\mathcal{C}_3}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

第四种情况。对于最后一种情况，我们考虑另一个框架。设 $N=\{a,b\}$。$\mathsf{C}_1=\{\{a\},\{b\}\}$ 和 $\mathsf{C}_2=\{\{a,b\}\}$ 是 N 上的两个极小平衡集合。令 $\mathsf{C}:=\mathsf{C}_1\cup\mathsf{C}_2=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。设 $\mu=(1,1,0)$ 和 $\nu=(0,0,1)$。我们有

$$\operatorname{rk}\left(A^{\mathcal{C}}\right)=\operatorname{rk}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\right)=2=k-1.$$

最后，令 $I=\{1,2\}$。于是，$\mu_I=2$、$\nu_I=0$ 和 $t^I=\frac{1-\mu_I}{\nu_I-\mu_I}=\frac{1}{2}\in(0,1)$。可以构造如下集合族：$\mathcal{C}=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$，其权重系统为 $\lambda^{\mathcal{C}}=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。◊

注 2.1.7. 可以调整算法1，以计算博弈所定义于其上的每个集合系统 $\mathcal{F}\subseteq 2^N$ 的极小平衡集合。我们再次从 $N=\{a,b\}$ 和 $\mathbb{B}(N)=\{\{\{a,b\}\},\{\{a\},\{b\}\}\}$开始，并检查生成的每个极小平衡集合是否为 $\mathcal{F}$ 中某个联盟的子集。

结果与性能。我们用 Python[1]，实现了上述算法，并得到了表2.1所示的结果和性能。

n	2	3	4	5	6	7
k	2	6	42	1,292	200,214	132,422,036
t	0s	0s	0s	1s	244s	63 小时

表2.1：根据参与者数量 n 统计的极小平衡集合数量 k 及 CPU 时间 t。

[1]计算设备：Intel Xeon W-1250，中央处理器 3.30 GHz，32 GB 内存。

前四个数与 Shapley [82] 得到的数相同。在线整数序列百科 [92] 中已知的序列都没有相同的前几个数，因此我们将此序列添加到了百科全书中，可通过编号 A 355042[2] 查阅。此外，极小平衡集合[3] 的列表已保存至 $n = 7$。

计算极小平衡集合的第二种方法是寻找某个特定多胞体的顶点。令 F 为由下式定义的多胞体

$$F = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{N}} \;\middle|\; \sum_{S \in \mathcal{N}} \lambda_S \mathbf{1}^S = \mathbf{1}^N \right\}.$$

容易验证， F 的顶点与 N上的极小平衡集合一一对应。事实上，元素 $\lambda \in F$ 是顶点，当且仅当其支撑集是极小平衡集合，且相应的平衡权重为 [；参见例如文献 69，推论 3.1。9]。原因如下。考虑 F中的元素 λ。根据定义，$\mathcal{B} = \{S \in \mathcal{N} \mid \lambda_S > 0\}$ 是一个平衡集合，其平衡权重系统为 λ。如果λ 是一个顶点，它就不能表示为 F中其他向量的凸组合，因此平衡权重系统是唯一的，相应的平衡集合也是极小的。

因此，生成 N 上的所有极小平衡集合，归结为寻找 F的所有顶点。我们使用了著名的 Avis-Fukuda 算法 [6] 进行顶点枚举；该算法可通过 Python 的 pycddlib 软件包获得。对 $n = 6$ 运行该算法后，得到如下性能结果（同时列出了我们算法的性能），见表 2.2。比较结果表明，我们的算法优于 Avis-Fukuda 算法。

使用的算法	CPU时间
我们的算法	244 秒
Avis-Fukuda 算法	1764 秒

表 2.2：与 $n = 6$ 的 CPU时间比较。

既然我们已经知道极小平衡集合，就可以通过算法实现 Bondareva-Shapley 定理，适用于参与者不超过七人的博弈。对于这一实现及后续应用，一个重要的普遍说明是：极小平衡集合不取决于所考虑的博弈，而只取决于 n。因此，无须在每次应用时都生成这些集合，只需从某种存储设备中导出即可。在 $n = 7$ 之前，与基于线性规划和多面体的其他方法相比，这种做法具有计算优势，如表 2.3 所示。

设 (N, v) 是一个博弈。问题在于，该博弈的核心 $C(v)$ 是否非空。考虑以下线性规划：

$$\begin{cases} \min\ x(N) \\ \text{s.t. } x(S) \geq v(S), \quad \forall S \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

[2]参见 https://oeis.org/A355042。[3]可向作者索取。

显然，当且仅当该程序的最优值为 $x(N) = v(N)$ 时，$C(v)$ 才非空（参见定理 1.3.1 后的讨论）。因此，检验核心的非空性的一种简单方法是求解该程序并计算其最优值。

另一种方法是对前一个规划取对偶。正如我们在第 1.3 节中所讨论的，这是 Bondareva 和 Shapley 各自独立完成的。这种方法直接导出极小平衡集合和 Bondareva-Shapley 定理（定理 1.3.3），该定理指出，$C(v)$ 非空，当且仅当对于 N 上的任意极小平衡集合 $\mathcal{B}$，都有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v(S) \le v(N). \tag{2.1.2}$$

该结果表明，可以通过一个简单的算法检查每个极小平衡集合是否满足不等式 (2.1.2)，从而判断核心是否非空。一旦找到一个不满足 (2.1.2) 的极小平衡集合，测试便会终止。

为了比较这两种方法，我们固定了 $n = 6$，并按如下方式生成了 5,000 个不同的博弈：对于所有联盟 $S \in \mathcal{N}\setminus\{N\}$，价值 $v(S)$ 都在区间 $[0, 5]$, 内随机抽取，而 $v(N)$ 固定为 50。这样生成的每个博弈都有非空核心，因为对于任意生成的博弈，$\left(\frac{50}{6}, \ldots, \frac{50}{6}\right)$ 都是一个核心元素。

因此，在基于 Bondareva-Shapley 定理的算法中，必须检查所有不等式，才能判定核心是否非空（这是最不利的情况）。为求解线性规划，我们使用了已用 Python 编写的修正单纯形法。与 Avis-Fukuda 算法的比较类似，两种算法均以同一种语言实现，因此比较是公平的。结果见表 2.3。

所用算法	累计 CPU 时间
我们的算法	0.96 秒
修正单纯形法	24.85 秒

表 2.3：使用两种方法检查 5,000 个博弈平衡性所需 CPU 时间的比较，$n = 6$。

我们得出结论：基于极小平衡集合（前提是这些集合已知）的算法，比基于线性规划的方法快得多。

此外，极小平衡集合使我们能够检查核心是否为满维，即其仿射空间是否为 $\mathbb{X}(v)$。若联盟 S 对于 (N, v) 满足以下条件，则称其为有效：对于所有 $x \in C(v)$，都有 $x(S) = v(S)$。我们用 $\mathcal{E}(v)$ 表示对于 (N, v) 有效的联盟所构成的集合。等价地，$S \in \mathcal{E}(v)$ 当且仅当 $C(v) \subseteq \mathbb{A}_S(v)$。因此，如果 $\mathcal{E}(v)$ 不等于 $\{N\}$，则核心不是满维的。以下结果可用于求出某个博弈的所有有效联盟。

命题 2.1.8. 设 (N, v) 是一个平衡博弈。$E(v)$ 是满足以下条件的所有极小平衡集合 B 的并集

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v(S) = v(N). \tag{2.1.3}$$

证明. 设$\mathcal{B}$ 是满足 (2.1.3) 的极小平衡集合，并设 $x \in C(v)$。于是，

$$v(N) = x(N) = \sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} x(S) \geq \sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v(S) = v(N).$$

对于所有 $S \in \mathcal{B}$，我们有 $\lambda_S^{\mathcal{B}} > 0$，于是 $x(S) = v(S)$，且 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}(v)$。
对于反向包含关系，设 $S \in \mathcal{E}(v)$。由于 $\{N\}$ 是一个极小平衡集合，假设 $S \neq N$。接下来只需证明 S 包含于某个满足 (2.1.3) 的极小平衡集合中。反设不然。于是，根据 Bondareva-Shapley 定理，存在 $\varepsilon > 0$，使得与 (N, v) 唯一的差别在于 $v^\varepsilon(S) = v(S) + \varepsilon$ 的博弈 (N, v^ε) 仍然是平衡的。因此，对于 $x \in C(N, v^\varepsilon)$，可得 $x(S) > v(S)$ 且 $x \in C(v)$，由此便得到所需的矛盾。 □

注意，由于 $\mathcal{E}(v)$ 是若干极小平衡集合的并集，它本身也是一个平衡集合。要计算它，只需遍历所有极小平衡集合，并存储满足 (2.1.3) 的集合。因此，在检查博弈的平衡性时，可以同时采用这一过程，额外耗时可以忽略不计。表 2.3 证明，这种方法比其他任何线性规划方法都快得多，可用于判断核心是否为满维。

这项计算的结果还定义了核心的仿射包，即

$$\operatorname{aff}(C(v)) = \bigcap_{S\in\mathcal{E}(v)} \mathbb{A}_S(v).$$

然 而，仿射包的定义中可能存在一些冗余超平 n.

2.2 非空多面体与集合函数

Bondareva-Shapley 定理及其算法实现可用于比合作博弈论更广泛的应用领域。任何满足若干条件的多胞体——这些条件在数理经济学和组合学中都相当自然——都可以借助极小平衡集合进行研究。

定义 2.2.1。 基本多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$ 定义为以下形式的线性不等式组的解集

$$\begin{cases} \sum_{j\in N} x_j & = & b_N, & \\ \sum_{j\in N} a_{ij}x_j & \geq & b_i, & \text{for all } i \in \mathcal{U}_1, \\ \sum_{j\in N} a_{ij}x_j & > & b_i, & \text{for all } i \in \mathcal{U}_2, \\ \sum_{j\in N} a_{ij}x_j & \leq & b_i, & \text{for all } i \in \mathcal{D}_1, \\ \sum_{j\in N} a_{ij}x_j & < & b_i, & \text{for all } i \in \mathcal{D}_2. \end{cases}$$

其中，所有系数 a_{ij} 均属于 $\{0, 1\}$。

为方便起见，我们将以下指标集记为$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2, \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ 以及$\mathcal{I} = \mathcal{U} \cup \mathcal{D}$。由于每个系数 a_{ij} 不是 0 就是 1，我们可以通过映射 $i \mapsto S = \{j \in N \mid a_{ij} = 1\}$，将任意指标与联盟 $S \in \mathcal{N}$对应起来。每个指标所对应的联盟都是唯一的，因此我们仍使用相同的记号$\mathcal{U}$ 和$\mathcal{D}$ 来表示联盟集和指标集。

设 $S \in \mathcal{D}_1$。我们有 $\sum_{j\in S} x_j = x(S) \leq b_S$。将两边乘以$-1$并加上 b_N，得到 $x(N) - x(S) \geq b_N - b_S$，可改写为$x(N \setminus S) \geq b_N - b_S$。对$\mathcal{D}_2$中的指标也可以进行相同的运算。由此得到以下线性不等式组：

$$\begin{cases} x(N) = b_N, & \\ x(S) \geq b_S, & \forall S \in \mathcal{U}_1, \\ x(S) > b_S, & \forall S \in \mathcal{U}_2, \\ x(N \setminus S) \geq b'_{N\setminus S} \coloneqq b_N - b_S, & \forall S \in \mathcal{D}_1, \\ x(N \setminus S) > b'_{N\setminus S} \coloneqq b_N - b_S, & \forall S \in \mathcal{D}_2. \end{cases}$$

将$\mathcal{D}^c$ 记为$\mathcal{D}$中各元素的补集所构成的集合，即$\mathcal{D}^c = \{N \setminus S \mid S \in \mathcal{D}\}$。对于任意基本多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^N$，我们记$\mathcal{F}_P \coloneqq \{\emptyset, N\} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{D}^c$并

$$\beta_S = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset, \\ \max\{b_S, b'_S\} & \text{if } S \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}^c, \\ b_S & \text{if } S \in (\mathcal{U} \setminus \mathcal{D}^c) \cup \{N\}, \\ b'_S & \text{if } S \in \mathcal{D}^c \setminus \mathcal{U}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

由于$\mathcal{F}_P$中的每个 S 都对应一个 β_S ，我们可以在$\mathcal{F}_P$ 上定义一个集合函数：$v_P(S) = \beta_S$。数对 $(\mathcal{F}_P, v_P)$ 定义了一个与相关的博弈 P，其中 v_P 仅在集合系统$\mathcal{F}_P$所包含的联盟上有定义。我们可以将定义在集合系统上的博弈理解为：无法形成不属于$\mathcal{F}_P$的联盟。若想进一步了解集合系统上的博弈，请参阅 Grabisch 的综述 [38]。另请参阅不完整博弈的 [23]核心。

对于定义在集合系统上的博弈，Bondareva-Shapley 定理仍然成立；我们只需考虑给定集合系统中包含的极小平衡集合。如注 2.1.7 中所述，我们的算法也可以用来计算这些极小平衡集合。不过，如果我们已经知道 N 上的所有极小平衡集合，那么在遍历 N 上的所有极小平衡集合时，进行包含性检查会更加高效。根据注 1.3.5，定义在定义域$\mathcal{F}_P^c$ 上的集合函数 $\xi_P \equiv v_P^{\#}$ 的基多面体，与 $(\mathcal{F}_P, v_P)$ 的核心是同一个集合，也就是 $\mathbb{R}^N$ 中 P 的闭包。

现在我们可以陈述第2章的主要结果。记 $\mathcal{Q}_P$ 为由所有蕴含严格不等式的联盟组成的 $\mathcal{Q}_P = \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{D}_2^c$ 集合。

定理 2.2.2. 设 P 是一个基本多面体。当且仅当对于所有极小平衡集合 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_P$，我们有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} \beta_S \leq \beta_N \qquad and \qquad \sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} \beta_S \neq \beta_N \quad if\ \mathcal{B} \cap \mathcal{Q}_P \neq \emptyset.$$

等价地，P非空当且仅当$(\mathcal{F}_P, v_P)$ 是平衡的，且 $\mathcal{Q}_P \cap \mathcal{E}(\mathcal{F}_P, v_P) = \emptyset$.

证明。 根据 v_P 的构造，我们有

$$P = C(v_P) \setminus \bigcup_{S\in\mathcal{Q}_P} \mathbb{A}_S(v_P).$$

假设 $(\mathcal{F}_P, v_P)$ 是平衡的，且 $\mathcal{Q}_P \cap \mathcal{E}(\mathcal{F}_P, v_P) = \emptyset$。那么， $C(\mathcal{F}_P, v_P)$ 非空，并且对所有 $S \in \mathcal{Q}_P$，都存在一个核心元素 $x^S \in C(v_P)$，使得$x^S(S) > v_P(S)$。令 $x^{\mathcal{Q}_P}$ 表示这些点的凸中点，即

$$x^{\mathcal{Q}_P} = \frac{1}{|\mathcal{Q}_P|} \sum_{S \in \mathcal{Q}_P} x^S.$$

由于核心是凸的，我们有 $x^{\mathcal{Q}_P} \in C(v_P)$；又由于所有 x^S 都属于核心，因此对于所有 $S \in \mathcal{Q}_P$，都有 $x^{\mathcal{Q}_P}(S) > v_P(S)$。于是 $x^{\mathcal{Q}_P} \in P$。

现在假设 $P \neq \emptyset$。令 $x \in P$。我们有 $x \in C(v_P)$，因此，根据 Bondareva-Shapley 定理，$(\mathcal{F}_P, v_P)$ 是平衡的。此外，对于所有 $S \in \mathcal{Q}_P$，都有 $x(S) > v_P(S)$，因为 x 是一个核心元素，且不属于任何一个 $\mathbb{A}_S(v_P)$。因此，没有任何一个 $S \in \mathcal{Q}_P$能够属于 $\mathcal{E}(v_P)$，于是 $\mathcal{Q}_P \cap \mathcal{E}(v_P) = \emptyset$。

□

这一结果很重要，因为合作博弈论中的许多性质或解，都取决于是否存在一个或多个特定的预分配，它们构成一个基本多面体。最简单的例子是联盟理性预分配的基本多面体，即核心。下面我们来看第二个例子。

例 2.2.3. 设 x 是一个预分配， S 是一个联盟，并记$\mathcal{I}_S = \{\{i\} \mid i \in S\}$。那么，通过 S 支配 x 的预分配集合是基本多面体

$$\Delta_S(x) := \{y \in \mathbb{X}(v) \mid y(S) \leq v(S) \text{ and, for all } i \in S, y_i > x_i\}.$$

我们有 $|S| + 1$ 个不等式，其指标为 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_2 = \mathcal{I}_S$，并且 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 = \{S\}$，这里使用与定义 2.2.1 相同的记号。于是

$$\mathcal{F}_{\Delta_S(x)} = \{\emptyset, N, N \setminus S\} \cup \mathcal{I}_S.$$

包含在 $\mathcal{F}_{\Delta_S(x)}$ 中的唯一非平凡极小平衡集是划分$\mathcal{B} = \mathcal{I}_S \cup \{N \setminus S\}$。集合函数 $v_{\Delta_S(x)}$ 定义在$\mathcal{F}_{\Delta_S(x)}$ 上，其定义为

$$v_{\Delta_S(x)}(T) = \begin{cases} v(N) - v(S) & \text{if } T = N \setminus S, \\ x_i & \text{if } T \in \mathcal{I}_S, \\ 0 & \text{if } T = \emptyset. \end{cases}$$

定理 2.2.2 的条件变为 $\sum_{i \in S} v_{\Delta_S(x)}(\{i\}) + v_{\Delta_S(x)}(N \setminus S) < v(N)$，这等价于 $x(S) + v(N) - v(S) < v(N)$。由此可得， x 通过 S 被支配，当且仅当 $x(S) < v(S)$。◊

定义 2.2.4。 设 (N, v) 是一个博弈，并将 v 在 $2^N \setminus \{N\}$ 上的限制记为 v^0 。博弈上的性质 $\mathcal{P}$ 称为繁荣性质，如果对于每个 v^0，都存在一个实数 $\alpha_0 \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$，使得 (N, v) 具有性质 $\mathcal{P}$ 当且仅当 $v(N) \geq \alpha_0$。

命题 2.2.5。 博弈上的所有等价于某个闭基本多面体非空性的性质，都是繁荣性质。

证明。 记 P 为闭基本多面体，其非空性等价于我们研究的性质。记 $(\mathcal{F}_P, v_P)$ 为与 P 相关联的博弈，定义见方程 2.2.1。于是， P 非空，当且仅当 $v(N) \geq \max_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}(N)} \sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v(S)$，因为 P 是闭的，并且 $\alpha_0 = \max_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}(N)} \sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v(S)$。

□

在下一节中，我们将介绍联盟及联盟集合族的一些性质，这些性质等价于基本多面体的非空性。现在我们证明，基本多面体是广义置换多面体的推广。对于多胞体$P \subseteq \mathbb{R}^N$，记 A^P 和 b^P 为矩阵 $A^P \in \mathbb{R}^{k\times n}$ 和向量 $b^P \in \mathbb{R}^k$，使得$P = \{ x \in \mathbb{R}^N \mid A^P x \leq b^P\}$。

定义 2.2.6. 多胞体 $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ 是另一个多胞体的形变

$$P = \{x \in \mathbb{R}^N \mid A^P x \leq b^P\}$$

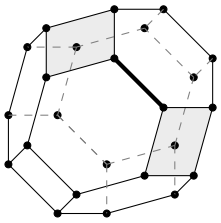
若存在一个向量 $b^Q \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$，使得以下两个条件成立:

- 多胞体 Q 可以写成 $Q = \{x \in \mathbb{R}^N \mid A^P x \leq b^Q\}$,
- 对于 P 的任意顶点 x，若 $\{F_i\}_{i\in I}$ 是包含 x 的 P 的面，则

$$\bigcap_{i\in I} \left\{ y \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \sum_{j\in N} a_{ij}^P y_j = b_i^Q \right\} \text{ is a vertex of } Q.$$

我们称 b^Q 为 Q 的形变向量。若 Q' 是一个仅满足第一个条件的多胞体，我们称其为多胞体 P 的扭曲，而 $b^{Q'}$ 称为 Q' 的扭曲向量。

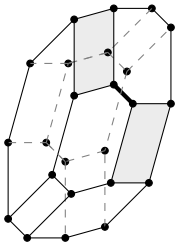
多胞体的扭曲 Q 是指沿其各面的法向量平移这些面的变换。此过程中，某些面可能会消失，而 Q 各面的法向量集合是P各面法向量集合的子集。请注意，多胞体的组合结构（由其面格描述）可能会完全不同。相反，形变是指保持初始多胞体的棱的方向不变的扭曲。



Core of (N, v) with $N = \{1, 2, 3, 4\}$, and $v(S) = \dfrac{|S|(|S|+1)}{2}$.

图 2.1：标准置换多面体。

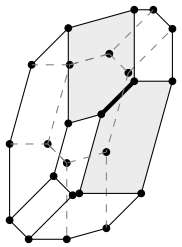
图 2.1 所定义的博弈的核心是标准置换多面体。



Core of (N, w) with $N = \{1, 2, 3, 4\}$, and $w(S) = \left(\sum_{i\in S} i\right)^2$.

图 2.2：广义置换多面体。

图 2.2 定义了一个凸博弈，并绘出了它的核心。值得注意的是，每个面都与标准置换多面体上对应的面平行，而且边的方向保持不变。因此，该博弈描述了标准置换多面体的一种形变，其核心是一个广义置换多面体。



（N，w'）的核心，其中

$N = \{1,2,3,4\}$，以及

$$w'(S) = \begin{cases} 30, & \text{如果 } S = \{2,3\}, \\ 20, & \text{若 } S = \{1,\ 3\}, \\ w(S), & \text{否则。} \end{cases}$$

图 2.3：一个一般基本多面体。

在图 2.3 中，该博弈仅描述了标准置换多胞体的一种扭曲，因为加粗的棱与标准置换多胞体中的棱方向不同。事实上，与灰色面相对应的联盟的价值增加了，使得这些面过度向内推移。我们看到，联盟函数不再是超模的：

$$w'(\{2,3\}) + w'(\{1,3\}) = 30 + 20 = 50 > 45 = 36 + 9 = w'(\{1,2,3\}) + w'(\{3\}).$$

因此，核心是一个一般基本多面体，而不是广义置换多面体。

多胞体	博弈
标准置换多面体	$v:\ S \mapsto |S|\ (|S|+1)\ /2$
广义置换多面体	凸博弈
非空基本多面体	（全）平衡博弈
空集	非平衡博弈

表 2.4：基本多面体的类型。

次模性定理与注 1.3.5 指出，广义置换多面体是由凸博弈诱导的标准置换多面体的形变。如果博弈不是凸博弈，而只是平衡的，那么生成的多胞体就是一般基本多面体。如果博弈甚至不平衡，那么该多胞体就不再非空。因此，基本多面体是广义置换多面体的一种推广，更适合研究合作博弈，我们将在下一小节中看到这一点。

2.3 合作博弈理论中的各种应用

本节将探讨合作博弈的若干具体方面，例如联盟或联盟集合族——它们承载着有关博弈的重要信息；还将探讨一种称为多数否决的支配传递子关系。这些联盟或联盟集合族所满足的性质称为精确性、可行性、活性，

严格关键精确性 和可扩展性。这些性质等价于特定预分配的存在；对于每种性质，这些预分配都定义了一个基本多面体。

在本节中，设 (N, v) 是一个平衡博弈。对于联盟 S，用 $(S, v_{|S})$ 表示在 S 上的子博弈，其中仅考虑 S 的子联盟；用 (N, v^S) 表示这样一个博弈：它与 (N, v) 的区别仅在于 $v^S(N\setminus S) = v(N)-v(S)$。该定义可推广到联盟集合 $\mathcal{Q}$，使得对于所有 $S \in \mathcal{Q}$，均有 $v^{\mathcal{Q}}(N\setminus S) = v(N) - v(S)$，否则 $v^{\mathcal{Q}}(T) = v(T)$。

精确性。</style}联盟 是精确的（对于 (N, v)），如果存在一个核心元素 $x \in C(v)$，使得 $x(S) = v(S)$。因此，当且仅当联盟 S 与核心相交时，它是精确的。以下结果使我们能够构建一种用于检验精确性的算法。

命题 2.3.1. 设(N, v) 是一个平衡博弈。当且仅当(N, v^S) 是平衡的，联盟 S 才是精确的。

证明。根据定义， S 是精确的，当且仅当存在一个核心元素 $x \in C(v)$，使得$x(S) = v(S)$。由于不等式 $x(S) \geq v(S)$ 已经包含在核心的定义中，再加入不等式 $x(S) \leq v(S)$，便定义了我们所寻找的预分配的基本多面体，记作 P。根据平衡性，我们有 $v(S) + v(N\setminus S) \leq v(N)$，因此 $v(N\setminus S) \leq v(N) - v(S) = v^S(N\setminus S)$。所以，在 P 的定义中，不等式 $x(N\setminus S) \geq v(N\setminus S)$ 是冗余的，而与 P 相关联的集合函数为 v^S。定理 2.2.2 完成了证明；在此情形下，其第二个条件是多余的，因为不存在严格不等式。

□

命题 2.3.1 的证明类似于 Lohmann、Borm 和 Herings [59], 以及 Csóka、Herings 和 Kóczy [27] 还有 Studený 和 Kratochvíl[95]在其论文中采用的方法。事实上，在所谓的最小半平衡集合族的定义中所使用的负权重，以及与之关联的例外联盟，对应于我们正在检验其精确性的联盟。将不等式 $x(S) \geq v(S)$ 翻转为 $x(S) \leq v(S)$，所得计算与采用负权重时相同。于是，使用最小半平衡集合族，或检验 (N, v^S) 对每个$S \in \mathcal{N}$ 的平衡性，完全等价。然而，本学位论文的主要思想是始终使用同一组极小平衡集合，这些集合实际上已经被计算出来，以处理任何情况。这就是我们更倾向于改变博弈而不是改变集合族的原因。

精确联盟表示在我们建模的情形中至关重要的联盟。首先，它们构成一个核心描述联盟集，即，

$$C(v) = \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) \geq v(S), \text{ for all } S \text{ exact}\}.$$

此外，这些联盟正是预分配可能被核心元素支配的联盟。事实上，如果一个联盟 S 是精确的，那么存在一个核心元素 $x \in C(v)$，使得 $x(S) = v(S)$。因此，该元素 x 可由联盟 S 负担，且属于核心。算法 2 检查给定博弈中的联盟是否精确。

算法 2 精确性检验子程序

要求： 一个联盟 S、一个平衡联盟函数 v、集合 $\mathbb{B}(N)$**确保：** 布尔值："S 是精确的"

1: **过程** IsExact(S, v, $\mathbb{B}(N)$)2:
定义 v^S3: **对于**$\mathcal{B} \in \mathbb{B}(N)$ **中的每个元素,**
执行4:**如果** $\sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T^{\mathcal{B}} v^S(T) > v(N)$**，则**
5: **返回 False**6: **返回**
True

此外，Gillies 基于精确性，找到了核心成为稳定集的一个必要条件。

命题 2.3.2 (Gillies [37])。
平衡博弈的核心稳定，当且仅当每个单元素联盟都是精确的。

对于不同类别的博弈，这个条件也可以是充分条件，例如：匹配博弈、最小着色博弈 [90]。

由于可以计算精确联盟的集合（参见命题 2.3.1 和算法 2），因此很容易检验 Gillies 的必要条件。这一结果的另一个有趣推论是，核心外部稳定的空间扩大了（参见定义 1.1.3 后的讨论）。

可行性。 设 (N, v) 是一个平衡博弈，且 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$ 是一个刻画核心的联盟集，即

$$C(v) = \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \in \mathcal{F}\}.$$

Let 考虑一个子集 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{F}$，并考虑 $\mathbb{X}(v)$ 的以下子集:

$$X_{\mathcal{Q}} = X_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}(v) \coloneqq \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) < v(S) \iff S \in \mathcal{Q}\}.$$

我们称 $X_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}(v)$ 为相对于 $\mathcal{F}$ 和 v、与 $\mathcal{Q}$ 相关联的区域。

De定义 2.3.3。 集合 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{F}$-可行的，当且仅当区域 $X_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}(v)$ 非空 .

