arXiv:2301.02953v1 [cond-mat.mes-hall] 8 Jan 2023

多体 Lindblad 动力学场论

Foster Thompson1，Alex Kamenev1,2 1 物理与天文学院，明尼苏达大学，明尼阿波利斯，55414，MN，美国 2 William I. Fine 理论物理研究所，明尼苏达大学，明尼阿波利斯，55414，MN，美国

摘要

我们回顾并进一步发展用于研究多体驱动耗散量子系统 Lindblad 演化的 Keldysh 泛函积分技术。本文系统且循序渐进地介绍了一般玻色和费米 Lindblad 算符的动力学。我们尤其强调由李雅普诺夫方程确定的稳态分布函数所具有的独特性质。我们将这一框架应用于能带理论、无序、无碰撞集体模和平均场理论背景下的 Lindblad 动力学研究。

目录

1 引言 2

2 形式体系 5

2.1 Lindblad 与 Keldysh.5 2.2 玻色子.9 2.3 李雅普诺夫方程.12 2.4 可观测量与响应.15 2.5 例外点.18 2.6 费米子.20

3 个示例 **24**

3.1 参数驱动振子.24 3.2 非厄米能带理论.28 3.3 无序费米子.34

提交至爱思唯尔的预印本 *2023*年*1*月*10*日

3.4 林德布拉德算符气体.38 3.5 平均场理论.41

4 结论 **46**

附录 A Keldysh-Nambu 对角化 47 附录 B 超算符量子化 50 附录 C 非连通图 52

1. 引言

近年来，开放量子系统的非平衡动力学引起了广泛关注 [1, 2, 3, 4, 5]。人们对这一领域的兴趣，主要源于原型量子计算机设计与制造的迅速进步，这类计算机拥有数十乃至数百个量子比特 [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,16]。量子比特作为可控量子系统，其本质决定了它们既具有非平衡特性，也会与大量外部自由度耦合。

对于这类受驱动的耗散量子系统，一种经济且在许多情况下合理的处理方法是采用马尔可夫近似（即时间局域近似）。在这一假设下，约化 密度矩阵的动力学由林德布拉德方程描述 [17, 18]。历史上，林德布拉德动力学的研究主要局限于具有少数自由度的系统，研究重点大多来自量子光学文献[19, 20, 21, 22]。例如，单个二能级系统的林德布拉德演化与布洛赫方程组完全等价。其他例子包括参量驱动振子 [23, 24, 25], 、腔量子电动力学以及耦合的冷原子-腔系统 [26, 27], 等。对这些系统的研究带来了许多深刻的物理结果和强有力的理论方法。

现代量子计算平台，例如约瑟夫森器件或离子阱，完全属于多体系统的范畴。除此之外，我们还会提及受驱耗散量子流体和玻色凝聚体、 [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36], 大型耦合参量振荡器与光学腔网络的动力学， [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43],以及空间扩展系统的监测动力学， [44, 45, 46, 47], 这些系统都隐含地涉及数量极其庞大的自由度。事实上，仅 $N = 50$ 相连的量子比特器件就会产生希尔伯特

空间维数 $\mathcal{N} = 2^{50}$，远超传统的单粒子矩阵操作技术所能处理的范围。这就需要发展多体场论技术，用于描述林德布拉德算符（而非冯·诺依曼）演化。

朝这一方向迈出的重要一步，是考察多体玻色或费米系统；传统上，这类系统通过产生/湮灭算符代数在占据数基底中描述。在这种方法中，多体有效哈密顿量和一组多体量子跳跃算符 都表示为这类产生/湮灭算符的多项式。不过，重要的是要记住，尽管这些算符表面上看似简单，它们却都作用于维数随自由度数量呈指数增长的希尔伯特空间。因此，要通过蛮力数值方法求解相应的林德布拉德方程，就需要对 $\mathcal{N}^2 \times \mathcal{N}^2$ 矩阵进行对角化（例如，对于费米系统）。显然，这并不是一条有效的研究途径。

人们已开发出多种技术来研究二次型林德布拉德算符的动力学，即哈密顿量由二次型给出，而所有量子跳跃算符均为产生/湮灭算符的线性形式。所谓的“第三量子化”技术 [48, 49, 50, 51, 52], 便是其中一种方法，它基于玻色或费米超算符代数。该方法表明，二次多体林德布拉德算符的 $\mathcal{N}^2$ 特征值可由某个 $N \times N$ 非厄米矩阵的 N 复特征值构造而成，并采用常规的玻色或费米占据数。

还值得一提的是林德布拉德费米子的拓扑分类 [53, 54, 55] ，以及关于玻色和费米子高斯态的各种研究结果 [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]。这些技术已被广泛应用于诸多问题的研究，包括驱动耗散凝聚体的博戈留波夫谱 [29], 、非线性可积系统的精确解 [64], ，以及各种低维耗散系统拓扑性质的研究 [65, 66, 67, 68, 69]。

本文旨在回顾并进一步发展一种替代性方法。该方法由 Sieberer、Buchhold 和 Diehl [3]开创，以相干态泛函积分为基础，对林德布拉德动力学进行场论处理。这项技术源自 Keldysh 理论 [70] ，后者描述相互作用系统-浴对的底层冯·诺依曼动力学。通过积掉浴自由度，并对浴诱导自能采用马尔可夫近似，最终可得到一个时间局域的

有效作用量。后者与多体算符林德布拉德方程 [3]完全等价。不过，它为计算各种可观测量、关联函数、线性响应特性、集体模等提供了更方便的起点。对于推广到二次理论之外的情形，它也不可或缺。

在二次近似下，这种方法自然能够重现第三量子化关于 Lindblad 超算符谱的结果。它的优势在于清楚无误地表明，这些信息只是整体图景的一部分。在平衡系统中，统计权重和动力学都由同一组能量决定，而对于驱动耗散林德布拉德动力学，情况并非如此。在这种情况下，动力学弛豫的复谱与稳态（但非平衡）密度矩阵的（实）统计权重并无直接关联。后者由稳态分布函数 F_{st} 决定，而该函数自然成为 Keldysh 处理的主要构成要素之一。

本文的主要目标之一，是区分瞬态弛豫谱（由某个非厄米 $N \times N$矩阵 $\check{H}$ 的特征值导出）与厄米的 $N \times N$ 稳态分布 $\check{\check{F}}_{\mathrm{st}}$。即使对于二次林德布拉德算符，求得 F_{st} 也需要解一个线性动理学方程。后者具有所谓的连续时间*Lyapunov* 矩阵方程的形式；在动力系统文献中，该方程在线性系统稳定性与控制的语境下广为人知 [71]。我们表明，一方面， F_{st} 决定了许多具有物理意义的可观测量和关联函数。另一方面，其性质往往与 H 的性质有质的不同。文献中经常强调后者，却不当地忽视了前者。例如，与例外点相关的某些非解析性会出现在 H 谱中，却不会出现在 F_{st} 谱中。同样，尽管 H 的能带结构往往呈现有趣的拓扑特征，但相应 F_{st} 的能带结构在拓扑上可能是平庸的。

本文结构相当直观。第二节中，我们探讨玻色和费米多体系统 Lindblad 动力学场论处理的主要方面。在此，我们强调稳态分布的作用，并解释李雅普诺夫方程的由来。我们还推导了可观测量和线性响应的一般表达式，并考察例外点。第三节通过若干教学示例，阐释多体林德布拉德算符

动力学的各个方面。一些技术细节放在附录中。

2. 形式体系

本节讨论玻色子和费米子二次理论的一般形式体系。首先介绍与 Lindblad 算符相关的 Keldysh形式。在此基础上，可以利用 Keldysh格林函数形式主义求得多体 Lindblad 算符的谱和稳态密度矩阵。

2.1. Lindblad 与 Keldysh

在研究开放量子系统的算符形式方法中，人们考察感兴趣系统的约化密度矩阵 ρ，该矩阵是通过对环境希尔伯特空间求迹得到的。对与系统耦合的环境自由度求迹，会在 ρ 的演化方程中产生额外项，与标准的冯·诺依曼部分并存，从而形成有效的非平衡动力学。在可以忽略记忆效应的情况下，ρ 的时间演化由 Lindblad主方程[19]描述

$$\partial_t \rho = \hat{\hat{\mathcal{L}}} \rho, \tag{1a}$$

$$\hat{\hat{\mathcal{L}}} = -i[\hat{\mathcal{H}}, \cdot] + \sum_v \left(\hat{\mathcal{L}}_v \cdot \hat{\mathcal{L}}_v^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{\mathcal{L}}_v^\dagger \hat{\mathcal{L}}_v, \cdot\} \right), \tag{1b}$$

其中，后一个方程定义了 Lindblad超算符。厄米算符 $\mathcal{H}$ 是系统的有效哈密顿量（可能经过环境重整化）。跳跃算符 $\mathcal{L}_v$ （通常非厄米）指定了系统与其环境耦合的通道。

林德布拉德算符在封闭量子系统中扮演着类似于哈密顿量的角色，因为确定其本征向量和特征值，就能完整了解系统的动力学。因此，我们要解决超算符特征值问题 $\mathcal{L}\rho_\Lambda = \Lambda\rho_\Lambda$。给定的密度矩阵 ρ将是林德布拉德算符本征向量 ρ_Λ的叠加。相应的林德布拉德算符特征值通常是复数，并成对出现为共轭复数；其实部和虚部分别对应于 ρ的 ρ_Λ 分量的衰减速率和相干（相）旋转。

长时间下的动力学稳定性要求所有 Λ 的实部均为非正。这一要求类似于封闭量子系统的动力学中哈密顿量的谱

有下界。纯虚的 ρ_Λ Λ 起着特殊作用：它们不会导致耗散。至少总会存在一个零特征值，对应于一个稳态 $\rho_{\rm sto}$。一般而言，可能存在多个稳态，它们张成一个多维算符子空间。稳态空间的结构和维数由系统的对称性决定 [72, 73, 74, 75, 76,77]。然而，对于没有额外对称性的典型林德布拉德算符，稳态是唯一的。

本文关注多体Lindblad 算符，其中量子态的希尔伯特空间是玻色或费米福克空间。因此，使用产生/湮灭算符基底 $\hat{a}_j$ 和 $\hat{a}_j^\dagger$ 很方便，其中 $j \leq N$ 是一个通用的内部指标，可涵盖自旋、味、轨道数、空间或动量等。在这个基底中，$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_j)$和$\hat{\mathcal{L}}_v = \mathcal{L}_v(\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_j)$，其中不带帽子的 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{L}_v$ 是多项式函数。下文关注 $\mathcal{H}$ 为二次、 $\mathcal{L}_v$ 为线性的情形。在这类理论中，Lindblad动力学类似于非相互作用哈密顿动力学：通过研究单粒子量，可以精确求解完整的多体问题。特别是，一般的多体本征值具有如下形式：

$$\Lambda_{n_1 \ldots n_{2N}} = -i \sum_s n_s \epsilon_s, \tag{2}$$

其中 $2N$ 量子数 n_s 是取整数值的占据数，而 ϵ_s 是单粒子非厄米本征值问题的解。稳态密度矩阵可以通过求解单粒子量子动力学方程的稳态解得到。

用于提取这些信息的形式工具是 Keldysh路径积分及其相应的非平衡格林函数理论[70]。利用 [3], 的形式体系，可以将林德布拉德方程中蕴含的动力学映射为相干态路径积分。概括而言，这是通过一个时间演化超算符 $\rho(t) = \mathcal{U}_t \rho(t_0)$，将时间 t 的密度矩阵表示为其在初始时刻 t_0 的值 ^^来实现的；该超算符定义为 ^^exp($t\mathcal{L}$)。随后，可以引入 Keldysh配分函数，作为传播子的超算符类比，

$$Z = \mathrm{tr}\left(\hat{\hat{\mathcal{U}}}_t \rho(t_0)\right). \tag{3}$$

由于密度矩阵的归一化，它始终恒等于 1。 Z 可通过利用 Trotter公式将时间

区间切分为无穷小时间片，从而将 $\delta_t\mathcal{L}$写成路径积分的形式；这样，在每个时间片上都可以写出 $\exp(\delta_t\mathcal{L}) \simeq 1+\delta_t\mathcal{L}$，其中 δ_t是一个时间片的时长。在密度矩阵两侧的每个时间片之间插入相干态恒等分解后，算符便可转化为场。对于单个玻色模式，使用如下定义的玻色相干态：$\hat{a}\left|\phi\right\rangle = \phi\left|\phi\right\rangle$，其中 ϕ是复数（推广到 N个玻色子是直接的；关于费米子Keldysh积分的详情，请参见第 2.6 节）。密度矩阵在时间 t的每个相干态分量 $\left|\phi_1^+\right\rangle\left\langle\phi_1^-\right|$经超算符 $\mathcal{L}$作用后，得到以下矩阵元：

$$\left\langle\phi_2^+\right|\hat{\hat{\mathcal{L}}}(\left|\phi_1^+\right\rangle\left\langle\phi_1^-\right|)\left|\phi_2^-\right\rangle = -ie^{\bar{\phi}_2^+\phi_1^+ + \bar{\phi}_1^-\phi_2^-}\mathcal{K}(\bar{\phi}_2^+, \phi_1^+, \bar{\phi}_1^-, \phi_2^-), \tag{4}$$

其中，Keldysh“哈密顿量” $\mathcal{K}$ 在将分别作用于密度矩阵左侧/右侧的产生算符 $\hat{a}$替换为 $\phi^\pm$ 后，与林德布拉德算符具有相同的形式。若哈密顿量 $\mathcal{H}$ 和跳跃算符 $\mathcal{L}_v$ 的泛函形式均已按正规序排列，则可写为：

$$\mathcal{K}(\bar{\phi}^+, \phi^+, \bar{\phi}^-, \phi^-) = \mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^- + i\mathcal{D}(\bar{\phi}^+, \phi^+, \bar{\phi}^-, \phi^-), \tag{5a}$$

$$\mathcal{D}(\bar{\phi}^+, \phi^+, \bar{\phi}^-, \phi^-) = \sum_v \left(\bar{\mathcal{L}}_v^-\mathcal{L}_v^+ - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{L}}_v^+\mathcal{L}_v^+ - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{L}}_v^-\mathcal{L}_v^-\right), \tag{5b}$$

其中 $\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}$（$\bar{\phi}^\pm$，$\phi^\pm$）和 $\mathcal{L}_v^\pm = \mathcal{L}_v$（$\bar{\phi}^\pm$，$\phi^\pm$）。请注意，对于此处考虑的二次理论，第二个等式成立，因为乘积 $\hat{}$ $\mathcal{L}_v^\dagger\hat{}\mathcal{L}_v$ 的正规序与各项正规序后的乘积等价，二者至多相差一个无关紧要的常数。

在 $\delta_t \to 0$的极限下重新进行指数化，可得到一个由两组场 $\phi^\pm$（t） $\bar{\phi}^\pm$（t）表示的泛函积分；这两组场对应于林德布拉德算符中产生/湮灭算符 $\hat{}$ a，$\hat{}$ $a^\dagger$ 作用于密度矩阵左侧或右侧的情形。通常使用“经典”和“量子”场的Keldysh旋转基底 $\phi^{\mathrm{c}, \mathrm{q}} = (\phi^+ \pm \phi^-)/\sqrt{2}$来表示这一泛函积分。综上，配分函数 [3],为

$$Z = \int \mathrm{D}\bar{\phi}^\alpha \mathrm{D}\phi^\alpha e^{iS[\bar{\phi}^\alpha, \phi^\alpha]}, \tag{6}$$

其中 $\alpha = \mathrm{c}, \mathrm{q}$。Keldysh作用量 S 由拉格朗日量对时间积分得到，该拉格朗日量由 Keldysh哈密顿量 $\mathcal{K}$ 定义为$\phi^\pm$ 的函数，如式（5a）所示，

$$S = \int \mathrm{d}t\left(\bar{\phi}^{\mathrm{q}} i\partial_t\phi^{\mathrm{c}} + \bar{\phi}^{\mathrm{c}} i\partial_t\phi^{\mathrm{q}} - \mathcal{K}(\bar{\phi}^\alpha, \phi^\alpha)\right). \tag{7}$$

初始时刻的密度矩阵 $\rho(t_0)$的值包含在路径积分的边界条件中。

有了 Keldysh 路径积分， n点关联函数可通过在密度矩阵任一侧的不同时间插入算符来计算。进一步地，在有限时间处，二次可观测量 $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{A}}^\dagger \check{O} \hat{\mathcal{A}}$ 的期望值可以作为函数积分中的期望值来计算，其中 $\hat{\mathcal{A}} = [\hat{a} \; \hat{a}^\dagger]$ 是 Nambu 空间旋量，$\check{O}$ 是矩阵，

$$\langle \hat{\mathcal{O}}(t) \rangle = \int \mathrm{D}\bar{\phi}^\alpha \mathrm{D}\phi^\alpha e^{iS} \mathcal{O}\big(\bar{\phi}^-(t), \phi^+(t)\big), \tag{8}$$

其中 $\mathcal{O}(\bar{\phi}, \; \phi) = \bar{\Phi} \check{O} \Phi$ 是将算符替换为$^-$场后得到的经典函数，$\Phi = [\phi \; \phi]$ 是 Nambu 空间向量。通过将 $\mathcal{O}$ 表示为 Keldysh 场的函数，即可完成积分。举例来说，下面将用到单粒子玻色协方差矩阵 $\langle \{\hat{\mathcal{A}}, \; \hat{\mathcal{A}}^\dagger\} \rangle$。这个 Nambu 空间矩阵值期望值可化为经典场在相等时间处的二点期望值 $\langle \{\hat{\mathcal{A}}, \; \hat{\mathcal{A}}^\dagger\} \rangle(t) = \langle \Phi^{\mathrm{c}}(t) \Phi^{\mathrm{c}}(t) \rangle$。

Keldysh 形式体系的主要优势之一是，这一过程可以直接推广到具有不同时间参数的场的期望值。对于二次理论，二点函数最为重要，因为利用维克定理可以通过它们计算所有更高阶的 n点函数。将全部四个场合并为一个 Keldysh-$^-$ $^-$Nambu 向量 $\Phi = [\phi^{\mathrm{c}} \; \phi^{\mathrm{c}} \; \phi^{\mathrm{q}} \; \phi^{\mathrm{q}}]$ 后，二点函数定义了谱格林函数和 Keldysh 格林函数，

$$\begin{bmatrix} i\check{G}^{\mathrm{K}}(t,t') & i\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t') \\ i\check{G}^{\mathrm{A}}(t,t') & 0 \end{bmatrix} = \langle \Phi(t) \bar{\Phi}(t') \rangle \, . \tag{9}$$

请注意，使用此约定定义的格林函数是 Nambu 空间上的矩阵，以涵盖反常期望值不为零的情况，例如 $\langle \phi^\alpha(t) \phi^\beta(t') \rangle$。Keldysh 格林函数 $\check{G}^{\mathrm{K}}$ 包含有关系统分布函数的信息；在相等时间处可以看到，它正是上例中的协方差矩阵，$\check{G}^{\mathrm{K}}(t, \; t) = \langle \{\hat{\mathcal{A}}, \; \hat{\mathcal{A}}^\dagger\}(t) \rangle$。通常用图示表示格林函数，如图 1 所示。这一关系可推广至 N 个粒子，并且如下文所述，可用于计算稳态密度矩阵。谱格林函数 $\check{G}^{\mathrm{R,\,A}}$ 仅包含动力学信息，与系统的量子态无关。如下节所述，它们与单粒子本征值谱相关。

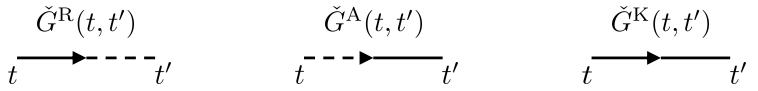


图 1：Keldysh 理论中三个格林函数的图示。实线表示经典场 ϕ^{c}，虚线表示量子场ϕ^{q}。

2.2. 玻色子

由二次哈密顿量和一组线性跳跃算符定义的、适用于 N 个玻色子的通用二次林德布拉德算符为：

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i,j}^{N} \left(\Delta_{ij}\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \lambda_{ij}\hat{a}_i\hat{a}_j + \lambda_{ij}^*\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j^\dagger\right), \tag{10a}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_v = \sum_{j}^{N}(\mu_{vj}\hat{a}_j + \nu_{vj}\hat{a}_j^\dagger), \tag{10b}$$

其中，带帽的 $\hat{a}_j$ 是玻色产生算符，$[\hat{a}_j,\ \hat{a}_i^\dagger] = \delta_{ij}$。原则上，可以允许参数矩阵随时间变化，但为求简便，这里只考虑与时间无关的模型。式 (7) 中对应的 Keldysh 作用量可整理为一个二次型：