这些区域构成 $\mathbb{X}(v)$ 的一个划分，其中 $X_{\emptyset}^{\mathcal{F}}(v) = C(v)$。若不会引起混淆，则简称该集合为可行，并将该区域简单记为 $X_{\mathcal{Q}}$。接下来，我们将介绍可行集族的一些性质。

定义 2.3.4。 若联盟集 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{N}$ 不包含平衡集合，则称其为不平衡。

引理 2.3.5 (Grabisch 和 Sudhölter [40])。
设 (N, v) 是一个平衡博弈，且 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{F}$。以下结论成立。

1. 若 $\mathcal{Q}$ 可行，则它是不平衡集合。
2. 对于满足 $S \cup S' = N$ 的 $S, S' \in \mathcal{Q}$，没有 $x \in X_{\mathcal{Q}}$ 会通过 S 或 S' 被支配 .

关于不平衡集合族的讨论推迟到第3章。仅包含满足上述第二个条件的联盟的可行集族 $\mathcal{Q}$ 称为阻塞可行族。要计算可行集族，需要一种能够转化为算法的刻画。回想一下，我们用$\mathcal{Q}^c = \{N \setminus S \mid S \in \mathcal{Q}\}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}} = (\mathcal{F} \setminus \mathcal{Q}) \cup \mathcal{Q}^c$表示。

引理 2.3.6. 集合族 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{F}$ 是可行的（相对于 $\mathcal{F}$），当且仅当$(\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}, v^{\mathcal{Q}})$ 是平衡的，且 $\mathcal{Q}^c \cap E(v^{\mathcal{Q}}) = \emptyset$。

证明。由于区域 $X_{\mathcal{Q}}$ 是一个基本多面体，因此证明很直接。设$S \in \mathcal{Q}$。对于任意元素 $x \in X_{\mathcal{Q}}$（如果存在），有 $x(S) < v(S)$。将两边乘以 -1 并加上 $v(N)$，得到严格不等式 $x(N \setminus S) > v(N) - v(S) = v^{\mathcal{Q}}(N \setminus S)$。于是，对于所有元素 $x \in X_{\mathcal{Q}}$（如果存在）以及所有 $S \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$，有$x(S) \geq v^{\mathcal{Q}}(S)$，其中对 $\mathcal{Q}^c$ 中的联盟，以上不等式为严格不等式。应用定理 2.2.2，即可完成证明。 □

算法 3 可行性检验算法

要求： 一个平衡联盟函数 v、一个集合系统 $\mathcal{F}$、一个集合 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{F}$，以及集合 $\mathbb{B}(N)$
确保： 布尔值："$\mathcal{Q}$ 可行"

过程 可行性检查$(\mathcal{Q}, \mathcal{F}, v, \mathbb{B}(N))$
  对于满足 $\mathcal{B} \in \mathbb{B}(N)$ **的情况，若** $\mathcal{B} \subseteq (\mathcal{F} \setminus \mathcal{Q}) \cup \mathcal{Q}^c$**，则执行 do**
    如果 $\mathcal{B} \cap \mathcal{Q}^c \neq \varnothing$ **且** $\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v^{\mathcal{Q}}(S) \geq v(N)$**，则**
      返回 False
    否则，如果 $\mathcal{B} \cap \mathcal{Q}^c = \varnothing$ **且** $\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v^{\mathcal{Q}}(S) > v(N)$**，则**
      返回 False
  返回 True

可扩展性。若对于任意 $x \in C(v_{|S})$，都存在 $y \in C(v)$ 使得 $x = y_S$，则称联盟 S 是可扩展的（相对于 (N, v)）；其中，y_S 是将 y 限制到 S 中坐标所得的结果。Kikuta 和 Shapley [51]定义了可扩展性，以研究核心的稳定性。事实上，他们证明了：如果一个博弈是可扩展的，即所有联盟都是可扩展的，那么其核心就是一个稳定集。这是因为，任何通过可扩展联盟被支配的预分配，也会被某个核心元素支配。

要检验一个联盟是否可扩展，根据核心的凸性，只需检查 $C(v_{|S})$ 的每个顶点是否都能扩展为一个核心元素。令 $z \in C(v_{|S})$。回顾 $\mathcal{I}_S = \{\{i\} \mid i \in S\}$，并用 $v_{S,z}$ 表示由下式定义的集合函数

$$v_{S,z}(T) = \begin{cases} z_i & \text{if } T \in \mathcal{I}_S, T = \{i\}, \\ \max\{v(N) - z(N \setminus T), v(T)\} & \text{if } T \in \{\{N \setminus \{i\}\} \mid i \in S\}, \\ v(T) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

命题 2.3.7. 设(N, v) 是一个平衡博弈，设 S 是一个联盟，并设 $z \in C(v_{|S})$。存在 $x \in C(v)$，使得 $x_S = z$ 当且仅当$(N, v_{S,z})$ 是平衡的。

证明。问题在于，多胞体（记作 P）由下式定义：

$$P = \{x \in C(v) \mid \text{for all } i \in S, x_i = z_i\},$$

非空。对于所有 $i \in S$，等式 $x_i = z_i$ 可以改写为两个不等式的集合：$x_i \geq z_i$ 和 $x_i \leq z_i$。在最后一个不等式中，我们可以将两边乘以–1，并加上 $v(N)$，从而得到 $x(N \setminus \{i\}) \geq v(N) - z_i$。此外，由于 $z \in C(v_{|S})$,

我们有 $z_i \geq v(\{i\})$，这意味着不等式 $x_i \geq v(\{i\})$ 在 P 的定义中是冗余的。因此，多面体 P 是满足以下条件的元素集合

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_i & \geq & z_i, & \text{for all } i \in S, \\ x(N \setminus \{i\}) & \geq & v(N) - z_i, & \text{for all } i \in S, \\ x(T) & \geq & v(T), & \text{for all } T \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{I}_S. \end{array}\right.$$

根据定理 2.2.2，P 非空，当且仅当（N，$v_{S,\ z}$）是平衡的。由于不涉及严格不等式，定理的第二个条件是多余的。 □

命题 2.3.7 基于平衡性检验，给出了将 C（$v_{|S}$）的一个顶点扩展为 C（v）的一个元素的充要条件。如果 C（$v_{|S}$）的每个极点都存在扩展，那么根据核心的凸性，C（$v_{|S}$）的任意元素都可以扩展。算法 4 检验 C（$v_{|S}$）的每个顶点是否都能扩展为 C（v）的一个元素。

算法 4 可扩展性检验算法

要求： 一个联盟 S，一个平衡联盟函数 v
确保： 布尔值："S 可扩展"

```
过程 IsExtendable(S, v, 𝔹(N))
    对于 ξ ∈ext(C(v|S)) 执行
        定义 v_{S, ξ}
        对于 B ∈ 𝔹(N) 执行
            如果 Σ_{T∈B} λ_T^B v_{S, ξ}(T) > v(N) 那么
                返回 False
    返回 True
```

Kikuta 和 Shapley [51]通过可扩展性给出了博弈具有稳定核心的一个充分条件。

定理 2.3.8 (Kikuta 和 Shapley [51])。可延拓博弈具有非空稳定核心。

可以使用算法 4 检验博弈的可扩展性，但这很耗时。不过，可以大幅弱化这一性质，具体如下。若每个 $\mathcal{F}$-可行联盟集都包含一个关于包含关系极小且可延拓的联盟，则称博弈 $(N,\ v)$ 是 $\mathcal{F}$-弱可扩展的 。

命题 2.3.9。一个 F-弱可扩展博弈具有非空稳定核心。

证明。设 $\mathcal{Q}$ 是一个$\mathcal{F}$-可行联盟集，且 S 是在 $\mathcal{Q}$ 中关于包含关系极小的可延拓联盟。取 $y \in X_{\mathcal{Q}}$。那么 $y(S) < v(S)$，并且对所有 $T \in \mathcal{F} \cap \left(2^S \setminus \{S\}\right)$，都有$y(T) \geq v(T)$。定义 $z_S \in \mathbb{R}^S$为

$$z_S = y_S + \frac{v(S) - y(S)}{|S|}\mathbf{1}^S.$$

注意，z_S 是 $\mathbb{R}^S$ 中 y_S 在 $\mathbb{X}$上的投影（$v_{|S}$）。显然，$z_S \in C\ (v_{|S})$，并且对于所有 $i \in S$，都有（z_S）$_i > y_i$。由于 S 可扩展，存在 $x \in C$（v）使得$x_S = z_S$。于是 x 支配$_S$ y。

□

活性。若存在 $x \in C(v_{|S})$ 使得对所有 $T \in 2^S \setminus \{\emptyset, S\}$，均有$x(T) > v(T)$，则联盟 S （对于 (N, v)）是关键的。最初，Gillies [37] 将关键联盟定义为能够实现两个给定预分配之间支配关系的极小联盟，并证明两个给定预分配之间的支配关系总能通过某个关键联盟实现。此外，将所有非关键联盟的价值 $v(S)$ 设为0，会生成一个与原博弈d-等价的新博弈。他还通过极小平衡集合刻画了关键联盟。

引理 2.3.10 (Gillies [37])。
联盟 S 是关键的，当且仅当对于 S 上任意一个极小平衡集合 $\mathcal{B} \neq \{S\}$ 及其平衡权重系统 $\lambda^{\mathcal{B}}$，都有

$$\sum_{T \in \mathcal{B}} \lambda_T^{\mathcal{B}} v(T) < v(S).$$

等价地，联盟 S 是关键的，当且仅当核心 $C(v_{|S})$ 在$\mathbb{R}^S$中是满维的；也就是说，当且仅当 (S, v) 是平衡的，且 $\mathcal{E}(v_{|S}) = \{S\}$。这一表述让我们想起了定理 2.2.2。

注 2.3.11。本质 联盟 [20, 46] 发挥着与关键联盟类似的作用，因为在研究支配时，非本质联盟是冗余的。我们也可以用引理 2.3.10 找出本质联盟，只需用划分替换极小平衡集合。此外，本质联盟是核心决定的，并且刻画核仁 [46]。

严格关键精确性。如果存在一个核心元素 $x \in C(v)$，使得 $x(S) = v(S)$，且对所有 $T \subsetneq S$，都有 $x(T) > v(T)$，那么联盟 S 对于 (N, v) 是严格至关精确 的。
Grabisch 和 Sudhölter [40], 定义的严格关键精确性蕴含活性和精确性。特别地，精确的单元素联盟是严格至关精确的。用 $\mathcal{VE}(v)$ 表示严格关键精确联盟的集合。

根据定义可知，联盟 S 是严格至关精确的，当且仅当某个基本多面体非空。

命题 2.3.12。联盟 S 是严格至关精确的，当且仅当它是精确的，并且

$$\mathcal{E}(v^S) \cap \left(2^S \setminus \{S\}\right) = \emptyset.$$

证明。联盟 S 是严格至关精确的，当且仅当以下多面体

$$P = \{x \in C(v) \mid x(S) = v(S) \text{ and, for all } T \subsetneq S, x(T) > v(T)\}.$$

非空。由于 P 是一个基本多面体，我们可以应用定理 2.2.2，得出 P 非空，当且仅当 (N, v^S) 是平衡的，且 $\mathcal{E}(v^S) \cap \left(2^S \setminus \{S\}\right) = \emptyset$。根据命题 2.3.1，我们可改写为： P 非空，当且仅当 S 是精确的，并且

$$\mathcal{E}(v^S) \cap \left(2^S \setminus \{S\}\right) = \emptyset.$$

□

算法 5 检查给定博弈中的一个联盟是否为严格至关精确。

算法 5 严格重要精确性检查算法

要求： 一个联盟 S、一个平衡联盟函数 v、集合 $\mathbb{B}(N)$
确保： 布尔值："S 是严格至关精确的"

```
过程 IsStrictlyVitalExact(S, v, 𝔹(N))
    对于 ℬ ∈ 𝔹(N) 执行
        如果 ∑_{T∈ℬ} λ_T^ℬ v^S(T) > v(N) 则
            返回 False
        否则，如果 ∑_{T∈ℬ} λ_T^ℬ v^S(T) = v(N) 则
            对于 T ∈ℬ 执行
                如果 T ∩ S^c = ∅ 则
                    返回 False
    返回 True
```

例 2.3.13 （Biswas、Parthasarathy、Potters 和 Voorneveld [16]）。
令 $N=\{a、\ b、\ c、\ d、\ e\}$ 且 $v(S)=\min\{x(S)\ y(S)\}$，其中

$$x=(2,1,0,0,0)\qquad y=(0,0,1,1,1).$$

该博弈是精确的，且严格关键精确联盟的集合为

$$\mathcal{VE}(v)=\{\{i\}\mid i\in N\}\cup\{\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\}\}.$$

令 $S=\{a,c\}$。该博弈是精确的，因为它是精确博弈。它也是关键的，因为 $v(S)=1>0=v(\{a\})+v(\{c\})$，且 $\{\{a\},\{c\}\}$ 是$\{a,c\}$ 上唯一一个与 $\{\{a,c\}\}$不同的极小平衡集。但 S 并非严格至关精确。$\Diamond$

以下结果基于严格关键精确联盟，给出了核心成为稳定集的必要条件，同时也提供了降低核心稳定性研究中算法复杂度的机会。

命题 2.3.14。 设(N,v) 是一个平衡博弈。核心是稳定集的必要条件是 $VE(v)$ 是核心描述的，即

$$C(v)=\{x\in\mathbb{X}(v)\mid x(S)\geq v(S),\ for\ all\ S\in\mathcal{VE}(v)\}.$$

证明。 假设核心是稳定的，并反设存在$y\in\mathbb{X}(v)\setminus C(v)$，使得对所有 $S\in\mathcal{VE}(v)$，都有 $y(S)\geq v(S)$。由于核心是稳定的，存在 $x\in C(v)$使得 $x\ \mathrm{dom}\ y$。选择一个关于包含关系极小的联盟 S，使得 $x\,\mathrm{dom}_S\,y$。于是， $v(S)=x(S)>y(S)$，并且对所有 $T\in 2^S\setminus\{\emptyset,S\}$，都有 $x(T)>v(T)$。因此， S 是严格至关精确的，这与假设矛盾。 □

这一重要结果表明，检验核心稳定性应从找出所有严格关键精确联盟（使用算法 5）开始，并检查这些联盟是否决定核心。如果是，则应研究 $\mathcal{F}=\mathcal{VE}(v)$，而不是 2^N，因为这能显著降低复杂度。

多数否决。 现在我们引入多数否决的定义。它是 Grabisch 和 Sudhölter [40], 定义的一种传递的支配子关系，其灵感来自一个定义

该定义由 Kulakovskaja [54]提出。鉴于命题2.3.14，设 (N, v) 是一个平衡博弈，其严格关键精确联盟的集合$\mathcal{VE}(v)$能够描述核心。因此，我们研究博弈 $(\mathcal{VE}(v)\ v)$。

定义 2.3.15。如果预分配 y 击败另一个预分配 x，则称其通过 $S \in \mathcal{VE}(v)$ 击败，记作 $y \succ_S x$，如果 $y\text{dom}_S\, x$，并且对于所有 $T \in \mathcal{VE}(v) \setminus 2^S$，都有 $y(T) \geq v(T)$。此外，如果存在联盟 $S \in \mathcal{VE}(v)$ 使得 $y \succ_S x$，则 y 击败 x $(y \succ x)$。

用 $M(v)$ 表示 $= \{x \in \mathbb{X}(v) \mid y \not\succ x, \forall y \in \mathbb{X}(v)\}$ 关于击败关系极大的预分配集合。

命题 2.3.16 (Kulakovskaja [54],Grabisch 和 Sudhölter [40])。设 (N, v) 是一个平衡博弈。那么 $C(v) = M(v)$ 当且仅当 $C(v)$ 是一个稳定集.

利用这两个二元关系对核心稳定性进行的这一新刻画非常有用。我们已经知道核心是内稳定的，并且$M(v)$是外部稳定的 [40]。因此，核心 $C(v)$是稳定集，当且仅当所有预分配 $x \in \mathbb{X}(v) \setminus C(v)$都被否决。根据多数否决的定义，通过给定联盟 S 对 x 进行多数否决的预分配集合是一个基本多面体，其非空性可利用定理 2.2.2 确定。以下结果已由 Grabisch 和 Sudhölter [40]以另一种方式证明。

Let x 是一个预分配，并令 $S \in \mathcal{VE}(v)$。令 v_x^S 为定义在

$$\mathcal{F}_S \coloneqq \left(\mathcal{VE}(v) \setminus 2^S\right) \cup \{N \setminus S\} \cup \mathcal{I}_S$$
$$\text{by} \quad v_x^S(T) = \begin{cases} x_i & \text{if } T \in \mathcal{I}_S,\ T = \{i\}, \\ v^S(T) & \text{if } T \in \mathcal{F}_S \setminus \mathcal{I}_S, \end{cases}$$

其中$\mathcal{I}_S$ 表示集合$\mathcal{I}_S = \{\{i\} \mid i \in S\}$。

命题2.3.17。设 x 是一个预分配，且 $S \in \mathcal{F}_v$。那么，若且唯若(F_S, v_x^S) 是平衡的且 $I_S \cap E(F_S, v_x^S) = \emptyset$，则 x 可通过 S被某个预分配否决。

证明。令 $O_S(x)$ 表示通过 S 击败 x 的预分配多面体。像通常那样，将不等式 $z(S) \leq v(S)$ 转换为 $z(N \setminus S) \geq v(N) - v(S)$，则预分配 $z \in O_S(x)$ 满足

$$\begin{cases} z_i > x_i, & \text{for all } i \in S, \\ z(T) \geq v^S(T), & \text{for all } T \in \mathcal{F}_v \setminus 2^S \cup \{N \setminus S\}. \end{cases}$$

我们看到，$O_S(x)$ 是一个基本多面体。根据定理 2.2.2，$O_S(x)$ 非空，当且仅当 $(\mathcal{F}_S, v_x^S)$ 是平衡的，并且 $\mathcal{I}_S \cap \mathcal{E}(\mathcal{F}_S, v_x^S) = \emptyset$。 □

总而言之，本章介绍了一种算法，用于计算任意有限参与者集以及任意集合系统上的极小平衡集合。可按需提供该算法的 Python 实现，以及参与者人数不超过 7 人时的极小平衡集合。接下来，我们介绍一类新的多面体——基本多面体，并刻画其非空性。正如我们的诸多示例所表明的，这些多面体在数理经济学中无处不在，尤其是在合作博弈论中。

第3章

博弈的组合结构

本章讨论组合学与合作博弈论之间一些鲜少被探讨的联系。首先，我们研究平衡集合与某些正则或均匀超图之间的相似性。其次，我们探讨一种称为共振排列的超平面排列如何成为研究合作博弈的有力工具。

超图是图的一种推广，其中的边可以包含两个以上的节点。在我们探讨平衡集合与超图之间的第一个联系时，会将边解释为联盟，并进而说明，平衡集合是一种正则超图，也就是说，每个节点都包含在相同数量的边中的超图。之后，我们反转边与节点之间的关联关系，研究边的基数都相同的超图。这类超图称为均匀超图，并与正则超图存在对偶关系。因此，我们将说明，如何利用相对容易研究和生成的均匀超图，来生成（极小）平衡集合。为了研究均匀超图，我们采用 Joyal [47], 发展的组合物种理论。这是一种抽象且系统的方法，可用于推导离散结构的生成函数。我们构造大小为 p 的 k-均匀超图的物种，作为构造（极小）平衡集合物种的中间步骤。

在第二部分中，我们研究超平面排列如何有助于研究合作博弈。超平面排列是特定向量空间中的一组超平面。我们感兴趣的是侧支付向量空间的共振排列，其中每个超平面都是使某个特定联盟的支付保持不变的侧支付集合。我们注意到，超平面并集之补集的连通分支（称为该排列的区域）与极大不平衡集合之间存在双射；如果一个集合不包含任何平衡集合，就称其为不平衡集合。随后，我们将说明，联盟函数可以看作共振排列的一种扭曲。这一扭曲排列的组合学性质与可行区域集合及核心的面结构密切相关，本文也将介绍一些关于这些联系的结果。

3.1 平衡集合的组合学

平衡集合在其他科学领域中也有不同的名称，尤其是在组合学和数学物理中。我们从组合学开始。

3.1.1 超图理论

本小节的大部分符号和定义都源自 Berge [11]。（无向）超图$\mathcal{H}$ 是一个有序对$\mathcal{H} = (N, E)$，其中 N 是由称为节点的元素组成的集合，而 E 是 N的非空子集构成的一个张成集合族，称为超边，或简称边；也就是说，所有边的并集与节点集合相同。

我们称 $|N|$为$\mathcal{H}$的阶，称 $|E|$为$\mathcal{H}$的大小。节点 $x \in N$的度记作 $\delta(x)$，即包含 x 的边数。如果每个节点的度都相同，均为 d，则称该超图为 d-正则。如果每条边的基数都是 k，则称该超图为 k-均匀。对于超图$\mathcal{H}$，我们用 $A^{\mathcal{H}}$ 表示其关联矩阵，定义如下：

$$A_{ij}^{\mathcal{H}} = \begin{cases} 1, & \text{if the } i\text{-th node lies in the } j\text{-th edge,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

超图$\mathcal{H}'$ 的关联矩阵 $A^{\mathcal{H}'}$ 是$A^{\mathcal{H}}$ 的转置矩阵，则该超图是$\mathcal{H}$的对偶超图。对每行和每列的非零元素进行计数可知， k-均匀超图的对偶超图是 k-正则超图，而 d-正则超图的对偶超图是 d-均匀超图。

下文中，我们用希腊字母表示超图的节点，用罗马字母表示平衡集合中的参与者。由于超图中同一条边可能出现多次，边集合是多重集，而不是通常意义上的集合。不过，我们仍像表示集合那样用花括号表示多重集，如下面的例子所示。

例 3.1.1. 考虑两个对偶超图

$$\mathcal{H} = \Big(\{\alpha,\beta,\gamma\}, \Big\{\{\beta\},\{\alpha,\gamma\}\Big\}\Big) \qquad \mathcal{H}' = \Big(\{\alpha,\beta\}, \Big\{\{\beta\},\{\alpha\},\{\beta\}\Big\}\Big).$$

邻接矩阵为

$$A^{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{\mathcal{H}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们看到，$\mathcal{H}$ 是简单的，即没有两条边相同，而且是正则的；而$\mathcal{H}'$ 是均匀的，但不简单。此外，它们定义在不同的节点集上。◊

Shapley [82] 将极小平衡集深度 定义为：与$\mathcal{B}$相关联的平衡权重系统中各元素的分母的最小公倍数，记作 depth($\mathcal{B}$)。这里，我们将他的定义扩展到平衡集合对$(\mathcal{B}, \lambda)$以及与之相容的一个平衡权重系统，将其深度定义为 λ中各元素分母的最小公倍数。

例 3.1.2. 考虑定义在 $N = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 上的以下平衡集合。

$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{e,f\}$	$\{e,g\}$	$\{f,g\}$
1/3	1/3	1/3	2/3	1/2	1/2	1/2

这些权重的分母为 2 和 3，因此其深度为 6。现在考虑定义在 $N=\{a,b,c\}$ 上的平衡集合$\mathcal{B}=\{abc,ab,c\}$。两种可能的平衡权重系统为

$$\lambda=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\qquad\text{and}\qquad\lambda'=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

$(\mathcal{B},\lambda)$ 的深度为 2，$(\mathcal{B},\lambda')$ 的深度为 3。 ◊

命题 3.1.3。 d正则、阶为 $|N|=n$ 的超图集合，与所有满足以下条件的配对 (B,λ) 构成的集合之间存在双射：B 是深度为 d 、包含 n 个参与者的平衡集合，且λ B 配有一个平衡权重系统。

证明。 设 $\mathcal{H}=(N,E)$ 是一个 d正则、阶为 n 的超图。令 $\mathcal{B}$ 为 E 的边集合，其中每个元素只出现一次。定义函数 λ，将 $\mathcal{B}$ 的每个元素 S 映射为 S 在 E 中出现的次数除以 d。于是，$\mathcal{B}$构成一个平衡集合，其平衡权重系统由 λ 定义。

现在，设 $\mathcal{B}$ 是一个配有平衡权重系统 $\{\lambda_S\}_{S\in\mathcal{B}}$ 的平衡集合，深度为 d。令 E 为如下构造的多重集：将 $\mathcal{B}$中的每个联盟 S 纳入 $d\lambda_S$ 次。根据深度的定义， $d\lambda_S$ 始终是整数。令 $\mathcal{H}=(N,E)$。对于所有 $x\in N$，包含 x 的边出现次数之和为

$$\sum_{\substack{S\in E\\ S\ni x}} d\lambda_S = d\sum_{\substack{S\in\mathcal{B}\\ S\ni x}}\lambda_S = d.$$

因此，$\mathcal{H}$ 是一个 d-正则超图。 □

设$\mathcal{H}$ 是一个阶为 n 的均匀超图。对于与之关联的平衡集合，一条棱表示某个参与者所属的联盟集合。由于每个参与者所属的联盟数量相同（按重数计），因此该集合是平衡的。

平衡集合	超图	
	正则	均匀
深度（d）	d-正则性	k-均匀性
参与者	节点	边
~~$d\cdot\sum_{S\in\mathcal{B}}\lambda_S$~~	size	阶

表 3.1：超图与平衡集合之间的等价关系。

例 3.1.4。 设 $\mathcal{H}$ 是定义在 $N=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon\}$ 上的 2-一致超图，其边集合为：$\{\{\alpha,\beta\},\ \{\beta,\ \gamma\},\{\alpha,\ \gamma\},\{\delta,\ \varepsilon\}\}$。由于 $\mathcal{H}$ 是均匀超图，我们知道其对偶是一个平衡集合，下面将构造该集合。$\mathcal{H}$ 的大小为 4，阶为 5。因此，该平衡集合包含 4 个参与者，并且联盟的整数重数之和为 5。由于 $\mathcal{H}$ 是 2-一致超图，平衡集合的深度

为 2。要确定这些联盟及其整数权重，即将其权重乘以集合的深度，我们必须知道$\mathcal{H}$的对偶，即

$$\mathcal{H}' = \left(\{\alpha', \beta', \gamma', \delta'\}, \left\{\{\alpha', \gamma'\}, \{\alpha', \beta'\}, \{\beta', \gamma'\}, \{\delta'\}, \{\delta'\}\right\}\right).$$

因此，与 $\mathcal{H}$ 相关联的二元组 $(\mathcal{B}\ \lambda)$ 是

$$\mathcal{B} = \left\{\{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\right\}, \qquad \lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2} = 1\right).$$

◊

编写一个生成给定大小的均匀超图的程序极其简单：只需取任意具有相同基数的集合，并重新标记其元素，使之符合记号 $N = \{1, \ldots, n\}$。这或许能为更高效地生成极小平衡集合提供思路。这种方法的主要缺点是难以预先判断集合是否具有极小性，因此该方法表面上的简便性也就荡然无存。

定义3.1.5. 设 $\mathcal{H} = (N, E)$ 是一个超图，设 $A \subseteq N$ 和 $X \subseteq E$。记作 $\mathcal{H}_A$ 且定义如下的超图为

$$\mathcal{H}_A = \left(A, \left\{S \cap A \;\middle|\; S \in E \text{ and } S \cap A \neq \emptyset\right\}\right).$$

是由 A 诱导的 $\mathcal{H}$ 的子超图 。超图 $\mathcal{H}^X = (N, X)$ 是由 X 生成的 $\mathcal{H}$ 的部分超图 。

注意，超图的子超图对应于其对偶的部分超图。设 $\mathcal{H} = (N, E)$ 是一个均匀超图。若存在 $A \subsetneq N$，使得 $\mathcal{H}_A$ 是均匀的，则$\mathcal{H}^{N\setminus A}$ 也是一个均匀超图。若一个均匀超图不存在均匀的真子超图，则称其为极小 的；若一个正则超图不存在正则的真部分超图，则称其为极小 的。

定理3.1.6。 与极小均匀超图相关联的平衡集合是极小的。

证明。 设$\mathcal{H} = (N, E)$是一个大小为 n的极小 k-均匀超图。首先，我们证明$\mathcal{H}'$（即$\mathcal{H}$的对偶超图）是阶为 n的极小 k-正则超图。考虑$\mathcal{H}$的关联矩阵。我们有，每一列的元素之和均为 k。根据极小性，不可能删除 $A^{\mathcal{H}}$ 的一行，同时仍使所有列的元素之和保持相同。于是，不可能从其转置矩阵中删除一列，使其 n 行的元素之和保持不变，因此其对偶超图是阶为 n的极小 k-正则超图。我们已经证明，对于每个正则超图$\mathcal{H}'$，都有一个平衡集合$\mathcal{B}$ 以及一个平衡权重系统；而$\mathcal{H}'$ 作为正则超图的极小性意味着$\mathcal{B}$ 作为平衡集合也是极小的。

□

例3.1.7。 考虑定义在 $N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \iota\}$ 上的超图$\mathcal{H}$，其边集合如下：

$$E = \{\{\alpha, \beta, \gamma, \eta, \iota\}, \{\alpha, \delta, \varepsilon, \zeta, \iota\}, \{\beta, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}, \{\gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \iota\}\}.$$

这是一个大小为 4、阶为 8 的 5-均匀超图。与之关联的平衡集合定义在$\{a,b,c,d\}$上，按重数计算共有 8 个联盟，深度为 5：

$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,b,d\}$
$1/5$	$1/5$	$1/5$	$2/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

令 $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$。那么，子超图 $\mathcal{H}_A$ 仍然是均匀的。我们有 e

$$\mathcal{H}_A=\Big(A,\Big\{\{\alpha,\beta,\gamma\},\{\alpha,\delta,\varepsilon\},\{\beta,\delta,\varepsilon\},\{\gamma,\delta,\varepsilon\}\Big\}\Big),$$
$$\text{and}\quad \mathcal{H}_{N\setminus A}=\Big(N\setminus A,\Big\{\{\eta,\iota\},\{\zeta,\iota\},\{\zeta,\eta\},\{\eta,\iota\}\Big\}\Big).$$

这两个超图都没有均匀的子超图，因此它们是极小均匀超图。它们对应的极小平衡集合为

$$\Big\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c,d\}\Big\}\quad\text{and}\quad\Big\{\{b,c\},\{a,c,d\},\{a,b,d\}\Big\}.$$

注意，这两个极小平衡集合的并就是与初始超图 $\mathcal{H}$ 相关联的平衡集合 $\mathcal{B}$。$\Diamond$

平衡集合的平衡权重系统也可以看作一种匹配。与图论中的情形一样，匹配 是由不相交边构成、覆盖 N 的集合。匹配也存在分数形式的类比。

定义 3.1.8。超图$\mathcal{H}=(N,E)$上的分数匹配 是一个函数$\mu:E\to[0,1]$，满足对每个节点 $x\in N$，都有

$$\sum_{\substack{S\in E\\ S\ni x}}\mu(S)\le 1.$$

如果对每个节点 $x\in N$ 都有，则称分数匹配是完美的

$$\sum_{\substack{S\in E\\ S\ni x}}\mu(S)=1.$$

容易看出，在 N 上存在完美分数匹配 μ 的简单超图会在 N 上诱导出一个平衡集合，即$\{S\in E\mid \mu(S)>0\}$。反之亦然。

3.1.2 均匀超图的计数

现在我们来研究均匀超图。为此，我们使用结构物种以及 Joyal [47] 所发展的形式幂级数上的相应运算。以下大多数定义出自 Bergeron等人 [12]。

通俗地说，结构物种是一条规则 F，它将每个有限集 U 与一个有限集 $\mathrm{F}[U]$ 关联起来，而后者“与” U中元素的性质无关。$\mathrm{F}[U]$中的成员称为 F-结构，可解释为由规则 F 给出的、定义在集合 U 上的组合结构。规则与 U 中元素的性质无关这一事实，可用重标记不变性来表达。更准确地说，对于

任意双射 $\sigma\colon U \to V$，规则 F 都关联一个双射 $\mathrm{F}[\sigma]\colon \mathrm{F}[U] \to \mathrm{F}[V]$，它将定义在 U 上的每个 F-结构变换为定义在 V 上的一个（同构的）F-结构。

例 3.1.9. 设 Gr 是一条规则，它将每个有限集 U 关联到以 U 为节点集的图的集合。对于任何满足存在双射 $\sigma\colon U \to V$ 的集合 V，将定义在 U 上的图的节点用 σ 重新标记后得到的结构，是定义在 V 上的图。图所承载的重要组合信息是节点的数量和边的集合，而非节点本身。对于超图、树、平衡集合等，也同样如此。$\Diamond$

现在给出结构组合物种的形式定义。

定义 3.1.10 (Joyal [47])。
一个（结构）物种是一个规则 F，它

- 为每个有限集 U赋予一个有限集 $\mathrm{F}[U]$,
- 为每个双射 $\sigma\colon U \to V$ 定义一个函数 $\mathrm{F}[\sigma]\colon \mathrm{F}[U] \to \mathrm{F}[V]$。

函数 $\mathrm{F}[\sigma]$ 还应满足以下函子性质：

- 对于所有双射 $\sigma\colon U \to V$ 和 $\tau\colon V \to W$，都有 $\mathrm{F}[\tau\circ\sigma] = \mathrm{F}[\tau]\circ\mathrm{F}[\sigma]$,
- 对于恒等映射 $\mathrm{Id}_U\colon U \to U$，有 $\mathrm{F}[\mathrm{Id}_U] = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}[U]}$。

元素 $s \in \mathrm{F}[U]$ 称为 U 上的*F-结构*。函数 $\mathrm{F}[\sigma]$ 称为沿着 σ传递F-结构的映射。

定义规则 Sh：它将集合 U 映射为 U 上的极小平衡集合，并将双射 $\sigma\colon U \to V$ 映射为函数 $\mathrm{Sh}[\sigma]\colon \mathrm{Sh}[U] \to \mathrm{Sh}[V]$。该函数对极小平衡集合 $\mathcal{B} \in \mathrm{Sh}[U]$ 的作用如下：

$$\mathrm{Sh}[\sigma](\mathcal{B}) = \Big\{\{\sigma(u) \mid u \in S\} \mid S \in \mathcal{B}\Big\}.$$

定理 3.1.11。 规则 Sh定义了一个结构物种。

证明。首先，对于任意有限集 U，Sh-结构的数量有限，因为它不超过 2^{2^n}。设 σ 是一个双射 $\sigma\colon U \to V$，且设 $\mathrm{B} \in \mathrm{Sh}[U]$ 是 U上的一个极小平衡集合。设 u是 U 的一个元素，并将集合 $\mathrm{B}_u = \{S \in \mathrm{B} \mid u \in S\}$记为 B_u。于是，我们有 $\sum_{S\in\mathrm{B}_u} \lambda_S = 1$，这意味着 $\sum_{S\in\mathrm{Sh}[\sigma](\mathrm{B}_u)} \lambda_S = 1$，其中 $v = \sigma(u)$。于是 $\mathrm{Sh}[\sigma](\mathrm{B}) \in \mathrm{Sh}[V]$。现在，我们证明函数 Sh[$\sigma$]的函子性。设 $\sigma\colon U \to V$且 $\tau\colon V \to W$，并设 $\mathrm{B} \in \mathrm{Sh}[U]$。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}[\sigma\circ\tau](\mathcal{B}) &= \{\{\tau(\sigma(u)) \mid u \in S\} \mid S \in \mathcal{B}\},\\
&= \{\{\tau(v) \mid v = \sigma(u),\ u \in S\} \mid S \in \mathcal{B}\},\\
&= \{\{\tau(v) \mid v \in T\} \mid T \in \mathrm{Sh}[\sigma](\mathcal{B})\},\\
&= (\mathrm{Sh}[\tau]\circ\mathrm{Sh}[\sigma])\,(\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

最后，设 Id_U 是 U上的恒等映射。那么，对于所有 $\mathcal{B} \in \mathrm{Sh}[U]$,

$$\mathrm{Sh}[\mathrm{Id}_U](\mathcal{B}) = \{\{\mathrm{Id}_U(u) \mid u \in S\} \mid S \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B},$$

并且 $\mathrm{Sh}[\mathrm{Id}_U] = \mathrm{Id}^{\mathrm{Sh}[U]}$。 □

每个结构物种 F 都关联着一个与 F-结构计数相关的形式幂级数。它们由 F 的生成级数 计数，记作 F(*x*)。对于所有基数为 n 的集合 U，其上的 F-结构数量仅取决于 n。这一性质源于 F 的函子性，因为所有 $\mathrm{F}[\sigma]$ 都是双射。因此，$\mathrm{F}[U]|$ 的基数 | 完全由数列 $\{f_n = |\mathrm{F}[\{1, \ldots\ldots, n\}]| \mid n \in \mathbb{N}\}$ 确定。

定义 3.1.12。 结构物种 F 的生成级数 是形式幂级数

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}.$$

对于形式级数，我们不必关注收敛规则，因为它们只是表示整数序列的一种便捷记法。例如，序列 (1，2，4，8，.....) 记作 e^{2x}。

例 3.1.13。 令 $\varsigma^{[p]}$ 为 p-多重集物种，它将每个有限集U映射为其上基数为 p的多重集所构成的集合。根据多重集系数的定义，我们有

$$\varsigma^{[p]}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^{\overline{p}}}{p!}\frac{x^n}{n!}, \qquad \text{with} \quad n^{\overline{p}} = \prod_{i=0}^{p-1}(n+i) = n(n+1)\ldots(n+p-1).$$

◊

借助物种与形式幂级数之间的对应关系，我们可以对物种进行组合构造，并将其转化为幂级数，反之亦然。令 $\wp^{[2]}$ 表示二元子集物种，它将每个有限集 U 映射为 U中含有 2 个元素的子集所构成的集合；令 $\wp$ 表示子集物种，它将每个有限集 U 映射为 U的子集族。然后，我们可以按如下方式复合这两个物种：首先将 $\wp^{[2]}$ 作用于 U，得到 U中所有基数为 2 的子集所构成的集合；第二步，再将 $\wp$作用于该集合，从 U的二元子集集合中取一个子集。这种操作称为结构物种的函子复合，它可以由二元子集物种和子集物种构造出简单图物种 Gr。

例 3.1.14. 二元子集物种 $\wp^{[2]}$ 和子集物种 $\wp$ 的生成级数分别为,

$$\wp^{[2]}(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{2}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{and} \qquad \wp(x) = \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!} = e^{2x},$$

按照我们所进行的组合构造，将前两个生成级数复合，即可得到简单图物种的生成级数:

$$\mathrm{Gr}(x) = \sum_{n\geq 0} 2^{\binom{n}{2}}\frac{x^n}{n!}.$$

◊

形式幂级数的微积分涵盖了若干种“自然”的组合运算。下面的结果将对我们在构造中需要的运算作形式化表述。

定义 3.1.15 (Bergeron等 [12])。
设 F 和 G 是两个结构物种。

- 物种 F·G 称为 F 和 G 的乘积，定义如下：一个 (F · G)-结构是有序对 $s = (f, g)$，其中

  – f 是定义在子集 $U_1 \subseteq U$ 上的 F-结构，–
  g 是定义在子集 $U_2 \subseteq U$ 上的 G- 结构，–
  $\{U_1, U_2\}$ 是 U 的一个划分。

  沿双射 $\sigma : U \to V$ 的传递通过如下方式进行：对于 U 上的每个 (F · G)-结构 $s = (f, g)$,

$$(\mathrm{F} \cdot \mathrm{G})[\sigma](s) = \Big(\mathrm{F}[\sigma_{|U_1}](f), \mathrm{G}[\sigma_{|U_2}](g)\Big).$$

- 物种 F □G 称为 F 和 G 的函子复合，定义如下：U 上的一个 (F □ G)-结构是定义在由所有 G-结构构成的集合 $\mathrm{G}[U]$ 上的 F-结构，也就是说，对于任意有限集 U，(F □ G)$[U] = \mathrm{F}[\mathrm{G}[U]]$。沿双射 $\sigma : U \to V$ 的传递通过令 (F □G)$[\sigma] = \mathrm{F}[\mathrm{G}[\sigma]]$ 来进行。

由 F 和 G 的生成级数，通过以下结果可以得到新构造的结构物种的生成级数。

命题 3.1.16 (Bergeron等 [12])。
设 F 和 G 是两个结构物种。

- 物种 $F \cdot G$ 的生成级数满足等式

$$(F \cdot G)(x) = F(x)G(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k g_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

- 物种 $F \square G$ 的生成级数满足等式

$$(F \square G)(x) = F(x) \square G(x) := \sum_{n\geq 0} f_{g_n} \frac{x^n}{n!}.$$

现在，我们需要定义要应用上述运算的物种。设 E 为由 $\mathrm{E}[U] = U$定义的集合物种。对于每个有限集U，都存在唯一的 E-结构，即集合 U 本身。令 E_k 为基数为 k的集合物种，也就是说，当 $|U| = k$时 $\mathrm{E}_k[U] = U$，否则 $\mathrm{E}_k[U] = \emptyset$。我们将非空集合物种 E_+ 定义为 $\mathrm{E}_+ = \sum_{k\geq 1} \mathrm{E}_k$。它们的生成级数为

$$\mathrm{E}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad \mathrm{E}_k(x) = \frac{x^k}{k!}, \qquad \text{and} \qquad \mathrm{E}_+(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$

由此，我们构造出子集物种 $\wp$ ，它满足组合方程 $\wp := \mathrm{E} \cdot \mathrm{E}$。类似地，我们通过以下方式构造 k-子集物种：

$\wp^{[k]} := \mathrm{E}_k \cdot \mathrm{E}$。因此，它们的生成级数分别为 $\wp(x) = e^{2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{x^n}{n!}$ 和

$$\wp^{[k]}(x) = \frac{x^k}{k!}\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+k}}{k!n!} = \sum_{n\geq k}\frac{x^n}{k!(n-k)!} = \sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}\frac{x^n}{n!},$$

由此得到二项式系数众所周知的组合解释。

命题 3.1.17。 大小为 p 的 k-均匀超图物种，我们记作 $\mathrm{HYP}_{k,\ p}$，满足以下组合方程：

$$\mathrm{E}\cdot \mathrm{HYP}_{k,p} = \varsigma^{[p]} \square \wp^{[k]}.$$

证明。 方程右侧定义了由 k-子集构成的 p-多重集物种。左侧则是集合物种 E 与大小为 p 的 k-均匀超图物种的乘积。方程中出现 E 的原因是，超图必须是覆盖的，即每个节点都必须包含在一条棱中。构造 $\varsigma^{[p]} \square \wp^{[k]}$ 无法保证这一点，因此对于每个 $(\varsigma^{[p]} \square \wp^{[k]})$-结构，我们可以将节点集划分为包含在某个 k-子集中的节点和其余节点。等价地，对于任意 $(\mathrm{E}\cdot \mathrm{Hyp}_{p,\ k})$-结构，都存在一个划分 $\{U_1,\ U_2\}$，使得该结构在 U_2 上是一个 $\mathrm{Hyp}_{p,\ k}$- 结构，而在 U_1 上只是一个节点集。

□

为了求解这个方程并计算生成级数，我们需要一个物种“E^{-1}”。它是虚拟物种的一个例子，是一种组合方程的解，但不一定对应于实际物种。它的用途是求解命题 3.1.17 中的组合方程，或更简单地说，求解 $\mathrm{F} = \mathrm{E}\cdot \mathrm{G}$，以便在已知 F 时求出 G。在这种情况下，G-结构是一个生成 F-结构。在文献中，从 F 到 G 或从 G 到 F 的转换称为二项式变换或欧拉变换，在组合方程中使用“E^{-1}”来处理。将 $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 + \mathrm{E}_+$ 分解后，我们得到

$$\mathrm{E}^{-1} = (\mathrm{E}_0 + \mathrm{E}_+)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n (E_+)^n,$$

因此，

$$\mathrm{E}^{-1}(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(\mathrm{E}_+)^n(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(e^x-1)^n = \sum_{n\geq 0}(1-e^x)^n = e^{-x}.$$

回忆一下，$n^{\overline{p}} = n(n+1)\ldots(n+p-1)$。

定理 3.1.18。 物种$\mathrm{HYP}_{k,p}$ 的生成级数为

$$\mathrm{HYP}_{k,p}(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\frac{\binom{i}{k}^{\overline{p}}}{p!}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

*P*屋顶。 大小为 p 的 k-均匀超图物种的生成级数 is

$$\mathrm{HYP}_{k,p}(x) = \mathrm{E}^{-1}(x)\cdot\left(\varsigma^{[p]}(x) \square \wp^{[k]}(x)\right).$$

我们先计算 $\varsigma^{[p]}(x) \square \wp^{[k]}(x)$】【。

$$\varsigma^{[p]}(x) \square \wp^{[k]}(x) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{n^{\overline{p}}}{p!} \frac{x^n}{n!} \right) \square \left(\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\binom{n}{k}^{\overline{p}}}{p!} \frac{x^n}{n!}.$$

那么，我们有

$$\mathrm{Hyp}_{k,p}(x) = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\binom{n}{k}^{\overline{p}}}{p!} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{\binom{i}{k}^{\overline{p}}}{p!} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

□

找到一种将“极小性”表示为组合方程的方法，或许能为生成和计数极小平衡集合带来新途径。

例 3.1.19. 我们来计算大小为 3、节点数不超过 3 的生成的二均匀超图数量。由于这些超图是 2-一致超图， n只能从 2 取到 3。因此，我们要找的数量是

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{3} \left(\sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{\binom{i}{2}^{\overline{p}}}{p!} \right) &= (-1)^0 \binom{2}{2} \frac{\binom{2}{2}^{\overline{3}}}{3!} + (-1)^1 \binom{3}{2} \frac{\binom{2}{2}^{\overline{3}}}{3!} + (-1)^0 \binom{3}{3} \frac{\binom{3}{2}^{\overline{3}}}{3!} \\ &= 1 - 3 + 10 = 8. \end{aligned}$$

节点	超图	平衡集合
$\{\alpha, \beta\}$	$\{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \beta\}\}$	$\{\{a, b, c\}\}$
$\{\alpha, \beta, \gamma\}$	$\{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}\}$	$\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{c\}\}$
	$\{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}\}$	$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c\}\}$
	$\{\{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \gamma\}\}$	$\{\{a, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$
	$\{\{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}\}$	$\{\{a, b, c\}, \{b\}, \{a, c\}\}$
	$\{\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}\}$	$\{\{a\}, \{a, b, c\}, \{b, c\}\}$
	$\{\{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}\}$	$\{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
	$\{\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \gamma\}\}$	$\{\{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

表 3.2：大小为 p 、阶为 ≤ 3 的 k-均匀超图列表。

对应的 8 个超图列于表 3.2 中。它们只生成了 5 个平衡集合：

$$\{abc\}, \{ab, ac, bc\}, \{abc, ab, c\}, \{abc, ac, b\}, \{abc, bc, a\},$$

其中最后三个在表中各出现两次。注意， $\{abc\}$ 的深度不是 2，但联盟多重集 $\{abc, abc\}$ 可以看作一个荒谬的平衡集合

，其深度为 2。通常，在平衡集合中，我们不考虑同一联盟的多次出现，因此我们将其改成了$\{abc\}$。

仔细查看表格中出现两次的平衡集合，我们可以发现，一对参与者要么完整地包含在某个联盟中，要么完全不包含在其中。我们将这些对子称为宏参与者 [35]。事实上，$\{a,b\}$ 是$\{abc,ab,c\}$中的一个宏参与者，$\{a,c\}$ 是$\{abc,ac,b\}$中的一个宏参与者，最后，$\{b,c\}$ 是$\{abc,bc,a\}$中的一个宏参与者。◊

热量子场论与不平衡集合

若一个子集族不包含任何平衡集合，则称其为不平衡。如果它的任何真超集都不是不平衡集合，则称其为极大 。颇为奇特的是，极大不平衡集合也是数学物理中一个重要性迅速增长的研究主题，尤其是在量子场论中 [34, 30, 58]。

在数学物理中，热量子场论 是一套用于计算量子场 在有限温度下的物理可观测量期望值的方法。量子场论是一种理论框架，它结合了经典场论（例如牛顿引力理论，或描述电磁场的麦克斯韦方程组）、狭义相对论和量子力学。量子场论将粒子视为其基础量子场的激发态；量子场比粒子更为根本。

该理论的关键对象是关联函数，也称为格林函数，它们用于计算各种可观测量，即希尔伯特态空间 $\mathbb{H}$ 上的自伴算子，能够从所研究系统的特定状态中提取某些物理性质。所有这些关联函数都编码在一个生成泛函中，称为配分函数，其方式与一列整数编码在一个生成函数中的方式相同。

采用虚时间形式时，热量子场论与零温量子场论中的配分函数之间的差异在于一个热权重 $e^{-\beta H}$；它实际上是时间演化 e^{-iHT}的作用，使时间平移 $-i\beta$。物理学家旨在从这个包含该热权重的新配分函数中提取相应的关联函数。在计算中，会出现一个函数 Φ ，它以一组复能量$\{z_i\}_{i\in I}$ 为输入，这些复能量满足 $\sum_{i\in I} z_i = 0$，称为虚松原能量。物理学家关注 Φ 的解析延拓；这些解析延拓仅在对所有子集$J \subseteq I$ 均有以下条件成立时才存在

$$\sum_{i\in J} z_i \notin \mathbb{R}.$$

我们指出，对于 $J \subseteq I$，集合 $H_J = \{z \in \mathbb{C}^{|I|} \mid \sum_{i\in J} z_i \in \mathbb{R}\}$ 是能量空间中的一个超平面。Evans [33]已证明， Φ的解析延拓所产生的解（称为（热）广义推迟函数 [34], ）与超平面排列 $\{H_J\}_{J\subseteq I}$的区域之间存在双射。该超平面排列称为共振排列，或全子集排列。在下文中，我们将看到，共振排列的区域与极大不平衡集合之间存在双射。

3.2 共振超平面排列

本节讨论共振排列—— $\mathbb{R}^N$中一种非常规则的结构，并探讨该排列与合作博弈论之间的联系。“共振排列”一词由 Shadrin 等人 [79]在研究代数几何中的双重 Hurwitz 数时提出，但至少从 Evans [34] 起，人们便已在量子场论的语境中研究这一排列。令人惊讶的是，共振排列也出现在多个领域：在心理测量学和经济学中，它被称为受限全子集超平面排列 [49, 50], ；在数学物理和量子场论中也是如此 [30, 34, 58], ；在表示论中亦然 [13, 15], ；而最常见的是在组合学中 [1, 17, 22, 42, 53]。下文将表明，共振排列在合作博弈论中自然地出现。有关共振排列的更多详情，请参见 Kühne [53]。我们尽可能遵循 Aguiar 和 Mahajan [1]的记号与定义。

定义 3.2.1. *(*受限*)*共振排列 A_R $\mathbb{R}^N$ 定义为

$$\mathcal{A}_R \coloneqq \left\{H_S^R \mid S \in \mathcal{N} \setminus \{N\}\right\} \quad \text{where} \quad H_S^R \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = 0 \text{ and } x(S) = 0\right\}.$$

文献中的定义不尽相同。一些作者将共振排列简单地定义为超平面集合 $\Big\{\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(S) = 0\} \mid S \in \mathcal{N}\Big\}$。下面的结果表明，这两种定义之间的差异可以忽略不计。

命题 3.2.2. $\mathbb{R}^N$ 的受限共振排列与一个$(n-1)$维欧几里得空间的共振排列同构。

证明. 不失一般性，设 $N = \{1, \ldots, n\}$ 且 $N' = N \setminus \{n\}$。将按定义 3.2.1 定义的共振排列记为$\mathcal{A}_R$，并令$\mathcal{A}^{N'}$ 为

$$\mathcal{A}^{N'} \coloneqq \{H_S \mid S \in \mathcal{N} \setminus \{N\}\} \quad \text{where} \quad H_S \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^{N'} \mid x(S) = 0\right\}.$$

注意，线性子空间$\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = 0\}$ 同构于 $\mathbb{R}^{N'}$。设 S 是 N'的一个联盟。我们有

$$H_S^R = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = 0 \text{ and } x(S) = 0\right\} \simeq \left\{x \in \mathbb{R}^{N'} \mid x(S) = 0\right\} = H_S \in \mathcal{A}^{N'}.$$

那么，$\mathcal{A}^{N'}$ 同构于$\mathcal{A}_R$的一个子超平面排列。为了完成证明，设 S 是 N 的一个联盟，使得 $|S| = n - 1$。那么 S 不是 N'的真联盟，但$N \setminus S$ 是，而且由于

$$\begin{aligned} H_S^R &= \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = 0 \text{ and } x(S) = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = 0 \text{ and } x(N \setminus S) = 0\right\} = H_{N\setminus S}^R, \end{aligned}$$

我们有 $H_S^R \simeq H_{N\setminus S}$，于是 $\mathcal{A}_R \simeq \mathcal{A}^{N'}$。 □

因此，受限共振排列具备非受限共振排列的所有性质；在不会引起混淆时，我们便简称其为共振排列。

设$\mathcal{A}$ 是一个超平面排列。每个超平面将环境空间$\mathbb{R}^N$ 分成两个闭半空间，它们的交集就是给定的超平面。我们将通过对任意超平面取其自身或其中一个闭半空间的交集所得到的 $\mathbb{R}^N$ 子集称为该排列的面。换言之，对于每个超平面，同一个面的任意两个元素都位于该超平面的同一侧，或者包含在超平面本身中。用 $\Sigma[\mathcal{A}]$ 表示$\mathcal{A}$的面集，它在包含关系下构成一个偏序集。 $\Sigma[\mathcal{A}]$ 的极大面称为一个区域，其集合记作 $\Gamma[\mathcal{A}]$。

3.2.1 区域的偏序集

共振排列与合作博弈论之间的第一个联系由 Billera 等人 [14], 建立，他们证明了 $\mathcal{A}_R$ 的区域与极大非平衡集合之间存在双射。这个联系基于 Billera、Moore、Moraites、Wang 和 Williams 对不平衡集合的刻画 [14]。

命题3.2.3 (Billera、Moore、Moraites、Wang 和 Williams [14]).集合 $Q \subseteq N$ 是不平衡的，当且仅当存在一个侧支付 $\sigma \in \Sigma$，使得对所有 $S \in Q$，都有 $\sigma(S) > 0$。

需要注意的是，不平衡性并不等同于平衡性的否定。集合 $\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a\}\}$ 在 $\{a,b,c\}$ 上不是平衡的，但它包含 $\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$，而后者是平衡的。我们将那些本身不平衡、但包含一个平衡集合的集合称为弱平衡集合。这个名称有两个方面的缘由：首先，移除某些联盟后，弱平衡集合可以变为平衡集合。其次，放宽平衡性定义中对平衡权重的正值条件，会导出弱平衡性。

例 3.2.4. 这两个集合族都是极大不平衡集合，并通过 σ 侧支付说明了前面的结果：

- 当 $n = 3$ 时：$\{\{a,b\},\{a,c\},\{a\}\}$ 并且，作为侧支付，$\sigma = (2,-1,-1)$;
- 当 $n = 4$ 时：$\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}\}$，并且，作为侧支付，$\sigma = (3,-1,-1,-1)$。

侧支付 σ 表示一个方向，它能改善不平衡集合中所有联盟的支付。$\Diamond$

这个非常简单的刻画使我们得以看出，极大不平衡集合与 Björner [17]所定义的正集和系统相同，并且它们与共振超平面排列有关（见图 3.1）。

设 C 是受限共振排列的一个区域，并且 $x \in$relint(C)。由于 x 不属于 $\mathcal{A}_R$ 的任何超平面，因此不存在联盟 $S \in \mathcal{N}$ 使得 $x(S) = 0$。于是，对于所有联盟 $S \in \mathcal{N}$，都有 $x(S) > 0$ 或 $x(S) < 0$。此外，我们注意到，对于同一区域中任意其他元素 $y \in$ relint(C)，数值 $y(S)$ 的符号将与 $x(S)$ 的符号相同，因为 $\mathcal{A}_R$ 的超平面中没有任何一个将 x 与 y 分隔开。

然后，我们可以为$\mathcal{A}_R$ 的每个区域确定一个联盟集 $\mathcal{Q}$，使得对于所有 $S \in \mathcal{Q}$，以及所有 $x \in$ relint(C)，都有 $x(S) > 0$；并且对于所有 $T \notin \mathcal{Q}$，都有

$x(T) < 0$。根据命题3.2.3，每个区域都与一个不平衡集合相关联。

极大性源于这样一个事实：$x \in C$ 是侧支付，并且不属于$\mathcal{A}_R$的任何超平面。对于给定的联盟 $S \in \mathcal{Q}$，如果 $x(S) > 0$，则意味着$x(N \setminus S) < 0$，因此，与一个区域相关联的所有不平衡集合的基数均为 $2^{n-1}-1$，因为它们恰好包含 N的每一对非空且真子集联盟及其补集中的一个联盟。

那么，对于与某个区域 C相关联的任意不平衡集合$\mathcal{Q}$，以及任意满足 $S \notin \mathcal{Q}$的联盟 S，集合$\mathcal{Q} \cup \{S\}$将不再是不平衡的，因为它会包含平衡集合$\{S, N \setminus S\}$。因此，与某个区域相关联的任意不平衡集合都是极大的。

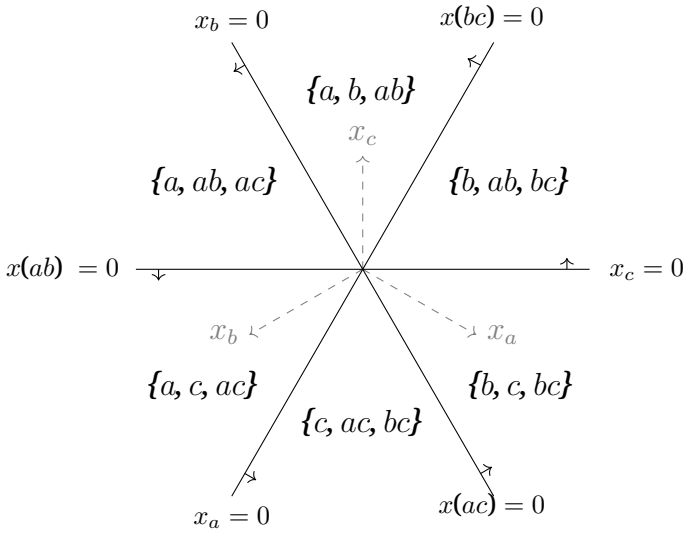


图 3.1：平面 $x(N) = 0$ 中 $n = 3$ 的受限共振排列。箭头表示超平面的法向量。6 个极大不平衡集合（子集中的元素之间不加逗号，也不加花括号）对应 6 个区域。

已知 $n \leq 9$ 个共振排列的区域数，见表 3.3 和数列 A034997 [92]，；而已知极小平衡集合的数量仅适用于 $n \leq 7$ [56]，见数列 A355042 [92]。注意，极大不平衡集合的数量增长速度慢于极小平衡集合的数量。

n	2	3	4	5	6	7	8	9
k	2	6	32	370	11,292	1,066,044	347,326,352	419,172,756,930
l	2	6	42	1,292	200,214	132,422,036	?	?