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\ \bar{\Phi}\begin{bmatrix} 0 & \check{\tau}^3 i\partial_t - \check{H}_0 - i\check{Q} \\ \check{\tau}^3 i\partial_t - \check{H}_0 + i\check{Q} & i\check{D} \end{bmatrix}\Phi, \tag{11}$$

其中，$\check{\tau}^i$ 是作用于 Nambu 空间的泡利矩阵，而场 ϕ^α 被视为含有 ϕ_j^α 个 N 条目的向量，因此 Keldysh-南部旋量Φ 总共含有 $4N$ 个条目。

$\check{}$ 算符 H_0、Q 和 D 是厄米 $2N\times 2N$ Nambu 空间矩阵：

$$\check{H}_0 = \begin{bmatrix} \Delta & 2\lambda^\dagger \\ 2\lambda & \Delta^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{12a}$$

$$\check{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \gamma - \tilde{\gamma} & \eta_{\mathrm{a}}^\dagger \\ \eta_{\mathrm{a}} & \tilde{\gamma}^{\mathrm{T}} - \gamma^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{12b}$$

$$\check{D} = \begin{bmatrix} \gamma + \tilde{\gamma} & \eta_{\mathrm{s}}^\dagger \\ \eta_{\mathrm{s}} & \gamma^{\mathrm{T}} + \tilde{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{12c}$$

其中

$$\gamma_{ij} = \sum_v \mu^*_{vi}\mu_{vj}, \quad \tilde{\gamma}_{ij} = \sum_v \nu_{vi}\nu^*_{vj}, \quad \eta_{ij} = \sum_v \nu^*_{vi}\mu_{vj}, \tag{13}$$

以及 $\eta_{\mathrm{s,\ a}} = \eta \pm \eta^{\mathrm{T}}$。 $N \times N$ 参数矩阵具有如下指标对称性:

$$\Delta = \Delta^\dagger, \quad \lambda = \lambda^{\mathrm{T}}, \quad \gamma = \gamma^\dagger, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^\dagger, \quad \eta_{\mathrm{s,a}} = \pm\eta^{\mathrm{T}}_{\mathrm{s,a}}. \tag{14}$$

˘ 注意，矩阵 H_0 不过就是单粒子哈密顿量，ˆ $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}^\dagger \breve{H}_0 \hat{\mathcal{A}}$。矩阵 ˘ Q 和 ˘$\mathcal{D}$ 完全由通过跳跃算符与环境的耦合决定。

动力学矩阵 ˘H = ˘τ^3(˘$H_0 - i$ ˘Q) 是一个非厄米矩阵，在相干多体系统中取代了单粒子哈密顿量。其$2N$ 特征值由求解非厄米特征值问题得到,

$$\breve{H}\,|s\rangle = \epsilon_s\,|s\rangle\,, \tag{15}$$

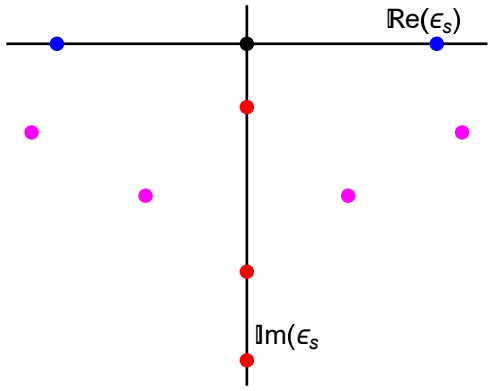
˘ 其中 ϵ_s 是通过使用一般而言非幺正的矩阵 U对 H 进行对角化而得到的特征值,

$$\left(\breve{U}\breve{H}\breve{U}^{-1}\right)_{ss'} = \epsilon_s\delta_{ss'}. \tag{16}$$

˘ 注意，由于 Nambu 空间的粒子-空穴对称性， H 的复特征值成对出现，形成复共轭对。 ϵ_s 作为林德布拉德算符单粒子扇区的特征值。在标准量子理论中，不存在相互作用意味着整个多体系统的能量由填充单粒子态及其粒子数决定。林德布拉德理论中基本上也是如此，只不过单粒子态 $|s\rangle$ 具有有限寿命，因为复单粒子“能量” ϵ_s 已迁移到复平面的下半部，见图 (2)。式 (2) 中多体特征值的表达式，只不过是为这个单粒子扇区分配玻色占据数。可以通过对 Keldysh 作用量进行半经典量子化（见附录 附录 A），或通过第三量子化形式（有关 Keldysh 形式体系与第三量子化形式体系之间联系的讨论，见附录 附录 B），明确证明这一事实。

为了进一步直观理解动力学的本质，考虑 Keldysh 作用量式（11）的经典力学。将量子场设为零时，经典场 $\Phi^{\mathrm{c}} = [\phi^{\mathrm{c}}\ \phi^{\mathrm{c}}]$ 的运动方程¯_ $\Phi^{\mathrm{q}} = [\phi^{\mathrm{q}}\ \phi^{\mathrm{q}}] = 0$ 为

$$i\partial_t\Phi^{\mathrm{c}} = \breve{H}\Phi^{\mathrm{c}}. \tag{17}$$



˘ 图 2： H 在本征值 ϵ_s的复平面上绘制的示例谱。标为红色的本征值对应于以纯耗散方式演化的本征向量。紫色本征值对应于同时具有耗散和相干旋转的模。原点处的黑色本征值表示稳态，这些稳态可与封闭量子系统中的能量本征态相比较。沿实轴排列的蓝色本征值对应于在长时间内不会衰减的极限环；它们类似于不同能量本征态的相干叠加。

这是一个非厄米薛定谔方程，其中经典场充当单粒子波函数。等价地，也可以用第一量子化语言将其概念化为粒子相空间中坐标的运动方程。由于动力学矩阵具有非厄米性，该方程所描述的经典力学具有耗散性：相图由以原点为中心的螺旋轨迹构成。只有当 H 的所有特征值的虚部均非正时，动力学才稳定，此时所有相空间轨迹都会趋于原点，而不会发散至无穷远。对于一般的参数矩阵选择，这种行为并无保证；如果 λ 或 $\tilde{\gamma}$ 的大小相较于其他参数过大，稳定性就可能被破坏。这些情况并不符合物理实际：它们要么对应于不稳定的哈密顿量，此时相空间中一个或多个坐标的势发生反转；要么对应于粒子增益率大于损耗率的情形，导致量子被不受控制地泵浦到系统中。在此类不稳定性的阈值处， H 的特征值可能为纯虚数，从而产生绕原点的相干绕转。这对应于 Lindblad 谱中的耗散能隙闭合，以及超出单一稳态的稳定长时间动力学。

谱格林函数 ˘$G^{\mathrm{R,\ A}}(t,\ t')$ 包含相同的动力学信-

息，体现在其极点结构中。它们可以从式 (11) 中二次型的逆矩阵的非对角块读出。这等价于对式 (17) 中的微分算子求逆。谱格林函数与系统的分布无关，因此始终是其时间参数之差的函数，

$$\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t') = -i\theta(t-t')e^{-i(t-t')\check{H}}\check{\tau}^3, \qquad \check{G}^{\mathrm{A}}(t,t') = i\theta(t'-t)\check{\tau}^3 e^{-i(t-t')\check{H}^\dagger}. \tag{18}$$

对时间参数之差进行傅里叶变换后$t-t'$，它们可写成动力学矩阵预解式的简单形式，

$$\check{G}^{\mathrm{R}}(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \check{H}}\check{\tau}^3, \qquad \check{G}^{\mathrm{A}}(\epsilon) = \check{\tau}^3\frac{1}{\epsilon - \check{H}^\dagger}. \tag{19}$$

格林函数的极点位于本征值 ϵ_s处。这可以与标准量子理论中单粒子态的能量和极点之间的对应关系相比较。

2.3. 李雅普诺夫方程

本节讨论林德布拉德算符的稳态。与上文讨论的谱格林函数相比，Keldysh 格林函数 $\check{G}^{\mathrm{K}}$ 取决于系统的分布。通常，人们用谱格林函数和一个厄米矩阵 $\check{F}(t,\ t')$来表示 Keldysh 格林函数，

$$\check{G}^{\mathrm{K}} = \check{G}^{\mathrm{R}} \circ \check{\tau}^3\check{F} - \check{F}\check{\tau}^3 \circ \check{G}^{\mathrm{A}}, \tag{20}$$

其中，组合 $\circ$ 表示时间参数和 Nambu 空间中的矩阵组合。请注意，与标准约定相比，此处多出的因子 $\check{\tau}^3$ 源于玻色子南布空间的辛结构。矩阵 F 起到单粒子分布矩阵的作用。在该方程左乘 $\check{\tau}^3\,\check{G}^{\mathrm{R}-1}$ 并右乘 $\check{G}^{\mathrm{A}-1}\check{\tau}^3$，即可得到关于 $\check{F}$的量子动力学方程，

$$[\partial_t \circ \check{F}] = -i\big(\check{H}\check{F} - \check{F}\check{H}^\dagger\big) + \check{\tau}^3\check{D}\check{\tau}^3, \tag{21}$$

其中，∂_t 和 D 被视为其两个时间参数的对角函数，即带有因子 $\delta(t-t')$。请注意，利用关系式 $i\check{D} = -\check{G}^{\mathrm{R}-1} \circ \check{G}^{\mathrm{K}} \circ \check{G}^{\mathrm{A}-1}$，通过对式（11）作用量中的二次型求逆，推导出该方程。这样做是成立的，因为

式（6）中的路径积分在时间轮廓的主体部分是高斯型的，非高斯初始密度的情况下，初始时刻 t_0 可能例外。初始密度位于时间轮廓的边界上，并决定量子动力学方程的边界条件。

在稳态中，$\check{G}^{\mathrm{K}}$ 以及由此延伸的$\check{F}$ 均独立于中心时间 $t+t'$。这使方程 (21) 的左侧为零，也就是说，右侧必须由一个稳态解单独置零。这可通过时间对角形式实现：$\check{F}(t-t') = \check{F}_{\mathrm{st}}\delta(t-t')$，其中$\check{F}_{\mathrm{st}}$是轨道空间和 Nambu 空间中的时间无关矩阵，并满足以下关系：

$$0 = -i\big(\check{H}\check{F}_{\mathrm{st}} - \check{F}_{\mathrm{st}}\check{H}^{\dagger}\big) + \check{\tau}^3\check{D}\check{\tau}^3. \tag{22}$$

这是一个复 Lyapunov 方程。只要$\check{H}$ 的所有特征值的虚部均有限 [71]，该方程就有唯一解。这意味着林德布拉德方程具有唯一稳态，任意初始条件经过足够长时间后都会收敛到该稳态。因此，玻色二次型 Lindblad 算符存在额外稳态的情况，只会出现在动力学不稳定性的边缘，即某个参数经过调节使耗散能隙闭合时。

若稳态唯一，则可在 H 的 $\check{}$ 特征基中求解方程 (22)，

$$\big(\check{U}\check{F}_{\mathrm{st}}\check{U}^{\dagger}\big)_{ss'} = \frac{-i}{\epsilon_s - \epsilon_{s'}^*}\big(\check{U}\check{\tau}^3\check{D}\check{\tau}^3\check{U}^{\dagger}\big)_{ss'}. \tag{23}$$

$\check{}$ 请注意，D 在该基底中通常并非对角形式，这意味着 F_{st} 的非对角元素不为零。这可以与平衡态理论进行比较：在平衡态理论中，优选的稳态 F 是热分布，它在单粒子哈密顿量的特征基下于 Nambu 空间中为对角形式。方程 (20) 中的关系等价于对每种粒子物种分别成立的涨落耗散定理。在 Lindblad 框架中，$\check{F}_{\mathrm{st}}$ 不依赖于 ϵ，并且通常会在 H 的特征基中产生非对角元素，因此更适合将其视为矩阵。对 $\check{F}$ 的另一种等价解释是对方程 (20) 积分，从而得到关系 $i\check{G}^{\mathrm{K}}(t,\ t) = \check{F}_{\mathrm{st}}$。也就是说，$\check{F}_{\mathrm{st}}$ 等价于第 2.1 节讨论的协方差矩阵 $\langle\{\hat{\mathcal{A}},\ \hat{\mathcal{A}}^{\dagger}\}\rangle$。

作为式 (23) 的一种替代方式，也可以改为在 $\check{F}_{\mathrm{st}}$ 的特征基中表示它。令 $\check{U}_F$ 为 $\check{\tau}^3\check{F}_{\mathrm{st}}$ 的对角化变换，则有 [78]：

$$\check{U}_F\check{\tau}^3\check{F}_{\mathrm{st}}\check{U}_F^{\dagger} = \mathrm{diag}\big(\coth(\beta_1/2), ..., -\coth(\beta_1/2), ...\big), \tag{24}$$

ˇ 其中， N 数 β_j 用于参数化 $F_{\rm st}$ 的特征值，并充当第 j 个特征向量的有效逆温度。对于动力学稳定理论， $0 < \beta_j \leq \infty$。如上所述，这通常并非动力学矩阵 H 对角化时所采用的同一ˇˇˇ基底， $U \neq U_F$。这与二次哈密顿量的平衡理论形成鲜明对比；在该理论中，ˆˆ 热态是满足 $\mathcal{H}_{\rm st} = \mathcal{H}$ 的高斯态。在平衡态下，动力学与分布对角化所采用的基底相同。而在非平衡态下，林德布拉德理论的情况通常并非如此。

稳态密度矩阵 $\rho_{\rm st}$ 的形式可利用ˇidentity of $F_{\rm st}$ 作为协方差矩阵来获得。协方差矩阵是高斯态理论中的核心对象，众所周知，它等价于对这类量子态 [56, 57, 58]的完整了解。高斯态是指其密度矩阵可由某个二次算符取指数得到的量子态，其形式如式 (10a) 所示。对于具有唯一稳态的二次林德布拉德算符，该稳态将是高斯态。因此，可以用有效的厄米哈密顿量来表示稳态密度矩阵 $\rho_{\rm st}$ ，

$$\rho_{\rm st} \propto \exp(-\hat{\mathcal{H}}_{\rm st}), \tag{25a}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm st} = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}^\dagger \check{H}_{\rm st}\hat{\mathcal{A}}, \tag{25b}$$

其中，比例系数由归一化条件 $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ 确定，而ˇˇ$H_{\rm st}$ 通常与 H_0不同。有效哈密顿量可通过以下关系从稳态分布矩阵中求得 [59]:

$$\check{F}_{\rm st}\check{\tau}^3 = \coth(\check{\tau}^3\check{H}_{\rm st}/2). \tag{26}$$

ˇ 在 $F_{\rm st}$的特征基中，它具有特别简单的形式，

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm st} = \sum_j^N \beta_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \tag{27}$$

其中，对角基玻色子定义为 $[\hat{b}_j, \hat{b}^\dagger] = \check{U}_F[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$。 β_jˆ 决定了稳态中 b 玻色子的平均占据数。请注意，在不存在唯一稳态的情况下，某些稳态可能是非高斯态，而且 KeldyshGreen 函数在长时间下的取值取决于初始条件。

2.4. 可观测量与响应

有了稳态分布，就可以计算可观测量的稳态期望值。例如，考虑一个二次可观测量 $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{A}}^{\dagger}\check{O}\,\hat{\mathcal{A}}$。达到稳态后任意有限时间的期望值为：

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\check{O}\big(\check{F}_{\mathrm{st}} - \check{\tau}^{3}\big)\right). \tag{28}$$

因此，量 $\frac{1}{2}(\check{F}_{\mathrm{st}} - \check{\tau}^{3})$ 类似于一个有效的 单粒子 密度矩阵。或者，将可观测量的经典部分和量子部分分别记为$\mathcal{O}^{\mathrm{c}}$, $^{\mathrm{q}} = \frac{1}{2}(\bar{\Phi}^{+}\check{O}\Phi^{+} \pm \bar{\Phi}^{-}\check{O}\Phi^{-})$，则有

$$\langle\mathcal{O}^{\mathrm{c}}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\check{O}\check{F}_{\mathrm{st}}\right) \tag{29}$$

因此，仅用分布矩阵计算单粒子迹，可以得到可观测量经典部分（维尔排序）的矩。不同时间的不同可观测量之间的关联函数，以及包含两个以上场算符乘积的可观测量，均可利用维克定理求得。

可以通过引入微扰来研究系统处于稳态时的响应。假设系统已制备好，并随后弛豫至稳态。形式上，这相当于将初始时刻推至无限久远的过去 $t_0 \to \infty$，使系统不再保留关于其初始条件的记忆。随后，在某个有限的较晚时刻 t_i，开启一些可能含时的微扰，$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}(t)\theta(t - t_i)$。当然，也可以直接通过修改哈密顿量 $\mathcal{H} \to \mathcal{H} + \delta\mathcal{H}(t)$ 来对系统施加微扰。对于二次微扰，这等价于在单粒子哈密顿量中加入矩阵值经典源 $\check{H}_0 \to \check{H}_0 + \delta\check{H}_0(t)$。在林布拉德问题中，还可以考虑改变演化的耗散部分，方法是引入新的跳跃算符，或改变已有的跳跃算符。这两种情况都会导致另外两个参数矩阵 $\check{Q} \to \check{Q} + \delta\check{Q}(t)$ 和 $\check{D} \to \check{D} + \delta\check{D}(t)$ 发生变化。前一种情况下，$\delta\check{Q}$ 和 $\delta\check{D}$ 的形式与式（12）相同。后一种情况下，可以通过在式（13）中修改跳跃算符的 $\mu \to \mu + \delta\mu(t)$和 $\nu \to \nu + \delta\nu(t)$来施加微扰，并仅保留所需阶数的 $\delta\mu$ 和 $\delta\nu$。

在路径积分形式中，这等价于在作用量中引入一个微扰 $S \to S + \delta S$。这对应于对

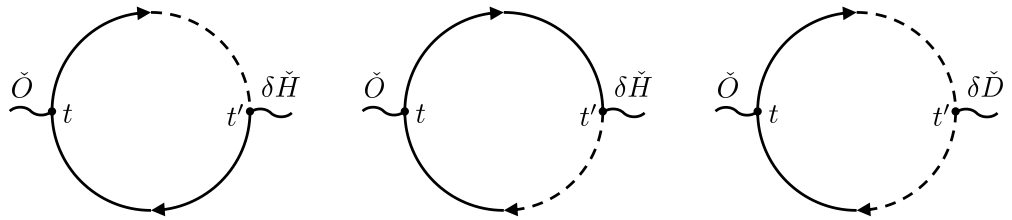


图 3：对林德布拉德算符微扰的线性响应有贡献的泡图。如式 (32) 所示，哈密顿量微扰对应于推迟极化泡图与超前极化泡图之差，如最左侧的两个图所示。对式 (33) 中修改 $\check{}$ Q 的耗散微扰，相应地由这两个泡图的给出。最右侧的图出现在修改式 (34) 中 $\check{}D$ 的微扰中。相较之下，该图在相干线性响应理论中不起作用。

式 (5a) 中的 Keldysh哈密顿量进行微扰， $\mathcal{K} \to \mathcal{K} + \delta\mathcal{K}(t)$。分别改变 H_0、Q 和 D 所产生的微扰为：

$$\delta_{H_0}\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2}\check{\sigma}^1_{\alpha\beta}\bar{\Phi}^\alpha\delta\check{H}_0(t)\Phi^\beta \tag{30a}$$

$$\delta_{Q}\mathcal{K}(t) = -\frac{1}{2}\check{\sigma}^2_{\alpha\beta}\bar{\Phi}^\alpha\delta\check{Q}(t)\Phi^\beta \tag{30b}$$

$$\delta_{D}\mathcal{K}(t) = -\frac{i}{2}\bar{\Phi}^{\mathrm{q}}\delta\check{D}(t)\Phi^{\mathrm{q}} \tag{30c}$$

其中，$\check{}\sigma^i$ 表示 Keldysh 指标空间中的泡利矩阵。对于弱微扰，只需保留测度的一阶修正。这给出了线性响应；由此可得任意有限时间下可观测量 $\mathcal{O}$ 的 $\hat{}$ 的期望值，

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle(t) \simeq \langle\hat{\mathcal{O}}\rangle_{\mathrm{st}} - i\int_{t_i}^{t}\mathrm{d}t'\,\langle\mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta\mathcal{K}(t')\rangle_{\mathrm{st}}\,. \tag{31}$$

这不过是推广到林德布拉德背景下的久保公式。该表达式中的第一项由式（28）给出。后一项只包含经典部分 $\mathcal{O}^{\mathrm{c}}$，因为式（28）中只有 $\check{}F$ 会获得微扰修正。可以利用维克定理计算该项，从而得到图 3 所示的泡图贡献。请注意，只能保留对应于全连通图的项，参见附录 附录 C。