表 3.3：根据参与者人数 n，极大不平衡集合的数量 k 和极小平衡集合的数量 l。

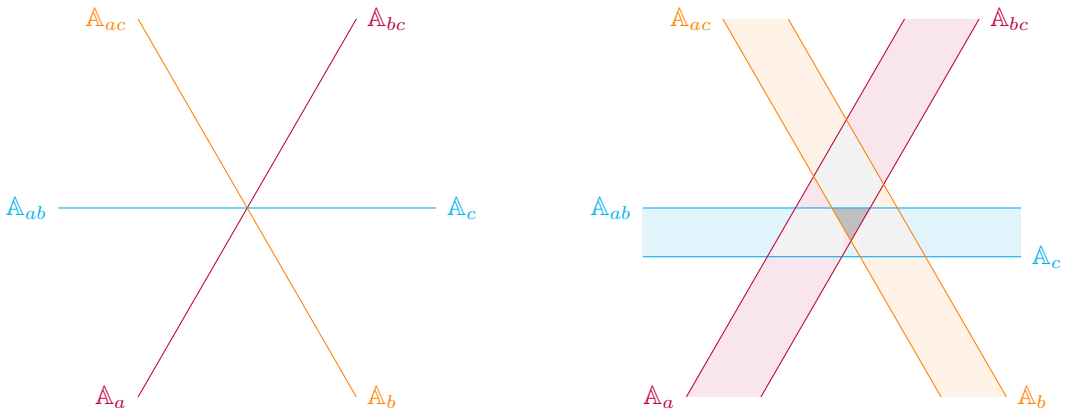
合作博弈与共振超平面排列之间还有其他深刻的联系。设 $(N,\ v)$ 是一个博弈，并用 $\mathcal{A}(v)$ 表示由下式定义的集合

$$\mathcal{A}(v) \coloneqq \{\mathbb{A}_S(v) \mid S \in \mathcal{N} \setminus \{N\}\}.$$

令（$N,\ o$）为零博弈，对所有 $S \in \mathcal{N}$定义为 $o(S) = 0$。容易看出，$\mathcal{A}(o)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的受限共振排列，因为对所有 $S \in \mathcal{N}$，超平面 $\mathbb{A}_S(o)$ 对应于 H_S^R。在命题 3.2.2 的证明中，我们已经看到 $\mathbb{A}_S(o) = \mathbb{A}_{N\setminus S}(o)$，因此，与互补的真联盟相关联的共振排列中的超平面对会合并。令（$N,\ v$）为一个博弈，并令 S 为一个联盟。我们将 S 的板带 （或等价地，将 $N \setminus S$ ）定义为 $\mathbb{X}(v)$ 的子集，记作 $\mathrm{sl}_S(v)$，其定义为

$$\mathrm{sl}_S(v) \coloneqq \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) \geq v(S) \text{ and } x(N \setminus S) \geq v(N \setminus S)\}.$$

修改 S 的价值，使得 $v(S) + v(N \setminus S) \leq v(N)$，将生成一个非空板带。于是，一个博弈可以看作是共振排列的扭曲，从而形成一个“板带排列”，其中任意超平面 $\mathbb{A}_S(o)$ 都相对于 $\mathbb{X}(v)$ 沿其法向量平移 $v(S)$，即沿着 η^S。



(a) 排列$\mathcal{A}(o)$。 (b) 排列$\mathcal{A}(v)$。

图 3.2：由博弈（N, v）对共振排列$\mathcal{A}(o)$进行平衡扭曲。核心 $C(v)$ 是颜色最深的区域。

由于每个超平面 $\mathbb{A}_S(o)$ 都经过原点 $\vec{o}$，因此共振排列被称为中心的。与超平面排列类似，如果所有板带的交集非空，我们就称板带排列是中心的。由于所有板带的交集是一个基本多面体，由共振排列定义的板带排列是中心的，当且仅当它由一个平衡博弈生成。

由（N, v）所诱导的扭曲得到的集合 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$ ，可能与原始的 $\Gamma[\mathcal{A}_R]$ 截然不同。此前，所有区域都是以 $\vec{o}$为顶点的锥，并与极大不平衡集合双射。现在，有些区域可以是有界多面体（即多胞体），也可以是非锥形无界多面体。不过，所有这些区域都与可行集族密切相关。我们用$\mathcal{R}(v)$ 表示（N, v）中与可行集族相对应的区域集合。

命题 3.2.5。 设（N, v） 是一个平衡博弈。R（v） 是一个分次偏序集。

证明。 我们将由可行集族上的包含关系定义的偏序转移到区域集合上。偏序中一个区域的秩等于其对应可行集族的基数。

□

例 3.2.6。 考虑图 3.3 所示的博弈。

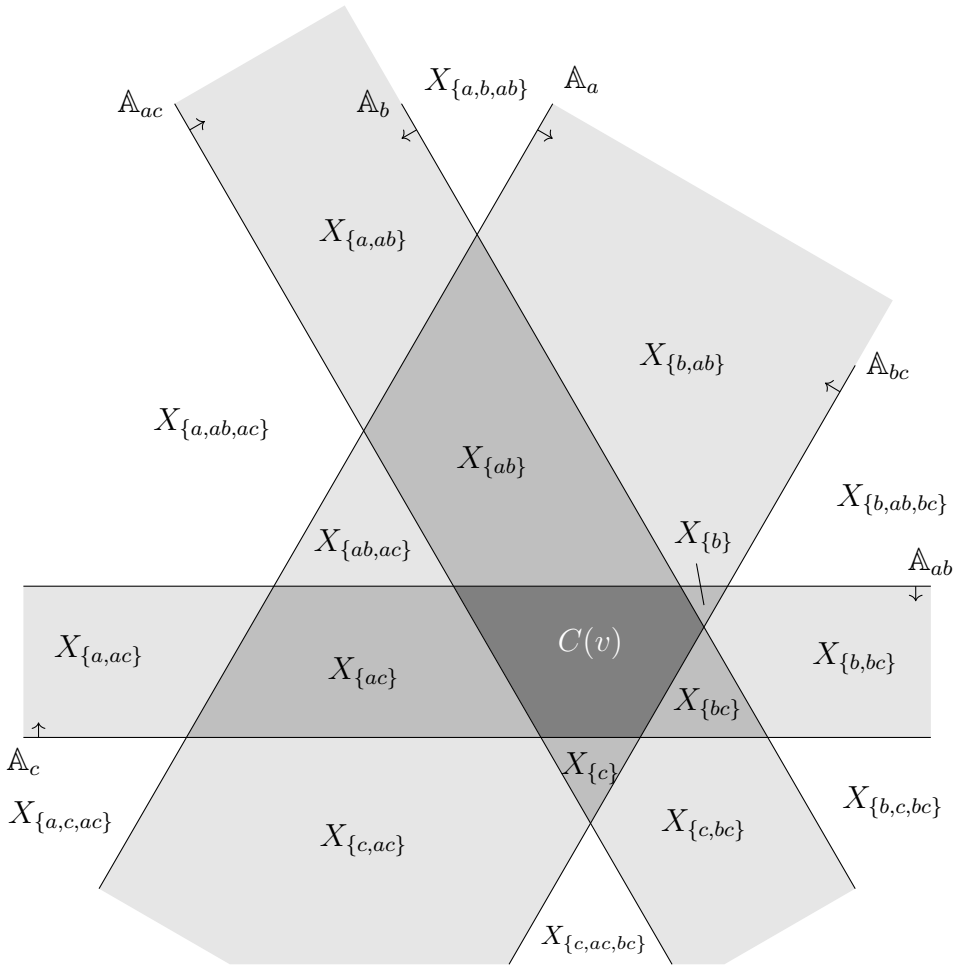


图 3.3：由博弈（N， v）在 $\mathbb{X}(v)$ 中对 $N = \{a,\ b,\ c\}$中的共振排列造成的变形。区域的秩随其明度增加而增加。

我们看到，每个区域都有特定的秩，即将其与核心分隔开的超平面数量。注意，$X_{\{b,ab\}}$ 既不是多胞体，也不是锥。◊

区域集合 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$ 具有非常相似的结构。

命题 3.2.7. 设(N, v) 是一个平衡博弈。 $\Gamma[A(v)]$ 是一个分次偏序集。

证明。 首先，让我们在 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$上定义一个偏序。设 $C \in \Gamma[\mathcal{A}(v)]$ 是一个区域。我们用 $\mathrm{sep}(C)$ 表示核心与 C 之间的分隔超平面集合，也就是说，这些超平面使核心与 C 位于该超平面所生成的不同闭半空间中。设 C_1 和 C_2 是 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$的两个区域。若 $\mathrm{sep}(C_1) \subset \mathrm{sep}(C_2)$，则称 C_1 低于 C_2，记作 $C_1 \leq_\Gamma C_2$。我们以定义偏序集的秩函数来结束此证明

。设 C 是 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$, 的一个区域，并令$\rho:\Gamma[\mathcal{A}(v)]\to\mathbb{N}$ 由 $\rho(C)=|\mathrm{sep}(C)|$定义。对于所有满足 $C_1<_\Gamma C_2$ 的 $C_1, C_2\in\Gamma[\mathcal{A}(v)]$，我们有 $\rho(C_1)<\rho(C_2)$；若 C_2 覆盖 C_1，也就是说，若 $C_1\le_\Gamma C_2$ 且仅有一个超平面分隔这两个区域，并且我们有 $\rho(C_1)+1=\rho(C_2)$，那么 ρ 就是一个秩函数。 □

命题 3.2.8. 设 (N,v) 是一个平衡博弈。那么存在一个从 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$ 到 $R(v)$的保阶单射。如果核心 $C(v)$ 是满维的，则此单射是一个双射。

证明。设 C 是一个区域 $C\in\Gamma[\mathcal{A}(v)]$，并设 $x\in\mathrm{int}(C)$。那么，存在一个联盟集$\mathcal{Q}\subseteq\mathcal{N}$，使得对所有 $S\in\mathcal{Q}$，都有 $x(S)<v(S)$；并且对所有 $T\notin\mathcal{Q}$，都有 $x(T)>v(T)$。于是 $\mathrm{int}(C)$ 是区域 $X_\mathcal{Q}$ 的内部，因此$\mathcal{Q}$ 是可行的。现在假设 $C(v)$ 是满维的，即 N 是关键的，并设$\mathcal{Q}$ 是一个可行集合。根据引理 2.3.10，对N上的所有极小平衡集合$\mathcal{B}$，我们有

$$\sum_{S\in\mathcal{B}}\lambda_S^\mathcal{B}v(S)<v(N).$$

让我们关注核心 $C(v^\mathcal{Q})$。根据引理 2.3.6，我们有 $\mathcal{Q}^c\cap\mathcal{E}(N,\ v^\mathcal{Q})=\emptyset$。由于 N 是关键的，因此有 $\mathcal{E}(v)=\{N\}$，进而 $\mathcal{E}(v^\mathcal{Q})=\{N\}$。因此，$C(v^\mathcal{Q})$ 是满维的，这意味着 $X_\mathcal{Q}$ 也满维，进而包含于 $\mathcal{A}(v)$ 的唯一一个区域中。 □

在例 3.2.6 中，核心是满维的，因此区域与区域之间存在双射。即使 $\mathcal{A}(v)$ 的区域与 $\mathcal{A}_R$ 的区域不同，之前的所有区域仍然保留在新的 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$ 中。

命题 3.2.9。设 (N,v) 是一个平衡博弈。则存在一个从$\Gamma[\mathcal{A}_R]$ 到 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$的映射，该映射将其映入极大元集合。

证明。设 C 是 $\Gamma[\mathcal{A}_R]$的一个区域。则存在一个极大不平衡集合 $\mathcal{Q}$，使得对于所有 $x\in\mathrm{relint}(C)$ 以及所有 $S\in\mathcal{Q}$，都有 $x(S)<v(S)$，且$x(N\setminus S)>v(N\setminus S)$。这定义了一个基本多面体，其对应的集合函数为 $v^\mathcal{Q}$。$v^\mathcal{Q}$ 的定义域是

$$\mathcal{F}_v=(\mathcal{N}\setminus\mathcal{Q})\cup\mathcal{Q}^c=\mathcal{Q}^c\cup\{N\}.$$

包含于$\mathcal{F}_v$ 中的唯一极小平衡集是$\{N\}$，因此对所有 (N,v)，定理 2.2.2 的条件始终成立。$\Gamma[\mathcal{A}_R]$ 中元素在 $\Gamma[\mathcal{A}(v)]$ 中的极大性，由与这些元素相关联的不平衡集合的极大性以及引理 2.3.5 给出。 □

在例 3.2.6 中，$\mathcal{A}_R$ 的区域是白色的。设 (N,v) 是一个平衡博弈。核心的面格记为 $\mathcal{L}_C(v)$，它是核心各个面的偏序集（包括空面），并按包含关系排序。设 $F\in\mathcal{L}_C(v)$ 是 $C(v)$ 的一个面。用 $\mathcal{E}(F)$ 表示这样一个联盟集合：其中的联盟对F 的所有元素都有效，但并非对核心的所有元素都有效，即

$$\mathcal{E}(F)\coloneqq\{S\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{E}(v)\mid F\subseteq\mathbb{A}_S(v)\}.$$

例 3.2.10. 图 3.4 展示了图 3.3 中核心的面格。

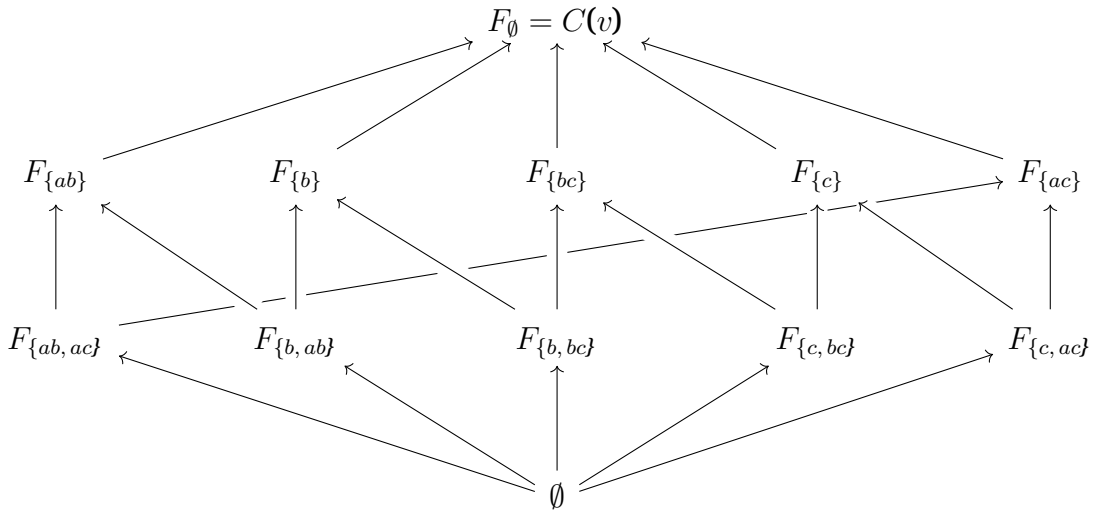


图 3.4：表 3.3 中 (N, v) 的核心的面格 $\mathcal{L}_C(v)$。

注意，参与者 a 在集合族 $\mathcal{E}(F)$ 的任何集合中都不是孤立的，因为$\{a\}$并非精确。特别地，这个博弈没有稳定核心。$\Diamond$

命题3.2.11. 设(N, v) 是一个平衡博弈。则存在一个从 $L_C(v) \setminus \{\emptyset\}$ 到 $\Gamma[A(v)]$ 的阶反向单射。

证明。 设 $F \in \mathcal{L}_C(v)$ 是核心的一个真面。我们首先证明 $\mathcal{E}(F)$ 是一个可行集族。为此，我们使用关于可行集族的引理 2.3.6。

设 $\mathrm{F} = \left(2^N \setminus \mathrm{E}(F)\right) \cup \mathrm{E}(F)^c$。博弈 $(\mathrm{F}, v^{\mathcal{E}(F)})$ 是平衡的，因为 $F \subseteq C(\mathrm{F}, v^{\mathcal{E}(F)})$。现在我们来考察 $(\mathrm{F}, v^{\mathcal{E}(F)})$ 的有效联盟。设 $S \in \mathrm{E}(F)^c$。若 $S \in \mathrm{E}(F) \cap \mathrm{E}(F)^c$，则 $v^{\mathcal{E}(F)}(S) + v^{\mathcal{E}(F)}(N \setminus S) = v(S) + v(N) - v(S) = v(N)$，这意味着 S和 $N \setminus S$包含在 $\mathrm{E}(v)$ 中，进而 S不可能属于 $\mathrm{E}(F)$。因此我们假设 $S \in \mathrm{E}(F)^c$且 $\mathrm{E}(F) \cap \mathrm{E}(F)^c = \emptyset$。我们用反证法证明 $S \notin \mathrm{E}(\mathrm{F}, v^{\mathcal{E}(F)})$。反设结论不成立。则 $C(\mathrm{F}, v^{\mathcal{E}(F)}) \subseteq \mathbb{A}_S(v)$，这意味着 $F \in \subseteq \mathbb{A}_S(v)$。于是，$S \in \mathrm{E}(F)$，得到所需矛盾。

阶的反转源于这样一个事实：包含于另一个面 G 中的面 F，比 G 包含在更多的超平面中。对于 $\mathcal{E}(G)$ 中的任意联盟，我们有 $F \subseteq G \subsetneq \bigcap_{S \in \mathcal{E}(G)} \mathbb{A}_S(v)$，进而有 $\mathcal{E}(G) \subseteq \mathcal{E}(F)$。

□

总而言之，偏序集之间存在以下包含关系，其中 $\mathbb{U}(N)$ 表示 N 上的不平衡集合族，$\mathbb{U}^{\max}(N)$ 表示 N 上的极大不平衡集合，$\to$ 表示一个保阶（对于 $\mathcal{L}_C(v)$ 则反阶）单射。

$$\mathbb{U}^{\max}(N) \equiv \Gamma[\mathcal{A}_R] \hookrightarrow \Gamma[\mathcal{A}(v)] \hookrightarrow \mathcal{R}(v) \hookrightarrow \mathbb{U}(N)$$
$$\text{and} \qquad \mathcal{L}_C(v) \hookrightarrow \mathcal{R}(v) \hookrightarrow \mathbb{U}(N).$$

例 3.2.12. 我们从图 3.5 中可以看到，核心的非空面可以映射到区域偏序集 $\mathcal{R}(v)$ 中，并且阶相反。

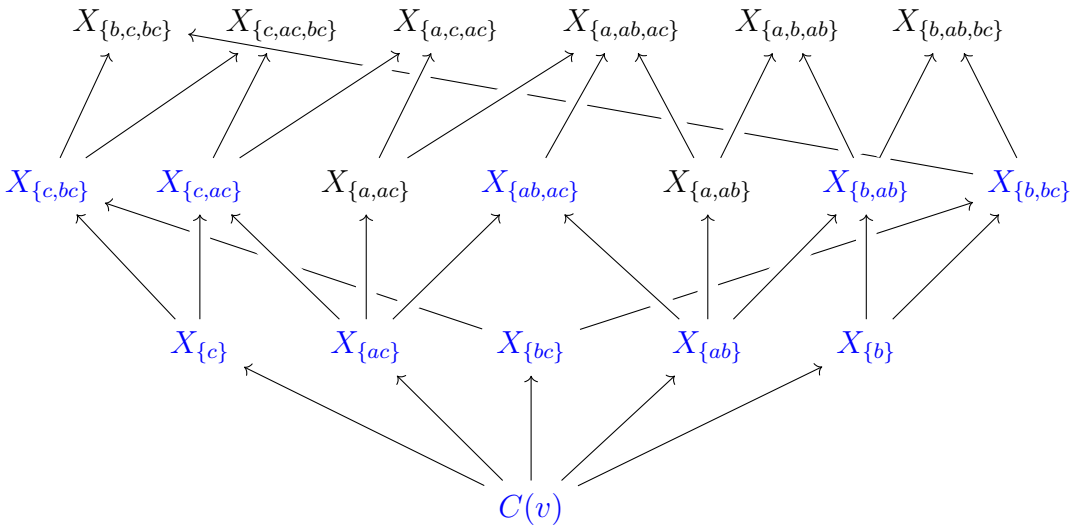


图 3.5：图 3.3 中 (N, v) 的区域偏序集 $\mathcal{R}(N, v)$。蓝色部分为核心的真面半格，按逆序排列。

注意，蓝色区域的闭包与核心相交；这些闭包与定义核心各面的集合族一一对应。◊

第4章

稳定性、支配与投影

本章致力于研究核心稳定性，即核心与冯·诺依曼—摩根斯坦稳定集的一致性。确定一个核心是否稳定是一个长期存在的问题，至今已有70多年历史。在2021年和Grabisch 和 Sudhölter 定理 [40], 之前，对于平衡博弈的一般类别，我们还没有稳定核心的刻画。尽管如此，对于某些特定类别的博弈，例如指派博弈 [10, 73, 87, 93], 和链分量可加博弈 [98], ，已有重要成果。此外，由 Shapley[83], 定义的凸博弈具有稳定核心，可扩展博弈 [51], 、具有大核心 [89], 的博弈以及强生命精确可扩展博弈 [90]也同样如此。关于指派博弈的核心和稳定集的更深入研究可见 [64, 63]。

另一种已被成功采用的方法是修改稳定集的概念，以便在不同的极大元集合下涵盖类似的支配直观性质。通常，这是通过在预分配之间迭代支配过程来实现的。Demuynck等人 [28],定义的短视稳定集扩展了 Herings等人 [44, 45], 提出的概念，采用了一种称为渐近外部稳定性的性质；该性质类似于 von Neumann 和 Morgenstern [102]所定义的外部稳定性的迭代等价形式。Béal等人 [8] 在定义远见稳定集时，以及 Ray 和 Vohra [74]，也采用了类似的方法。迭代次数以及核心的“可达性”在 Béal等人 [9]的研究中有所讨论。在第1章中，我们已经讨论了使用由 Stearns [94], 定义、由 Cesco [24]借助投影算子发展的转移方案对预分配进行累积改进的递归过程。我们将在第4.3节更详细地研究预分配之间的投影算子。

本章第一节介绍 Grabisch 和 Sudhölter 的新刻画 [40], ，并将其转化为可运行的计算机程序 [56]。第二节研究两类锥：一类由能够改善特定联盟集支付的预分配构成，另一类由能够严格提高特定联盟中参与者支付的预分配构成。通过研究它们的交集，我们给出了核心稳定性的一项新必要条件，可将其用于提高本章第一节所述算法的效率。最后两节介绍一种研究核心稳定性以及预分配之间支配关系的新方法，该方法使用投影算子，将对象投影到仿射子空间与极区域的交集上。

4.1 嵌套平衡性

该刻画使用了我们在第2章中引入的反超关系。如果预分配 x 击败另一个预分配 y，且通过联盟 S 满足 x dom_S y，并且对所有$T \subsetneq S$，都有 $x(T) \geq v(T)$，则称前者反超后者。我们将其记为 $x \succ_S y$。未被反超的预分配集合记为 $M(v)$，并且 $M(v) = C(v)$ 当且仅当$C(v)$是一个稳定集 [40]。

设 (N, v) 是一个平衡博弈。下文中，我们只考虑第2章讨论过的严格关键精确联盟，并假设 $\mathcal{VE}(v)$（即严格关键精确联盟的集合）能够描述核心（见命题2.3.14）。要判断核心是否为稳定集，我们需要寻找未被否决的预分配。对于给定的预分配 x，通过 S 对其提出否决的预分配集合为

$$P_S^{\succ}(x) := \left\{ y \in \mathbb{X}(v) \;\middle|\; \begin{array}{ll} y_i > x_i & \text{for all } i \in S \\ y(S) \leq v(S) & \\ y(T) \geq v(T) & \text{for all } T \subsetneq S \end{array} \right\}.$$