对于纯哈密顿量微扰，可得到推迟响应函数的标准形式修正，

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta_{H_0}\mathcal{K}(t')\rangle_{\mathrm{st}} &= \langle \mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta\mathcal{H}^{\mathrm{q}}(t')\rangle_{\mathrm{st}} \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t')\big(\check{\tau}^3\check{F}_{\mathrm{st}}\delta\check{H}_0(t') - \delta\check{H}_0(t')\check{F}_{\mathrm{st}}\check{\tau}^3\big)\check{G}^{\mathrm{A}}(t',t)\check{O}\right).\end{aligned} \tag{32}$$

对耗散耦合的微扰无法表示为可观测量的量子部分和经典部分之乘积的期望值。不过，它们可以用分布矩阵表示为简单的形式，

$$\langle \mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta\mathcal{K}_Q(t')\rangle_{\mathrm{st}} = -\frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\left(\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t')\big(\check{\tau}^3\check{F}_{\mathrm{st}}\delta\check{Q}(t') + \delta\check{Q}(t')\check{F}_{\mathrm{st}}\check{\tau}^3\big)\check{G}^{\mathrm{A}}(t',t)\check{O}\right), \tag{33}$$

$$\langle \mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta\mathcal{K}_D(t')\rangle_{\mathrm{st}} = \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\left(\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t')\delta\check{D}(t')\check{G}^{\mathrm{A}}(t',t)\check{O}\right). \tag{34}$$

请注意，尽管这两个表达式并非像式（32）那样是经典和量子可观测量的期望值，但它们都恰当地具有推迟因果性。另请注意，林德布拉德算符的线性响应理论已在[79] 中利用超算符形式进行了研究。上述公式与该文给出的结果相当，后者针对多体玻色子作了特化。

若要超越线性响应，与其在微扰理论中保留更高阶项，不如直接求解式（21）的量子动力学方程，以确定完整的非稳态 $\check{F}$。系统在微扰施加前已达到稳态这一假设，由边界条件 $\check{F}(t,\ t')\ =\check{F}_{\mathrm{st}}$（对所有 $t,\ t' < t_i$）来体现。由于假设对林德布拉德算符的微扰是时间局域的，因此总可以寻求一个时间对角解，使得 $\check{F}(t,\ t')\ = \delta(t-t')\ \check{F}(t)$。采用这一试探形式后，动力学方程呈现为局域形式，

$$\partial_t\check{F}(t) = -i\big(\check{H}(t)\check{F}(t) - \check{F}(t)\check{H}^{\dagger}(t)\big) + \check{\tau}^3\check{D}(t)\check{\tau}^3. \tag{35}$$

假设能够求解该方程，就可以利用式（28）和（28）的适当推广，计算有限时间下二次可观测量的期望值，

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\check{O}\big(\check{F}(t) - \check{\tau}^3\big)\right), \tag{36a}$$

$$\langle \mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\check{O}\check{F}(t)\right). \tag{36b}$$

包含两个以上场算符乘积的可观测量的经典部分，仍可利用维克定理求得。即使分布是非平稳的，这一点依然成立，因为路径积分仍然是含有含时微扰的高斯泛函积分；密度矩阵在随时间演化的过程中仍保持为高斯态。

作为检验，可以通过组合并重新排列方程 (32)、(33) 和 (34)，比较这两种方法。方程 (31) 中 $\langle \mathcal{O} \rangle$ 的修正由 O 的迹乘以下列对象给出：

$$\int_{t_i}^{t} \mathrm{d}t' \check{G}^{\mathrm{R}}(t,t')\check{\tau}^3 \Big(-i\big(\delta\check{H}(t')\check{F}_{\mathrm{st}} - \check{F}_{\mathrm{st}}\delta\check{H}^{\dagger}(t')\big) + \check{\tau}^3\delta\check{D}(t')\check{\tau}^3 \Big)\check{\tau}^3\check{G}^{\mathrm{A}}(t',t), \quad (37)$$

这恰好是方程 (35) 的最低阶微扰解。

2.5. 例外点

本节讨论迄今被忽略的、由非厄米性导致的微妙问题。动力学矩阵 H，进而林德布拉德算符本身，可能处于不可对角化情形。这种情况会出现在参数空间中所谓的例外点处，此时两个或多个特征值合并。这与标准厄米量子力学中的情形有根本区别：在标准厄米量子力学中，能级交叉通常会避免，而简并传统上被认为是某种潜在对称性的结果。相反，例外点处特征值的合并应标志着动力学中的一次分岔，且与动力学对称性无关。

这种现象的典型例子是两个特征值在实轴上的碰撞，见图（4）。矩阵 $-i\check{}H$ 的特征值，以及由此推广得到的林德布拉德算符的特征值，均成复共轭对出现。因此，实轴上的例外点对应于这种“粒子-空穴对称性”的自发破缺。这标志着从欠阻尼到过阻尼的分岔：相应的本征模在碰撞前经历阻尼相干旋转，碰撞后则经历纯耗散。例外点处存在共振阻尼，从而使一个本征模产生瞬态代数增益。这种瞬态增益是例外点的一般特征。

˘ 为了了解其工作原理，假设动力学矩阵 H 存在一个例外点，此处 M 特征值都聚合到数值 ϵ_s。动力学矩阵处于不可对角化情形，但可以通过

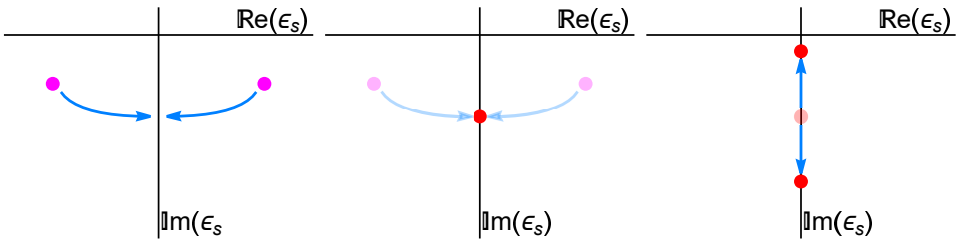


图 4：调节参数使其穿过一个例外点的示例，该例外点分隔了欠阻尼到过阻尼的动力学分岔。随着参数调节，最初位于复平面左半部的一对共轭特征值开始相向移动，趋近实轴。碰撞后，它们会停留在实轴上，但彼此分开并向相反方向移动。

ˇ 非幺正相似变换 U将其化为约当标准形，

$$\check{U}\check{H}\check{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \epsilon_s & 1 & & & & \\ & & \epsilon_s & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & \epsilon_s & & \\ & & & & & \ddots & \end{bmatrix}. \tag{38}$$

ˇ 在这个基底中， H 几乎是对角的，只有本征值 ϵ_s对应的 $M \times M$ 块例外，其上对角线之上有若干个 1。因此， H的特征向量总数少于 $2N$。作为缺失特征向量的一种技术性替代，引入约当块的附加基底向量会很方便。令 $|s,\ 1\rangle$ 表示对应本征值 ϵ_s的特征向量，可以引入 $|s,\ n\rangle$ ，其中 $n \leq M$ 通过以下关系定义，

$$\check{H}\,|s,n\rangle = \epsilon_s\,|s,n\rangle + |s,n-1\rangle\,. \tag{39}$$

向量 $|s,\ n\rangle$ 构成了张成单粒子希尔伯特空间的完备基底。

在存在这种约当块的情况下，谱格林函数会出现高阶极点。特别是，对于 $s \leq s_1 < s_2 \leq s + M$

在同一个约当块中，会出现以下因子：

$$\left(\check{U}\frac{1}{\epsilon-\check{H}}\check{U}^{-1}\right)_{s_1s_2}=\left(\frac{1}{\epsilon-\epsilon_s}\right)^{1+s_2-s_1}. \tag{40}$$

将这些非对角分量写成时间 t的函数时，指数项 $|t|^{s_2-s_1}\exp(-i\epsilon_s t)$前会出现多项式系数，从而使某些初始关联产生瞬态代数增益。这种行为在远离例外点后便不复存在：一般微扰会恢复 H的可对角化性。例外点处对微扰极其敏感。这体现在特征值的解析结构上：它们会出现分数幂律非解析性 [80]。与传统的、完全解析的厄米微扰理论相比，这种现象反常。第 3 节中的一些例子探讨了这些非解析性的后果。

人们自然会想知道，稳态密度中是否存在例外点的某种解析特征。考察李雅普诺夫方程式 (22)，可以发现答案是否定的。在参数空间 [80]中，例外点附近的两个矩阵 $\check{}H$ 和 $\check{}_D$都是解析函数。将所有项展开为级数并匹配各次幂，可以看出，对于 $F_{\rm st}$只允许出现整数幂。因此， $F_{\rm st}\check{}$以及由此延伸出的 $H_{\rm st}$ 在参数空间上都是解析函数，即使在例外点处也不例外。因此，通常情况下，动力学反常性质的痕迹不会在长时间后残留下来。

2.6. 费米子

本节将上述形式体系应用于研究费米林德布拉德算符。首先，需要构造费米子版本的 Keldysh 路径积分。其推导方式与玻色子对应物基本相同，但处理反对易场的排序时需要格外小心。路径积分的基本构件是由 $\hat{}$ $c\left|\psi\right\rangle=\psi\left|\psi\right\rangle$定义的费米相干态，其中 ψ 是一个复格拉斯曼数。林德布拉德算符作用在两组格拉斯曼相干态上的相关重叠公式，是式 (4) 的对应形式，

$$\left\langle\psi_2^+\right|\hat{\hat{\mathcal{L}}}(\left|\psi_1^+\right\rangle\left\langle\psi_1^-\right|)\left|\psi_2^-\right\rangle=-ie^{\bar{\psi}_2^+\psi_1^++\bar{\psi}_1^-\psi_2^-}\mathcal{K}(\bar{\psi}_2^+,\psi_1^+,\bar{\psi}_1^-,\psi_2^-), \tag{41}$$

其中，Keldysh 哈密顿量由式 (5) 给出，只需用格拉斯曼场$\psi^\pm$ 替代玻色场即可。注意，在式 (5b) 中，场的排列顺序

¯在第一项中并非无关紧要，而是经过特意选择，使后向场（ψ^-，ψ^-）¯始终出现在耗散项 $\mathcal{D}$中的前向场（ψ^+，ψ^+）之前。这样一来，便可将式 (3) 中的配分函数整理成费米子泛函积分的形式。通常采用 Larkin-Ovchinnikov 约定，其中定义 Keldysh 旋转场 $\psi^{1,\,2}=(\psi^+\pm\psi^-)^-/\sqrt{2}$和 $\bar{\psi}^{1,\,2}=(\bar{\psi}^+\mp\bar{\psi}^-)/\sqrt{2}$。由此得到的配分函数为：

$$Z=\int \mathrm{D}\bar{\psi}^a\mathrm{D}\psi^a e^{iS[\bar{\psi}^a,\psi^a]}, \tag{42a}$$

$$S=\int \mathrm{d}t\Big(\bar{\psi}^1 i\partial_t\psi^1+\bar{\psi}^2 i\partial_t\psi^2-\mathcal{K}(\bar{\psi}^a,\psi^a)\Big). \tag{42b}$$

将所有四个场组合成 Keldysh-Nambu 向量 $\Psi=[\Psi^1\ \Psi^2]$，其中 $\Psi^1=[\psi^1\ \bar{\psi}^2]$ 和 $\Psi^2=[\psi^2\ \bar{\psi}^1]$，二点函数矩阵定义了费米子格林函数：

$$\begin{bmatrix} i\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t') & i\check{G}^{\mathrm{K}}(t,t') \\ 0 & i\check{G}^{\mathrm{A}}(t,t') \end{bmatrix}=\langle\Psi(t)\bar{\Psi}(t')\rangle\,. \tag{43}$$

它们在玻色子理论中也发挥着相同的作用。

由 N 个费米子构成的二次林德布拉德算符系统，其哈密顿量和跳跃算符定义如下：

$$\hat{\mathcal{H}}=\sum_{i,j}^{N}\left(\varepsilon_{ij}\hat{c}_i^\dagger\hat{c}_j+\Delta_{ij}\hat{c}_i\hat{c}_j+\Delta_{ij}^*\hat{c}_j^\dagger\hat{c}_i^\dagger\right), \tag{44a}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_v=\sum_{j}^{N}(\mu_{vj}\hat{c}_j+\nu_{vj}\hat{c}_j^\dagger), \tag{44b}$$

其中，$\hat{}c_j$ 是费米子产生算符，$\{\hat{}c_i,\hat{}c_j^\dagger\}=\delta_{ij}$。相应的 Keldysh 作用量为：

$$S=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\bar{\Psi}\begin{bmatrix} i\partial_t-\check{H}_0+i\check{Q} & i\check{D} \\ 0 & i\partial_t-\check{H}_0-i\check{Q} \end{bmatrix}\Psi, \tag{45}$$

ˇˇˇˇ 算符 H_0、Q 和 D 是 Nambu 空间中的厄米 $2N\times 2N$ 矩阵：

$$\check{H}_0=\begin{bmatrix} \varepsilon & 2\Delta^\dagger \\ 2\Delta & -\varepsilon^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{46a}$$

$$\check{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \gamma + \tilde{\gamma} & \eta_{\mathrm{s}}^{\dagger} \\ \eta_{\mathrm{s}} & \gamma^{\mathrm{T}} + \tilde{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{46b}$$

$$\check{D} = \begin{bmatrix} \gamma - \tilde{\gamma} & \eta_{\mathrm{a}}^{\dagger} \\ \eta_{\mathrm{a}} & \tilde{\gamma}^{\mathrm{T}} - \gamma^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \tag{46c}$$

其中 γ、$\tilde{\gamma}$ 和 η 的定义与玻色子理论中式 (13) 的定义相同。$N \times N$ 参数矩阵具有以下指标对称性：

$$\varepsilon = \varepsilon^{\dagger}, \quad \Delta = -\Delta^{\mathrm{T}}, \quad \gamma = \gamma^{\dagger}, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^{\dagger}, \quad \eta_{\mathrm{s,a}} = \pm\eta_{\mathrm{s,a}}^{\mathrm{T}}. \tag{47}$$

矩阵 $\check{}\, H_0$ 是单粒子哈密顿量，$\hat{}\, \mathcal{H} = \frac{1}{2}\hat{}\mathcal{C}^{\dagger}\, \check{}H_0\hat{}\mathcal{C}$，其中 $\hat{}\mathcal{C} = [\hat{}c\ \hat{}c^{\dagger}]$是费米子产生算符的 Nambu 空间向量。

请注意，与玻色子理论相比，矩阵 Q 和 D 的定义是相反的。因此，无论参数如何选择，动力学稳定性都能得到保证。为了解其原因，定义费米子单粒子动力学矩阵 $H = H_0 - iQ$。与玻色子理论类似，该理论的动力学稳定性要求此矩阵的所有特征值的虚部均非正。要了解为何这一点能够得到保证，首先引入 Nambu 空间向量 $|v_{1v}\rangle = [\mu_v^*\ \nu_v^*]$ 和 $|v_{2v}\rangle = [\nu_v\ \mu_v]$。那么 $\check{}Q = \frac{1}{2}\sum_{a,\ v}|v_{av}\rangle\langle v_{av}|$ 就是一维投影算符之和。因此，其所有特征值都严格非负。现在考虑 $\check{}H$的一个特征向量 $|\epsilon\rangle$。那么对应特征值的虚部为 $\mathrm{Im}(\epsilon) = -\langle\epsilon|\check{}Q|\epsilon\rangle \le 0$。其背后的物理原因是泡利不相容原理：每个量子态所能容纳的费米子数量有限，因此即使粒子泵浦速率大于损耗速率，也能防止不受控制的大量粒子进入系统。

与玻色子类似，通过式（2）为 $\check{}H$ 的每个特征值分配占据数，即可得到多体 Lindblad 算符特征值。对于费米子，必须注意，n_s 是费米占据数，只能取 0 或 1。

费米子谱格林函数为：

$$\check{G}^{\mathrm{R}}(t-t') = -i\theta(t-t')e^{-i(t-t')\check{H}}, \qquad \check{G}^{\mathrm{A}}(t-t') = i\theta(t'-t)e^{-i(t-t')\check{H}^{\dagger}}. \tag{48}$$

$\check{}$ 在频域中，这变为 H 的预解式：

$$\check{G}^{\mathrm{R}}(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \check{H}}, \qquad \check{G}^{\mathrm{A}}(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \check{H}^{\dagger}}. \tag{49}$$

格林函数的极点位于 $\check{}H$ 的复本征值处。

Keldysh 格林函数通过分布矩阵 $\check{F}(t,\ t')$ 参数化如下：

$$\check{G}^{\mathrm{K}} = \check{G}^{\mathrm{R}} \circ \check{F} - \check{F} \circ \check{G}^{\mathrm{A}}. \tag{50}$$

分布矩阵满足量子动力学方程：

$$[\partial_t \overset{\circ}{,} \check{F}] = -i\big(\check{H}\check{F} - \check{F}\check{H}^{\dagger}\big) + \check{D}, \tag{51}$$

其中 $\check{D}$ 和 ∂_t 分别带有因子 $\delta(t-t')$。在定态极限下，有 $\check{F}(t,\ t') = \check{F}_{\mathrm{st}}\delta(t-t')$，其中 $\check{F}_{\mathrm{st}}$ 满足李雅普诺夫方程，

$$0 = -i\big(\check{H}\check{F}_{\mathrm{st}} - \check{F}_{\mathrm{st}}\check{H}^{\dagger}\big) + \check{D}. \tag{52}$$

与式 (23) 类似，在 $\check{H}$的特征基中，可以求出 $\check{F}_s s$ 的各分量：

$$\big(\check{U}\check{F}_{\mathrm{st}}\check{U}^{\dagger}\big)_{ss'} = \frac{-i}{\epsilon_s - \epsilon_{s'}^{*}}\big(\check{U}\check{D}\check{U}^{\dagger}\big)_{ss'}. \tag{53}$$

$\check{}$稳态分布矩阵 F_{st} 等价于定态等时 Keldysh 格林函数，而后者本身等于费米子协方差矩阵，$\check{F}_{\mathrm{st}} = i\check{G}^{\mathrm{K}}(t,\ t) = \langle[\hat{\mathcal{C}},\ \hat{\mathcal{C}}^{\dagger}]\rangle$。

当稳态唯一时，稳态密度矩阵是一个费米高斯态，其形式如式 (25a)，其中

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2}\hat{\mathcal{C}}^{\dagger}\check{H}_{\mathrm{st}}\hat{\mathcal{C}}. \tag{54}$$

Th有效哈密顿量通过 [60]与分布矩阵相关联：

$$\check{F}_{\mathrm{st}} = \tanh(\check{H}_{\mathrm{st}}/2). \tag{55}$$

$\check{}\check{}$对 F_{st} 进行对角化，可得 $2N$ H_{st} 的特征值，它们决定了 ρ_{st} 在其对角基 [62] 中的布居数：

$$\check{U}_F\check{F}\check{U}_F^{-1} = \mathrm{diag}\big(\tanh(\beta_1/2), ..., -\tanh(\beta_1/2), ...\big). \tag{56a}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{st}} = \sum_j^N \beta_j \hat{d}_j^{\dagger}\hat{d}_j, \tag{56b}$$

其中 $[\hat{d}\hat{d}^{\dagger}] = \check{U}[\hat{c}\hat{c}^{\dagger}]$。与玻色子理论不同，有效逆温度 β_j没有任何限制；它们可以为负值。

存在源时，可通过求解费米子对应情形的方程 (35)，并使用方程 (36)，来计算可观测量的期望值，

$$\partial_t \check{F}(t) = -i\big(\check{H}(t)\check{F}(t) - \check{F}(t)\check{H}^\dagger(t)\big) + \check{D}(t). \tag{57a}$$

$$\langle\hat{\mathcal{O}}\rangle(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\Big(\check{O}\big(1-\check{F}(t)\big)\Big), \tag{57b}$$

$$\langle\mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\big(\check{O}\check{F}(t)\big). \tag{57c}$$

对于偏离稳态的微扰，替代方程（32）、（33）和（34）的线性响应公式为：

$$\langle\mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta_{H_0}\mathcal{K}(t')\rangle_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\Big(\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t')\big[\check{F}_{\mathrm{st}},\delta\check{H}_0(t')\big]\check{G}^{\mathrm{A}}(t',t)\check{O}\Big), \tag{58a}$$

$$\langle\mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta\mathcal{K}_Q(t')\rangle_{\mathrm{st}} = \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\,\Big(\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t')\big\{\check{F}_{\mathrm{st}},\delta\check{Q}(t')\big\}\check{G}^{\mathrm{A}}(t',t)\check{O}\Big), \tag{58b}$$

$$\langle\mathcal{O}^{\mathrm{c}}(t)\delta\mathcal{K}_D(t')\rangle_{\mathrm{st}} = -\frac{i}{2}\,\mathrm{tr}\,\Big(\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t')\delta\check{D}(t')\check{G}^{\mathrm{A}}(t',t)\check{O}\Big). \tag{58c}$$

3. 示例

下面将运用上述形式体系研究 Lindblad能带理论、半经典动力学和平均场理论的示例。尽管这绝非详尽无遗的列表，但这些示例展示了如何使用 Keldysh 语言研究二次型和非线性Lindblad算子，并有助于阐明其与平衡态理论相比的重要差异。

3.1. 参数驱动振子

作为预热，我们先考虑一个只有一个自由度的模型：一个与热浴接触并受到参数驱动的单个线性玻色振子。这个简单模型是上述林德布拉德动力学所特有的诸多现象的典型代表。参数驱动振子在驱动的旋转框架中的哈密顿量和跳跃算符为：

$$\hat{\mathcal{H}} = \Delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \lambda(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2), \tag{59a}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_1 = \hat{a}, \qquad \hat{\mathcal{L}}_2 = \hat{a}^\dagger. \tag{59b}$$

这些跳跃算符描述了以相应速率 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 与环境交换量子的损耗和增益。速率与系统和热浴之间耦合的强度 κ、热浴温度 T 以及系统的固有频率 ω_0 有关：

$$2\kappa = \gamma - \tilde{\gamma}, \qquad \coth(\omega_0/2T) = \frac{\gamma + \tilde{\gamma}}{\gamma - \tilde{\gamma}}. \tag{60}$$

注意到，在热浴温度和系统频率下出现了玻色函数 $2n_{\mathrm{B}}+1 = \coth(\omega_0/2T)$。

˘ 动力学矩阵 H 为：

$$\check{H} = \begin{bmatrix} \Delta - i\kappa & 2\lambda \\ -2\lambda & -\Delta - i\kappa \end{bmatrix}. \tag{61}$$

谱格林函数由式（19）给出，

$$\check{G}^{\mathrm{R,A}}(\epsilon) = \frac{1}{(\epsilon \pm i\kappa)^2 - \Omega^2} \begin{bmatrix} \epsilon + \Delta \pm i\kappa & 2\lambda \\ 2\lambda & \epsilon - \Delta \pm i\kappa \end{bmatrix}, \tag{62}$$

其中 $\Omega^2 = \Delta^2 - 4\lambda^2$ 是哈密顿量部分 ˘ ˘H的玻戈留波夫频率。 H 的特征值与上述表达式分子中的谱格林函数极点相匹配，

$$\epsilon_{1,2} = -i\kappa \mp \Omega. \tag{63}$$

由此可知，只要耦合 κ为正，系统就是稳定的；当量子损耗率大于增益率 $\gamma > \tilde{\gamma}$时，耦合为正。此外，只有当驱动强度足够小时，模型才稳定 $2\lambda \leq \sqrt{\Delta^2 + \kappa^2}$。当达到这一界限时，两个特征值之一变为零，理论处于 ˘ 不稳定性的边缘。执行对角化的矩阵 U 等价于在没有与热浴耦合时的相干玻戈留波夫旋转矩阵：

$$\check{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\Delta}{\Omega} + 1} & \sqrt{\frac{\Delta}{\Omega} - 1} \\ \sqrt{\frac{\Delta}{\Omega} - 1} & \sqrt{\frac{\Delta}{\Omega} + 1} \end{bmatrix} \tag{64}$$

矩阵 ˘D 与单位矩阵成正比，比例因子为 $2\kappa \coth(\omega_0/2T)$。

Keldysh 格林函数为:

$$\check{G}^{\mathrm{K}}(\epsilon)=\frac{-2i\kappa\coth(\omega_0/2T)}{\big((\epsilon+i\kappa)^2-\Omega^2\big)\big((\epsilon-i\kappa)^2-\Omega^2\big)} \times\begin{bmatrix}(\epsilon+\Delta)^2+\kappa^2+4\lambda^2 & -4\lambda(\Delta+i\kappa)\\ -4\lambda(\Delta-i\kappa) & (\epsilon-\Delta)^2+\kappa^2+4\lambda^2\end{bmatrix}. \quad (65)$$

求解方程（21）得到稳态分布矩阵:

$$\check{F}_{\mathrm{st}}=\frac{\coth(\omega_0/2T)}{\kappa^2+\Omega^2}\begin{bmatrix}\Delta^2+\kappa^2 & -2\lambda(\Delta+i\kappa)\\ -2\lambda(\Delta-i\kappa) & \Delta^2+\kappa^2\end{bmatrix}. \quad (66)$$

$\check{}$ F_{st} 的特征值通过方程（24）与有效$\hat{}$哈密顿量 $\mathcal{H}_{\mathrm{st}}$ 的对角频率 β 相关,

$$\coth(\beta/2)=\coth(\omega_0/2T)\sqrt{\frac{\kappa^2+\Delta^2}{\kappa^2+\Omega^2}}. \quad (67)$$

$\check{}$ 对角化变换 U_F 为:

$$\check{U}_F=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}e^{-i\theta}\sqrt{\sqrt{\frac{\kappa^2+\Delta^2}{\kappa^2+\Omega^2}}+1} & e^{i\theta}\sqrt{\sqrt{\frac{\kappa^2+\Delta^2}{\kappa^2+\Omega^2}}-1}\\ e^{-i\theta}\sqrt{\sqrt{\frac{\kappa^2+\Delta^2}{\kappa^2+\Omega^2}}-1} & e^{i\theta}\sqrt{\sqrt{\frac{\kappa^2+\Delta^2}{\kappa^2+\Omega^2}}+1}\end{bmatrix}, \quad (68)$$

其中 $\theta=\arg(\Delta+i\kappa)$。如上文所述，分布矩阵和动力学矩阵为对角形式时所对应的基底并不相同， $U\neq U_F$。

为了更直观地理解该模型，考虑强耗散与弱耗散的极限。当耗散相对于问题中的所有其他尺度都非常弱时 $\kappa\to 0$，两个林德布拉德算符特征值 $-i\epsilon_s$ 是复共轭的，并具有一个很小的负实部。在这一极限下，动力学表现为弱欠阻尼相干旋转。除去 κ阶的修正外，稳态在相干问题的 Bogoliubov 准粒子基底中是对角的。也就是说，$\check{}$ $U_F=\check{U}+O(\kappa)$。因此，稳态的有效哈密顿量在其对角基底中表示为:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{st}}=\beta\hat{b}^\dagger\hat{b}, \quad (69)$$

其中 $[\hat{}\,\hat{b}^\dagger]=\check{U}_F[\hat{}\,a\ \hat{}\,a^\dagger]$。这等于原始哈密顿量 $\hat{}\ \mathcal{H}$ ，但相差一个比例常数 $\beta=\Omega/T_{\mathrm{eff}}$,

$$\coth(\Omega/2T_{\mathrm{eff}})=\frac{\Delta}{\Omega}\coth(\omega_0/2T). \quad (70)$$

因此，稳态是相干动力学的热态，但其有效温度不同于热浴温度。请注意，即使在极限 $T \to 0$ 下，有效温度 T_{eff} 仍然是有限的。这种现象称为量子加热 [23, 24, 25]。

或者，也可以考虑强耗散极限， $\kappa \to \infty$。在此极限下，驱动强度可以稳定地大于失谐量，$2\lambda > \Delta$，甚至超过相干稳定性的界限。在这种情况下，Lindbladian 特征值 $-i\epsilon_s$ 为纯虚数，动力学表现为过阻尼纯耗散，不伴有任何相干旋转。除哈密顿量参数 Δ 和 λ量级的修正外，动力学矩阵 H 与单位矩阵成正比，比例因子为 κ。因此，动力学的对角基就是问题的初始基底，$\check{U} = \check{1}$。类似地，考察此极限下的式（66）可知，$\check{F}_{\text{st}}$ 也与单位矩阵成正比，因此$\check{U}_F = \check{1}$。稳态有效哈密顿量为：

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{st}} = \frac{\omega_0}{T}\, \hat{a}^\dagger \hat{a}. \tag{71}$$

稳态是无驱动哈密顿量 $\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$的热态，其温度等于热浴温度。

因此，在极限值 $\kappa \to 0$ 和 $\kappa \to \infty$ 之间调节耗散强度，会使动力学和稳态的对角基在 $(\hat{b},\ \hat{b}^\dagger)$ 玻色子的玻戈留波夫基与 $(\hat{a},\ \hat{a}^\dagger)$ 玻色子的原始基底之间转换。在这两个极限下，这些基底相同， $U = U_F$；但在这两个极限之间，情况将不再如此。在这两种状态之间，还存在一个例外点，此时两个 Lindblad 算符特征值 $-i\epsilon_s$ 合并为 $-\kappa$ ，动力学表现为共振阻尼耗散。这发生在相干不稳定性的阈值处 $2\lambda = \Delta$。此时，矩阵 H 不可对角化，并通过相似变换化为约当标准形：

$$\check{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2\lambda & 2\lambda \end{bmatrix} \tag{72}$$

注意，此表达式并不等于式 (64) 的极限形式，而式 (64) 本身并不存在。相比之下，即使在此点，分布矩阵仍是参数的光滑函数，有效哈密顿量的对角频率以及由 $\check{U}_F$ 确定的玻色子对角基也是如此。它们可由上述一般表达式的极限形式给出

表达式。例外点体现在谱格林函数的极限形式中，表现为二阶极点：

$$\check{G}^{\mathrm{R,A}}(\epsilon) = \frac{1}{(\epsilon \pm i\kappa)^2} \begin{bmatrix} \epsilon + 2\lambda \pm i\kappa & 2\lambda \\ 2\lambda & \epsilon - 2\lambda \pm i\kappa \end{bmatrix}. \tag{73}$$

不可对角化性会导致某些非定态密度呈现线性增长。

为说明这一点，考虑将 Δ 稍微调高或调低，使其略微偏离 2λ的临界值。这样会消除本征值简并，从而消除任意初始关联所导致的多项式增长。由受扰动本征值 $\epsilon_s - \epsilon^*_{s'}$之差决定相应的衰减速率。令$\Delta - 2\lambda = \delta$，在例外点 $\delta = 0$ 附近展开式 (63)，可得关于 $\delta^{1/2}$的幂级数：

$$\epsilon_{1,2} = -i\kappa \mp 2\sqrt{\lambda\delta} + O(\delta). \tag{74}$$

因此，引入微小失谐会使初始密度在 H 本征值的受扰动基底中带有非对角项，从而以速率_ $4\sqrt{\lambda\delta}$ 发生相干旋转；该速率是偏差 λ的非解析函数。这表明，与厄米系统中通常的 $O(\delta)$ 修正相比，例外点对微扰的敏感性更强。下一节将进一步探讨例外点附近本征值平方根奇点的影响。

3.2. 非厄米能带理论

本节考察两个简单的林德布拉德紧束缚模型。为简明起见，讨论仅限于一维链，但此处讨论的一般原理自然也可推广到更高维度。与洁净的相干模型类似，具有平移不变性的林德布拉德晶格系统可用能带理论描述。林德布拉德系统中的能带是动力学矩阵 H 的动量依赖本征值，因此通常为复数。除了具有虚部之外， H 的非厄米性还会带来额外的复杂情况，尤其是可能存在例外点。下面通过两个简单模型展示这一微妙之处。请注意，与 Lindblad 动力学相关的非厄米能带理论仍在发展之中，以下讨论远非全面，参见 [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87]。

首先，考虑由上一节介绍的相同参数振子组成的一条链，各振子与最近邻线性耦合。其哈密顿量和跳跃算符如下:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{N} \Big(\Delta_0 \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \tau(\hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1}) + \lambda_0(\hat{a}_j^2 + \hat{a}_j^{\dagger 2}) \Big), \tag{75a}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{1j} = \hat{a}_j, \qquad \hat{\mathcal{L}}_{2j} = \hat{a}_j^\dagger. \tag{75b}$$

采用周期性边界条件时，转换到动量表象会更加方便,

$$\phi^\alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ijk} \phi_j^\alpha, \tag{76}$$

其中 $k \in [0, 2\pi)$ 是晶体动量。在动量空间中，写作 $\Phi^\alpha(k) = [\phi^\alpha(k) \;\; \phi^\alpha(-k)]$ 后，Keldysh作用量便呈现为方程 (11) 的标准形式，其中参数矩阵是 k 的对角函数,

$$S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}t \mathrm{d}k \; \bar{\Phi} \begin{bmatrix} 0 & \check{\tau}^3 i\partial_t - \check{H}_0(k) - i\check{Q}(k) \\ \check{\tau}^3 i\partial_t - \check{H}_0(k) + i\check{Q}(k) & i\check{D}(k) \end{bmatrix} \Phi. \tag{77}$$

参数矩阵由方程 (12) 的一个依赖于 a k 的版本给出，其中$\eta = 0$ 以及其他参数为,

$$\Delta(k) = \Delta_0 + 2\tau\cos(k), \qquad \lambda(k) = \lambda_0, \tag{78a}$$

$$\gamma(k) = 2\kappa(n_\mathrm{B} + 1), \qquad \tilde{\gamma}(k) = 2\kappa n_\mathrm{B}, \qquad \eta(k) = 0. \tag{78b}$$

其中 n_B 定义为 $2n_\mathrm{B} + 1 = \coth(\omega_0/2T)$，而 κ、ω_0 和 T 分别是方程 (60) 中定义的耗散耦合、系统固有频率和热浴温度。

由此，利用方程 (62) 和 (65)，并将相应的量替换为依赖于 k 的对应形式，即可从上一节读出格林函数。$\check{H}(k)$ 的本征值有两条能带，由方程 (63) 的一个依赖于 k 的版本给出,

$$\epsilon_{1,2} = -i\kappa \mp \sqrt{\big(\Delta_0 + 2\tau\cos(k)\big)^2 - 4\lambda_0^2}. \tag{79}$$

这定义了一对复值能带。当 λ_0 从较小值调至较大值时，这两条能带会从虚部恒定的复数形式

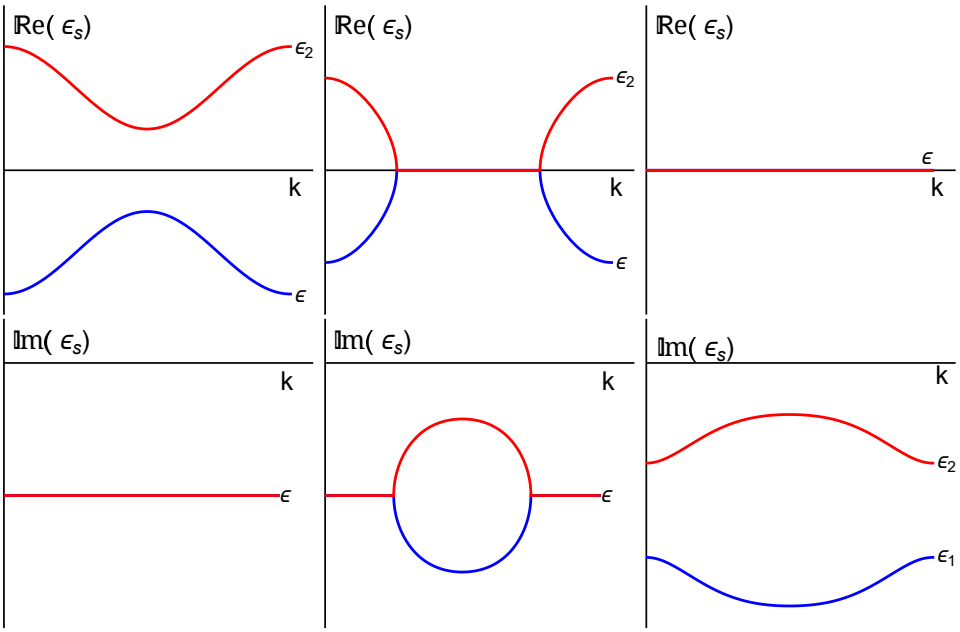


图 5： $\kappa = 5$、$\Delta = 2$、 $\tau = 1/2$时，式 (79) 中复能带的实部和虚部图。三列从左到右分别展示了完全欠阻尼、混合和完全过阻尼区间的能带，对应于 $\lambda = 0$，1 和 1。7。

变为纯虚数形式。这两个区间分别对应完全欠阻尼和过阻尼耗散。这两个极限之间的转变会经过一个范围较宽的中间区间，在该区间内能带相接，并且在不同动量范围内分别出现过阻尼和欠阻尼耗散。这如图 (5) 所示。能带相接的布里渊区中的点定义了例外动量 k_{EP}，其表达式为：

$$k_{\mathrm{EP}} = \arccos\left(\frac{2\lambda_0 - \Delta_0}{2\tau}\right), \tag{80}$$

当 $\Delta_0 - 2\tau < 2\lambda_0 < \Delta_0 + 2\tau$ 时有两个解。与厄米能带接触不同，复能带的接触发生在参数空间 H 中的例外点 ˇ 处。这会在例外动量 k_{EP} 处产生共振阻尼。

通过寻找平移不变解，可以求解稳态的动力学方程。这将方程 (22) 化简为一个依赖于 a k 的

李雅普诺夫方程，

$$0 = -i\big(\check{H}(k)\check{F}_{\mathrm{st}}(k) - \check{F}_{\mathrm{st}}(k)\check{H}^{\dagger}(k)\big) + \check{\tau}^{3}\check{D}(k)\check{\tau}^{3}. \tag{81}$$

该方程的解可以通过式（66）中单个参量振荡器的解直接得到，只需将其中的参数适当地替换为依赖于 k 的推广形式。与单个参量振荡器一样，稳态分布并不显现例外点的特征：在例外动量处不存在非解析性。对平移不变微扰的响应可以利用第 2.4 节中的形式主义进行计算，只需将矩阵替换为依赖于 k 的相应形式。对于不具有空间均匀性、但在较大距离上平滑变化的变化，可以使用半经典方法进行研究；相关讨论见第 3.4 节。

上述例子说明，Lindblad 模型中的能带简并发生在例外点处，因而不同于厄米能带接触。乍看之下，只要不存在谱简并，Lindblad系统的能带理论就与传统厄米系统的能带理论相似，只是每条能带额外带有虚部。然而，这一直觉是完全错误的。由于例外点附近本征值的非解析结构，即使非厄米能带彼此不交叉，也可能呈现不寻常的结构。在最简单的情形下，对于一个2×2 非厄米矩阵，例外点对应于两个本征值的简并，并且如前几节所示，会导致平方根奇点。在参数空间中绕例外点旋转会诱导出单值化：绕行一周后，两个本征值会彼此交换，而不是回到它们的初始位置。在具有两条能带的一维紧束缚模型中，可以设想将某个参数调节到越过能带接触区域，使能带保持相互交织，并彼此围绕例外点旋绕，从而在布里渊区的一个周期内呈现单值化。

这显然不会出现在上文讨论的参量振荡器链中。利用 SSH 模型的林德布拉德算符推广，可以构造一个简单模型来展示这一现象。 [82, 83], 虽然研究过类似模型，但并非置于 Lindblad动力学的背景下。SSH哈密顿量通过在一维链的每个格点上分配两种费米子物种 $\hat{}c_{\mathrm{A}}$ 和 $\hat{}c_{\mathrm{B}}$ 来定义。允许在.....之间发生跃迁

物种的现场项及最近邻之间的项,

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{N} \Big(\varepsilon_0 (\hat{c}^\dagger_{\mathrm{A}j} \hat{c}_{\mathrm{A}j} + \hat{c}^\dagger_{\mathrm{B}j} \hat{c}_{\mathrm{B}j}) + \tau_1 (\hat{c}^\dagger_{\mathrm{A}j} \hat{c}_{\mathrm{B}j} + \hat{c}^\dagger_{\mathrm{B}j} \hat{c}_{\mathrm{A}j}) + \tau_2 (\hat{c}^\dagger_{\mathrm{A}j+1} \hat{c}_{\mathrm{B}j} + \hat{c}^\dagger_{\mathrm{B}j} \hat{c}_{\mathrm{A}j+1}) \Big). \tag{82}$$

此外，考虑通过 A和B费米子的叠加实现粒子的现场增益和损耗,

$$\mathcal{L}_{1j} = \sqrt{2\kappa} (\hat{c}_{\mathrm{A}j} + e^{i\theta_1} \hat{c}_{\mathrm{B}j}), \qquad \mathcal{L}_{2j} = \sqrt{2\kappa} (\hat{c}^\dagger_{\mathrm{A}j} + e^{-i\theta_2} \hat{c}^\dagger_{\mathrm{B}j}), \tag{83}$$

仅包含损耗与增益过程，加上哈密顿量中缺少成对产生项，使模型具有整体的 $U(1)$ 对称性，其对应的荷为粒子总数。这种对称性是弱 [76], 的，因此并不意味着粒子数随时间守恒。这种对称性的一个结果是，Nambu 空间格林函数的反常非对角块消失。因此，方便的做法是将 G 的左上块定义为 G without a check，其他量也类似。