这种方法称为嵌套平衡性，由 Grabisch 和 Sudhölter [40], 提出，其做法是检验一个特定多面体是否非空；该多面体由那些使另一个特定多面体非空的预分配组成。

回忆一下，v^S 是联盟函数，它与 v 的差别可能仅在于 $v^S(N \setminus S) = v(N) - v(S)$，并且回忆 $\mathrm{I}_S = \{\{i\} \mid i \in S\}$。根据定理 2.2.2，当且仅当 $(\mathrm{F}_{P_S^{\succ}}(x)\ v_{P_S^{\succ}}(x))$ 是平衡的，且 $\mathrm{I}_S \cap \mathrm{E}(\mathrm{F}_{P_S^{\succ}}(x)\ v_{P_S^{\succ}}(x)) = \emptyset$ 时，预分配 x 才会通过联盟 S 被否决，其中

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_S := \left(\mathcal{VE}(v) \setminus 2^S\right) \cup \{N \setminus S\} \cup \mathcal{I}_S, \quad \text{and} \\ &v_{P_S^{\succ}(x)}(T) = \begin{cases} x_i & \text{if } T \in \mathcal{I}_S,\ T = \{i\}, \\ v^S(T) & \text{if } T \in \mathcal{F}_S \setminus \mathcal{I}_S. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

由于 S 是严格至关精确的联盟，因此它特别是精确的，所以根据命题 2.3.1，博弈 $(\mathcal{F}_{P_S^{\succ}(x)}\, v^S)$ 是平衡的。这意味着定理 2.2.2 中需要验证的许多不等式已经满足，无须再检验。唯一需要检验的是涉及新价值$v_{P_S^{\succ}(x)}(\{i\}) = x_i$ 关于 $i \in S$的不等式，也就是与满足 $\mathcal{B} \cap \mathcal{I}_S \neq \emptyset$ 的极小平衡集合 $\mathcal{B}$ 相对应的不等式。

令 ϕ 为一个映射，它将每个预分配 x 映射到由下式定义的联盟集

$$\phi(x) := \{S \in \mathcal{VE}(v) \mid x(S) < v(S)\}.$$

只需检查 x 是否未被任何 $S \in \phi(x)$否决，因为 x 不可能被不属于 $\phi(x)$的联盟支配。因此，若对于所有联盟 $S \in \phi(x)$，都存在一个满足 $\mathcal{B}$satisfying $\mathcal{B} \cap \mathcal{I}_S \neq \emptyset$ 的极小平衡集 x，那么预分配 x 就不会被否决。

$$\sum_{\substack{i \in S \\ \{i\} \in \mathcal{B}}} \lambda^{\mathcal{B}}_{\{i\}} x_i \geq v(N) - \sum_{T \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{I}_S} \lambda^{\mathcal{B}}_T v^S(T). \tag{4.1.2}$$

换言之，对于所有可行集族 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{VE}(v)$，都有 $M(v) \cap X_{\mathcal{Q}}(v) \neq \emptyset$，当且仅当存在 $S \in \mathcal{Q}$、 $x \in X_{\mathcal{Q}}(v)$，以及满足 $\mathcal{B} \cap \mathcal{I}_S \neq \emptyset$ 的 $\mathcal{B}$，使得等式 (4.1.2) 成立。

设 $\mathcal{Q}$ 是一个可行集族， $S \in \mathcal{Q}$ 是一个联盟，且 $\mathcal{B}$ 是一个与 $\mathcal{I}_S$相交的极小平衡集。考虑以下线性规划。

$$\left(P_S^{\mathcal{B}}\right) \qquad \begin{cases} \min x(N) \\ \text{s.t.} \begin{cases} x(T) \geq v(T), & \text{for all } T \notin \mathcal{Q}, \\ x(N \setminus T) > v(N) - v(T), & \text{for all } T \in \mathcal{Q}, \\ \sum_{\{i\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{I}_S} \lambda_{\{i\}}^{\mathcal{B}} x_i \geq v(N) - \sum_{T \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{I}_S} \lambda_T^{\mathcal{B}} v^S(T). \end{cases} \end{cases}$$

该规划的最后一个约束对应于方程 (4.1.2)，前两个约束确保 x 属于区域 $X_{\mathcal{Q}}(v)$。如果该规划的最优值为 $v(N)$，那么存在一个预分配 $x \in X_{\mathcal{Q}}(v)$，它不会通过 S被否决。因此，若对所有 $S \in \mathcal{Q}$，都存在一个与 $\mathcal{B}$ 相交的极小平衡集 $\mathcal{I}_S$，使得各规划 $(P_{\mathcal{BS}})$ 的最优值为 $v(N)$，那么我们有 $M(v) \cap X_{\mathcal{Q}}(v) \neq \emptyset$。

由于 (4.1.2) 左侧和最后一个约束中存在权重 $\lambda_{\{i\}}^{\mathcal{B}}$，我们无法使用关于基本多面体的定理 2.2.2，但仍采用相同的思路：我们用一个线性规划，即 $(P_S^{\mathcal{B}})$，检查是否存在满足这些约束的预分配，然后取其对偶规划。由于该多面体不再是基本多面体，对偶规划的约束不再对应于平衡集合。

为了解决这个问题，我们使用向量的平衡集。

定义 4.1.1 （Grabisch 和 Sudhölter [40]）。
令 $Z \subseteq \mathbb{R}_+^N \setminus \{\vec{o}\}$。如果存在一组正平衡权重 $\lambda = \{\lambda_z \mid z \in Z\}$，使得 $\sum_{z \in Z} \lambda_z z = \mathbf{1}^N$，则称 Z 为一个平衡集。如果集合 Z 不包含任何平衡的真子集，则称其为极小平衡集。

平衡性的几何解释仍然成立：集合 $Z \subseteq \mathbb{R}_+^N \setminus \{\vec{o}\}$ 是平衡的，当且仅当向量 $\mathbf{1}^N$ 位于Z的锥包的相对内部。从线性代数的角度来看，系统 $A^Z \lambda = \mathbf{1}^N$ 必须有非负解，其中 A^Z 是一个矩阵，其列为 Z中的向量。

令$\mathcal{Q}$ 为一个可行集族，$\mathcal{B}$ 为一个极小平衡集合。对于 $S \in \mathcal{Q}$，令 $z^S \in \mathbb{R}^N$ 由下式给出

$$z_j^S = \begin{cases} \lambda_{\{i\}}^{\mathcal{B}}, & \text{if } j = i \text{ and } \{i\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{I}_S, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义 $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}} = \left\{\mathbf{1}^{N \setminus S} \mid S \in \mathcal{Q}\right\} \cup \left\{\mathbf{1}^T \mid T \notin \mathcal{Q}\right\} \cup \left\{z^S \mid S \in \mathcal{Q}\right\}$。此外，令 $\varepsilon > 0$，并对每个 $z \in Z$，定义 $a_z^\varepsilon := \max\{A_\varepsilon \cup B \cup C\}$，其中

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \left\{v(N) - v(S) + \varepsilon \mid \mathbf{1}^{N \setminus S} = z, S \in \mathcal{Q}\right\}, \\ B &= \left\{v(T) \mid \mathbf{1}^T = z, T \notin \mathcal{Q}\right\}, \\ C &= \left\{v(N) - \textstyle\sum_{T \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{I}_S} \lambda_T^{\mathcal{B}} v^S(T) \mid z = z^S, S \in \mathcal{Q}\right\}. \end{aligned}$$

那么，$(P_S^{\mathcal{B}})$ 的对偶规划可表示为

$$\left(D_S^{\mathcal{B}}\right) \quad \begin{cases} \max \sum_{z\in Z} \lambda_z a_z^{\varepsilon} \\ \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{z\in Z} \lambda_z z = \mathbf{1}^N \text{ and,} \\ \lambda_z \geq 0, \text{ for all } z \in Z. \end{cases} \end{cases}$$

程序 $(D_S^{\mathcal{B}})$ 的约束对应于平衡集的定义，更准确地说，是 $\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}$ 的子集中的平衡集。再次利用对偶定理，由于两个可行集均非空，如果 $(D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$ 的最优值为 $v(N)$，那么 $(P_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$ 的最优值也为 $v(N)$；这等价于存在不会通过 S 被否决的预分配。此外，$(D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$ 的最优值为 $v(N)$，当且仅当对于所有极小平衡集 $Z \subseteq \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}$ 以及所有 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\sum_{z\in Z} \lambda_z a_z^{\varepsilon} \leq v(N).$$

为了去掉 ε，我们可以像定理 2.2.2 中那样区分两种情况。记 $a_z := \max\{A \cup B \cup C\}$，其中 $A := \{v(N) - v(S) \mid \mathbf{1}^{N\setminus S} = z, S \in \mathcal{Q}\}$。我们用 $\mathbb{B}(\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$ 表示极小平衡集 $Z \subseteq \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}$ 的集合，用 $\mathbb{B}_0(\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$ 表示满足对某个 $z \in Z$ 有 $a_z = v(N) - v(S)$ 的极小平衡集 $Z \subseteq \Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}$ 的集合。那么，$(D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$ 的最优值为 $v(N)$，当且仅当对于所有 $Z \in \mathbb{B}(\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}) \setminus \mathbb{B}_0(\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$，我们有 $\sum_{z\in Z} \lambda_z a_z \leq v(N)$，并且对于所有 $Z \in \mathbb{B}_0(\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}})$，我们有 $\sum_{z\in Z} \lambda_z a_z < v(N)$。

现在我们可以给出 Grabisch 和 Sudhölter [40] 的主要结果。

定理 4.1.2 (Grabisch 和 Sudhölter [40])。

设 (N, v) 是一个平衡博弈。当且仅当对于所有可行集族 $\mathcal{Q}$、对于所有联盟 $S \in \mathcal{Q}$，以及对于所有满足 $B \cap I_S \neq \emptyset$ 的极小平衡集合 B，都存在一个极小平衡集 $Z \in \mathbb{B}\left(\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}\right)$，使得

$$\begin{cases} \sum_{z\in Z} \lambda_z a_z \geq v(N), & \textit{if } Z \in \mathbb{B}_0\left(\Omega_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}\right), \\ \sum_{z\in Z} \lambda_z a_z > v(N), & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

定理 4.1.2 的刻画中所有量词的取值范围都是有限集，因此可以通过有限次计算进行算法化检验。为了构建最高效的算法，必须考虑并检查第2章中给出的必要条件：

- 博弈必须是平衡的（定理 1.3.3），
- 单元素联盟必须是精确的（命题 2.3.2），
- 严格关键精确联盟必须是核心描述的（命题2.3.14），
- 任何可行集族都不可能是阻塞可行族（引理 2.3.5），

并利用已知的充分条件：

- 弱可扩展博弈具有稳定核心（引理 2.3.9），
- 关键精确可扩展博弈具有稳定核心（Shellshear 和 Sudhölter [90]）。

为此，有必要

- 检查一个联盟是否精确（算法 2），
- 计算严格关键精确联盟的集合（算法 5），
- 计算可扩展联盟的集合（算法 4），
- 计算可行集族（算法 3）。

完整算法的伪代码如下。用 val(P) 表示线性规划 (P) 的最优值；对于联盟 $S \in \mathcal{N}$，用 $\mathbb{B}_S(\mathcal{F}_S)$ 表示满足 $\mathcal{B} \cap \mathcal{I}_S \neq \emptyset$ 的极小平衡集合 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_S$（见 (4.1.1)）。

算法 6 核心稳定性检验算法

要求： 联盟函数 v，极小平衡集合 $\mathbb{B}(N)$
确保： 布尔值：'(N, v) 存在稳定核心'

过程 IsCoreStable(v, $\mathbb{B}(N)$)
  对于 $\mathcal{B} \in \mathbb{B}(N)$ **执行** ▷ 检查平衡性
    如果 $\sum_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S^{\mathcal{B}} v(S) > v(N)$ **则**
      返回 False
    对于 $i \in N$，**执行** ▷ 正在检查单元素联盟的精确性
      如果不是 IsExact($\{i\}$, v, $\mathbb{B}(N)$) **则**
        返回 False
  $\mathcal{VE}(v) \leftarrow \emptyset$, $\mathcal{E}xt(v) \leftarrow \emptyset$
  对 $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ **执行**
    如果 IsStrictlyVitalExact(S, v, $\mathbb{B}(N)$) **则**
      将 S 添加到 $\mathcal{VE}(v)$
    如果 IsExtendable(S, v, $\mathbb{B}(N)$) **则**
      将 S 添加到 $\mathcal{E}xt(v)$
  如果不IsCoreDdescribing($\mathcal{VE}(v)$, v) **那么** ▷ 参见命题2.3.14
    返回 False
  对于$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{VE}(v)$，使得 $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathbb{B}(N)$ **执行**
    如果IsFeasible($\mathcal{Q}$, $\mathcal{VE}$, v, $\mathbb{B}(N)$) **那么**
      如果$\mathcal{Q} = \{S_1, S_2\}$ 使得 $S_1 \cup S_2 = N$ **那么** ▷ 参见引理 2.3.5
        返回 False
      else
        对于 $S \in \mathcal{E}xt(v) \cap \mathcal{Q}$ **执行** ▷ 参见命题 2.3.7
          如果 S 在 $\mathcal{Q}$ 中关于包含关系是极小的，**那么**
            转到下一个可行集族 $\mathcal{Q}$
        若$\max_{S \in \mathcal{Q}} \min_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}_S(\mathcal{F}_S)} \text{val}(P_{\mathcal{BQ}}) = v(N)$ **则**
          返回 False
  返回 True

我们用一些示例来说明该算法，这些示例在以下计算设备上运行：Apple M1 芯片、3.2 GHz 中央处理器、16 GB 随机存取存储器。我们使用极小平衡集求解了该线性规划。

例 4.1.3 （4人博弈）。令 (N, v) 为由 $N = \{a, b, c, d\}$ 定义的博弈，并且 $v(S) = 0.6$ 当 $|S| = 3$ 时，$v(N) = 1$，而 $v(T) = 0$ 在其他情况下。算法返回的结果是，集合 $\mathcal{E}(v)$ 仅包含 N。严格关键精确联盟的集合为

$$\mathcal{VE}(v) = \{\{i\} \mid i \in N\} \cup \{N \setminus \{i\} \mid i \in N\}.$$

集合 $\{\{a, c, d\}, \{a, b, c\}\}$ 是一个阻塞可行族，因此根据引理 2.3.5，核心不是稳定的。此例的 CPU 时间为 0.1 秒。$\diamondsuit$

例 4.1.4 （5人博弈）。令 (N, v) 为 Biswas、Parthasarathy、Potters 和 Voorneveld [16]，在 $N = \{a, b, c, d, e\}$ 上定义的精确博弈，其定义为 $v(S) = \min\{x(S)\ y(S)\}$，其中 $x = (2, 1, 0, 0, 0)$ 且 $y = (0, 0, 1, 1, 1)$。该博弈的核心是 x 和 y 的凸包。对于此博弈，有效真联盟的集合为

$$\mathcal{E}(v) \setminus \{N\} = \{\{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}\}.$$

严格关键精确联盟的集合为 $\mathrm{VE}(v) = \mathrm{E}(v) \cup \{\{i\} \mid i \in N\}$。不包含极小可扩展联盟的可行集族，是 $\{\{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}\}$ 的非空子集。集合 $\{\{a, c, e\}, \{a, d, e\}\}$ 不满足定理 4.1.2 的条件，因此核心不是稳定集。此例的 CPU 时间为 1.5 秒。

设（N，v'）为同一个博弈，区别仅在于通过设置 $v'(N) = 3.1$，将预分配的仿射子空间平移。集合 $\mathcal{E}(v')$ 变为 $\{N\}$，而核心是以下各点的凸包：

$$C(v') = \mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 1 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.9 \end{pmatrix} \right\}$$

严格关键精确联盟的集合现在包含 14 个联盟，而先前的博弈有 11 个严格关键精确联盟。新增的联盟为 $\{a, c\}$、$\{a, d\}$、$\{a, e\}$。不包含极小可扩展联盟的可行集族数量大幅增加至 51 个，但其中没有一个是阻塞可行族。最大的可行集族包含 6 个严格关键精确联盟。估计算法检查这个特定集合是否满足定理 4.1.2 条件所需的时间超过 200 小时。$\diamondsuit$

例 4.1.5 （6人博弈）。 设 (N, v) 为 Studený 和 Kratochvíl [95] 在 $N = \{a, b, c, d, e, f\}$ 上定义的博弈，其中 $v(N) = 10$ 并

$v(S)$	对所有 S 属于
$v(S) = 2$	$\{b, e\}$, $\{c, e\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{b, e, f\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{a, b, d, f\}$, $\{a, b, e, f\}$, $\{b, d, e, f\}$, $\{a, b, d, e, f\}$
$v(S) = 3$	$\{c, d, e\}$
$v(S) = 4$	$\{a, c, e\}$, $\{a, c, f\}$, $\{c, d, f\}$, $\{c, e, f\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, c, d, e\}$, $\{c, f\}$, $\{a, c, d, f\}$, $\{a, c, e, f\}$, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$
$v(S) = 6$	$\{b, c, f\}$, $\{a, b, c, f\}$, $\{b, c, d, f\}$, $\{b, c, e, f\}$, $\{a, b, c, d, f\}$, $\{a, b, c, e, f\}$
$v(S) = 8$	$\{c, d, e, f\}$, $\{a, c, d, e, f\}$, $\{b, c, d, e, f\}$
$v(S) = 0$	否则。

集合 $\mathcal{E}(v)$ 仅由 N 组成。严格关键精确联盟的集合是

$$\{\{i\} \mid i \in N\} \cup \{\{b, e\}, \{c, f\}, \{a, c, e\}, \{b, c, f\}, \{a, b, d, f\}, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e, f\}\},$$

而不包含极小可扩展联盟的可行集族，是 $\{\{a, c, e\}, \{c, d, e, f\}, \{b, c, d, e\}\}$ 的非空子集。由于可行集族 $\{\{a, c, e\}, \{c, d, e, f\}\}$ 不满足定理 4.1.2 的条件，因此博弈的核心不是稳定集。此例的中央处理器时间为 18 分 12 秒，其中 43 秒用于计算一个含 6 名参与者的集合上的极小平衡集合。◊

4.2 支配锥与增广锥

本节中，设 (N, v) 是一个平衡博弈。设 x 是核心之外的一个预分配。那么，存在一个联盟 $S \in \mathcal{N}$，使得 $x(S) < v(S)$。通过将足够少量的钱从 S 之外的参与者重新分配给 S 中的参与者，我们或许能够构造一个通过 S 支配 x 的预分配。于是，任何不在核心中的预分配都被支配，而支配其他预分配的集合构成一个多胞体。此外，如果 x 是属于 $X_{\mathcal{Q}}$的预分配，那么对于 $\mathcal{Q}$ 中的每个联盟 S，都存在一个由支配性预分配构成的多胞体。如果这些多胞体之一与核心相交，那么该交集中的任何元素都是支配 x的核心元素。但如果这些多胞体均不与核心相交，那么核心就不是外部稳定的。这一观察简要呈现了本节将要讨论的刻画与算法。

接下来我们要研究的主要对象是支配锥和增广锥。我们说锥时，通常指仿射锥；但如果定义中可以明确辨认出顶点，我们就省略形容词仿射 。如需强调一个锥 $\vec{o}$ 有顶点，我们会称其为线性 锥。设

ϕ：$\mathbb{X}(v) \to 2^{\mathcal{N}}$ 为一个映射，它将每个预分配 x关联到联盟集

$$\phi(x) \coloneqq \{S \in \mathcal{N} \mid x(S) < v(S)\}.$$

换言之，$\phi(x)$ 是与 x 所属区域相对应的可行集族，即对于所有 $x \in \mathbb{X}(v)$，都有 $x \in X_{\phi(x)}$。

定义4.2.1. 设 x 是一个预分配，S 是一个联盟。我们用 $\delta_S(x)$ 表示 x 相对于 S的支配锥，其定义为

$$\delta_S(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{X}(v) \mid y_i > x_i, \text{ for all } i \in S\}.$$

支配锥 $\delta_S(x)$ 不仅包含支配 x的预分配，因为其中一些预分配对 S而言并不可负担，即存在某些 $y \in \delta_S(x)$，使得 $y(S) > v(S)$。特别地，只要 $S \notin \phi(x)$，集合 $\delta_S(x)$ 中就不包含任何支配x 的预分配。

定义4.2.2. 设 x 是一个预分配。我们用 $\mathrm{Aug}(x)$ 表示 x的增广锥，其定义为

$$\mathrm{Aug}(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{X}(v) \mid y(S) \geq x(S), \text{ for all } S \in \phi(x)\}.$$

增广锥 $\mathrm{Aug}(x)$ 表示所有这样的方向：沿这些方向平移 x，可以同时增加或保持 $\phi(x)$中所有联盟的支付。由于可行集族是不平衡的，根据命题3.2.3，$\mathrm{Aug}(x)$的非空性得以保证。

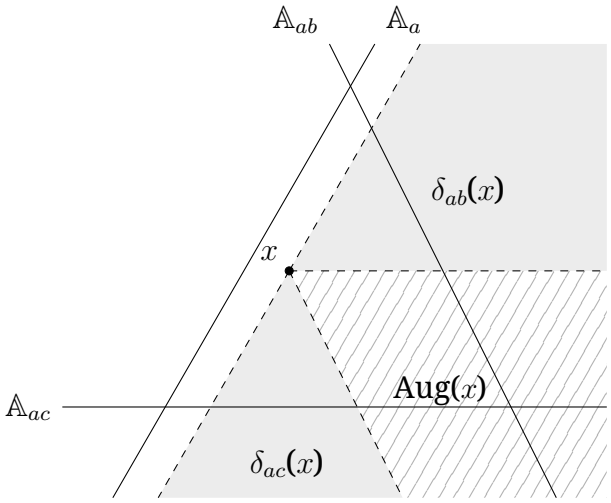


图 4.1：预分配 $x \in X_{\{ab,ac\}}$ 及其两个支配锥（灰色）和增广锥（虚线）。

在图 4.1 所示的情形中，增广锥与任何支配锥都不相交，因为它们是开集。因此，预分配 x 不会被核心元素支配，核心也不稳定。此外，正如我们在图 4.1 中所见，对 x 进行平移，使其仍处于 $X_{\{ab,ac\}}$ 中，并不会使这些锥相交。因此，$X_{\{ab,ac\}}$ 的任何预分配都不会被核心元素支配。设 ζ（x）为由

定义的

$$\zeta(x) \coloneqq \mathrm{Aug}(x) \cap \left(\bigcup_{S \in \phi(x)} \delta_S(x) \right).$$

定义 4.2.3. 设 $\mathcal{Q}$ 为一个可行集族。若对于所有 $x \in X_{\mathcal{Q}}$，都有 $\zeta(x) = \emptyset$，则称 $X_{\mathcal{Q}}$ 为一个盲点。

与盲点区域相对应的可行集族称为阻塞可行集族（见引理 2.3.5）。

引理 4.2.4. 设 (N, v) 为一个平衡博弈。核心 $C(v)$ 是稳定集，仅当对于所有预分配 $x \in \mathbb{X}(v)$，都有 $\zeta(x) \neq \emptyset$。

证明。 假设存在 $x \in \mathbb{X}(v)$，使得 $\zeta(x) = \emptyset$。那么，由于 $C(v) \subseteq \mathrm{Aug}(x)$， x 不被任何核心元素支配，因此核心不是稳定集。 □

设 x 是核心之外的一个预分配。那么， $\phi(x) \neq \emptyset$。若 $\zeta(x) \neq \emptyset$，则存在一个预分配，使 $\phi(x)$ 中所有联盟都获得更高的支付；通过支配过程，该预分配对于某个 $S \in \phi(x)$ 是 “ 可达的 ”。并非总能找到一个支配 x 的预分配 y ，使 $\phi(x)$ 中所有联盟的支付都增加，图 4.1 展示了这一点。

命题 4.2.5. 设 Q 是一个可行集族，并设 $y \in X_{\mathcal{Q}}$ 满足 $\zeta(y) \neq \emptyset$。那么，对所有 $x \in X_{\mathcal{Q}}$，都有 $\zeta(x) \neq \emptyset$。

证明。 假设存在 $y \in X_{\mathcal{Q}}$、 $z \in \mathbb{X}(v)$ 和一个联盟 $S \in \mathcal{Q}$ ，使得$z \in \mathrm{Aug}(y) \cap \delta_S(y) \subseteq \zeta(y)$。令 $x \in X_{\mathcal{Q}}$。用 $\sigma = x - y$ 表示从y 到 x的侧支付。对所有 $i \in S$，都有

$$(z + \sigma)_i = z_i + \sigma_i > y_i + \sigma_i = (y + \sigma)_i = x_i.$$

因此， $z + \sigma \in \delta_S(x)$。此外，对所有 $T \in \mathcal{Q}$，都有

$$(z + \sigma)(T) = z(T) + \sigma(T) \geq y(T) + \sigma(T) = (y + \sigma)(T) = x(T).$$

因此， $z + \sigma \in \mathrm{Aug}(x) \cap \delta_S(x) \subseteq \zeta(x)$。 □

因此我们知道，对于给定的预分配 x，无法将其转化为另一个预分配 y ，使所有联盟 $S \in \phi(x)$ 都获得更高的支付，同时支配 x ，这仅取决于集合 $\phi(x)$。换言之，能否满足一个联盟集的支付要求，并不取决于先前支付的数值，而取决于该联盟集构成的集合系统。然而，一个集合是否可行取决于联盟函数 v。

定理 4.2.6。 设 Q 是一个可行集族。那么， $X_{\mathcal{Q}}$ 不是盲点，当且仅当存在一个联盟 $S \in Q$，使得 $Q \cup I_S$ 在 N上不平衡。

证明。 令 $x \in X_{\mathcal{Q}}$，并记 P 为多面体 $\mathrm{Aug}(x) \cap \delta_S(x)$。由于 P 是一个基本多面体，我们将与 P 相关联的博弈记为 $(\mathcal{F}_P, v_P)$。注意，对所有 $T \in \mathcal{F}_P$，都有 $v_P(T) = x(T)$。

我们假设 $P \neq \emptyset$。根据定理 2.2.2，$(\mathcal{F}_P, v_P)$ 是平衡的，且$\mathcal{I}_S \cap \mathcal{E}(\mathcal{F}_P, v_P) = \emptyset$。由于 $\mathcal{Q}$是可行的，根据引理 2.3.5，它是不平衡的。因此，如果存在一个极小平衡集 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_P$，它必定与$\mathcal{I}_S$相交。此外，

$$\sum_{T \in \mathcal{B}} \lambda_T v_P(T) = \sum_{T \in \mathcal{B}} \lambda_T x(T) = x(N) = v(N).$$

那么，由命题 2.1.8，我们有 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F}_P, v_P)$，但这与定理 2.2.2 矛盾。因此，$\mathcal{F}_P$ 是不平衡的。

现在假设不存在平衡集合 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_P$。那么由定理 2.2.2，对于所有预分配，集合 $P = \text{Aug}(x) \cap \delta_S(x)$ 都非空，并且对于所有 $x \in X_{\mathcal{Q}}$，我们有 $\zeta(x) \neq \emptyset$。

□

例 4.2.7. 考虑图 4.1 所示的博弈。可行集合为 $\mathcal{Q} = \{ab, ac\}$。取 $S = ab$。那么，集合系统为 $\mathcal{F}_S = \{ab, ac, a, b\}$，其中包含平衡集合 $\{ac, b\}$。对于 $T = ac$，集合系统为 $\mathcal{F}_T = \{ab, ac, a, c\}$，其中包含 $\{ab, c\}$。那么 $X_{\{ab,ac\}}$ 就是一个盲点。◊

这一结果有助于解决现实世界中无需外部干预的支付再分配问题。通常，要满足一组因某个预分配而不满、彼此又有重叠的联盟，可能十分复杂，因为计算的复杂度很高。此外，判断是否存在满足所有联盟的办法本身就很困难。假设存在外部干预，可以迫使参与者在不涉及支配的情况下接受某个预分配，那么对于任何由未获满足的联盟构成的不平衡集合，总存在一个能提高其支付的预分配。

然而，如果没有外部干预，我们需要一个联盟 S，使新的预分配提高 $\mathcal{Q}$ 中所有联盟的支付，并支配先前的预分配。定理 4.2.6 给出了一种刻画方法，只要已知极小平衡集合，就很容易将其实现为计算机程序。

此外，这一算法过程可以纳入算法 6，以剔除所有阻塞可行族。随后，算法会聚焦于仅包含满足 $\zeta(x) \neq \emptyset$ 的预分配 x 的区域。

最后，引理 4.2.4 的逆命题并不成立。事实上，考虑例 4.1.4 中定义在 $N = \{a, b, c, d, e\}$ 上的博弈 (N, v)，其定义为 $v(S) = \min\{x(S)\ y(S)\}$，其中$x = (2, 1, 0, 0, 0)$，且 $y = (0, 0, 1, 1, 1)$。集合 $\mathcal{Q} = \{ace, ade\}$ 是可行的，因为 $(1, 1, ½, ½, 0) \in X_{\mathcal{Q}} \neq \emptyset$；它也不会阻挡，因为参与者 b 不属于这些联盟中的任何一个，但它不满足定理 4.1.2 的条件。因此，存在一个 $x \in X_{\mathcal{Q}}$ 不被任何核心元素支配，即使 $\zeta(x) \neq \emptyset$。

4.3 向核心的投影

在上一节中，我们描述了一种刻画方法，可据此判断是否存在一种侧支付，能够同时改善某个联盟集合的支付；并可判断这种侧支付是否能由一个涉及该集合中某个联盟的支配过程来支持。本节中，我们要寻找从 $\mathbb{X}(v)$ 的一个仿射子空间到给定预分配之间欧几里得范数最小的侧支付。

考虑一个预分配 x、给定仿射子空间 $V \subseteq \mathbb{X}(v)$ 中的一个元素 y，以及满足 $x+\sigma = y$ 的侧支付 σ。寻找范数最小的侧支付，等价于针对给定的预分配 x 求解以下最小化问题 $\min_{y\in V}\|y-x\|$。根据欧几里得范数的定义，我们有

$$\arg\min_{y\in V} \|y-x\| = \arg\min_{y\in V} \sqrt{\sum_{i\in N}(y_i-x_i)^2} = \arg\min_{y\in V} \sum_{i\in N}(y_i-x_i)^2 .$$

根据希尔伯特投影定理（定理 1.1.5），元素 y 是 x 在 V上的（正交）投影。上式中的项（$y_i - x_i$）是侧支付 $\sigma = y - x$所引起的各个参与者支付的调整。因此，σ是在保持支付总额不变的同时，使各个参与者支付调整的平方和最小的侧支付。此外，根据希尔伯特投影定理，它是唯一具有这些性质的侧支付。为了确定这些侧支付，我们研究 $\mathbb{X}$（v）上的投影算子。

定义 4.3.1. 一个投影算子 P是一个幂等线性映射，即 $P \circ P = P$.