动量空间中的 Keldysh 作用量为:

$$S = \int \mathrm{d}t \mathrm{d}k \; \bar{\psi} \begin{bmatrix} i\partial_t - H_0(k) + iQ(k) & iD(k) \\ 0 & i\partial_t - H_0(k) - iQ(k) \end{bmatrix} \psi, \tag{84}$$

其中 $\psi = [\psi^1 \;\; \psi^2]$, $\psi^a = [\psi^a_{\mathrm{A}}(k) \;\; \psi^a_{\mathrm{B}}(k)]$, ，未加勾号的参数矩阵是正文公式（45）中相应 Nambu 空间矩阵的左上块。参数矩阵为:

$$H_0(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \tau_1 + \tau_2 e^{ik} \\ \tau_1 + \tau_2 e^{-ik} & \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \tag{85a}$$

$$Q(k) = \kappa \begin{bmatrix} 2 & e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2} \\ e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} & 2 \end{bmatrix}, \tag{85b}$$

$$D(k) = 2\kappa \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\theta_1} - e^{-i\theta_2} \\ e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} & 0 \end{bmatrix} \tag{85c}$$

由于问题中的对称性，只需研究 $H = H_0 - iQ$ 的两个本征值能带；另外两条单粒子本征值能带由它们的复共轭给出。

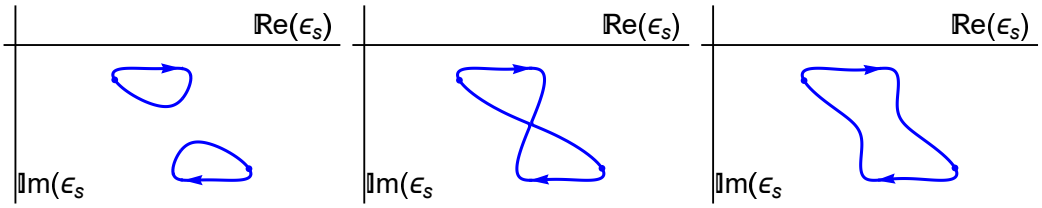


图6：将式 (86) 的复能带绘制为复平面中的路径，展示了三种情形。实心点表示$\epsilon_j(0)$ 的取值，箭头表示将 k 从 0 变化到 2π时描绘出的有向路径。当 τ_2 分别小于、等于和大于 κ 时，这三种情形依次对应两个不相交的非扭绕环、相交环和单个非扭绕环。

为简单演示上述概念，可以为损耗和增益选择不同的相，即 $\theta_1 = \pi/2$ 和 $\theta_2 = 0$。此外，固定 $\tau_1 = \kappa$ 后，动力学矩阵 $H(k)$ 的特征值为：

$$\epsilon_{1,2}(k) = \varepsilon_0 - 2i\kappa \mp \sqrt{\tau_2^2 - \kappa^2 + 2\kappa\tau_2\cos(k) - 2i\kappa\Big(\kappa + \tau_2\big(\cos(k) + \sin(k)\big)\Big)} \tag{86}$$

从这个表达式可以看出，对于 $\tau_2 = \kappa$，特征值在 $k_{\mathrm{EP}} = 3\pi/2$处简并为一个例外点。对于 $\tau_2 < \kappa$，特征值是 k 的周期函数，两个能带彼此分离。然而，对于 $\tau_2 > \kappa$，当 k 接近 $3\pi/2$时，平方根内参数的实部会变为负值。因此，遍历布里渊区会平滑地从平方根黎曼面的一个分支过渡到另一个分支，从而引入单值化$\epsilon_{1,\,2}(k \to 2\pi^-) = \epsilon_{2,\,1}(k \to 0^+)$。这三种情形如图 (6) 所示。换言之，即使本征值能带并未与例外点相交，该例外点的平方根奇点仍会影响本征值能带的解析结构。由于围绕例外点绕行，两个彼此分离的能带不复存在，取而代之的是一条连续能带，它双重覆盖布里渊区。

近期文献在辫子和结的语境下理解了非厄米能带理论的这类非典型特征 [84, 85, 86, 87]。动力学矩阵 $H(k)$ 的本征值在由 k 参数化的复平面中定义了路径。由于 k 的周期性，这些路径必须闭合，从而形成闭环，并且这些闭环可以彼此编织并相互链接。这种现象没有厄米对应物，因为厄米矩阵的特征值位于实数轴上，而实数轴的维度太低，无法容纳路径的打结。

在上文所考察的模型中，穿过例外点的转变可以理解为从两个彼此不连通的平凡结转变为一个平凡结。用辫子的语言来说，这表现为从两条未编织的路径转变为一对带有一个扭结的路径，而路径在某一点处发生碰撞并彼此分离。

对于一维晶格上的更一般模型，特征值可能以更复杂的方式彼此多次交织。这可能导致特征值的轨迹描绘出一组链环。在辫子的语言中，给定参数范围内的 N 能带模型对应于一个含有 N 个生成元的辫群元素。不同辫群元素／结构型之间的转变，是通过穿过例外点使轨迹相接或分离而发生的。这种现象的高维推广更难以可视化，因为它们涉及将高维布里渊区（环面）映射到复平面。这个问题近来受到了一些关注（例如参见 [86]），但总体而言仍有待进一步研究。

ˇ 如上所述，动力学理论的稳态解 F_{st} 不呈现任何例外点的迹象。这里考察的模型也同样如此：稳态分布虽然并非平凡，却在穿越例外点时平滑变化，而且在转变的两侧没有定性差异。通过公式（55）得到的 ˇ $F_{\mathrm{st}}(k)$ 的稳态本征值能带 $\beta_j(k)$ 的完整表达式较为繁复，因此此处不再列出；它们在图（7）中分别绘出了转变以下、转变处及转变以上的情形。在稳态分布中，不同区域并未呈现这些拓扑特征的明显迹象。

3.3. 无序费米子

本节考察一个无序林德布拉德费米子的简单模型。我们研究一个具有 $U(1)$ 对称性、由 N 种费米子味组成且除此之外不具备其他特征的模型。与前文讨论的“干净”系统不同，这里考察的模型有助于理解一般二次林德布拉德算符的行为。即使不存在其他对称性，$U(1)$ 对称性也能明确区分损耗与增益。在准备本文期间，一篇论文 [88] 出现在 arXiv 上，其中讨论的观点与本文提出的观点非常相似。该文关注的是马约拉纳费米子，而非本文考察的狄拉克费米子，并且对动力学矩阵和稳态的谱及能级统计作了更详细的讨论。

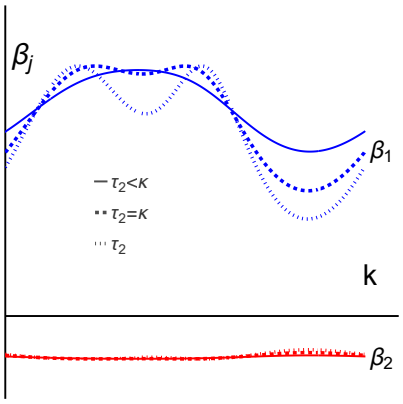


图7：Lindblad SSH 链的稳态本征值 $\beta_j(k)$ 的两条能带图，展示了三个不同的动力学区域。动力学本征值 $\epsilon_j(k)$ 的非解析结构并未保留在稳态分布中；在所有 k 取值下，曲线在转变过程中均平滑变化。

这里考察的模型可以与若干关于 Lindblad 算符的研究进行比较；这些研究将哈密顿量和跳跃算符视为随机矩阵，旨在理解不存在任何额外结构时的一般 Lindblad 动力学 [89, 90, 91, 92, 93, 94]。如下文所示，在某些极限下，随机二次 Lindblad 算符的单粒子量与纯粹的随机矩阵结果相符，但一般情况下二者并不相同。这与我们对相干系统的通常直觉背道而驰。对于平衡无序费米子，多体谱由单粒子哈密顿量决定，而单粒子哈密顿量又由厄米随机矩阵理论刻画。求解多体问题，可以通过求解纯粹的随机矩阵量子力学来实现。在 Lindblad 框架中，单粒子动力学矩阵和稳态分布是彼此独立的量，并不能定义任何形式的“单粒子 Lindblad 算符”。从这个意义上说，随机二次问题并不等同于随机矩阵 Lindblad 问题。

定义该模型的哈密顿量和跳跃算符如下：

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i,j}^{N} (H_0)_{ij} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j, \tag{87a}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{1v} = \sum_j^N \mu_{vj}\hat{c}_j, \qquad \hat{\mathcal{L}}_{2v} = \sum_j^N \nu_{vj}\hat{c}_j^\dagger, \tag{87b}$$

其中共有 M 个跳跃算符，$v \leq M$。参数 H_0、μ 和 ν 均为高斯随机变量。无序平均定义为：

$$[...] = \int \mathrm{D}H_0 \mathrm{D}\mu \mathrm{D}\nu e^{-\frac{N}{2}\mathrm{tr}(H_0^2) - \frac{M}{\gamma}\sum_{j,v}|\mu_{vj}|^2 - \frac{M}{\tilde{\gamma}}\sum_{j,v}|\nu_{vj}|^2}(...). \tag{88}$$

这里关注的是大 N 极限，在该极限下比值 $m = M/N$ 保持有限。在此极限中，该模型总共有三个参数：m，以及控制损耗与增益之比相对于哈密顿量强度的另外两个参数 γ 和 $\tilde{\gamma}$。

在相应的相干模型中，需要求解单粒子哈密顿量的随机矩阵理论问题。在大 N极限下，该问题可以精确求解，其态密度 $\varrho(\epsilon) \equiv [\mathrm{tr}\ \delta(\epsilon - H_0)]$ 由众所周知的维格纳半圆分布给出。在 Lindblad 框架中，可以通过求解关于特征值分布 $\varrho_H(\epsilon) = [\mathrm{tr}\ \delta(\epsilon - H)],$ 的非厄米随机矩阵问题来确定谱；该分布是复ϵ 平面中单粒子特征值 ϵ_j 的概率分布。事实证明，与其厄米对应问题相比，这一问题涉及更为微妙的特征。在大 N 极限下，分布的极限形状会随模型参数变化而改变，并根据连通分支的数量定义出不同的相。除谱之外，还可以分析稳态，其中关注的对象是稳态有效哈密顿量的态密度 $\varrho_{\mathrm{st}}(\beta) = [\mathrm{tr}\,\delta(\epsilon - H_{\mathrm{st}})],$，它是实值 β_j的概率分布。为此必须求解一个随机李雅普诺夫方程。与谱随机矩阵问题相比，即使在大 N 极限下，这一问题也难以精确求解。简单的数值计算表明，动力学转变会在稳态中反映出来。

首先考虑纯随机损耗 $\gamma \to \infty$这一简单情形，此时省略 H_0和 ν。单粒子动力学矩阵是一个威沙特矩阵，由一维投影算符之和给出：

$$H_{ij} = -i\sum_v^M \mu_{vi}^* \mu_{vj}. \tag{89}$$

在大 N 极限下，其特征值分布由著名的马尔琴科–帕斯图尔定律 [95], 给出，其中特征值分布 $\varrho_H(\epsilon)$为：

$$\varrho_H(\epsilon) = -i\left(\gamma\epsilon\sqrt{\frac{\gamma^2}{m} - \frac{1}{4}\left(\epsilon - \frac{\gamma}{m}(1+m)\right)^2} + \pi(1-m)\theta(1-m)\delta(\epsilon)\right), \tag{90}$$

其中， θ 是赫维赛德函数。当 $m > 1$时，所有特征值的虚部均有限，且稳态唯一，即由粒子数为零的福克真空态给出。当 $m < 1$时，总有一部分模不发生耗散，这一点体现在 $\varrho_H(\epsilon)$中，即原点处的狄拉克测度。稳态并不唯一。临界点 $m = 1$将这两种情形区分开来。在此点，耗散能隙闭合，稳态的唯一性不再成立。请注意，对于m的所有取值，特征值均为纯虚数，因此 $\varrho_H(\epsilon)$仅支撑于虚轴上。这与关于一般无序林德布拉德算符的研究结果在定性上有所不同；后者具有随机矩阵跳跃算符且不含哈密顿量，其林德布拉德算符特征值的分布占据复平面上一块柠檬状的有限面积区域 [90]。

加入哈密顿量部分，同时保持 $\nu = 0$不变，Marchenko-Pastur 分布便会变形并延伸到复平面上。分布 ϱ_H 支撑在复 ϵ 平面上的紧致子集上，且具有有限面积。当 γ足够大时，大 m 相和小 m 相会分别变为这样的相：ϱ_H（ϵ）的支撑分别具有一个和两个连通分支。不同相中的特征谱示例见图（8）。利用非厄米随机矩阵理论，可以确定大 N 时特征值分布的形状。类似问题也曾在混沌散射 [96, 97, 98]的背景下得到研究；关于林布拉德问题中分布形状的详细讨论，可参见 [88]。加入哈密顿量部分后，对于所有 m，所有特征值现在都有有限的虚部。与上述不含哈密顿量的情形不同，加入哈密顿量后，即使在小 m时，耗散能隙也会变为有限值。因此，稳态总是唯一的。容易验证，对于 m的所有取值，稳态仍然是零粒子福克真空态。

最后来看包含增益与损耗的一般模型，可以发现，根据 m的取值会出现类似的几何转变。该模型存在多个不同的相，连通分支最多可达三个，并会根据增益、损耗与哈密顿量的相对强度以不同方式合并和分裂。稳态通常是一个非平凡的

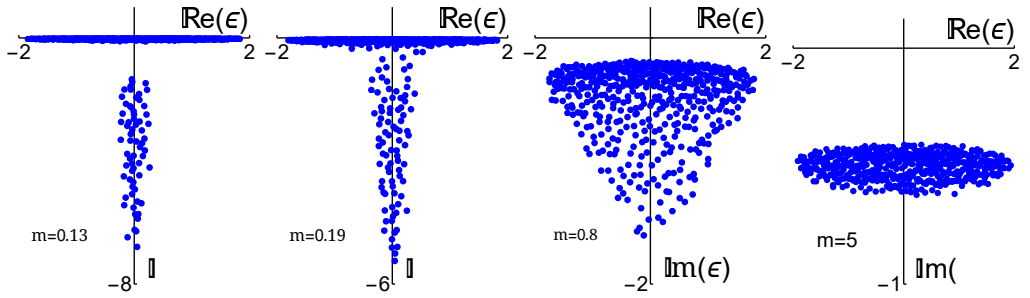


图8：不同 m 值下 H 的示例谱，其中 $N = 500$ 、 $\gamma = 1$ 和 $\tilde{\gamma} = 0$。最左侧的图描绘了小 m 相，此时 ϱ_H（ϵ）有两个彼此分离的连通分支。请注意，在小 m 极限下，两个特征值区域之一非常接近实轴，但仍具有有限的虚部。左数第二幅图对应临界 m 附近（加入哈密顿项时，其一般不等于 1），此时两个区域开始合并。右侧两幅图展示了大 m 相，此时 ϱ_H（ϵ）只有一个连通分支。最右侧的图展示了大 m 极限，在此极限下，可以看到 ϱ_H（ϵ）支撑集的极限形状趋近于一个以虚轴上的 $1/2$ 为中心的 Ginibre 圆盘。此极限与已知的、同时具有哈密顿项和跳跃算符 [90] 的随机矩阵 Lindblad 算符的行为相符。

混合态。对于较大的 m， $\varrho_{\mathrm{st}}(\beta)$呈 Wigner 半圆，其宽度按 $1/m$ 缩放，且相对于零点的偏移量由$\tilde{\gamma}/\gamma$决定。对于较小的 m， $\varrho_{\mathrm{st}}(\beta)$的支撑集分布在实数轴上多个互不连通的区域中，每个区域都偏离半圆定律。此处不对各种相进行详细分类，但图（9）展示了 ϱ_M 的几个不同示例及其对应的 $\varrho_{\mathrm{st}}(\beta)$。

3.4. Lindblad 气体

本节讨论一个处于 d 维空间中的费米气体，它通过与热浴进行马尔可夫交换而发生粒子损耗与增益。这是一个定义在空间连续体上的理论的简单示例。与前一节一样，此处施加 $U(1)$ 对称性，以避免 Nambu 空间带来的复杂性。为求简便，也不考虑自旋、轨道、味等因素导致的额外矩阵结构。请注意，尽管此处讨论的是费米气体，但由于对称性的存在，玻色与费米南部空间之间的差异并不会显现，因此其细节与 Lindblad玻色气体基本相同。

用费米子产生/湮灭算符 $\hat{c}(\mathbf{r})$ 和 $\hat{c}^{\dagger}(\mathbf{r})$ 表示，

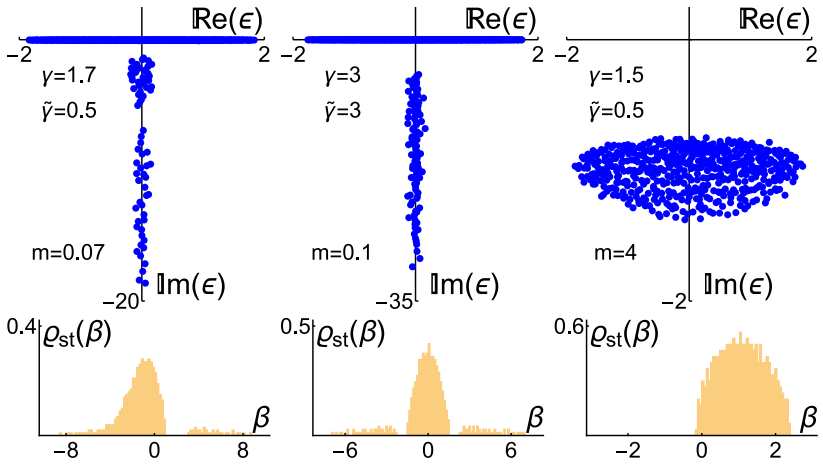


图9：有限 γ 和$\tilde{\gamma}$、且 $N=500$时， H 的示例谱及其对应的 $\varrho_{\mathrm{st}}(\beta)$ 绘于上方。最左侧的图描绘了一种相，其中 $\varrho_H(\epsilon)$ 的支撑集有三个连通分支；当 m 较小，且增益明显小于或大于损耗时，就会出现这种情况。在这一相中， $\varrho_{\mathrm{st}}(\beta)$ 支撑在两个不相连的区域上，密度主要位于原点左侧。中间的图显示了损耗与增益均较大且平衡的双分量相。在此区域内， $\varrho_{\mathrm{st}}(\beta)$ 支撑在三个不相连的区域上，测度的大部分集中在零点。最右侧的图中， m 较大，且 $\varrho_H(\epsilon)$ 正趋近 Ginibre圆盘极限。稳态分布近似为均值为正有限值的 Wigner 半圆，这与以下事实相对应：$\gamma>\tilde{\gamma}$。

多体哈密顿量可以用单粒子哈密顿量 $H_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 表示为：

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'\,\hat{c}^\dagger(\mathbf{r})H_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{c}(\mathbf{r}'). \tag{91}$$

跳跃算符分为两组：

$$\hat{\mathcal{L}}_{1v}(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\,\mu_v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{c}(\mathbf{r}'), \quad \hat{\mathcal{L}}_{2v}(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\,\nu_v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{c}^\dagger(\mathbf{r}'), \tag{92}$$

据此，单粒子耗散矩阵可表示为：

$$Q(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2}\sum_v \int \mathrm{d}\mathbf{r_1}\mathrm{d}\mathbf{r_2}\Big(\mu_v^*(\mathbf{r},\mathbf{r_1})\mu_v(\mathbf{r}',\mathbf{r_2}) + \nu_v(\mathbf{r},\mathbf{r_1})\nu_v^*(\mathbf{r}',\mathbf{r_2})\Big), \tag{93a}$$

$$D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_v \int \mathrm{d}\mathbf{r_1}\mathrm{d}\mathbf{r_2}\Big(\mu_v^*(\mathbf{r},\mathbf{r_1})\mu_v(\mathbf{r}',\mathbf{r_2}) - \nu_v(\mathbf{r},\mathbf{r_1})\nu_v^*(\mathbf{r}',\mathbf{r_2})\Big). \tag{93b}$$

Lindblad玻色气体的作用量为：

$$S = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}' \begin{bmatrix}\bar{\psi}^1 & \bar{\psi}^2\end{bmatrix}_{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} i\partial_t - H_0 + iQ & iD \\ 0 & i\partial_t - H_0 - iQ\end{bmatrix}_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \begin{bmatrix}\psi^1 \\ \psi^2\end{bmatrix}_{\mathbf{r}'}. \tag{94}$$

在最简单的情况下，单粒子矩阵是局部微分算符，因此 $H_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')H_0(\mathbf{r}, -i\partial_{\mathbf{r}})$，耗散矩阵也同样如此。在这种情况下，作用量在时空中是局域的，

$$S = \int \mathrm{d}x \begin{bmatrix}\bar{\psi}^1(x) & \bar{\psi}^2(x)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\partial_t - H_0 + iQ & iD \\ 0 & i\partial_t - H_0 - iQ\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\psi^1(x) \\ \psi^2(x)\end{bmatrix}. \tag{95}$$

其中 $x = (t,\mathbf{r})$ 表示一个时空坐标。

通过对矩阵乘积进行 Wigner变换并截断梯度展开，可以得到一个半经典动力学方程。经过 Wigner变换后，参数矩阵变为单粒子相空间上的函数，

$$H_0(\mathbf{r},\mathbf{k}) = \int \mathrm{d}\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} H_0\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}'}{2}, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}'}{2}\right), \tag{96}$$

对于 $Q(\mathbf{r},\ \mathbf{k})$ 和 $D(\mathbf{r},\ \mathbf{k})$，情况也类似。在变化缓慢的极限下，通常适合将维格纳展开截断到梯度的一阶项。这相当于对问题进行半经典处理，称为

维格纳近似。在此近似下，动力学方程成为带有线性碰撞积分的玻尔兹曼方程，

$$\partial_t F - \partial_{\mathbf{r}} H_0 \partial_{\mathbf{k}} F + \partial_{\mathbf{k}} H_0 \partial_{\mathbf{r}} F = -2QF + D. \tag{97}$$

请注意，在玻色系统中，该动力学方程的形式完全相同。超越这一近似并纳入高阶项后，可以得到碰撞积分的主要量子修正，

$$-\frac{1}{2}\partial_{\mathbf{r_1}}\partial_{\mathbf{r_2}} Q \partial_{\mathbf{k_1}}\partial_{\mathbf{k_2}} F - \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{k_1}}\partial_{\mathbf{k_2}} Q \partial_{\mathbf{r_1}}\partial_{\mathbf{r_2}} F + \partial_{\mathbf{r_1}}\partial_{\mathbf{k_2}} Q \partial_{\mathbf{k_1}}\partial_{\mathbf{r_2}} F. \tag{98}$$

纳入这些项后，玻尔兹曼方程便成为福克-普朗克方程的形式。这与纯粹的相干情形形成对比：在没有多能带的情况下，玻尔兹曼方程不存在主要量子修正。

具体而言，考虑一个局域单粒子哈密顿量，它是广义薛定谔算符，$H_0(\mathbf{r} -i\partial_{\mathbf{r}}) = \varepsilon(-i\partial_{\mathbf{r}}) + V(\mathbf{r})$。那么，相空间函数 $H_0(\mathbf{r},\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) + V(\mathbf{r})$ 将具有色散关系加势的形式。此外，假设与热浴的耦合具有平移不变性，因此耗散矩阵在相空间中仅是$\mathbf{k}$ 的函数。那么，该动力学方程可视为弛豫时间近似下的玻尔兹曼方程，

$$\big(\partial_t + \mathbf{v_k}\partial_{\mathbf{r}} - (\partial_{\mathbf{r}} V)\partial_{\mathbf{k}}\big) F = \frac{F_0 - F}{\tau}, \tag{99}$$

其中 $\mathbf{v_k} = \partial_{\mathbf{k}}\varepsilon$ 是群速度，$\tau(\mathbf{k}) = 1/2Q(\mathbf{k})$ 是弛豫时间。分布 $F_0(\mathbf{k}) = D(\mathbf{k})/2Q(\mathbf{k})$ 取代了平衡分布；在没有外部势 $V = 0$ 的情况下，可得$F_{\mathrm{st}}(\mathbf{k}) = F_0(\mathbf{k})$。

3.5. 平均场理论

本节说明如何将上述形式体系扩展到非线性系统。借助平均场方法，可以扩展上一节的半经典动力学，使其能够自洽地纳入相互作用。为明确起见，本文将重点讨论玻色系统；不过，与上一节一样，费米子对应情形的细节也类似。

与上一节一样，除空间自由度外，不考虑额外的矩阵结构。只考虑遵循 $U(1)$ 粒子数对称性的项，因此无需处理任何南部空间结构

。此外，假设哈密顿量和跳跃算符在空间平移和旋转下保持不变。非相互作用哈密顿量和跳跃算符由式 (91) 和 (92) 的玻色子版本给出。由于平移对称性，在维格纳表示中，H_0，Q 和 D 仅是 $\mathbf{k}$ 的函数，

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\sum_v \Big(\mu_v^*(\mathbf{k})\mu_v(\mathbf{k}) - \nu_v(\mathbf{k})\nu_v^*(\mathbf{k})\Big), \tag{100a}$$

$$D(\mathbf{k}) = \sum_v \Big(\mu_v^*(\mathbf{k})\mu_v(\mathbf{k}) + \nu_v(\mathbf{k})\nu_v^*(\mathbf{k})\Big). \tag{100b}$$

非线性既可以出现在哈密顿量层面，也可以出现在跳跃算符中。为简单起见，考虑接触相互作用，

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm int} = \frac{U}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\, \hat{a}^\dagger(\mathbf{r})\hat{a}^\dagger(\mathbf{r})\hat{a}(\mathbf{r})\hat{a}(\mathbf{r}). \tag{101}$$

对于跳跃算符，考虑局域的二体损失与增益，

$$\hat{\mathcal{L}}_3(\mathbf{r}) = \frac{M}{\sqrt{2}}\,\hat{a}(\mathbf{r})\hat{a}(\mathbf{r}), \qquad \hat{\mathcal{L}}_4(\mathbf{r}) = \frac{N}{\sqrt{2}}\,\hat{a}^\dagger(\mathbf{r})\hat{a}^\dagger(\mathbf{r}). \tag{102}$$

请注意，这样定义的相应林德布拉德算符与驱动耗散凝聚体的各种模型类似 [3, 29, 30, 31]。这里仅将非线性相互作用视为对稳定线性理论的弱微扰。当理论在线性层面不稳定时，会出现凝聚态；本文不讨论这种情况。

Keldysh作用量的形式为 $S = S_0 + S_{\rm int}$，其中作用量的二次部分 S_0 由式 (95) 的玻色版本给出，

$$S_0 = \int \mathrm{d}x \begin{bmatrix}\bar{\phi}^{\rm c}(x) & \bar{\phi}^{\rm q}(x)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & i\partial_t - H_0 - iQ \\ i\partial_t - H_0 + iQ & iD \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\phi^{\rm c}(x) \\ \phi^{\rm q}(x)\end{bmatrix}. \tag{103}$$

作用量的非线性部分为：

$$\begin{aligned} S_{\rm int} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x \Big(& U(\bar{\phi}^{\rm c}\phi^{\rm c} + \bar{\phi}^{\rm q}\phi^{\rm q})(\bar{\phi}^{\rm q}\phi^{\rm c} + \bar{\phi}^{\rm c}\phi^{\rm q}) \\ & - iJ(\bar{\phi}^{\rm c}\phi^{\rm c} - \bar{\phi}^{\rm q}\phi^{\rm q})(\bar{\phi}^{\rm q}\phi^{\rm c} - \bar{\phi}^{\rm c}\phi^{\rm q}) - iR\bar{\phi}^{\rm c}\phi^{\rm c}\bar{\phi}^{\rm q}\phi^{\rm q}\Big), \end{aligned} \tag{104}$$

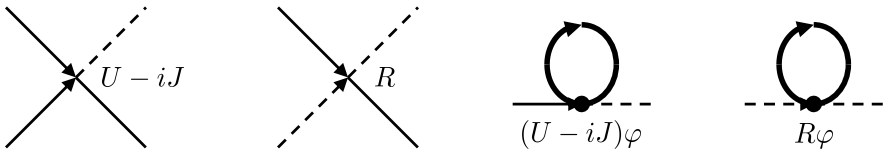


图10：左侧两幅图描绘了非线性作用量方程（104）中表示相互作用的顶点。最左侧的顶点与平衡理论中出现的某个顶点相似，但多了一个虚数因子。 R 顶点在平衡理论中没有对应项，且完全是耗散性的。左侧两幅图是相互作用对作用量产生的平均场贡献的图解表示。集体场 φ 以完全重整化的泡的形式出现，该泡由两条经典腿构成。左图和右图分别重整化单粒子色散和分布。请注意，后者是林德布拉德动力学所特有的；在平衡理论中，方程（104）的 Keldysh 分量在平均场层次不会发生修正。

其中 J 和 R 的定义与 Q 和 D 类似，

$$J = \frac{1}{2}\big(|N|^2 - |M|^2\big), \qquad R = 2\big(|N|^2 + |M|^2\big) \tag{105}$$

从图解上看，这些相互作用对应于图（10）所示的四点顶点。

原则上，整套图解技术都可以用于研究该模型；但这里将讨论一种作为二次形式体系扩展的平均场处理。为此，应将作用量中 $\phi^{\mathrm{c}}\phi^{\mathrm{c}}$ 的因子$^{-}$替换为其期望值。这样，非线性项便化为与集体场 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle\phi^{\mathrm{c}}(x)\bar{\phi}^{\mathrm{c}}(x)\rangle$的二次耦合；该集体场的值可根据此定义自洽地确定。具体而言，三个参数矩阵都会发生修正，

$$\delta H_0(x) = U\varphi(x), \qquad \delta Q(x) = J\varphi(x), \qquad \delta D(x) = R\varphi(x). \tag{106}$$

按照第 2.4 节，可以尝试求解现在依赖时间的动力学方程（方程（35））。在维格纳近似下，其形式与方程（99）相同，

$$\big(\partial_t + \mathbf{v}_{\mathbf{k}}\partial_{\mathbf{r}} - (\partial_{\mathbf{r}}V)\partial_{\mathbf{k}}\big)F = \frac{F_0 - F}{\tau}, \tag{107}$$

其中 $\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \partial_{\mathbf{k}}H_0(\mathbf{k})$、$V(x) = U\varphi(x)$、$\tau^{-1} = 2Q(\mathbf{k}) + 2J\varphi(x)$ 和 $F_0/\tau = D(\mathbf{k}) + R\varphi(x)$。

动力学方程的解确定了 F 作为 φ 的函数。随后可将其代入 φ 的定义中，自洽地确定其值。具体而言，在维格纳近似下，谱格林函数可表示为：

$$G^{\mathrm{R}}(x,p) \simeq \frac{1}{\epsilon - H_0(\mathbf{k}) + iQ(\mathbf{k}) - (U - iJ)\varphi(x)}, \tag{108}$$

其中 $p = (\epsilon, \mathbf{k})$。类似地，等空间-时间点处的 Keldysh 格林函数近似为：

$$iG^{\mathrm{K}}(x,x) \simeq i \int \frac{\mathrm{d}\epsilon}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d} F(x,\mathbf{k}) \big(G^{\mathrm{R}}(x,p) - G^{\mathrm{A}}(x,p) \big). \tag{109}$$

对 ϵ 的积分就是谱函数的频率积分，因此等于 1。请注意，与平衡理论不同，这里并未假设谱函数具有尖锐峰值。通常，准粒子近似并不成立，因为一般的 Lindblad 系统中存在通常并不微小的耗散项。尽管如此，由于动力学具有马尔可夫性质，在这种平均场处理中仍可忽略分布函数对频率的依赖。这给出了集体场 $\varphi(x) = \frac{i}{2} G^{\mathrm{K}}(x, x)$ 的自洽条件，

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d} F(x,\mathbf{k}). \tag{110}$$

该式与玻尔兹曼方程 eq. (107) 一起构成了关于 F 和 φ 的封闭方程组。

在定态极限下，F_{st} 和 φ_{st} 完全各向同性。稳态解可由玻尔兹曼方程读出，为 F_0。结合自洽条件，可得方程组：

$$F_{\mathrm{st}}(\mathbf{k}) = \frac{D(\mathbf{k}) + R\varphi_{\mathrm{st}}}{2Q(\mathbf{k}) + 2J\varphi_{\mathrm{st}}}, \qquad \varphi_{\mathrm{st}} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d} F_{\mathrm{st}}(\mathbf{k}). \tag{111}$$

通过围绕该稳态解对动力学方程进行线性化，可以研究慢弛豫。令 $F = F_{\mathrm{st}} + \delta F$ 和 $\varphi = \varphi_{\mathrm{st}} + \delta\varphi$，便得到以下封闭方程组：

$$\big(\partial_t + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \partial_{\mathbf{r}} + 2Q + 2J\varphi_{\mathrm{st}} \big) \delta F = \partial_{\mathbf{r}} \delta\varphi \partial_{\mathbf{k}} F_{\mathrm{st}} + (R - 2JF_{\mathrm{st}}) \delta\varphi, \tag{112a}$$

$$\delta\varphi(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\delta F(x,\mathbf{k}). \tag{112b}$$

将时空坐标 $x=(t,\ \mathbf{r})$ 进行傅里叶变换为 $(\omega,\ \mathbf{q})$ 后，可以代数求解 δF。在此过程中，自洽条件给出了非平凡解 φ 的条件，

$$1+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{U\mathbf{q}\partial_{\mathbf{k}}F_{\mathrm{st}} - i(R-2JF_{\mathrm{st}})}{\omega-\mathbf{q}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}+2i(Q+J\varphi_{\mathrm{st}})}=0. \tag{113}$$

这一关系确定了 ω 作为$\mathbf{q}$的函数，它描述了决定密度场 φ弛豫的集体模的色散关系。

在没有耗散 $Q=0=D$ 和 $J=0=R$的情况下，该方程确定了相干声模 $\omega(\mathbf{q}) \simeq c|\mathbf{q}|$ 在小动量下的色散关系，其中声速 c 由以下关系确定：

$$1+\frac{U}{2}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{\mathbf{q}\partial_{\mathbf{k}}F_{\mathrm{st}}}{c|\mathbf{q}|-\mathbf{q}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}}=0, \tag{114}$$

其中，在平衡理论中，F_{st} 是平衡准粒子分布函数。这就是熟知的平衡零声速模。为了考察耗散的存在如何改变这一情况，首先考虑一个更简单的情形：存在较弱的纯线性耗散，且与$\mathbf{k}$无关，因此 $R=0=J$ 和 $Q(\mathbf{k}) = 1/2\tau$。那么，对于较小的$\mathbf{q}$，可得：

$$\omega(\mathbf{q}) \simeq -i/\tau + c|\mathbf{q}|, \tag{115}$$

其中，c 是由式（114）确定的声速，且 $F_{\mathrm{st}}(\mathbf{k}) = \tau D(\mathbf{k})$。因此，对于远小于弛豫时间倒数的动量，$|\mathbf{q}| \ll 1/c\tau$，声模变为过阻尼。

对于具有非线性耗散的更一般情形，如果没有单粒子色散关系的具体形式，就很难作出一般性论断。不过可以看出，对于小动量，上述行为具有普遍性。式 (113) 的零动量极限给出如下关系：

$$1+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{2JF_{\mathrm{st}}-R}{2(Q+J\varphi_{\mathrm{st}})-\Gamma}=0, \tag{116}$$

其中 $\Gamma = i\omega(\mathbf{q}=0)$，由此方程可知它是纯实数。因此，尽管有限$\mathbf{q}$ 时集体模色散关系 $\omega(\mathbf{q})$ 的具体形式取决于单粒子色散的微观细节，但在动量足够小时，它始终是过阻尼的。

4. 结论

我们介绍了驱动耗散系统中多体林德布拉德算符动力学的教程式论述。我们采用了泛函形式体系，该体系自然源于一般的闭合时间轮廓形式体系，并假设热浴关联函数满足马尔可夫性（即局域于时间）。如所示，这种方法可用于计算局域可观测量、各种关联函数、线性响应特性以及集体模谱。

本综述的主要目标之一，是强调刻画这些非平衡模型动力学的两个不同量的存在：复有效哈密顿量 H 和稳态分布函数 F_{st}。复有效哈密顿量决定瞬态弛豫谱，以及对某些微扰的线性响应。另一方面， F_{st} 决定稳态可观测量，体现于集体模的谱中，并参与某些线性响应。在平衡态中，二者通过涨落耗散定理严格关联；而在 Lindblad 动力学框架中，二者本质上相互独立。此外，正如上文反复展示的那样，它们表现出定性不同的性质。例如，有效哈密顿量的复谱通常会出现例外点，即两个或多个本征值发生简并。在参数空间中这些例外点附近，弛豫特性呈现非解析行为。然而， F_{st} 及其长时间稳态性质则完全平滑。我们还给出了其他例子，说明在非平衡情形下这两个量存在定性差异。

尽管复杂哈密顿量的谱（在某种程度上也包括特征函数）受到了一些关注，但稳态分布却基本未得到探索。我们在此证明，它由有效动力学方程决定。对于线性系统这一特例，这种动力学理论可化为矩阵代数中所谓的李雅普诺夫方程。尽管目前没有多少标准解析工具可用于处理该方程，但仍可采用稳定高效的数值算法求解。

这里概述的方法通过对 $N \times N$ 复哈密顿量进行对角化，并求解用于稳态分布的 $N \times N$ 李雅普诺夫方程，从而可以彻底解决二次多体林德布拉德问题。请注意，相应费米子希尔伯特空间的维数为 2^N。因此，问题的复杂度得以指数级降低。二次理论的一个直接扩展是平均

场近似，它针对某个（自洽）量子态附近进行线性化处理。

要真正理解多体林德布拉德算符动力学中的非线性，仍有许多工作要做。我们认为，本文介绍的技术对于实现这一目标不可或缺。泛函方法最令人振奋的应用之一，是研究非微扰（瞬子）效应[99], ；例如，这些效应决定了量子比特退相干率的最终下限。其他本质上属于非线性现象的例子，包括对非平衡相变的研究 [100, 101, 102], ，以及泛函重整化群在驱动耗散问题中的各种应用 [3, 31, 103,104, 105]。

附录 A. Keldysh-Nambu 对角化

本附录考察 Keldysh作用量的经典力学。可以通过复坐标变换将二次型对角化。这是 Bogoliubov 旋转的一种推广形式，扩展到了 Keldysh 相空间。在这组新的坐标中，可以通过半经典量子化来理解动力学。

对于玻色子，必须在 Keldysh 相空间上进行复正则变换。为此，应将 Keldysh 作用量写成哈密顿 - 拉格朗日形式。忽略常数项，式 (11) 中的作用量为:

$$S = \int \mathrm{d}t \Big(\Phi^{\mathrm{q}} i\partial_t \Phi^{\mathrm{c}} - \frac{1}{2} \Phi^{\alpha} \check{K}_{\alpha\beta} \Phi^{\beta} \Big), \tag{A.1}$$

此处的 $\Phi^{\mathrm{q}} = [\phi^{\mathrm{q}} \ -\phi^{\mathrm{q}}]$ 定义与正文中的定义不同。经典场 Φ^{q} 起到正则坐标的作用，而量子 ˇ 场 Φ^{q}则是其共轭动量。矩阵 $K_{\alpha\beta}$ 为:

$$\check{K} = \begin{bmatrix} 0 & \check{H}^{\mathrm{T}} \\ \check{H} & -i\check{\tau}^3 \check{D} \check{\tau}^3 \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

请注意，这是完整的 $4N \times 4N$ Keldysh-Nambu 空间上的对称矩阵。

Keldysh作用量的经典力学，是在 $4N$ 维 Keldysh 相空间上的广义哈密顿力学。运动方程由哈密顿方程给出

$$\partial_t \Phi^{\alpha} = -[\mathcal{K}, \Phi^{\alpha}]_{\mathrm{PB}}, \tag{A.3}$$

其中，Keldysh 泊松括号定义如下：

$$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{PB}} = \check{\sigma}^2_{\alpha\beta}\partial_{\Phi^\alpha}\vec{\partial}_{\Phi^\beta}, \tag{A.4a}$$

$$[\Phi^{\mathrm{c}}_s, \Phi^{\mathrm{q}}_{s'}]_{\mathrm{PB}} = -i\delta_{ss'}. \tag{A.4b}$$

矩阵 $\check{J} = i\check{\sigma}^2$ 定义了 Keldysh 经典力学的辛形式。

通过正确选择坐标，可以将 $\mathcal{K}$ 表示为对角 $\check{}\check{}\check{}$ 形式。由于 K 是对称矩阵，JK 属于复辛代数 $\mathfrak{sp}(4N)$，其定义关系为 $\check{J}(\check{J}\check{K}) + (\check{J}\check{K})^{\mathrm{T}}\check{J} = 0$。它可以通过一个（一般为复数的）辛矩阵 $\check{V} \in \mathrm{Sp}(4N, \mathbb{C})$化为约当标准形，

$$\check{V}\check{J}\check{K}\check{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \check{U}\check{H}\check{U}^{-1} & 0 \\ 0 & -(\check{U}\check{H}\check{U}^{-1})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