P的像：$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$，记作 $\mathsf{im}(P)$，在线性代数中称为列空间，是由 P的列张成的 $\mathbb{R}^N$ 子空间。于是，P 以空间 $\mathbb{R}^N$ 中的任意元素 x 作为输入，并将其映射为元素 $z \in \mathsf{im}(P)$；根据希尔伯特投影定理（定理 1.1.5），该元素是 $\mathsf{im}(P)$中距离 x 最近的元素。

注 4.3.2（四个基本子空间）。每个大小为 $n \times k$ 的矩阵 A a 都定义了四个子空间，称为 A 的四个基本子空间，它们是

- A的列空间：$\mathrm{im}(A) := \{Ay \mid y \in \mathbb{R}^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$,
- A 的行空间：$\mathsf{im}(A^\top) := \{A^\top x \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^k$,
- A 的核：$\mathsf{ker}(A) := \{y \in \mathbb{R}^k \mid Ay = 0\}$,
- A的左核：$\ker(A^\top) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^\top x = 0\}$。

这四个子空间之间存在如下关系（参见事实 2.25, [7]）：

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{im}(A) \oplus \ker\left(A^\top\right) \qquad \text{and} \qquad \mathbb{R}^k = \mathrm{im}\left(A^\top\right) \oplus \ker(A).$$

在我们的情形中，我们关注由 $\mathbb{X}(v)$ 的子集定义的子空间，其中联盟集合族 $\mathcal{Q}$ 是有效的。根据命题2.3.14，我们在本节中始终假设联盟集合族是严格关键精确联盟。回忆 $\eta^S = \mathbf{1}^S - \frac{|S|}{n}\mathbf{1}^N$，并用 $\langle\mathcal{Q}\rangle$ 表示由向量集 $\{\eta^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$张成的 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ 子空间；只要$\mathcal{Q} = \{S\}$，就简写为$\langle S\rangle$。回忆 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$ 是 $\mathbb{X}(v) \subseteq \mathbb{R}^N$ 由 $\mathbb{A}_\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{X}(v) \mid x(S) = v(S)\ \forall S \in \mathcal{Q}\}$ 定义的子空间。

$\mathbb{X}(v)$ 中的每个投影都自然地分解为两个元素之和：一个预分配和一个侧支付。回想一下，侧支付集合 Σ 是 $\mathbb{R}^N$ 的线性子空间，它平行于 $\mathbb{X}(v)$。对于每个联盟 $S \in \mathcal{Q}$，仿射子空间$\mathbb{A}_S$ 都对应一个包含于 Σ 中的线性子空间 $\mathbb{H}_S$，其维数与$\mathbb{A}_S$相同，该子空间定义如下：

$$\mathbb{H}_S := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(S) = 0\}.$$

集合 $\{\mathbb{H}_S \mid S \in \mathcal{N}\}$ 构成了 $\mathbb{R}^N$ 的受限共振排列，且不依赖于博弈 (N, v)。另请注意，η^S 是子空间 $\mathbb{H}_S$ 的一个法向量。对于向量空间 E 的任意子空间 V，V 的正交补记为$V^\perp$，定义如下：

$$V^\perp := \{x \in E \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in V\}.$$

有限维向量空间 E 的任意子空间 V 都会诱导出 E 的一个正交分解，即对于每个元素 $x \in E$，都可以唯一地写成 $x = y + z$，其中 $y \in V$ 且 $z \in V^\perp$。

注释4.3.3。设 P 为一个投影算子。由于元素的投影是唯一的，任意元素 $x \in E$ 都可以唯一地分解为 $x = y + z$，其中 $y = Px$ 且 $z = x - Px =$（$I_n - P$）x，其中 $y \in$ 属于 $\mathrm{im}(P)$，且 $z \in$ 属于 $\mathrm{im}(P)^\perp = \ker(P^\top)$（由注 4.3.2 可知）。因此，$I_n - P$ 是投影到 $\ker(P^\top)$ 上的投影算子。

设 V 是 Σ 的一个线性子空间。即使它也是 $\mathbb{R}^N$ 的一个线性子空间，接下来我们始终将正交补 $V^\perp$ 视为 Σ 的子集，即，

$$V^\perp = \{\sigma \in \Sigma \mid \langle \sigma, y\rangle = 0, \forall y \in V\}.$$

对于仿射子空间，我们没有一个定义良好的正交补对应概念，但仍然可以对其进行正交分解。

注释4.3.4. 设 S 是一个联盟。根据命题1.2.2，任意预分配 x都可以分解为 $x = \pi_{\mathbb{A}_S}(x) - \gamma_S(x)\eta^S$。自然地，$\pi_{\mathbb{A}_S}(x)$属于 $\mathbb{A}_S$，而$-\gamma_S(x)\eta^S$ 属于$\langle S\rangle$，因此我们得到分解 $\mathbb{X}(v) = \mathbb{A}_S \oplus \langle S\rangle$。

本节的主要目标是计算任意一个不属于核心的预分配在核心上的投影。根据希尔伯特投影定理，$x \in \mathbb{X}(v) \setminus C(v)$在核心上的投影，是距离 x最近的预分配 $y \in C(v)$。于是，y 属于核心的一个面 F，并且存在一个联盟集合$\mathcal{Q}$ 使得 $F \subseteq \mathbb{A}_\mathcal{Q}$。因此，本节的第一部分致力于研究 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$的非空性。

在第二部分，我们构造投影算子 $\pi_{\langle\mathcal{Q}\rangle}: \Sigma \to \langle\mathcal{Q}\rangle$，它将每个侧支付 σ 映射为其在$\langle\mathcal{Q}\rangle$上的投影。问题归结为寻找由 η^S构成的线性组合，其中 $S \in \mathcal{Q}$，使其与 σ的距离最近。

由此投影算子 $\pi_{\langle\mathcal{Q}\rangle}$，我们构造投影算子 $\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}: \mathbb{X}(v) \to \mathbb{A}_\mathcal{Q}$，它利用$\langle\mathcal{Q}\rangle^\perp$ 与 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$ 平行这一事实，将每个预分配映射为其在 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$上的投影。该投影算子用 η^S 表示，其中 $S \in \mathcal{Q}$，并给出了相应系数的精确公式。

在另一部分，我们根据给定预分配在联盟$\mathcal{Q}$上的超额，以及由集合$\{\eta^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$唯一确定的向量集，给出投影算子 $\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}: \mathbb{X}(v) \to \mathbb{A}_\mathcal{Q}$的替代表述。

此外，我们还给出一种算法，该算法将任意预分配 x与一个联盟集合$\mathcal{Q}$ 相关联，使得 $\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x)$ 属于核心。

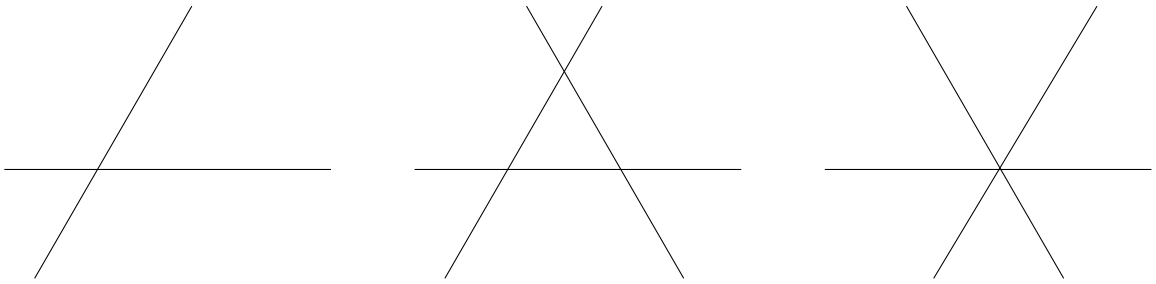
最后，我们利用这些公式和算法计算预分配与博弈核心之间的距离，并提出一个映射 $\mathbb{X}(v) \to \mathbb{R}$，它为每个预分配 x 赋予一个实数值，用以衡量 x 不属于核心的程度；我们将其应用于市场博弈。

4.3.1 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 的非空性

一般而言， $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 的非空性仅取决于$\mathcal{Q}$。

定义 4.3.5。 设 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{N}$ 为一个联盟集合。若$\mathcal{Q}$ 是一个线性无关的 集合，则称其为线性无关的 集合，其中 $\{\eta^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$ 构成一个线性无关集的向量。

不线性无关的集合称为相关集合。我们看到，当$\mathcal{Q}$ 线性无关时， $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 是非空的。然而，这一条件并不充分，如图 4.2 所示。



(a) 线性无关。 (b) 交集为空。 (c) 非空交集。

图 4.2：平面中超平面的不同构型。

定义 4.3.6。 如果对于所有非空的相关子集$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Q}$，都有 $\mathbb{A}_{\mathcal{T}} = \emptyset$，则称联盟函数 v 在集合$\mathcal{Q}$上非奇异。

设$\mathcal{Q} = \{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \mathcal{N}$是一个联盟集。我们分别用 H和 G表示由下式定义的矩阵

$$H = \begin{bmatrix} \eta^{S_1} & \ldots & \eta^{S_k} \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad G = H^\top H.$$

矩阵 G 称为集合$\mathcal{Q}$的格拉姆矩阵，其一般项满足 $g_{ij} = \langle \eta^{S_i}, \eta^{S_j} \rangle$。于是， G 囊括了有关$\mathcal{Q}$中联盟支付之间相互依赖和相关性的所有信息。如有需要，我们可以在记号中注明所考虑的集合，写作 $H_{\mathcal{Q}}$ 和 $G_{\mathcal{Q}}$。

标量积的对称性意味着格拉姆矩阵的对称性。此外，对于所有 $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}}$，都有

$$x^\top G x = x^\top H^\top H x = \langle Hx, Hx \rangle = \|Hx\|^2 \geq 0,$$

因此， G 是半正定的。我们可以利用格拉姆矩阵判断一个集合是否线性无关。

Proposition 4.3.7. 集合 Q 线性无关，当且仅当 G是非奇异的 $r.$

证明。 对所有 $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}}$, $x^\top G x \geq 0$，我们都有。因此 G 是半正定的，即其所有特征值均非负。要使 G 非奇异，就必须只有正特征值，也就是说， G 必须是正定的。因此，当且仅当对所有 $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}} \setminus \{\vec{o}\}$，

$$x^\top G x = \|Hx\|^2 = \left\| \sum_{S \in \mathcal{Q}} x_S \eta^S \right\|^2 > 0,$$

也就是说，当且仅当对所有 $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}} \setminus \{\vec{o}\}$，都有 $\sum_{S\in\mathcal{Q}} x_S \eta^S \neq 0$，这正是$\{\eta^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$ 为线性无关向量集的定义。 □

现在，我们已经对 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 的非空性给出了一个精确刻画，前提是 v 在其定义所在的集合系统上是非奇异的。这与我们关于投影到 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 上的公式涉及 G 的逆这一事实相符，稍后便会看到。

4.3.2 投影算子 $\pi_{\langle\mathcal{Q}\rangle}$： $\Sigma \to \langle\mathcal{Q}\rangle$ 的构造

由于 H 的列是法向量 η^S，因此 $\langle\mathcal{Q}\rangle$ 中的任意元素都可以写成 Hy，其中 $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}}$。直观地说，预分配 x 与其在 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 上的投影之间的侧支付，是法向量 η^S 的线性组合，其中 $S \in \mathcal{Q}$。现在，我们要寻找该线性组合的系数。给定侧支付 σ，我们希望找到使下式最小化的系数向量 $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}}$

$$\varphi_H(y) = \|\sigma - Hy\|^2 = (\sigma - Hy)^\top (\sigma - Hy) = \sigma^\top\sigma - y^\top H^\top\sigma - \sigma^\top Hy + y^\top Gy.$$

φ_H 的临界点是满足 $\nabla\varphi_H(y) = 0$ 的元素 $y \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}}$。下面给出三个梯度：

$$\nabla\left(y^\top H^\top\sigma\right) = H^\top\sigma, \qquad \nabla\left(\sigma^\top Hy\right) = H^\top\sigma, \qquad \nabla\left(y^\top Gy\right) = 2Gy,$$

由 ∇ 的线性性可得

$$\nabla\varphi_H(y) = 2Gy - 2H^\top\sigma.$$

于是，φ_H 的临界点满足所谓的正规方程，即

$$Gy = H^\top\sigma. \tag{4.3.1}$$

φ_H 的海森矩阵为 $\mathrm{Hess}(\varphi_H) = 2G$；当$\mathcal{Q}$ 线性无关时，它是正定的。因此存在唯一的临界点，它也是全局最小值。正规方程的唯一解y 确定了 σ 在$\langle\mathcal{Q}\rangle$上的投影，即 Hy。

为了处理正规方程等矩阵方程，由于并非所有矩阵都有逆，我们需要对矩阵的通常逆进行推广。

定理 4.3.8 (Penrose [70])。
对于任意矩阵 A，存在唯一的矩阵 X 满足

$$AXA = A, \qquad XAX = X, \qquad (AX)^\top = AX, \qquad \textit{and} \qquad (XA)^\top = XA.$$

这些方程称为*Penrose*方程，其解称为 A 的摩尔－彭若斯逆，或广义逆，记作 $A^\dagger$。我们注意到，如果 A 是非奇异的，则有 $A^\dagger = A^{-1}$。此外，如果 A 的列线性无关，则有

$$A^\dagger = \left(A^\top A\right)^{-1} A^\top,$$

如果 A 的行线性无关，则有

$$A^{\dagger} = A^{\top}\left(AA^{\top}\right)^{-1}.$$

当 A 的列线性无关时，矩阵 $A^{\dagger}$ 是 A 的左逆，因为 $A^{\dagger}A = \left(A^{\top}A\right)^{-1}A^{\top}A = I_n$。类似地，当 A 的行线性无关时，$A^{\dagger}$ 是右逆。那么，如果$\mathcal{Q}$ 线性无关，H 的摩尔－彭若斯逆矩阵为

$$H^{\dagger} = \left(H^{\top}H\right)^{-1}H^{\top} = G^{-1}H^{\top}.$$

然后，我们可以求解正规方程 (4.3.1)，并求得 $\pi_{\langle\mathcal{Q}\rangle}(\sigma)$：

$$y = G^{-1}H^{\top}\sigma = H^{\dagger}\sigma \qquad \text{and} \qquad \pi_{\langle\mathcal{Q}\rangle}(\sigma) = Hy = HH^{\dagger}\sigma.$$

4.3.3 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}$： $\mathbb{X}(v) \to \mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$投影算子的构造

我们已经利用矩阵 H 及其摩尔－彭若斯逆 $H^{\dagger}$，构造了到 $\mathrm{im}(H) = \langle\mathcal{Q}\rangle$ 的投影算子。我们的初始目标是构造一个投影算子，将所有预分配投影到仿射子空间 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$。我们引入 $b^{\mathcal{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}}$，对所有 $S \in \mathcal{Q}$ 定义如下：

$$b_S^{\mathcal{Q}} = v(S) - |S|\frac{v(N)}{n}.$$

设 $L = H^{\top}$。我们可以利用矩阵 L 和 $b^{\mathcal{Q}}$ 来描述 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$，如下：

$$\mathbb{A}_{\mathcal{Q}} = \left\{x \in \mathbb{X}(v) \mid Lx = b^{\mathcal{Q}}\right\}.$$

Σ 中平行于 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 的线性子空间因此为 $\{\sigma \in \Sigma \mid L\sigma = 0\} = \ker(L) \cap \Sigma$。由注 4.3.2 可知，$\mathbb{R}^N = \langle\mathcal{Q}\rangle \oplus \ker(L)$。于是，$\pi_{\ker(L)} = I_n - \pi_{\langle\mathcal{Q}\rangle}$。为了从 $\pi_{\ker(L)}$ 推导出 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}$，我们使用以下引理。

引理 4.3.9 (Bauschke 和 Combettes [7])。
设 K 是 $\mathbb{R}^N$ 的非空闭凸子集，并设 x、$y \in \mathbb{R}^N$。那么

$$\pi_{y+K}(x) = y + \pi_K(x - y).$$

利用引理 4.3.9，对于任意 $y \in \mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$，有

$$\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) = y + \pi_{\ker(L)}(x - y) = y + \left(I_n - HH^{\dagger}\right)(x - y) = x - HG^{-1}L\,(x - y).$$

事实上，$\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 的任意元素都可以写成 $y + z$，其中 $z \in \ker(L)$，因为 $\ker(L)$ 中的元素不会改变联盟 $\mathcal{Q}$ 的支付。由于 $y \in \mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$，我们有 $Ly = b^{\mathcal{Q}}$。记 $e(\mathcal{Q}\ x) \in \mathbb{R}^{\mathcal{Q}}$ 为如下向量：对于所有 $S \in \mathcal{Q}$，定义为$e(\mathcal{Q}\ x)_S = e(S, x)$。

The理 4.3.10. 设 Q 为一个线性无关集合。对于所有 $x \in \mathbb{X}(v)$，我们有 e

$$\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) = x + \sum_{S \in \mathcal{Q}} \gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)\eta^S,$$

其中 $\gamma_S^{\mathcal{Q}}(x) = (G^{-1}e(\mathcal{Q}\ x))s$。

证明。为证明该定理，我们使用仿射子空间的投影定理。设 x为一个预分配。首先，我们来证明 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) \in \mathbb{X}(v)$。我们有 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)(N) = x(N) + \sum_{S\in\mathcal{Q}} \gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)\eta^S(N) = v(N)$。此外，注意到

$$L(x-y) = Lx - b^{\mathcal{Q}} = -e(\mathcal{Q}, x).$$

现在，我们来证明 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)$ 属于 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$，也就是说，$L\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) = b^{\mathcal{Q}}$:

$$L\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) = L\left(x + HG^{-1}e(\mathcal{Q}, x)\right) = Lx - LHG^{-1}\left(Lx - b^{\mathcal{Q}}\right).$$

由于 $L = H^T$，我们有 $LH = G$，由此可得

$$L\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) = Lx - \left(Lx - b^{\mathcal{Q}}\right) = b^{\mathcal{Q}},$$

因此 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) \in \mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$。现在来证明 $x - \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)$ 与 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 正交。记 $\gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)$ 为坐标 $(G^{-1}e(\mathcal{Q}\ x))s$。对于所有 $y \in \mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$，我们有

$$-\langle y - \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x), x - \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)\rangle = \sum_{S\in\mathcal{Q}} \gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)\langle y - \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x), \eta^S\rangle.$$

由于 y和 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)$ 均属于 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$，我们有 $y(N) = v(N) = \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)(N)$，并且对于所有 $S \in \mathcal{Q}$，有 $y(S) = \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)(S)$。于是，$\langle y, \eta^S\rangle = \langle \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)\ \eta^S\rangle$，最后

$$-\langle y - \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x), x - \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)\rangle = \sum_{S\in\mathcal{Q}} \gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)\left(\langle y, \eta^S\rangle - \langle \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x), \eta^S\rangle\right) = 0,$$

由此根据投影定理完成证明。 □

至此，我们得到了一个闭式公式，可用于将任意给定的预像 x 投影到仿射子空间 $\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$上，前提是$\mathcal{Q}$ 是一个独立集合。该公式无需迭代计算，只需几行代码即可实现。主要的算法工作量在于计算格拉姆矩阵 G的逆。为避免这一步，可以使用现有的线性方程组求解器，求出满足以下条件的 $\gamma^{\mathcal{Q}}(x)$

$$G\gamma^{\mathcal{Q}}(x) = e(\mathcal{Q}, x). \tag{4.3.2}$$

注释 4.3.11（克拉默法则 [25]）。我们可以使用克拉默法则求解线性方程组 (4.3.2)，它将 $\gamma^S(x)$ 的坐标表示为G的行列式，其中G称为格拉姆矩阵 （$\mathcal{Q}$的）。令 G_x^S 表示这样一种矩阵形式：将由所有涉及 η^S 的内积组成的列替换为向量 $e(\mathcal{Q}\ x)$，即，

$$G_x^{S_i} = \begin{bmatrix} \|\eta^{S_1}\|^2 & \dots & \langle\eta^{S_1}, \eta^{S_{i-1}}\rangle & e(S_1, x) & \langle\eta^{S_1}, \eta^{S_{i+1}}\rangle & \dots & \langle\eta^{S_1}, \eta^{S_k}\rangle \\ \langle\eta^{S_2}, \eta^{S_1}\rangle & \dots & \langle\eta^{S_2}, \eta^{S_{i-1}}\rangle & e(S_2, x) & \langle\eta^{S_2}, \eta^{S_{i+1}}\rangle & \dots & \langle\eta^{S_2}, \eta^{S_k}\rangle \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \langle\eta^{S_j}, \eta^{S_1}\rangle & \dots & \langle\eta^{S_j}, \eta^{S_{i-1}}\rangle & e(S_j, x) & \langle\eta^{S_j}, \eta^{S_{i+1}}\rangle & \dots & \langle\eta^{S_j}, \eta^{S_k}\rangle \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \langle\eta^{S_k}, \eta^{S_1}\rangle & \dots & \langle\eta^{S_k}, \eta^{S_{i-1}}\rangle & e(S_k, x) & \langle\eta^{S_k}, \eta^{S_{i+1}}\rangle & \dots & \|\eta^{S_k}\|^2 \end{bmatrix}$$

克拉默法则给出

$$\gamma_S^{\mathcal{Q}}(x) = \frac{\det G_x^S}{\det G},$$

因此，任意预分配 x 的投影算子公式为

$$\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x) = x + \frac{1}{\det G} \sum_{S \in \mathcal{Q}} \det G_x^S \cdot \eta^S.$$

克拉默法则在此处的重要性主要体现在理论考量上。尽管近年来克拉默法则的计算复杂度已大幅降低（参见 Habgood 和 Arel [43]），但求解系数矩阵为对称正定矩阵的线性方程组时，仍优先采用乔列斯基分解。

例 4.3.12。我们应用定理 4.3.10 和克拉默法则，求 $x \in \mathbb{X}(v)$ 在联盟 S 的 $\mathbb{A}_S$ 上的投影。我们有 $G = \left[\|\eta^S\|^2\right]$，且 $G_x^S = \left[e(S,\ x)\right]$。由此可得

$$\pi_{\mathbb{A}_S}(x) = x + \frac{1}{\det G} \sum_{S \in \{S\}} \det G_x^S \cdot \eta^S = x + \frac{e(S,x)}{\|\eta^S\|^2} \eta^S,$$

这与命题1.2.2的公式一致。 ◊

4.3.4 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}:\ \mathbb{X}(v) \to \mathbb{A}_{\mathcal{Q}}$ 的替代公式

可以用一组新的向量以更简单的方式表示给定预分配的投影，这组向量由$\{\eta^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$唯一确定。用 δ_{ij} 表示克罗内克δ，其定义为：若 $i = j$ 则为 $\delta_{ij} = 1$，否则为 $\delta_{ij} = 0$。

定义 4.3.13。设$\{e_1, \ldots, e_k\}$ 和$\{f_1, \ldots, f_k\}$ 是中的两个向量集 $\mathbb{R}^N$。如果它们满足$\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$，则称它们构成一个双正交系统。

双正交系统的一个常见例子是由欧几里得空间的一组基及其对偶基构成的向量对。于是，为简便起见，如果这些向量集线性无关，我们就称$\{f_1, \ldots, f_k\}$ 是$\{e_1, \ldots, e_k\}$ 的对偶基，因为它属于 span($\{e_1, \ldots, e_k\}$)。

命题 4.3.14. 设 $\{e_1, \ldots, e_k\}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中一组线性无关的向量，$\{f_1, \ldots, f_k\}$ 是 $\{e_1, \ldots, e_k\}$ 的一组对偶基。令 $E = \left[e_1 \ \ldots \ e_k\right]$ 和 $F = \left[f_1 \ \ldots \ f_k\right]$，以及 $G^E = E^\top E$ 和 $G^F = F^\top F$。以下等式成立。

$$E^\top F = F^\top E = I_k, \qquad and \qquad \left(G^E\right)^{-1} = G^F.$$

证明。让我们考察 $E^\top F$ 的各项。根据双正交系统的定义，我们得出 $\left(E^\top F\right)_{ij} = e_i, f_j = \delta_{ij}$，以及 $\left(F^\top E\right)_{ij} = f_i, e_j = \delta_{ij}$，于是 $E^\top F = I_k = F^\top E$。现在证明 $\left(G^E\right)^{-1} = G^F$。记 $K = \{1, \ldots, k\}$，并令 $x \in$ span($\{e_1, \ldots, e_k\}$)。我们分别用 $x = \sum_{i \in K} \alpha_i e_i$ 和 $x = \sum_{i \in K} \beta_i f_i$ 表示 x 在基 $\{e_1, \ldots, e_k\}$ 和 $\{f_1, \ldots, f_k\}$ 下的坐标。我们分别用 g_{ij}^E 和 g_{ij}^F 表示 G^E 和 G^F 的一般项。我们可以表示坐标.....

一个基下的坐标关于另一个基下的坐标的表达式如下:

$$\alpha_p = \sum_{i\in K} \alpha_i \langle e_i, f_p\rangle = \langle x, f_p\rangle = \sum_{i\in K} \beta_i \langle f_i, f_p\rangle = \sum_{i\in K} g^F_{ip}\beta_i, \qquad \forall p \in K,$$
$$\text{and} \qquad \beta_q = \sum_{j\in K} \beta_j \langle f_j, e_q\rangle = \langle x, e_q\rangle = \sum_{j\in K} \alpha_j \langle e_j, e_q\rangle = \sum_{j\in K} g^E_{jq}\alpha_j, \qquad \forall q \in K.$$

结合这两个表达式可得

$$\alpha_p = \sum_{i\in K} g^F_{ip}\left(\sum_{j\in K} g^E_{ji}\alpha_j\right) = \sum_{j\in K}\left(\sum_{i\in K} g^E_{ji}g^F_{ip}\right)\alpha_j = \sum_{j\in K}\left(G^E G^F\right)_{jp}\alpha_j, \qquad \forall p \in K.$$

于是，我们有 $\left(G^E G^F\right)_{ij} = \delta_{ij}$；对 β 进行相同的计算可得 $\left(G^F G^E\right)_{ij} = \delta_{ij}$，因此 G^F 是 G^E 的逆。

□

设 $\mathcal{Q} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ 是一个线性无关的集合。我们用 $\{h^{S_1}, \ldots, h^{S_k}\}$表示$\{\eta^{S_1}, \ldots, \eta^{S_k}\}$的对偶基。令 $H^\circ = \begin{bmatrix} h^{S_1} & \ldots & h^{S_k}\end{bmatrix}$。

引理 4.3.15. 设 Q 是一个联盟的独立集合。那么

$$h^{S_j} = \sum_{i\in K} g^{[-1]}_{ij}\eta^{S_i} \qquad and \qquad H^\circ = HG^{-1} = L^\dagger,$$

其中 $g^{[-1]}_{ij}$ 表示 G^{-1} 的一般项。

证明。第二个事实只是第一个事实用矩阵表述的形式，因此我们只证明第一个事实。令 $x \in \langle\mathcal{Q}\rangle$，并分别用 $x = \sum_{S\in\mathcal{Q}} \alpha_S \eta^S$ 和 $x = \sum_{S\in\mathcal{Q}} \beta_S h^S$ 表示 x 在基 $\{\eta^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$ 和 $\{h^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$ 下的坐标。根据命题 4.3.14，有

$$\alpha_{S_p} = \sum_{i\in K} \alpha_{S_i}\langle \eta^{S_i}, h^{S_p}\rangle = \langle x, h^{S_p}\rangle = \sum_{i\in K} \beta_{S_i}\langle h^{S_i}, h^{S_p}\rangle = \sum_{i\in K} g^{[-1]}_{ip}\beta_{S_i}, \qquad \forall p \in K.$$

令除 $\beta_{S_j} = 1$ 外的所有系数 β_S 均为 0，我们得到 $\alpha_{S_p} = g^{[-1]}_{jp}$ 对所有 $p \in K$ 均成立。于是，$h^{S_j} = x = \sum_{i\in K} g^{[-1]}_{ij}\eta^{S_i}$。我们可以将其改写为

$$h^{S_j} = \eta^{S_1} g^{[-1]}_{1j} + \eta^{S_2} g^{[-1]}_{2j} + \ldots + \eta^{S_k} g^{[-1]}_{kj} = \begin{bmatrix}\eta^{S_1} & \ldots & \eta^{S_k}\end{bmatrix}\left(G^{-1}\right)^{\text{col}}_j,$$

其中 $(G^{-1})^{\text{col}}_j$ 表示 G^{-1} 的第 j 列，于是有 $H^\circ = HG^{-1}$。由于 L 的各行线性无关，我们有

$$L^\dagger = L^\top\left(LL^\top\right)^{-1} = H\left(H^\top H\right)^{-1} = HG^{-1} = H^\circ,$$

至此，证明完毕。 □

利用引理 4.3.15，我们可以改写投影算子的公式。

Th定理 4.3.16。 设 Q 是一个独立集合。对于所有 $x \in \mathbb{X}(v)$，我们有

$$\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x) = x + \sum_{S\in\mathcal{Q}} e(S, x)h^S.$$

证明。 根据定理 4.3.10，我们已经有 $\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x) = x + HG^{-1}e(\mathcal{Q}\ x)$。根据引理 4.3.15，我们有 $HG^{-1} = H^\circ$，因此，

$$\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x) = x + H^\circ e(\mathcal{Q}, x) = x + \sum_{S\in\mathcal{Q}} e(S, x)h^S.$$

□

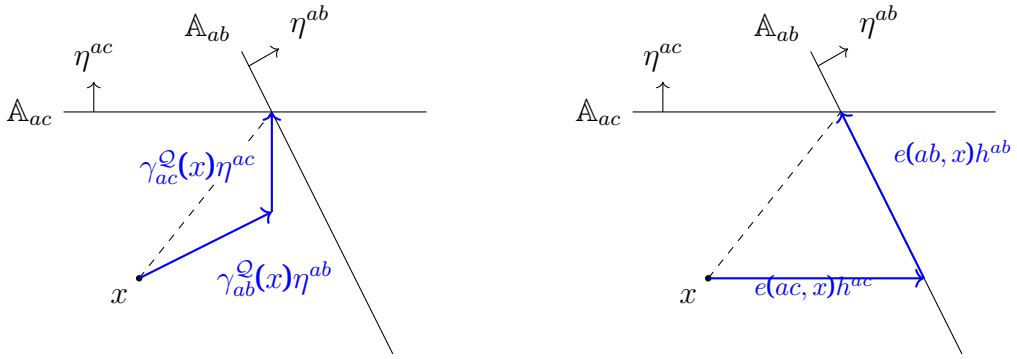


图 4.3： x 与其在 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$ 上的投影之间侧支付的分解，其中 $\mathcal{Q} = \{ab,\ ac\}$。

设$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{N}$线性无关。我们知道，投影到 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$ 与给定预分配之间的侧支付，是$\{\eta^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$或$\{h^S \mid S \in \mathcal{Q}\}$的法向量的线性组合，如图 4.3 所示。

4.3.5 对给定预分配使用适当的投影算子

现在假设$\mathcal{Q}$ 是可行的，但不是线性无关的。设(N, v)是一个在$\mathcal{Q}$上非奇异的平衡博弈。则仿射子空间 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$ 为空，并且显然无法选出独立子集$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Q}$，使得对所有 $x \in X_\mathcal{Q}$，都有$\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{T}}(x) \in C(v)$。此外，满足此性质的独立子集可能有多个，而且相对于包含关系，它们可能不是极大的。

下面的结果是构造一种算法的第一步，该算法用于寻找适当的独立子集$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Q}$，并将命题 1.2.5 推广到一般情形。设$\mathcal{Q}$ 是一个独立集合，$T \notin \mathcal{Q}$ 是一个联盟，且 $x \in \mathbb{X}(v)$。我们定义

$$\chi_\mathcal{Q}(T, x) = \sum_{S\in\mathcal{Q}} \det G^S_x \langle \eta^S, \eta^T\rangle - e(T, x)\ \det G.$$

Pr命题 4.3.17. 设 $Q \subseteq N$ 线性无关，$T \in N \setminus Q$ 和 $x \in \mathbb{X}(v)$。该 n

$$\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x) \in \mathbb{A}^{\geq}_T \quad \textit{if and only if} \quad \chi_\mathcal{Q}(T, x) \geq 0.$$

证明。 首先，我们研究 T 在投影到 $\mathbb{A}_\mathcal{Q}$处的超额：

$$e(T, \pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x)) = v(T) - x(T) - \sum_{S\in\mathcal{Q}} \gamma^\mathcal{Q}_S(x)\eta^S(T).$$

使用克拉默法则（见注释 4.3.11）可得

$$e(T, \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x)) = e(T, x) - \sum_{S \in \mathcal{Q}} \frac{\det G_x^S}{\det G} \langle \eta^S, \eta^T \rangle = -(\det G)^{-1} \chi_{\mathcal{Q}}(T, x).$$

当且仅当 $e(T, \pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{Q}}}(x))$ 非正时，投影落入 $\mathbb{A}_T^{\geq}$，因此当且仅当 $\chi_{\mathcal{Q}}(T, x)$ 非负时亦然。 □

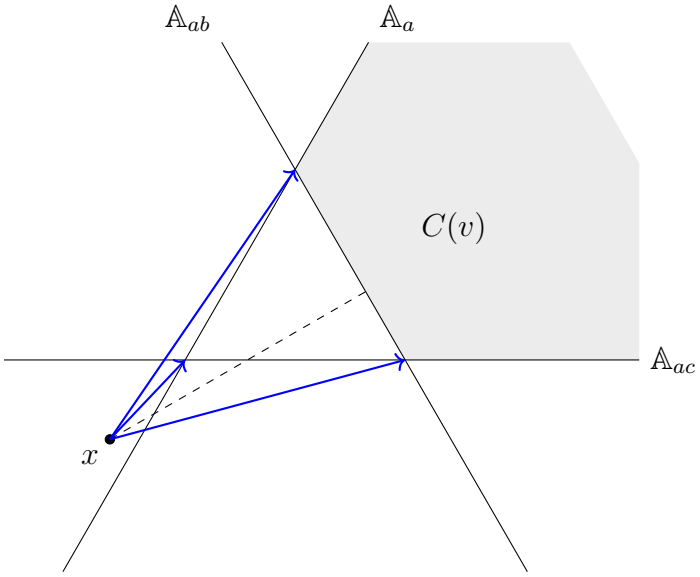


图4.4：对于所有极大独立集$\mathcal{T} \subseteq \{ab, ac, a\}$，在 $\mathbb{A}_{\mathcal{T}}$ 上的投影，以及在核心上的投影。

现在，我们有了一个判定方法，可以检查到仿射子空间 $\mathbb{A}_{\mathcal{T}}$ 的投影是否与所有仿射超平面 $\mathbb{A}_S$ 相交或落入其中，其中 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Q}$，$S \in \mathcal{Q}$。

这种判定方法的一个缺点是频繁使用行列式。但 $\det G_x^S$ 的计算可以通过拉普拉斯展开公式，利用格拉姆矩阵来完成。要计算这些格拉姆矩阵的行列式，我们使用以下结果。

命题 4.3.18。 设 Q 是一个线性无关集合，且 $V = \{v_S \mid S \in Q\}$ 是 $\langle Q \rangle$ 的标准正交基。那么，

$$\det G = \left(\prod_{S \in \mathcal{Q}} v_S(S) \right)^2.$$

证明。 该证明基于通过格拉姆–施密特过程对 H 进行 QR 分解。事实上，对 $H = QR$ 进行 QR 分解可得到正交矩阵 Q，其列构成<存在于> $\mathcal{V} = \{v_{S_1}, \ldots, v_{S_k}\}$ $\langle \mathcal{Q} \rangle$的标准正交基，以及一个上三角矩阵

R 定义为

$$R = \begin{bmatrix} \langle v_1, \eta^{S_1} \rangle & \langle v_1, \eta^{S_2} \rangle & \langle v_1, \eta^{S_3} \rangle & \dots & \langle v_1, \eta^{S_k} \rangle \\ 0 & \langle v_2, \eta^{S_2} \rangle & \langle v_2, \eta^{S_3} & \dots & \langle v_2, \eta^{S_k} \rangle \\ 0 & 0 & \langle v_3, \eta^{S_3} \rangle & \dots & \langle v_3, \eta^{S_k} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \langle v_k, \eta^{S_k} \rangle \end{bmatrix}.$$

因此， R的行列式为 $\det R = \prod_{S \in \mathcal{Q}} \langle v_S, \ \eta^S \rangle = \prod_{S \in \mathcal{Q}} v_S(S)$，因为对于所有 $S \in \mathcal{Q}$，都有 $v_S \in \langle \mathcal{Q} \rangle \subseteq \Sigma$。根据行列式的乘法性，我们有

$$\det G = \det \left(H^\top H \right) = \det \left(R^\top Q^\top Q R \right) = (\det R)^2,$$

由此得到 $\det G = \left(\prod_{S \in \mathcal{Q}} v_S(S)\right)^2$。 □

将此结果与格拉姆–施密特过程结合，得到算法7，其复杂度为 $\mathcal{O}(nk^2)$，比通常用于计算行列式的算法稍慢；这些算法的复杂度为$\mathcal{O}(k^3)$。不过，使用该算法的目的并非直接计算格拉姆矩阵，而是通过利用 $S \in \mathcal{Q}$更新集合 $\mathcal{Q} \setminus S$的格拉姆矩阵，从而推导出集合 $\mathcal{Q}$的格拉姆矩阵。在接下来的结果中，我们给出一个到 Σ 中直线上的投影算子，并在计算格拉姆矩阵的算法中使用它。

引理 4.3.19。 设 S 是一个联盟，且 $\sigma \in \Sigma$ 是满足$\|\sigma\| = 1$的侧支付。那么，将 η^S 投影到$\mathrm{span}(\sigma)$ 上得到

$$\pi_{\mathrm{span}(\sigma)}(\eta^S) = \sigma(S) \cdot \sigma.$$

证明。 直线上的常用投影算子给出

$$\pi_{\mathrm{span}(\sigma)}(\eta^S) = \frac{\langle \eta^S, \sigma \rangle}{\langle \sigma, \sigma \rangle} \sigma = \langle \eta^S, \sigma \rangle \sigma.$$

由于 σ是侧支付，我们有 $\langle \mathbf{1}^N, \sigma \rangle = \sigma(N) = 0$。于是，只需

$$\langle \eta^S, \sigma \rangle \sigma = \left(\langle \mathbf{1}^S, \sigma \rangle - \frac{|S|}{n} \langle \mathbf{1}^N, \sigma \rangle \right) \sigma = \langle \mathbf{1}^S, \sigma \rangle \sigma = \sigma(S) \cdot \sigma.$$

□

算法7 格拉姆矩阵 $\det G$ 计算

要求： $\mathcal{Q}$的格拉姆矩阵 $\det G$，$\langle \mathcal{Q} \rangle$的一组标准正交基$\mathcal{V}$，一个联盟 $S \notin \mathcal{Q}$**确保：** $\mathcal{Q}$ 的格拉姆矩阵 $\det G_* \cup \{S\}$，$\mathcal{Q} \cup \{S\}$的一组标准正交基$\mathcal{V}'$ 1: **过程** UpdateGramian($\mathcal{Q}$, S)2: 令 $v_S \leftarrow \eta^S$3: **对于** $v_T \in \mathcal{V}$ **执行**4: $v_S \leftarrow v_S - v_T(S) \cdot v_T$

▷ 见引理 4.3.19

5: **如果** $\|v_S\| = 0$ **则**6: **返回** $\det G_* = 0$

7: **否则**8: $v_S \leftarrow v_S/\|v_S\|$9: $\det G_* = (v_S(S))^2 \cdot \det G$ ▷ 参见命题 4.3.18
10: 将 v_S 加入$\mathcal{V}$11: **返回** $\mathcal{V}$, $\det G_*$

由于格拉姆矩阵的大小取决于集合族的大小，而非参与者的数量，因此我们需要处理最小的集合族。此外，从图4.4中可以看到，向核心的投影不一定是与一个较大的独立集合相关联的投影。下面的结果说明，向核心的投影就是向这些最小集合族之一的投影。

定义4.3.20。设 x 是核心之外的一个预分配。我们称集合族$\mathcal{Q}$ 为 x 的可达集合，如果它是线性无关的，且$\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x) \in C(v)$。

我们用 $\rho(\mathcal{Q}\ x)$表示$\mathcal{Q}$ 中 x的可达子集族。如果$\mathcal{Q} = \phi(x)$，我们就简写为 $\rho(\phi(x)\ x) =: \rho(x)$。

命题4.3.21。设 $x \in \mathbb{X}(v) \setminus C(v)$。$x$ 向核心的投影与向 $\mathbb{A}_\mathcal{T}$ 的投影相同，其中 T 在 $\rho(x)$ 中是极小的。

证明。首先回顾一下我们在上一章中使用的记号。我们用$\mathcal{L}_C(v)$表示核心的面格。对于核心的任意一个面 $F \in \mathcal{L}_C(v)$，我们用$\mathcal{E}(F)$表示联盟集$\mathcal{E}(F) := \{S \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{E}(v) \mid F \subseteq \mathbb{A}_S(v)\}$。

设 $x \in X_\mathcal{Q}$。x 向核心的投影必然通过一个可达集合实现。令 T_0 为其中之一。于是，$\pi_{\mathbb{A}_\mathcal{T}}(x)$属于核心的一个面，记为 F_0。如果不存在另一个面 F_1 包含 F_0，且使 $\mathrm{E}(F_1)$属于 $\rho(x)$，那么，由于根据命题3.2.11，从 $\mathrm{L}_C(v)$ 到不平衡集合族的映射是阶反转的，T 在 $\rho(x)$ 中是极小的。接着，假设存在一个面 $F_1 \supseteq F_0$，使得 $\mathrm{E}(F_1) =: \mathrm{T}_1 \in \rho(x)$，并对 T_1 重复相同的过程。由于参与者的数量有限，联盟集的数量也有限，因此存在一个面 F_p 包含 F_0，以及一个包含于 T_0 中的集合 T_P，使得 T_P 在 $\rho(x)$ 中是极小的。由于作为向核心的投影的 $\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{T}_0}}(x)$ 属于 F_0，它也属于 F_p。

□

由于任意集合的线性无关子集构成一个拟阵，它们在其张成空间的包含关系下形成一个偏序集。因此，为了探索这个偏序集，并为任意给定的预分配找到一个最小可达集合，我们采用广度优先算法，详见算法 8。

算法 8 查找极小到达集

要求： 平衡联盟函数 v、严格关键精确联盟集合$\mathcal{VE}(v)$、预分配 x**确保：** x 的极小到达集集合1: **过程** FindReachingCollection(v, $\mathcal{VE}(v)$, x)2: 令 $\mathcal{Q} \leftarrow \emptyset$3: **对于** $S \in \mathcal{VE}(v)$ **执行**4: **如果** $x(S) < v(S)$ **则**

5：将 S **添加到 Q 6：** $\mathfrak{K} \leftarrow$ **{{**S**}** $\mid S \in$ **Q}** ▷ **待检查的集合族 7：** $\mathbb{O} \leftarrow \emptyset$ ▷ **输出集合 8：对于 T** $\in \mathfrak{K}$ **执行 9：如果 max**$^{S \in \mathcal{VE}(v)}$ ^{e}**(**S**,**$^{\pi_{\mathbb{A}_{\mathcal{T}}}}$**(**$x$**))** ≤ 0 **则 10：将 T 添加到** $\mathbb{O}$**11：否则 12：对于** $S \in$**Q 执行 13：如果 T** $\cup$**{**S**}** $\notin \mathfrak{K}$ **则 14：如果 UpdateGramian(T ,** S**)** $\neq 0$ **则 15：将 T** $\cup$**{**S**} 添加到** $\mathfrak{K}$**16：存储新的格拉姆矩阵 17：从** $\mathfrak{K}$ **中移除 T 18：返回** $\mathbb{O}$

我们知道，当联盟函数 v 平衡时，算法 8 至少会给出一个输出，因为核心至少有一个非空面。与算法所有输出的并集相对应的面，是投影所在的最小面。它是与 $\mathbb{O}$中的集合族相对应的各个面的交集。

本节的目标是将一个预分配投影到核心上。由于公式中涉及的对象只是核心各个面的（可能的）法向量，因此我们可以将这些算法和公式应用于任意基本多面体。

4.3.6 应用：衡量并纠正市场失灵。

接下来，我们将使用 Shapley 和 Shubik [86]定义的市场博弈 模型，对给定支付向量下市场的失灵 进行量化。回顾一下，市场 是一个数学模型，记作$\mathcal{M} =$(N， G， A， U)，其中

- N 是一个参与者或交易者的有限集，
- G 是有限维向量空间的非负正交体，称为商品空间，
- $A = \{a^i \mid i \in N\} \subseteq G^N$ 是 G 中元素的一个指标集，称为初始禀赋，
- $U = \{u^i \mid i \in N\}$ 是一个连续凹函数的指标集 $u^i : G \to \mathbb{R}$，称为效用函数。请注意，并未对效用函数的单调性作出任何假设。

初始禀赋可以理解为经济初始状态下每位参与者所拥有的物品，他们会与其他参与者交易这些商品，以最大化自己的效用。设 S 为一个联盟。如果 S 中的参与者组成一个市场，商品总量为 $\sum_{i \in S} a^i$。那么，满足 $\sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} a^i$ 的禀赋集合{ $x^i \mid i \in S\} \subseteq G$称为市场$\mathcal{M}$的 S-可行分配 ，其集合记为 X^S。由该市场生成的市场博弈 是一个博弈(N, v)，其联盟函数对所有 $S \in \mathcal{N}$定义如下：

$$v(S) = \max_{x \in X^S} \sum_{i \in S} u^i(x^i).$$

正如我们在第1章中所见，市场博弈是完全平衡的，其核心称为相应市场的核心。因此，市场的核心是各联盟无法通过自行组成市场而实现的支付向量集合。

众所周知，一个经济的竞争均衡属于其核心。与此一致，Shapley 和 Shubik [88] 证明，市场的竞争结果集合包含于其关联市场博弈的核心之中。因此，这些结果满足一些非常理想的性质，例如帕累托最优和联盟理性；然而，市场的参与者不一定会以支付向量的形式达到其中某个结果。按照我们在本文中始终采用的解释，参与者之间的互动之所以形成博弈，其积极结果必须是核心中的支付向量，以避免有参与者退出大联盟。这引出了以下定义。

定义 4.3.22. 设$\mathcal{M}$ 为一个市场，(N, v)为其关联博弈。设 x 为一个不属于核心的预分配。我们将市场$\mathcal{M}$（或等价地，博弈 (N, v)）在 x 处的失灵 记为 $\mu_v(x)$，定义如下：

$$\mu_v(x) \coloneqq \min_{y \in \partial C(v)} \|x - y\|,$$

其中， $\partial C(v)$表示核心 $C(v)$的边界。

特定预分配 x 处的市场失效，是指 x 到核心的距离。它表示从 x 到核心中距离最近的元素所需的最小资金重新分配量，即最短侧支付的欧几里得范数。

参与者加入市场时，会将各自的初始禀赋集中起来，之后再共同分享。 S中的参与者凭借其初始禀赋总和，能够以某种方式重新分配这些禀赋，使重新分配后的效用总和为$v(S)$。由于市场博弈是完全平衡的，大联盟越大，每个联盟获得的支付就应当越多。

因此，如果商品分配导致某个预分配不属于核心，那么至少存在一个联盟 S ，使得 $x(S) < v(S)$，这显然荒谬。如果可供分配的商品种类更多，那么所有联盟获得的支付都必须高于它们单独能够获得的支付。特定预分配 x 处的市场失效量化了 x 偏离核心的程度，以及其未能正确分配支付的程度。根据平衡性， S 中的参与者可能会想要退出这个市场，并带走他们的初始禀赋，这会降低其他参与者的支付。

对于线性生产博弈或流博弈，同样的解释也成立。当若干参与者组成联盟 S 并加入博弈时，在线性生产博弈中，他们会带来原材料；在流博弈中，他们则会为图带来新的边。他们单独能够实现 $v(S)$，但若将其努力与其他参与者结合起来，例如增加原材料的多样性，或使图更加稠密、容量更大，我们便可以预期每个人都比加入前有所改善，这可以作为完全平衡的一种解释。他们无法接受低于 $v(S)$ 的支付，而给定预分配下的失败程度，则量化了市场无法向所有对其支付不满的联盟提供适当支付的累积性与嵌套性。

命题 4.3.23. 设 M 是一个市场，且 (N, v) 是其关联博弈。设 x 是一个不属于核心的预分配。那么

$$\mu_v(x) = \min_{\mathcal{Q}\in\rho(x)} \left\| \sum_{S\in\mathcal{Q}} \gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)\eta^S \right\| = \min_{\mathcal{Q}\in\rho(x)} \left\| \sum_{S\in\mathcal{Q}} e(S,x)h^S \right\|.$$

证明。 由于核心有界、闭且为凸集， $x \in \mathbb{X}(v)\backslash C(v)$的投影位于边界 $\partial C(v)$上。根据希尔伯特投影定理，该投影是使距离最小的点，因此

$$\mu_v(x) = \|x - \pi_{C(v)}(x)\|$$

根据同样的论证，向核心的投影与向核的面上的投影重合，而该面是距离所投影预分配最近的面。于是，

$$\mu_v(x) = \min_{S\in\rho(x)} \|x - \pi_{\mathbb{A}_\mathcal{Q}}(x)\|.$$

应用定理 4.3.10 的公式即可完成证明。 □

或许可以利用在计算$\mathcal{Q}$ 的格拉姆矩阵的迭代过程中求得的$\mathcal{Q}$ 的标准正交基，使范数与求和运算可交换。

利用投影算子计算给定预分配下的市场失灵，也能得到明确的侧支付，以便在不改变总价值的情况下重新分配总价值。此外，该侧支付的范数最小。我们可以将其理解为再分配成本最低的侧支付，因此也是从 x 到某个核心元素的最优重新分配。设$\mathcal{Q}$ 为定义核心投影的可达集合。那么最优重新分配

$$\sigma_{\text{opt}} = \sum_{S\in\mathcal{Q}} \gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)\eta^S$$

其运作方式如下：对于每个联盟 $S \in \mathcal{Q}$，我们从每位参与者处收取价值$\frac{|S|}{n}\gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)$，并向 S 中的每位参与者支付 $\gamma_S^{\mathcal{Q}}(x)$。

所有属于核心边界的预分配，其失败度都为 0；我们甚至可以通过$\mu_v(x) := -\min_{y\in\partial C(v)}\|x - y\|$，将此函数扩展到核心内部的一个元素 x ，并对所有 $x \in \mathbb{X}(v)$ 合并这两个函数，得到

$$\mu_v(x) = (-1)^{\mathbf{1}_{C(v)}(x)} \min_{y\in\partial C(v)} \|x - y\|,$$

其中 $\mathbf{1}_{C(v)}$ 是核心的示性函数。这些量与同一批作者提出的解概念有关，这些概念是在定义市场博弈之前发展起来的。有关更多内容，请参阅 Peleg 和 Sudhölter 的 [69, 第 7] 章。我们记 $\mathcal{N}_* := \mathcal{N}\backslash\{N\}$。

定义 4.3.24 （Shapley 和 Shubik [84]）。
令 ε 是一个实数。博弈（N, v）的 ε-核心，记作 $C_\varepsilon(v)$，定义为 b y

$$C_\varepsilon(v) := \{x \in \mathbb{X}(v) \mid e(S,x) \le \varepsilon, \forall S \in \mathcal{N}_*\}.$$

注意， $C_0(v) = C(v)$。他们还定义了这些集合中最小的一个，称为最小核心，记作 $LC(v)$，它是（N, v）的所有非空 ε-核心的交集。可以将最小核心定义为一个 ε_0-核心，其中 $\varepsilon_0 = \min^{x\in\mathbb{X}(v)} \max_{S\in\mathcal{N}_*} e(S,x)$。于是，我们有

$$LC(v) = \arg \min_{x\in\mathbb{X}(v)} \max_{S\in\mathcal{N}_*} e(S,x).$$

定义 4.3.25。 设 $\mathcal{M}$ 为一个市场，且 (N, v) 为其关联博弈。我们将失败核心记为 $C_\mu(v)$，定义如下：

$$C_\mu(v) = \arg \min_{x\in\mathbb{X}(v)} \mu_v(x).$$

将多胞体内部的一个元素投影到其边界上，就是将其投影到多胞体的某个面上。事实上，多胞体的任意面都是若干个面的交集；根据三角不等式，到这些面的交集的距离大于到其中一个面的距离。因此，元素$x \in C(v)$与 $\partial C(v)$之间的距离为 $\min_{y\in\partial C(v)}\|x-y\| = \min_{S\in\mathcal{N}_*} \|x - \pi_{\mathbb{A}_S}(x)\|$。利用命题1.2.2的公式可得

$$\min_{y\in\partial C(v)}\|x-y\| = \min_{S\in\mathcal{N}_*} \left\| \frac{e(S,x)}{\|\eta^S\|^2}\eta^S \right\| = \min_{S\in\mathcal{N}_*} \frac{|e(S,x)|}{\|\eta^S\|}.$$