作为辛矩阵，$\check{V}$满足 $\check{V}^{\mathrm{T}}\check{J}\check{V} = \check{J}$。这个 $\check{}$矩阵 $V_{\alpha\beta}$ 的 $2N \times 2N$ 分块为：

$$\check{V}_{\mathrm{cc}} = \check{U}, \quad \check{V}_{\mathrm{cq}} = -\check{F}_{\mathrm{st}}\check{\tau}^1\check{U}^{\mathrm{T}-1}, \quad \check{V}_{\mathrm{qc}} = 0, \quad \check{V}_{\mathrm{qq}} = \check{U}^{\mathrm{T}-1}, \tag{A.6}$$

其中 $\check{V}$满足辛条件 $\check{V}^{\mathrm{T}}\check{J}\check{V} = \check{J}$。该矩阵定义了一个复正则变换，将坐标变换到一组新的坐标，

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{bmatrix} = \check{V}\begin{bmatrix} \Phi^{\mathrm{c}} \\ \Phi^{\mathrm{q}} \end{bmatrix}, \tag{A.7}$$

请注意，每个新的 $2N$ 场彼此不满足复共轭关系，$\bar{}\zeta_s \neq \zeta^*_s$。然而，它们是辛共轭的，满足以下关系：

$$[\zeta_s, \bar{\zeta}_{s'}]_{\mathrm{PB}} = \delta_{ss'}. \tag{A.8}$$

在这些坐标下，作用量可写成由解耦场构成的标准形式。在可对角化的情况下，形式如下：

$$S = \sum_s \int \mathrm{d}t \bar{\zeta}_s(i\partial_t - \epsilon_s)\zeta_s. \tag{A.9}$$

写成这种形式后，可以看出经典 $2N$ 运动存在$\bar{}$个积分 $I_s = \zeta_s\zeta_s$。它们与 Keldysh 哈密顿量的关系为

$\mathcal{K} = \sum_s \epsilon_s I_s$。应用玻尔-索末菲量子化规则，可令$I_s = n_s$，其中 n_s 为一组正整数。Lindblad谱由 Keldysh 哈密顿量所取的量子化值给出，即 $-i\mathcal{K} = -\sum_s n_s \epsilon_s$。在不可对角化情形中，积分 I_s少于 $2N$ 个，这对应于特征值简并。在这种情况下，作用量$\bar{}$将包含取决于 H约当块结构的 $\zeta_s \zeta_{s+1}$ 形式的附加项。

对于费米子也可以作出类似的论证。将费米子作用量写成哈密顿形式，可得：

$$S = \int \mathrm{d}t \Big(\Psi^2 i\partial_t \Psi^1 - \frac{1}{2} \Psi^a \check{K}_{ab} \Psi^b \Big), \tag{A.10}$$

其中 $\Psi^2 = [\bar{\psi}^1 \ \psi^2]$ 的定义与正文中不同。矩阵 $\check{}K$ 定义为：

$$\check{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\check{H}^{\mathrm{T}} \\ \check{H} & -i\check{D}\check{\tau}^1 \end{bmatrix}. \tag{A.11}$$

请注意，这是 Keldysh-Nambu 空间中的反对称矩阵。

赝经典费米子运动方程可以用费米子泊松括号定义，

$$\partial_t \Psi^a = -\{\mathcal{K}, \Psi^a\}_{\mathrm{PB}}. \tag{A.12}$$

该括号是对称的，并通过 Grassmann导数定义：

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{PB}} = -i\check{\sigma}^1_{ab} \partial_{\Psi^a} \vec{\partial}_{\Psi^b}, \tag{A.13a}$$

$$\{\Psi^1_s, \Psi^2_{s'}\} = -i\delta_{ss'}. \tag{A.13b}$$

矩阵 $\check{}\sigma^1$ 定义了 Keldysh 格拉斯曼代数上的内积。因此，乘积 $\check{}\sigma^1\check{}K$ 是复正交代数 $\mathfrak{so}(4N)$ 的一个元素，并满足关系 $\check{}\sigma^1(\check{}\sigma^1\check{}K) + (\check{}\sigma^1\check{}K)^{\mathrm{T}}\check{}\sigma^1 = 0$。它可以通过复正交变换 $\check{}V \in \mathrm{SO}(4N, \mathbb{C})$ 化为约当标准形，该变换保持内积 $\check{}V_{\mathrm{T}}\check{}\sigma^1\check{}V = \check{}\sigma^1$ 不变。$\check{}V$ 的分块分量与式 (A.7) 中相同，只需将指标名 $\mathsf{c} \to 1$ 和 $\mathsf{q} \to 2$替换即可。新的格拉斯曼场组为：

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} = \check{V} \begin{bmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{bmatrix}. \tag{A.14}$$

¯这些矩的半经典量子化与玻色子的情况得出相同结果，其中占据数 n_s 被限制为 0 或 1。

这种表示在二次理论之外的适用性有限。由于对角基将稳态分布矩阵 ˇF_{st} 纳入其定义，因此不易看出如何在相互作用理论中或存在含时微扰时使用这种表示。ˇ通常， F 在二次层面上通过自洽方式定义，以推导出一个关于 F的非线性重整化量子动力学方程。尚不清楚这种过程是否能够进行；如果能够，又该如何在 F 已融入场的定义之时完成。

附录 B. 超算符量子化

本附录将本文所述形式体系与 [48, 49]的第三量子化超算符形式联系起来。对 Keldysh 作用量进行量子化，可复现 Lindblad 动力学的超算符表述。这两种方法之间的联系类似于标准量子理论的希尔伯特空间表述与路径积分表述之间的关系，但又多了一层复杂性：由于 Keldysh 经典力学的复数性质，量子化必须是“非正则”的，也就是说，玻色子和费米子超算符代数的生成元并非通过伴随相互关联。

对于玻色子理论，可以引入如下定义的右/左玻色超算符：

$$\hat{\hat{a}}_{+j}\rho = \hat{a}_j\rho; \quad \hat{\hat{a}}_{-j}\rho = \rho\hat{a}_j. \tag{B.1}$$

这些超算符之所以是玻色的，是因为它们满足玻色对易代数：

$$[\hat{\hat{a}}_{+j}, \hat{\hat{a}}^\dagger_{+i}] = \delta_{ij} = [\hat{\hat{a}}^\dagger_{-j}, \hat{\hat{a}}_{-i}], \quad [\hat{\hat{a}}_{+j}, \hat{\hat{a}}_{-i}] = 0. \tag{B.2}$$

借助这些超算符，通过将 Keldysh 场替换为 Keldysh旋转超算符，ˆˆ$a_{\mathrm{c,q}j} = (\hat{\hat{a}}_{+j} \pm \hat{\hat{a}}_{-j})/\sqrt{2}$，并将附录 A 中公式 (A.4) 的 Keldysh泊松结构替换为量子对易子，即可将 Keldysh作用量量子化，

$$[\cdot,\cdot]_{\mathrm{PB}} \to -i[\cdot,\cdot], \tag{B.3a}$$

$$\phi^\alpha \to \hat{\hat{a}}_\alpha; \quad \bar{\phi}^\alpha \to \hat{\hat{a}}^\dagger_\alpha. \tag{B.3b}$$

通过这一过程，作用量方程 (11) 的 Keldysh 哈密顿量 $-i\mathcal{K}$ 被转换回方程 (10) 所定义的林德布拉德算符。

量子和经典超算符定义了玻色代数：

$$[\hat{\hat{a}}_{\mathrm{c}j}, \hat{\hat{a}}^{\dagger}_{\mathrm{q}i}] = \delta_{ij}, \quad [\hat{\hat{a}}_{\mathrm{c}j}, \hat{\hat{a}}^{\dagger}_{\mathrm{c}i}] = 0 = [\hat{\hat{a}}_{\mathrm{c}j}, \hat{\hat{a}}_{\mathrm{q}i}], \tag{B.4}$$

该基底中的超算符代数体现了 Keldysh 经典力学的复数特性。正则共轭场与复共轭场¯并不等价；场 ϕ^{c} 的正则共轭是 ϕ^{q}，而非$_{-}\phi^{\mathrm{c}}$。因此，玻色超算符代数是非共轭的。经典超算符 $\hat{\hat{}}a_{\mathrm{c}j}$ 和 $\hat{\hat{}}a^{\dagger}{}_{\mathrm{c}j}$ 充当产生算符，而量子超算符 $\hat{\hat{}}a^{\dagger}{}_{\mathrm{q}j}$ 和 $-\hat{\hat{}}a_{\mathrm{q}j}$ 则分别是它们对应的湮灭算符，尽管它们并非其伴随算符。

通过对玻色超算符代数进行一般的 Bogoliubov 变换，可以将林德布拉德算符化为约当标准形。这通过由式 (A.7) 中的 $\check{V}$ 实现的基变换来完成。所得的玻色超算符集合 (b, b') 满足玻色对易代数的一种非共轭形式，该形式由式 (A.8) 的量子化给出，

$$[\hat{\hat{b}}_s, \hat{\hat{b}}'_{s'}] = \delta_{ss'}, \quad [\hat{\hat{b}}_s, \hat{\hat{b}}_{s'}] = 0 = [\hat{\hat{b}}'_s, \hat{\hat{b}}'_{s'}], \tag{B.5}$$

其中，撇号表示产生超算符，它通常不通过伴随与湮灭超算符相关联，$\hat{\hat{}}b^{\dagger}_s \neq \hat{\hat{}}b'_s$。在此基底下写出的可对角化林德布拉德算符具有熟悉的形式，即对数算符求和：

$$\hat{\hat{\mathcal{L}}} = -i \sum_s \epsilon_s \hat{\hat{b}}'_s \hat{\hat{b}}_s. \tag{B.6}$$

对于不可对角化情形的林德布拉德算符，还会出现$\hat{\hat{}}\,\hat{\hat{}}\, b'_s b_{s+1}$形式的附加项。这会使完整的林德布拉德算符中，每个 n粒子扇区都出现一系列大小递增的约当块。

对于费米子理论，情况则更加复杂。这是因为，仿照式 (B.1) 对费米子左/右超算符所作的朴素定义，最终会导致错误的粒子统计。采用这种构造时，左、右超算符会彼此对易而非反对易，从而产生副费米子代数。通过使用非共轭版本的克莱因变换，可以解决这一问题；这相当于在其中一个超算符的定义中额外添加一个因子：

$$\hat{\hat{c}}_{+j}\rho = \hat{c}_j\rho, \quad \hat{\hat{c}}'_{+j}\rho = \hat{c}^{\dagger}_j\rho, \quad \hat{\hat{c}}_{-j}\rho = \hat{P}\rho\hat{P}\hat{c}_j, \quad \hat{\hat{c}}'_{-j}\rho = \hat{P}\rho\hat{P}\hat{c}^{\dagger}_j, \tag{B.7}$$

其中，$\hat{P} = \exp(i\pi \sum_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j)$ 是费米子宇称算符。此定义确保超算符是费米的，并满足费米子对易关系：

$$\{\hat{\hat{c}}_{\pm j}, \hat{\hat{c}}'_{\pm i}\} = \delta_{ji}, \quad \{\hat{\hat{c}}_{+j}, \hat{\hat{c}}_{-i}\} = 0 = \{\hat{\hat{c}}'_{+j}, \hat{\hat{c}}'_{-i}\}. \tag{B.8}$$

通过这一构造，Keldysh 旋转费米子超算符 $\hat{\hat{c}}_{1,2j} = (\hat{\hat{c}}_{+j} \pm \hat{\hat{c}}_{-j})/\sqrt{2}$ 和 $\hat{\hat{c}}'_{1,2j} = (\hat{\hat{c}}'_{+j} \mp \hat{\hat{c}}'_{-j})/\sqrt{2}$ 取代了 Keldysh 格拉斯曼场；在费米子理论的量子化中，反对易子取代了附录 A 式 (A.13) 中的费米子泊松括号，

$$\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{PB}} \to -i\{\cdot,\cdot\}, \tag{B.9a}$$

$$\psi^a \to \hat{\hat{c}}_a; \quad \bar{\psi}^a \to \hat{\hat{c}}'_a. \tag{B.9b}$$

费米超算符满足费米子正则反对易关系：

$$\{\hat{\hat{c}}_{aj}, \hat{\hat{c}}'_{bi}\} = \delta_{ij}\delta_{ab}, \quad \{\hat{\hat{c}}_{aj}, \hat{\hat{c}}_{bi}\} = 0 = \{\hat{\hat{c}}'_{aj}, \hat{\hat{c}}'_{bi}\}. \tag{B.10}$$

这是费米子反对易代数的一种非共轭表示。通过将式 (A.14) 中的对角格拉斯曼场量子化为一组新的费米超算符 (d, d')，即可对林德布拉德算符进行对角化；这些超算符满足费米子代数：

$$\{\hat{\hat{d}}_s, \hat{\hat{d}}'_{s'}\} = \delta_{ss'}, \quad \{\hat{\hat{d}}_s, \hat{\hat{d}}_{s'}\} = 0 = \{\hat{\hat{d}}'_s, \hat{\hat{d}}'_{s'}\}. \tag{B.11}$$

与式 (B.6) 类似，林德布拉德算符在此基底下呈对角形式，

$$\hat{\hat{\mathcal{L}}} = -i \sum_s \epsilon_s \hat{\hat{d}}'_s \hat{\hat{d}}_s. \tag{B.12}$$

在此表述中，稳态 ρ_{st} 是超算符 Fock 真空。林德布拉德算符的所有其他本征值都可以通过分别使用玻色子或费米子产生超算符，在真空上进行作用而显式构造，b'_s 或 d'_s。这些本征向量并非密度矩阵意义上的量子态，而是无迹算符。

附录 C. 非连通图

在本附录中，我们讨论 Lindblad Keldysh 理论中非连通图的消去。在 Keldysh 图解理论中，非连通图会恒等消去，这是 Keldysh

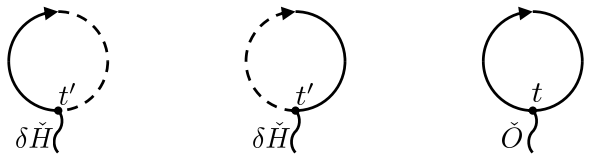


图 C.11：线性响应公式中出现的非连通环图。左侧两个图分别是推迟环和超前环，其和相互抵消。最右侧的图是 Keldysh 环，它通常总是作为前因子出现在相互抵消的项之前。

因果结构的结果。这与 Matsubara 平衡理论形成对比；在后者中，消去是由配分函数的分子和分母中的相互竞争贡献导致的。Keldysh 理论中的非连通图总是成对出现，它们对应于等时间的推迟和超前对象之和，而该和会恒等于零。最简单的情形是等时间的推迟和超前格林函数因子，

$$\check{G}^{\mathrm{R}}(t,t)+\check{G}^{\mathrm{A}}(t,t)=0. \tag{C.1}$$

例如，这一项会出现在式 (32) 左侧哈密顿量线性响应公式的 Wick 收缩中。从图示角度看，它是非连通环图之和；见图 (C.11)。

作为检验 Lindblad 理论有效性的一种方法，可以验证式 (6) 中配分函数的归一化在受到微扰响应时仍保持为 $Z=1$ 。 ρ 的归一化，因此也就是 Z，在任何阶都不应出现微扰修正。因此，将对作用量的微扰指数化后在 Z 中展开，$\exp(i\delta S)=1+i\,\delta S+\ldots$，预期所有次领先项都恒等于零。就领先阶而言，这要求 $\langle\delta S\rangle_{\mathrm{st}}=0$，或等价地 $\langle\delta\mathcal{K}(t)\rangle_{\mathrm{st}}=0$，其中 $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{st}}$ 表示对处于稳态的未微扰系统取平均。

为简单起见，考虑第 2.4 节所讨论的二次微扰。哈密顿量微扰 $\delta_{H_0}\mathcal{K}$ 的期望值包含一系列非连通的推迟与超前圈图，如式 (C.1) 所示。如上文所述，由于这些项是等时推迟与超前对象之和，因此其值为零。对 D 的微扰只会产生一个量子-量子关联因子 $\langle\Phi^q\bar{\Phi}^q\rangle$ ，所以显然也为零。然而，对 $\check{}\,Q$ 的微扰似乎包含推迟与超前圈图之差，

$\check{G}^{\mathrm{R}}(t,\ t)\ -\check{G}^{\mathrm{A}}(t,\ t)$，表面看来似乎不为零。人们很容易将这个差替换为常数矩阵 $\check{\tau}^3$，从而认为会有形如 $\mathrm{tr}(\check{\tau}^3\delta\ \check{Q})$ 的非连通项贡献。当然，这种想法是错误的。这些项之所以抵消，根源在于 Lindblad动力学的物理起源：它来自对开放系统环境的积分消去。

概括而言，这一过程始于一个与大量浴自由度耦合的系统。将热浴积分掉后，热浴会使裸系统量发生重整化。对于二次理论，与热浴的相互作用会通过自能修正裸格林函数，从而得到如下形式的系统有效作用量：

$$S=\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\bar{\Phi}(t)\Big(\check{G}_0^{-1}(t,t')-\check{\Sigma}(t,t')\Big)\Phi(t'), \tag{C.2}$$

其中，裸逆格林函数的形式为式 (11) 中的二次型，但不含耗散项。在林德布拉德理论的马尔可夫近似下，自能 $\check{\Sigma}$ 在时间上是局域的 $\check{\Sigma}(t,\ t')\ \propto\delta(t-t')$。在算符语言中，自能的虚部产生 Lindblad 演化的耗散部分（式 (5) 中的 $\mathcal{D}$ ）。推迟分量 $\check{}$ 和超前分量规定了 Q，

$$\mathbb{I}\mathrm{m}\Big(\check{\Sigma}^{\mathrm{R,A}}(t,t')\Big)\simeq\pm\delta(t-t')\check{Q}. \tag{C.3}$$

然而请注意，此处的连续表示法具有迷惑性。即使在马尔可夫近似下，Σ 的推迟分量与超前分量的正则化也不同：δ 函数的自变量应理解为沿相反方向相差一个无穷小时间步长 $\delta^{\mathrm{R,\ A}}(t-t')\sim\delta_{t,\ t\pm\delta t}$。因此，对林德布拉德作用量耗散部分的微扰修正，应理解为对自能谱分量的修正。因此，最低阶贡献并非仅具有图 (C.11) 中推迟圈图与超前圈图之差的形式，而应隐含地理解为：

$$\mathrm{tr}\left(\check{G}^{\mathrm{R}}\circ\check{\Sigma}^{\mathrm{R}}+\check{G}^{\mathrm{A}}\circ\check{\Sigma}^{\mathrm{A}}\right), \tag{C.4}$$

其中迹是对时间和矩阵空间取的。这恰当地等于迟延对象与超前对象之和，因此应视为零。在实际计算中，可以放心地使用连续表示法

进行计算时，可以采用正文中介绍的形式体系，并应认识到，由于底层的正则化，非连通图总会相互抵消。

参考文献

[1] F. Verstraete、M. M. Wolf、J. I. Cirac，耗散驱动的量子计算与量子态工程，《自然·物理》5 (2009) 633–636。 doi:10.1038/nphys1342.