由于 x 属于核心，其超额非正，因此

$$\min_{y\in\partial C(v)}\|x-y\| = \max_{S\in\mathcal{N}_*} \frac{e(S,x)}{\|\eta^S\|} = \max_{S\in\mathcal{N}_*} \gamma_S(x),$$

我们可以写成

$$C_\mu(v) = \arg \min_{x\in\mathbb{X}(v)} \max_{S\in\mathcal{N}_*} \gamma_S(x),$$

这类似于 $LC(v)$。与最小核心类似，失败核心永远不为空。

最小核心与失败核心之间的差异在于重缩放因子$\|\eta^S\|^{-1}$。它可以解释为一个在个体层面缩放超额的系数，因为 $\|\eta^S\|$ 只取决于 S的基数。若一个由 5 名参与者组成的联盟S 的超额为 4，而一个由 2 名参与者组成的联盟 T 的超额为 2，那么尽管 S 的超额大于 T， T 中的参与者比 S中的参与者感到更受亏待。 T 的人均超额为 1，而 S 的人均超额为 $\frac{4}{5} < 1$。 –

总结与展望

> 这里提出并发展的数学思想（即“平衡集”）有望在有限集、零一矩阵和非可加集合函数的研究中引起广泛关注。
>
> ——Lloyd S. Shapley，关于平衡集与核心 [82]

在这最后一章中，我将简要回顾本学位论文的主要结果，并提出一些未来研究的思路。

首先，在第1章中，我定义了一些新符号，用于研究预分配空间中的几何问题。特别是，我引入了向量 $\{\eta^S \mid S \in \mathcal{N}\}$，它们与合作博弈的几何研究密切相关，因为 η^S 表示使联盟 S 获得最大利润的平移方向。如果我们通过侧支付 σ 平移支付向量 x，那么联盟 S 的支付变化量就是 $\langle \eta^S, \sigma \rangle$。这一新工具对于第 4 章中投影算子的构造尤其有用。此外，我还阐述了凸博弈的核心与不同研究领域中的各类多胞体之间的相似之处，并将其总结在表1.8中。

最后，利用 Kalai 和 Zemel 关于完全平衡博弈的刻画——完全平衡博弈是一个流博弈，即有限个非本质博弈的最小值——我建立了热带多项式与合作博弈之间的联系。这是一个有趣的新视角，因为热带数学领域的文献正在迅速增长，它也可能影响合作博弈论，就像多拟阵和次模集合函数理论曾推动凸博弈理论的发展一样。

在第2章中，主要基于我与导师共同撰写的论文 [56], ，我们证明了极小平衡集合是合作博弈论以及离散数学其他领域中的一个中心概念。平衡集合不过是参与者在 N 中某一时间单位内，或更一般地说，在子集之间分配某一资源单位时的一种组织形式表达，因此我们认为，它还应有许多其他可能的应用。

仅聚焦于合作博弈领域，我们的结果似乎对精确性、可扩展性等许多概念的可计算性具有至关重要的意义。事实上，盲目地应用这些概念的定义，会导致与多面体相关的难题，从而限制其实际适用性。得益于我的结果和基本多面体的新定义，只要事先生成极小平衡集合（这是可行的，因为它们不 取决于所考虑的博弈或性质），就能非常轻松、快速地检验这些概念，因为所需的大多数测试都可归结为检验简单的线性不等式。

一个有趣的研究方向是考察基于 Peleg 方法的算法的四个步骤分别生成了多少个极小平衡集合，尤其是了解同一个极小平衡集合是否会被重复生成。此外，若能获知适当极小平衡集合（即不包含两个不相交联盟的极小平衡集合）的集合，便可大幅提升该算法在适当博弈（即具有超可加联盟函数的博弈）上的运行速度。另一个有趣的研究方向是考察极小平衡集合多胞体的 1-骨架，以便构建针对基本多面体的高效优化算法。多胞体的 1-骨架是在其顶点集合上定义的图，其中顶点作为节点，多胞体的边作为图的边。

在第3章中，我在对平衡集合族的研究中开辟了一条新路径。借助 Joyal 组合物种理论 $[47]$, ，我构造了大小为 p 的 k-均匀超图物种，这对于研究超图网络、极值组合学、机制设计等可能具有一定意义。注意到正则超图实际上几乎就是一个平衡集合族，这一物种及其生成级数可以应用于平衡集合族的研究。沿着这些方向继续深入，研究置换对平衡集合族的作用，以及带有双变量生成级数的加权物种概念，将会很有意义；这或许能使我们从均匀超图的生成级数推导出正则超图，进而得到平衡集合族的生成级数。

随后，我介绍了超平面排列的概念，以及这些对象与合作博弈研究的相关性——合作博弈可被视为排列的扭曲。文中陈述了一些关于核心的面结构或可行区域的结果，但在这一方向上仍有许多工作可以开展。完全平衡博弈的热带多项式视角与此之间可能存在紧密联系。

最后，在第4章中，我展示了生成极小平衡集合也使我能够实现一种用于检验核心稳定性的算法，即判断给定博弈的核心是否与某个稳定集重合。所提供的示例表明，尽管许多情况下都能迅速得到答案，但有些实例的计算时间却超出了可处理的范围。为了解决这个问题，我在预分配空间中寻找了盲点。实际上，借助极小平衡集合，我们可以迅速确定某些区域是否会妨碍核心保持稳定，从而提高算法的效率。一项值得开展的研究是，探究能否找到类似的结果，但确保实现核心支配，而非证明其不可能性。

作为本论文的总结，我提出了一套基于投影算子的全新工具。我认为，这些算子本身就很有趣，尤其是在合作博弈论中的应用：它们可以帮助我们找出，针对给定资源，哪个核心元素最接近当前分配，从而以最有效的方式重新分配资源。本研究最初希望借助投影算子构建新的程序，以检验核心稳定性，或者至少开发一些子程序，从计算中排除某些区域。其思路是确定投影的方向，即若干向量 η^S 的线性组合，然后检验对于给定的预分配 x，是否存在某个联盟 $T \in \phi(x)$ 能够支撑该投影，也就是说，投影方向是否属于支配锥 $\delta_T(x)$ 。这也是这项博士研究所带来的令人振奋的研究方向之一，我打算继续探索。

参考文献

[1] Aguiar, M. 和 Mahajan, S.，《超平面排列专题》。美国数学会，2017年，第 226 卷。doi: 10.1090/surv/226.[2] Algaba, E., Bilbao, J. M., Fernández, J. R. 和 Jimenez, A.，“市场博弈的 Lovász 延拓”，载于《合作博弈论文集》，施普林格，2004年，第 229–238 页。doi: 10.1007/s11238-004-5650-6.[3] Apartsin, Y. 和 Holzman, R.，“手套市场博弈中的核心与谈判集”，《国际博弈论杂志》，第 32 卷，第 2 期，第 189 页，2003年。doi:10.1007/s001820300145.[4] Aumann, R. J. 和 Drèze, J. H.，“具有联盟结构的合作博弈”，《国际博弈论杂志》，第 3 卷，第 217–237 页，1974年。doi: 10.1007/BF01766876.[5] Aumann, R. J. 和 Maschler, M.，“《塔木德》中的一个破产问题的博弈论分析”，《经济理论杂志》，第 36 卷，第 2 期，第 195–213 页，1985年。doi: 10.1016/0022-0531(85)90102-4.[6] Avis, D. 和 Fukuda, K.，“用于凸包和排列及多面体顶点枚举的枢轴算法”，《离散与计算几何》，第 8 卷，第 3 期，第 295–313 页，1992年。doi: 10.1007/BF02293050.[7] Bauschke, H. H. 和 Combettes, P. L.，《希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论》。施普林格，2011年，第 408 卷。doi: 10.1007/978-3-319-48311-5.[8] Béal, S.、Durieu, J. 和 Solal, P.，“可转移效用博弈中的前瞻性联盟稳定性”，《数学社会科学》，第 56 卷，第 3 期，第 303–313 页，2008年。doi: 10.1016/j.mathsocsci.2008.06.003.[9] Béal, S.、Rémila, E. 和 Solal, P.，“可转移效用博弈中进入核心的最优界”，《博弈与经济行为》，第 80 卷，第 1–9 页，2013年。doi: 10.1016/j.geb.2013.02.008.[10] Bednay, D.，“单卖方指派博弈中的稳定集”，《运筹学年鉴》，第 222 卷，第 143–152 页，2014年。doi: 10.1007/s10479-013-1439-8.[11] Berge, C.，《超图：有限集组合学》。北荷兰数学文库，1989年。doi: 10.1016/s0924-6509(08)x7007-2.[12] Bergeron, F.、Labelle, G. 和 Leroux, P.，《组合物种与树状结构》。剑桥大学出版社，1998年。doi: 10.1017/CBO9781107325913.[13] Billera, L. J.、Billey, S. C. 和 Tewari, V.，“布尔积多项式与 Schur正性”，arXiv 预印本 arXiv:1806.02943，2018年。doi: 10.48550/arXiv.1806.02943.

[14] Billera, L. J., Moore, J. T., Moraites, C. D., Wang, Y. 和 Williams, K.，《极大非平衡族》，arXiv 预印本 arXiv: 1209.2309，2012年。doi: 10.48550/arXiv.1209.2309.[15] Billey, S. C., Rhoades, B. 和 Tewari, V.，《布尔积多项式、舒尔正性与陈特蕾式》，《国际数学研究通报》，第 2021年 卷，第 21 期，第 16 636–16 670 页，2021年。doi: 10.1093/imrn/rnz261.[16] Biswas, A., Parthasarathy, T., Potters, J. 和 Voorneveld, M.，《大核心与精确性》，《博弈与经济行为》，第 28 卷，第 1 期，第 1–12 页，1999年。doi: 10.1006/game.1998.0686.[17] Björner, A.，《正和系统》，载于《拓扑与代数中的组合方法》，施普林格，2015年，第 157–171 页。doi: 10.1007/978-3-319-20155-9_27.[18] Bondareva, O.，《线性规划方法在合作博弈理论中的一些应用》，《控制论问题》，第 10 卷，第 119 期，第 139 页，1963年。[19] 博雷尔, É.，《关于一部概率论著作》，《法国与外国哲学评论》，第 98 卷，第 321–336 页，1924年。[在线]。可见：https://www.jstor.org/stable/41082164.[20] Brânzei, R., Solymosi, T. 和 Tijs, S.，《强本质联盟与同伴群体博弈的核仁》，《国际博弈论杂志》，第 33 卷，第 3 期，第 447–460 页，2005年。doi: 10.1007/s00182-005-0213-9.[21] Castillo, F. 和 Liu, F.，《嵌套编织扇的变形锥》，《国际数学研究通报》，第 2022年 卷，第 3 期，第 1973–2026 页，2022年。doi: 10.1093/imrn/rnaa090.[22] Cavalieri, R., Johnson, P. 和 Markwig, H.，《双重 Hurwitz 数的墙穿越》，《数学进展》，第 228 卷，第 4 期，第 1894–1937 页，2011 年。doi:10.1016/j.aim.2011.06.021.[23] Černý, M.，《合作博弈解概念的近似》，arXiv 预印本 arXiv:2212.04748，2022年。doi: 10.48550/arXiv.2212.04748.[24] Cesco, J. C.，《通向可转移效用博弈核心的收敛转移方案》，《应用数学杂志》，第 19 卷，第 1-2 期，第 23–35 页，1998年。[25] Cramer, G.，《代数曲线分析导论》。Cramer兄弟与C. Philibert出版社，1750年。[在线]。可见：http://eudml.org/doc/203906.[26] Csóka, P., Herings, P. J.-J. 和 Kóczy, L. Á.，《风险的稳定分配》，《博弈与经济行为》，第 67 卷，第 1 期，第 266–276 页，2009年。doi: 10.1016/j.geb.2008.11.001.[27] Csóka, P., Herings, P. J.-J. 和 Kóczy, L. Á.，《精确博弈的平衡性条件》，《运筹学数学方法》，第 74 卷，第 41– 52 页，2011年。doi: 10.1007/s00186-011-0348-3.[28] Demuynck, T., Herings, P. J.-J., Saulle, R. D. 和 Seel, C.，《社会环境中的短视稳定集》，《计量经济学》，第 87 卷，第 1 期，第 111–138 页，2019年。doi: 10.3982/ECTA14954.[29] Driessen, T.，《合作博弈、解与应用》。施普林格科学与商业媒体，2013年，第 3 卷。doi: 10.1007/978-94-015-7787-8。

[30] Early, N.，《置换多面体板的典范基》，arXiv 预印本 arXiv: 1712.08520，2017年。doi: 10.48550/arXiv.1712.08520.[31] Edgeworth, F. Y.，《数理心理学：数学在道德科学中的应用论文》。CK Paul，1881年，第 10 卷。doi: 10.2307/2548685.[32] Edmonds, J.，《次模函数、拟阵与某些多面体》，《组合结构及其应用》，1970年。doi: 10.1007/3-540-36478-1 2.[33] Evans, T. S.，《实时间下 N 点有限温度期望值》，《核物理 B》，第 374 卷，第 2 期，第 340–370 页，1992年。doi: 10.1016/0550-3213(92)90357-H.[34] Evans, T. S.，《热场论计算的是什么？》arXiv 预印本 hep-ph/9404262，1994年。doi: 10.48550/arXiv.hep-ph/9404262.[35] Faigle, U., Grabisch, M., Jiménez-Losada, A. 和 Ordóñez, M.，《概念格上的博弈：夏普利值与核心》，《离散应用数学》，第 198 卷，第 29–47 页，2016年。doi: 10.1016/j.dam.2015.08.004.[36] Fujishige, S.，《次模函数与优化》。爱思唯尔，2005年。[37] Gillies, D. B.，《一般非零和博弈的解》，《博弈论文集》，第 4 卷，第 47–85 页，1959年。doi: 10.1515/9781400882168-005.[38] Grabisch, M.，《有序结构与图上的博弈核心》，《运筹学年鉴》，第 204 卷，第 1 期，第 33–64 页，2013年。doi: 10.1007/s10479-012-1265-4.[39] Grabisch, M.，《决策中的集合函数、博弈与容量》。施普林格，2016年，第 46 卷。doi: 10.1007/978-3-319-30690-2.[40] Grabisch, M. 和 Sudhölter, P.，《通过嵌套平衡性刻画具有稳定核心的可转移效用博弈》，《数学规划》，第 1–26 页，2021年。doi:10.1007/s10107-021-01716-0.[41] Guilbaud, G. T. 和 Rosenstiehl, P.，《选举的代数分析》，《人文与社会科学数学》，第 4 卷，第 9–33 页，1963年。doi: 10.1515/97831105659

11-008.[42] Gutekunst, S. C., Mészáros, K., and Petersen, T. K.,“根锥与共振排列”，《组合学电子期刊》，第1–12页，2021年。DOI: 10.37236/8759.[43] Habgood, K. and Arel, I.,“运用克拉默法则求解大规模线性方程组的基于凝聚的应用”，离散算法杂志，第10卷，第98–109页，2012年。DOI: 10.1016/j.jda.2011.06.007.[44] Herings, P. J.-J., Mauleon, A., and Vannetelbosch, V.,“具有前瞻性的网络稳定性”，《博弈与经济行为》，第67卷，第2期，第526–541页，2009年。DOI:10.1016/j.geb.2008.12.009.[45] Herings, P. J.-J., Mauleon, A., and Vannetelbosch, V.,“视野K前瞻性下的网络稳定性”，《经济理论》，第68卷，第1期，第177–201页，2019年。DOI: 10.1007/s00199-018-1119-7.

[46] Huberman, G.,“核仁与本质联盟”，载于《系统分析与优化：第四届系统分析与优化国际会议论文集》，凡尔赛，施普林格，1980年，第416–422页。doi: 10.1007/BFb0004057.[47] Joyal, A.,“形式幂级数的组合理论”，《应用数学进展》，第42卷，第1期，第1–82页，1981年。doi: 10.1016/0001-8708(81)90052-9.[48] Kalai, E. and Zemel, E.,“完全平衡博弈与流博弈”，《运筹学数学方法》，第7卷，第3期，第476–478页，1982年。doi: 10.1287/moor.7.3.476.[49] Kamiya, H., Takemura, A., and Terao, H.,“余维一展开模型的排序模式”，应用数学进展，第47卷，第2期，第379–400页，2011年。doi: 10.1016/j.aam.2010.11.002.[50] Kamiya, H., Takemura, A., and Terao, H.,“在考克斯特群作用下保持稳定的超平面排列”，载于《构形空间》，施普林格，2012年，第327–354页。doi: 10.1007/978-88-7642-431-1 15.[51] Kikuta, K. and Shapley, L. S.,“n人博弈中的核心稳定性”，未发表手稿，1986年。[52] Kroupa, T. and Studen`y, M.,“完全平衡博弈锥的面”，《运筹学数学方法》，第90卷，第271–300页，2019年。doi: 10.1007/s00186-019-00672-y.[53] Kühne, L.,“共振排列的普适性及其贝蒂数”，Combinatorica，第43卷，第277–298页，2023年。doi: 10.1007/s00493-023-00006-x.[54] Kulakovskaja, T. E.,“经典合作博弈中核心与解一致的充要条件”，Rinehart, R. F. 译，副博士学位论文（物理与数学科学），列宁格勒国立大学，1971年。[55] Lancia, G. and Serafini, P.,《紧凑扩展线性规划模型》。施普林格，2018年。doi: 10.1007/978-3-319-63976-5.[56] Laplace Mermoud, D., Grabisch, M., and Sudhölter, P.,“极小平衡联盟集合及其在核心稳定性和博弈论其他主题中的应用”，《离散应用数学》，第341卷，第60–81页，2023年。doi: 10.1016/j.dam.2023.07.025.[57] Leonard, R.,《冯·诺依曼、摩根斯坦与博弈论的创立：从国际象棋到社会科学，1900—1960》。剑桥大学出版社，2010年。doi: 10.1017/CBO9780511778278.021.[58] Liu, Z., Norledge, W., and Ocneanu, A.,“通过施泰因曼关系将伴随辫子超平面排列构建为组合李代数”，纯粹与应用代数杂志，第227卷，第8期，第107349页，2023年。doi: 10.1016/j.jpaa.2023.107349.[59] Lohmann, E., Borm, P., and Herings, P. J.-J.,“极小精确平衡性”，《数学社会科学》，第64卷，第2期，第127–135页，2012年。doi: 10.1016/j.mathsocsci.2012.01.002.

[60] Lucas, W. F.,“证明博弈可能不存在解”，《美国数学会会刊》，第137卷，第219–229页，1969。doi: 10.1090/S0002-9947-1969-0237183-X.[61] Lucas, W. F.,“冯·诺依曼—摩根斯坦稳定集”，《经济应用博弈论手册》，第1卷，第543–590页，1992年。doi: 10.1016/S1574-0005(05)80020-7.[62] Nash, J. F.,“非合作博弈”，《数学年刊》，第54卷，第2期，第286–295页，1951年。doi: 10.2307/1969529.[63] Núñez, M. 和 Rafels, C.,“指派市场中的冯·诺依曼—摩根斯坦解”，《经济理论杂志》，第148卷，第3期，第1282–1291页，2013年。doi: 10.1016/j.jet.2012.10.002.[64] Núñez, M. 和 Rafels, C.,“指派市场综述”，《动态与博弈杂志》，第2卷，第3/4期，第227–256页，2015年。doi: 10.3934/jdg.2015003.[65] O’Neill, B.,“《塔木德》中的权利仲裁问题”，《数学社会科学》，第2卷，第4期，第345–371页，1982年。doi: 10.1016/0165-4896(82)90029-4.[66] Owen, G.,“博弈的多重线性扩展”，《管理科学》，第18卷，第5期第2部分，第64–79页，1972年。doi: 10.1287/mnsc.18.5.64.[67] Owen, G.,“论线性生产博弈的核心”，《数学规划》，第9卷，第1期，第358–370页，1975年。doi: 10.1007/BF01681356.[68] Peleg, B.,“构造有限集极小平衡集合的归纳方法”，《海军研究后勤季刊》，第12卷，第2期，第155–162页，1965年。doi: 10.1002/nav.3800120203.[69] Peleg, B. 和 Sudhölter, P.,《合作博弈理论导论》。施普林格科学与商业媒体，2007年，第34卷。doi: 10.1007/978-1-4615-0308-8.[70] Penrose, R.,“矩阵的广义逆”，载于《剑桥哲学学会数学会刊》，剑桥大学出版社，第51卷，1955年，第406–413页。doi: 10.1017/S0305004100030401.[71] Postnikov, A.,“排列多面体、结合多面体及其他”，《国际数学研究通知》，第2009年卷，第6期，第1026–1106页，2009年。doi: 10.1093/imrn/rnn153.[72] Rado, R.,“一个不等式”，《伦敦数学会杂志》，第1卷，第1期，第1–6页，1952年。doi: 10.1112/jlms/s1-27.1.1.[73] Raghavan, T. 和 Sudhölter, P.,“论指派博弈”，《动态博弈进展：经济学、管理科学、工程学与环境管理中的应用》，第179–193页，2006年。doi: 10.1007/0-8176-4501-2 10.[74] Ray, D. 和 Vohra, R.,“远见稳定集”，《计量经济学》，第83卷，第3期，第977–1011页，2015年。doi: 10.3982/ECTA12022.

[75] Rehberg, S.,“修剪的内外多胞体、组合互反定理与广义排列多胞体”，《组合学电子期刊》，P4–36，2022年。doi: 10.37236/10371.[76] Rosenmüller, J.,《博弈论：随机学、信息、策略与合作》。施普林格科学与商业媒体，2013年，第25卷。doi: 10.1007/978-1-4757-3212-2.[77] Schmeidler, D.,“精确博弈的核心，I”，《数学分析与应用杂志》，第40卷，第1期，第214–225页，1972年。doi: 10.1016/0022-247X(72)90045-5.[78] Schrijver, A.,《组合优化：多面体与效率》。施普林格，2003年。[在线]。网址：https://link.springer.com/9783540443896.[79] Shadrin, S., Shapiro, M., 和 Vainshtein, A.,“零亏格双重 Hurwitz 数的区域行为”，《数学进展》，第217卷，第1期，第79–96页，2008年。doi: 10.1016/j.aim.2007.06.016.[80] Shapley, L. S.,“关于 n 人博弈的札记，III：冯·诺依曼—摩根斯坦解定义的若干变体”，兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州，技术报告，1952年。doi: 10.7249/RM817.[81] Shapley, L. S.,“作为合作博弈的市场”，兰德公司，圣莫尼卡，加利福尼亚州，技术报告，1955年。[在线]。网址：https://www.rand.org/pubs/papers/P629.html.[82] Shapley, L. S.,“关于平衡集与核心”，《海军研究后勤季刊》，第14卷，第4期，第453–460页，1967年。doi: 10.1002/nav.3800140404.[83] Shapley, L. S.,“凸博弈的核心”，《国际博弈论杂志》，第1卷，第1期，第11–26页，1971年。doi: 10.1007/BF01753431.[84] Shapley, L. S. 和 Shubik, M.,“具有非凸偏好的货币经济中的准核心”，《计量经济学：计量经济学会杂志》，第805–827页，1966年。doi: 10.2307/1910101.[85] Shapley, L. S. 和 Shubik, M.,“所有权与生产函数”，《经济学季刊》，第81卷，第1期，第88–111页，1967年。doi: 10.2307/1879674.[86] Shapley, L. S. 和 Shubik, M.,“论市场博弈”，《经济理论杂志》，第1卷，第1期，第9–25页，1969。doi: 10.1016/0022-0531(69)90008-8.[87] Shapley, L. S. 和 Shubik, M.,“指派博弈 I：核心”，《国际博弈论杂志》，第1卷，第1期，第111–130页，1971年。doi: 10.1007/BF01753437.[88] Shapley, L. S. 和 Shubik, M.,“市场博弈核心中的竞争结果”，《国际博弈论杂志》，第4卷，第229–237页，1975年。doi: 10.1007/BF01769270.[89] Sharkey, W. W.,“具有大核心的合作博弈”，《国际博弈论杂志》，第11卷，第175–182页，1982年。doi: 10.1007/BF01755727.[90] Shellshear, E. 和 Sudhölter, P.,“论核心稳定性、关键联盟与可扩展性”，《博弈与经济行为》，第67卷，第2期，第633–644页，2009年。doi: 10.1016/j.geb.2009.01.005.

[91] Shubik, M.,《普林斯顿的博弈论，1949–1955：个人回忆》，《博弈论史论》，第152卷，1992年。doi: 10.1215/00182702-24-Supplement-151.[92] Sloane, N. J. A. and Inc., T. O. F.,《在线整数数列百科全书》，2023年。 [在线]。网址： http://oeis.org/.[93] Solymosi, T. and Raghavan, T.,《具有稳定核心的指派博弈》，《国际博弈论杂志》，第30卷，第2期，第177–185页，2001年。doi: 10.1007/s001820100072.[94] Stearns, R. E.,《n人博弈的收敛转移方案》，《美国数学会会刊》，第134卷，第3期，第449–459页，1968年。doi:10.2307/1994868.[95] Studený, M. and Kratochvíl, V.,《精确博弈锥的面》，《运筹学中的数学方法》，第95卷，第1期，第35–80页，2022年。doi:10.1007/s00186-022-00770-4.[96] Tijs, S. H.,《组合优化博弈中的线性规划博弈》，《运筹学研究中心研究纪要》，第34卷，第2-3期，第167–186页，1992年。 [在线]。网址： https://core.ac.uk/reader/6857785.[97] van Gellekom, J., Potters, J., and Reijnierse, J.,《TU博弈的繁荣性质》，《国际博弈论杂志》，第28卷，第2期，第211–227页，1999年。doi: 10.1007/s001820050106.[98] van Velzen, B., Hamers, H., and Solymosi, T.,《链分量可加博弈的核心稳定性》，《博弈与经济行为》，第62卷，第1期，第116–139页，2008年。doi: 10.1016/j.geb.2007.02.005.[99] von Neumann, J.,《论博弈理论》，《法国科学院院报》，第186卷，第25期，第1689–91页，1928年。 [在线]。网址： https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3139f.[100] von Neumann, J.,《论策略博弈理论》，Bargmann, S. 译，《博弈论文集》，第4卷，第13–42页，1959年。doi: 10.1515/9781400882168-003，译自《论社会博弈理论》，《数学年鉴》，第100卷，第1期，第295–320页，1928年。[101] von Neumann, J. and Fréchet, M.,《埃米尔·博雷尔在博弈论中的作用》，《政治经济学评论》，第69卷，第2期，第139–167页，1959年。 [在线]。网址： https://www.jstor.org/stable/24691720.[102] von Neumann, J. and Morgenstern, O.,《博弈与经济行为理论》。普林斯顿大学出版社，1944年。 [在线]。网址： http://www.jstor.org/stable/j.ctt1r2gkx.[103] Zhao, J.,《劳埃德·夏普利鲜为人知但仍具重要意义的三项贡献》，《博弈与经济行为》，第108卷，第592–599页，2018年。doi: 10.1016/j.geb.2017.05.002.[104] Ziegler, G. M.,《多胞体讲义》。施普林格科学与商业媒体，2012年，第152卷。doi: 10.1007/978-1-4613-8431-1。