[2] P. M. Harrington、E. J. Mueller、K. W. Murch，面向量子信息科学的工程化耗散，《自然综述：物理》4 (2022) 660–671。 doi:10.1038/s42254-022-00494-8.[3] L. M. Sieberer、M. Buchhold、S. Diehl，驱动开放量子系统的 Keldysh 场论，《物理学报告》79 (2016) 096001。 doi:10.1088/0034-4885/79/9/096001.[4] A. J. Daley，量子轨迹与开放多体量子系统，《物理学进展》63 (2014) 77–149。 doi:10.1080/00018732.2014.933502。[5] S. Diehl、A. Micheli、A. Kantian、B. Kraus、H. P. B¨uchler、P. Zoller，冷原子驱动开放量子系统中的量子态与相，《自然·物理》4 (2008) 878–883。 doi:10.1038/nphys1073.[6] R. Blatt、C. Roos，囚禁离子的量子模拟，《自然·物理》8 (2012) 277–284。 doi:10.1038/nphys2252.[7] J. W. Britton、B. C. Sawyer、A. C. Keith、C.-C. J. Wang、J. K. Freericks、H. Uys、M.J.Biercuk、J.J.Bollinger，在囚禁离子量子模拟器中工程化实现数百个自旋间的二维伊辛相互作用，《自然》484 (2012) 489–492。 doi:10.1038/nature10981.[8] J. G. Bohnet、B. C. Sawyer、J. W. Britton、M. L. Wall、A. M. Rey、M. Foss-Feig、J. J. Bollinger，数百个囚禁离子的量子自旋动力学与纠缠生成，《科学》352 (2016) 1297–1301。 doi:10.1126/science.aad9958。

[9] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Omran、H. Pich- ler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c、M. D. Lukin，在51原子量子模拟器中探测多体动力学，《自然》551 (2017) 579–584。 doi:10.1038/nature24622.
[10] J. Clarke、F. K. Wilhelm，超导量子比特，《自然》453 (2008) 1031–1042。 doi:10.1038/nature07128.[11] A. A. Houck、H. E. T¨ureci、J. Koch，利用超导电路进行芯片上的量子模拟，《自然·物理》8 (2012) 292–299。 doi:10.1038/nphys2251.[12] D. L. Underwood、W. E. Shanks、J. Koch、A. A. Houck，用于光子量子模拟的低无序微波腔晶格，《物理评论A》86 (2012) 023837。
doi:10.1103/PhysRevA.86.023837.[13] S. Schmidt、J. Koch，电路量子电动力学晶格：迈向利用超导电路进行量子模拟，《物理年鉴》525 (2013) 395–412。doi:https://doi.org/10.1002/andp.201200261.[14] C. Noh、D. G. Angelakis，利用光进行量子模拟与多体物理，《物理学报告》80 (2016) 016401。 doi:10.1088/0034-4885/80/1/016401.[15] M. M¨uller、S. Diehl、G. Pupillo、P. Zoller，利用原子和离子的工程化开放系统与量子模拟，载于：《原子、分子与光学物理进展》第61卷，学术出版社，2012年，第1–80页。
doi:https://doi.org/10.1016/B978-0-12-396482-3.00001-6.[16] P. L. McMahon、A. Marandi、Y. Haribara、R. Hamerly、C. Langrock、S. Tamate、T. Inagaki、H. Takesue、S. Utsunomiya、K. Aihara、R. L. Byer、M. M. Fejer、H. Mabuchi、Y. Yamamoto，具有全对全连接的完全可编程100自旋相干伊辛机，《科学》354 (2016) 614–617。 doi:10.1126/science.aah5178。网址 https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aah5178[17] G. Lindblad，论量子动力半群的生成元，《数学物理通讯》48 (1976) 119–130。 doi:10.1007/BF01608499。

[18]V. Gorini、A. Kossakowski、E. C. G. Sudarshan，《n能级系统的完全正动力半群》，数学物理学杂志 17（1976年）821–825。doi:10.1063/1.522979.[19]H. Breuer、F. Petruccione，《开放量子系统理论》，牛津大学出版社，2002年。doi:10.1093/acprof:oso/9780199213900.001.0001.[20] C. W. Gardiner、P. Zoller，《量子噪声》，Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2004年。[21]S. M. Barnett、P. M. Radmore，《理论量子光学方法》，牛津大学出版社，2002年。doi:10.1093/acprof:oso/9780198563617.001.0001.[22] M. O. Scully、M. S. Zubairy，《量子光学》，剑桥大学出版社，1997年。doi:10.1017/CBO9780511813993.[23] M. Dykman、V. Smelyanskiy，《共振场中与介质相互作用的非线性振子稳定态之间跃迁的量子理论》，Zh. Eksp. Teor. Fiz. 94（1988年）61–74。[24] M. Marthaler、M. I. Dykman，《通过量子激活实现切换：参数调制振子》，《物理评论A》73（2006年）042108。doi:10.1103/PhysRevA.73.042108.[25] M. Dykman，《涨落非线性振子：从纳米力学到量子超导电路》，牛津大学出版社，2012年。doi:10.1093/acprof:oso/9780199691388.001.0001.[26] H. Ritsch、P. Domokos、F. Brennecke、T. Esslinger，《腔生成的动态光学势中的冷原子》，《现代物理评论》85（2013年）553–601。doi:10.1103/RevModPhys.85.553.[27] D. Leibfried、R. Blatt、C. Monroe、D. Wineland，《单个囚禁离子的量子动力学》，《现代物理评论》75（2003年）281–324。 doi:10.1103/RevModPhys.75.281.[28] I. Carusotto、C. Ciuti，《光的量子流体》，《现代物理评论》85（2013年）299–366。 doi:10.1103/RevModPhys.85.299。

[29] M. Wouters、I. Carusotto, 《非平衡激子-极化激元玻色-爱因斯坦凝聚体中的激发》, 《物理评论快报》99（2007年）140402。 doi:10.1103/PhysRevLett.99.140402.[30] J. Keeling、N. G. Berloff, 《受泵浦的衰减凝聚体中自发形成的旋转涡旋晶格》, 《物理评论快报》100（2008年）250401。 doi:10.1103/PhysRevLett.100.250401.[31] L. M. Sieberer、S. D. Huber、E. Altman、S. Diehl, 《驱动耗散系统中的动力学临界现象》, 《物理评论快报》110（2013年）195301。 doi:10.1103/PhysRevLett.110.195301.[32]H. Deng、H. Haug、Y. Yamamoto, 《激子-极化激元玻色-爱因斯坦凝聚》, 《现代物理评论》82（2010年）1489–1537。 doi:10.1103/RevModPhys.82.1489.[33] T. Byrnes、N. Y. Kim、Y. Yamamoto, 《激子-极化激元凝聚体》, 《自然·物理》10（2014年）803–813。 doi:10.1038/nphys3143.[34] J. Klaers、J. Schmitt、F. Vewinger、M. Weitz, 《光学微腔中光子的玻色-爱因斯坦凝聚》, 《自然》468（2010年）545–548。 doi:10.1038/nature09567.[35] S. O. Demokritov、V. E. Demidov、O. Dzyapko、G. A. Melkov、A. A. Serga、B. Hillebrands、A. N. Slavin, 《泵浦作用下室温准平衡磁振子的玻色-爱因斯坦凝聚》, 《自然》443（2006年）430–433。 doi:10.1038/nature05117.[36] J. Kasprzak、M. Richard、S. Kundermann、P. J. A. Baas、J. M. J. Keeling、F. M. Marchetti、M. H. Szyma´nska、R. Andr´e、J. L. Staehli、V. Savona、P. B. Littlewood、B. Deveaud、L. S. Dang, 《激子-极化激元的玻色-爱因斯坦凝聚》, 《自然》443（2006年）409–414。 doi:10.1038/nature05131.[37] M. I. Dykman、C. Bruder、N. L¨orch、Y. Zhang, 《受驱动量子振子中相互作用诱导的时间对称性破缺》, 《物理评论B》98（2018年）195444。 doi:10.1103/PhysRevB.98.195444.[38] S. Puri、C. K. Andersen、A. L. Grimsmo、A. Blais, 《利用全连接非线性振子进行量子退火》, 《自然·通讯》8（2017年）15785。 doi:10.1038/ncomms15785。

[39] H. Goto, Z. Lin, Y. Nakamura，利用耦合非线性振子的量子加热对伊辛模型进行玻尔兹曼采样，《科学报告》8 (2018) 7154. doi:10.1038/s41598-018-25492-8.[40] S. E. Nigg, N. L¨orch, R. P. Tiwari，具有全连接的鲁棒量子优化器，《科学进展》3 (2017) e1602273. doi:10.1126/sciadv.1602273.[41] M. Fitzpatrick, N. M. Sundaresan, A. C. Y. Li, J. Koch, A. A. Houck，在一维电路量子电动力学晶格中观测到耗散相变，《物理评论X》7 (2017) 011016. doi:10.1103/PhysRevX.7.011016.[42] R. Rota, F. Minganti, C. Ciuti, V. Savona，二次驱动非线性光子晶格中的量子临界区，《物理评论快报》122 (2019) 110405. doi:10.1103/PhysRevLett.122.110405.[43] A. Reiserer, G. Rempe，基于腔的量子网络：单原子与光学光子，《现代物理评论》87 (2015) 1379–1418.doi:10.1103/RevModPhys.87.1379.[44] O. Alberton, M. Buchhold, S. Diehl，受监测自由费米子链中的纠缠转变：从扩展临界性到面积律，《物理评论快报》126 (2021) 170602. doi:10.1103/PhysRevLett.126.170602.[45] M. Buchhold, Y. Minoguchi, A. Altland, S. Diehl，狄拉克费米子测量诱导相变的有效理论，《物理评论X》(2021). doi:10.1103/PhysRevX.11.041004.[46] T. Botzung, S. Diehl, M. M¨uller，量子自旋链中工程化耗散诱导的纠缠转变：从对数增长到面积律，《物理评论B》104 (2021) 184422. doi:10.1103/PhysRevB.104.184422.[47]B. Ladewig, S. Diehl, M. Buchhold，受监测开放费米子动力学：探索测量、退相干与自由哈密顿量演化之间的相互作用，《物理评论研究》4 (2022) 033001. doi:10.1103/PhysRevResearch.4.033001。

[48] T. Prosen, T. H. Seligman，玻色子算符空间上的量子化，《物理学杂志A：数学与理论》43 (2010) 392004. doi:10.1088/1751-8113/43/39/392004.[49] T. Prosen，第三量子化：求解二次开放费米子系统主方程的一般方法，《新物理学杂志》10 (2008) 043026. doi:10.1088/1367-2630/10/4/043026.[50] T. Prosen，二次开放费米子系统林德布拉德方程的谱定理，《统计力学杂志》(2010) P 07020doi:10.1088/1742-5468/2010/07/P07020.[51]C. Guo, D. Poletti, 玻色与费米耗散二次开放系统的解，《物理评论A》95 (2017) 052107. doi:10.1103/PhysRevA.95.052107.[52]P. Kos, T. Prosen，开放二次费米子系统中的时变关联函数，《统计力学杂志》(2017) 123103doi:10.1088/1742-5468/aa9681.[53]A. Altland, M. Fleischhauer, S. Diehl，开放费米量子物质的对称性类别，《物理评论X》11 (2021) 021037. doi:10.1103/PhysRevX.11.021037.[54]S. Lieu, M. McGinley, N. R. Cooper, 二次林德布拉德算符的十重分类，《物理评论快报》124 (2020) 040401. doi:10.1103/PhysRevLett.124.040401.[55] Y. He, C.-C. Chien, 封闭与开放系统中二次玻色激发的拓扑分类及实例，《物理学杂志：凝聚态》34 (2022) 175403. doi:10.1088/1361-648X/ac53da.[56] S. Olivares，相空间中的量子光学，《欧洲物理杂志专题》203 (2012) 3–24. doi:10.1140/epjst/e2012-01532-4.[57] S. R. Gerardo Adesso, A. R. Lee，连续变量量子信息：高斯态及其他，《开放系统与信息动力学》21 (2014) 1440001. doi:10.1142/S1230161214400010.[58] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. Garc´ıa-Patr´on, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, S. Lloyd，高斯量子信息，《现代物理评论》84 (2012) 621–669. doi:10.1103/RevModPhys.84.621。

[59] L. Banchi, S. L. Braunstein, S. Pirandola，任意高斯态的量子保真度，《物理评论快报》115 (2015年) 260501。 doi:10.1103/PhysRevLett.115.260501.[60]S.-A. Cheong, C. L. Henley，自由费米子的多体密度矩阵，《物理评论B》69 (2004年) 075111。 doi:10.1103/PhysRevB.69.075111.[61]L. Hackl, E. Bianchi，基于K¨ahler结构的玻色与费米高斯态，SciPost物理核心 4 (2021年) 025。 doi:10.21468/SciPostPhysCore.4.3.025.[62] C. V. Kraus，《费米子量子多体系统：量子信息方法》，世界科学出版社，2013年，第6章，第195–217页。 doi:10.1142/9789814460156_0006.[63] J. Surace, L. Tagliacozzo，《费米子高斯态：数值方法导论》，SciPost物理讲义 (2022年) 54doi:10.21468/SciPostPhysLectNotes.54.[64] A. McDonald, A. A. Clerk，通过弱对称性精确求解相互作用耗散系统，《物理评论快报》128 (2022年) 033602。 doi:10.1103/PhysRevLett.128.033602.[65]M. A. B. Sebastian Diehl, Enrique Rico, P. Zoller，原子量子线中的耗散诱导拓扑，《自然·物理》7 (2011年) 971–977。doi:10.1038/nphys2106.[66] M. van Caspel, S. E. T. Arze, I. P. Castillo，驱动耗散基塔耶夫链中拓扑序的动力学特征，SciPost物理 6 (2019年) 026。 doi:10.21468/SciPostPhys.6.2.026..[67] C.-E. Bardyn, M. A. Baranov, C. V. Kraus, E. Rico, A. Imamo˘glu, P. Zoller, S. Diehl，耗散诱导拓扑，《新物理学杂志》15 (2013年) 085001。 doi:10.1088/1367-2630/15/8/085001.[68] F. Dangel, M. Wagner, H. Cartarius, J. Main, G. Wunner，Su-Schrieffer-Heeger模型耗散扩展中的拓扑不变量，《物理评论A》98 (2018年) 013628。 doi:10.1103/PhysRevA.98.013628.

[69] V. P. Flynn, E. Cobanera, L. Viola，耗散诱导拓扑：亚稳态二次马尔可夫动力学中的马约拉纳玻色子，《物理评论快报》127 (2021年) 245701。 doi:10.1103/PhysRevLett.127.245701.[70] A. Kamenev，《非平衡系统场论》，剑桥大学出版社，第2版，2023年。 doi:10.1017/CBO9781139003667.[71] S. K. Godunov，《常系数常微分方程》（数学专著译丛），第169卷，美国数学学会，1997年。 doi:10.1090/mmono/169.[72] B. Buˇca, T. Prosen，关于林德布拉德方程的对称性约化的注记：受限开放自旋链中的输运，《新物理学杂志》14 (2012年) 073007。 doi:10.1088/1367-2630/14/7/073007.[73] Z. Zhang, J. Tindall, J. Mur-Petit, D. Jaksch, B. Buˇca，具有非阿贝尔对称性的开放量子系统的稳态简并，《物理学杂志A：数学与理论》53 (2002年) 215304。 doi:10.1088/1751-8121/ab88e3.[74] V. V. Albert, B. Bradlyn, M. Fraas, L. Jiang，林德布拉德算符的几何与响应，《物理评论X》6 (2016年) 041031。 doi:10.1103/PhysRevX.6.041031.[75] M. F. Maghrebi, A. V. Gorshkov，通过Keldysh形式研究非平衡多体稳态，《物理评论B》93 (2016年) 014307。 doi:10.1103/PhysRevB.93.014307.[76] V. V. Albert, L. Jiang，林德布拉德主方程中的对称性与守恒量，《物理评论A》89 (2014年) 022118。 doi:10.1103/PhysRevA.89.022118.[77] R. A. Santos, F. Iemini, A. Kamenev, Y. Gefen，利用多维暗空间及其对称性实现耗散保护量子比特的一种可能途径，《自然·通讯》11 (1) (2020年) 5899。[78] J. Williamson，关于线性动力系统标准形的代数问题，《美国数学杂志》58 (1936) 141–163。 doi:10.2307/2371062.

[79] V. V. Albert, B. Bradlyn, M. Fraas, L. Jiang，林德布拉德算符的几何与响应，《物理评论X》6 (2016) 041031. doi:10.1103/PhysRevX.6.041031.[80] T. Kato，《线性算子的微扰理论》，施普林格出版社柏林海德堡，1995年。 doi:10.1007/978-3-642-66282-9.[81] H. Shen, B. Zhen, L. Fu，非厄米哈密顿量的拓扑能带理论，《物理评论快报》120 (2018) 146402. doi:10.1103/PhysRevLett.120.146402.[82]S. Yao, Z. Wang，非厄米系统的边缘态与拓扑不变量，《物理评论快报》121 (2018) 086803. doi:10.1103/PhysRevLett.121.086803.[83] K. Yokomizo, S. Murakami，非厄米系统的非布洛赫能带理论，《物理评论快报》123 (2019) 066404. doi:10.1103/PhysRevLett.123.066404.[84] H. Hu, E. Zhao，结与非厄米布洛赫能带，《物理评论快报》126 (2021) 010401. doi:10.1103/PhysRevLett.126.010401.[85] H. Hu, S. Sun, S. Chen，例外点的结拓扑与非厄米禁戒定理，《物理评论研究》4 (2022) L022064. doi:10.1103/PhysRevResearch.4.L022064.[86] C. C. Wojcik, K. Wang, A. Dutt, J. Zhong, S. Fan，二维和三维非厄米能带结构的本征值拓扑，《物理评论B》106 (2022) L161401. doi:10.1103/PhysRevB.106.L161401.[87] Y. S. S. Patil, J. H¨oller, P. A. Henry, C. Guria, Y. Zhang, L. Jiang, N. Kralj, N. Read, J. G. E. Harris，测量非厄米简并点的结与非交换辫群，《自然》607 (2022) 271–275.doi:10.1038/s41586-022-04796-w.[88]J. ao Costa, P. Ribeiro, A. de Luca, T. Prosen, L. S´a，费米子随机二次型李维尔算符的谱与稳态性质，arXiv:2210.07959 (2022). doi:10.48550/arXiv.2210.07959.[89] S. Lange，《林德布拉德主方程的随机矩阵理论》，硕士论文，德累斯顿工业大学 (2011)。

[90] S. Denisov, T. Laptyeva, W. Tarnowski, D. Chru´sci´nski, K. Zyczkowski, 随机林德布拉德算符的通用谱, 《物理评论快报》123 (2019) 140403. doi:10.1103/PhysRevLett.123.140403.[91]T. Can, 随机林德布拉德动力学, 《物理学杂志A：数学与理论》52 (2019) 485302. doi:10.1088/1751-8121/ab4d26.[92] T. Can, V. Oganesyan, D. Orgad, S. Gopalakrishnan, 随机量子主方程中的谱隙与中隙态, 《物理评论快报》123 (2019) 234103. doi:10.1103/PhysRevLett.123.234103.
[93] L. S´a, P. Ribeiro, T. Prosen, 随机刘维尔算符的谱与稳态性质, 《物理学杂志A：数学与理论》53 (2020) 305303. doi:10.1088/1751-8121/ab9337.[94] S. Lange, C. Timm, 林德布拉德主方程的随机矩阵理论, 《混沌》31 (2021) 023101. doi:10.1063/5.0033486.
[95] V. A. Marˇcenko, L. A. Pastur, 若干随机矩阵集合的特征值分布, 《苏联数学文集》1 (1967) 457. doi:10.1070/SM1967v001n04ABEH001994.
[96] F. Haake, F. Izrailev, N. Lehmann, D. Saher, H.-J. Sommers, 衰变系统随机矩阵复能级的统计特性, 《物理学杂志 B》88 (1992) 359–370. doi:10.1007/BF01470925.[97] Y. V. Fyodorov, H. J. Sommers, 少通道混沌散射中 s-矩阵极点的统计特性：从孤立共振到重叠共振的交叉, 《喷气物理学快报》63 (1996) 1026–1030. doi:10.1134/1.567120.[98] R. A. Janik, M. A. Nowak, G. Papp, J. Wambach, I. Zahed, 非厄米随机矩阵模型：自由随机变量方法, 《物理评论E》55 (1997) 4100–4106. doi:10.1103/PhysRevE.55.4100.[99] F. Thompson, A. Kamenev, 通过实时间瞬子实现量子比特退相干与对称性恢复, 《物理评论研究》4 (2022) 023020.doi:10.1103/PhysRevResearch.4.023020.[100] M. F. Maghrebi, A. V. Gorshkov, 通过Keldysh形式描述非平衡多体稳态, 《物理评论B》93 (2016) 014307. doi:10.1103/PhysRevB.93.014307.

[101] E. G. D. Torre、S. Diehl、M. D. Lukin、S. Sachdev、P. Strack, 《量子光学中非平衡相变的 Keldysh 方法：超越光学腔中的 Dicke 模型》, 《物理评论A》87 (2013年) 023831。doi:10.1103/PhysRevA.87.023831.
[102] M. Buchhold、P. Strack、S. Sachdev、S. Diehl, 《光学腔中的 Dicke 模型量子自旋与光子玻璃：非平衡理论与实验特征》, 《物理评论A》87 (2013年) 063622。doi:10.1103/PhysRevA.87.063622.[103] J. Marino、S. Diehl, 《驱动开放系统中非平衡相变的量子动力学场论》, 《物理评论B》94 (2016年) 085150。 doi:10.1103/PhysRevB.94.085150.
[104] L. M. Sieberer、S. D. Huber、E. Altman、S. Diehl, 《驱动耗散玻色-爱因斯坦凝聚的非平衡泛函重整化》, 《物理评论B》89 (2014) 134310。 doi:10.1103/PhysRevB.89.134310。[105] U. C. T¨auber、S. Diehl, 《驱动耗散玻色-爱因斯坦临界性的微扰场论重整化群方法》, 《物理评论X》4 (2014) 021010。 doi:10.1103/PhysRevX.4.021010。