arXiv:2301.02963v1 [physics.app-ph] 8 Jan 2023

扩散伪共形映射：具有完美界面匹配的无各向异性变换热介质

戴高乐，[1,*] 杨福宝，[2] 王军，[3,4] 徐刘军，[5,†] 和黄吉平[2,‡]
[1]南通大学科学学院，中国南通 226019
[2]复旦大学物理系、表面物理国家重点实验室及微纳光子结构教育部重点实验室，中国上海 200433
[3]华东理工大学物理学院，中国上海 200237
[4]中国科学院大学温州研究院，中国温州 325001
[5]中国工程物理研究院研究生院，中国北京 100193
（日期: 2023年1月10日）

摘要

变换介质为场调控提供了基础范式，但其复杂的各向异性给制造带来了挑战。尽管光学共形映射已被用于消除各向异性，但仍有两个关键因素阻碍其在热学中的发展，即扩散的独特属性和不可避免的界面失配。在此，我们提出扩散拟保角映射的概念，克服扩散与波之间固有的差异，实现完美界面匹配。所提出的映射直接实现了热引导和热扩展功能，并采用无各向异性变换热介质；其可行性已通过实验或仿真得到验证。除了多种应用外，我们还通过揭示两类主流双层斗篷与伪保角映射之间的深层联系，为其提供统一的理解视角。这些成果大大简化了变换热学的实现，并对调控其他扩散和波现象具有启示意义。

热调控对人类生活的方方面面都至关重要，例如能源利用、芯片冷却和红外探测。在过去十年间，热传导中的变换理论 [1, 2] 不断发展；热传导是一种与波动力学 [3, 4]本质不同的扩散过程。变换热学表明，物理空间中的各向异性非均匀热参数可以模拟曲空间中的热传递，这得益于热方程在坐标变换下的形式不变性。然而，各向异性严重限制了实际应用，因为天然材料通常具有各向同性热学性质。尽管有人提出扩散散射抵消等替代方案来避免各向异性 [5–8], ，但它们通常只适用于热隐身等特定情形。因此，消除变换热介质固有的各向异性仍是一项重大挑战。

共形变换光学 [1, 9] 可通过二维光学共形映射消除各向异性，同时局部保持曲线的角度和方向 [10]。借助无各向异性变换折射率，已实现多种波现象 [11–19]。然而，在热学中应用光学共形映射面临两个关键问题。一方面，扩散与波在控制方程（即拉普拉斯方程与亥姆霍兹方程）和关键参数（即热导率与折射率）上存在根本差异。另一方面，由于缺乏直观的阻抗匹配准则，要匹配功能器件与背景之间的界面热流仍颇具挑战，而这对于实现精准、稳健的热操控至关重要。因此，直接利用光学共形映射来精确控制扩散并不可行。

在此，我们提出扩散伪共形映射的概念，该映射能够保持代表热场的某些曲线族之间的夹角。值得庆幸的是，“伪”并不影响“共形”在消除各向异性方面的关键优势，并有助于实现完美界面匹配。所提出的映射借助无各向异性变换热介质实现精确的热操控，并以热引导和热扩展为两个典型示例，通过实验或模拟加以验证。此外，我们从伪保角映射的角度揭示了此前通过散射抵消设计的双层斗篷的几何起源。这些结果在处理复杂热传递 [20–22] 方面具有可扩展性，并为利用各向同性材料实现各种热功能提供了统一的几何视角。

为清晰起见，我们首先建立扩散共形映射，并说明其局限性。二维共形映射 f: $z_0 \mapsto z$ ($z_0 = x_0 + iy_0$ 和 $z = f(z_0) = x + iy$) 是全纯的，满足柯西–黎曼方程 [10],

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_0}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + i\frac{\partial f}{\partial y_0}\right) = 0, \tag{1}$$

其中 $\overline{z_0}$ 是 z_0的复共轭。我们考虑物理空间（位置记为 z）和虚拟空间（位置记为 z_0）中的形式不变热传导方程,

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \nabla T(z)) - Q = 0, \tag{2a}$$

$$\nabla_0 \cdot (\boldsymbol{\kappa}_0 \nabla_0 T_0(z_0)) - Q_0 = 0, \tag{2b}$$

其中， T、 $\boldsymbol{\kappa}$和 Q 分别是物理空间中的温度、热导率（二阶张量）和内部源功率。带下标“0”的对应量表示虚拟空间中的相应参数。确保 $T(z) = T_0(f^{-1}(z_0))$ 的变换规则为 [23, 24]

$$\boldsymbol{\kappa}(z) = \mathrm{J}_f \boldsymbol{\kappa}_0(z_0) \mathrm{J}_f^{\mathrm{T}} / \det \mathrm{J}_f, \tag{3a}$$

$$Q(z) = Q_0(z_0) / \det \mathrm{J}_f, \tag{3b}$$

其中，J_f是 f的雅可比矩阵，而$\mathrm{J}_f^{\mathrm{T}}$是$\mathrm{J}_f$的转置。由于 f的全纯性，$\mathrm{J}_f \mathrm{J}_f^{\mathrm{T}} / \det \mathrm{J}_f$是单位矩阵 [9],，因此，式（3a）可简化为$\boldsymbol{\kappa}(z) = \boldsymbol{\kappa}_0(z_0(z))$。按照熟知的变换理论范式，虚拟空间是各向同性且均匀的，因此 κ 和 κ_0 是相同的常数标量。这一结果与采用共形映射求解不规则几何域中的热方程的传统方法一致 [25]。不同于共形变换光学中经过设计的梯度折射率，这种被冻结的自由度（即 $\kappa = \kappa_0$）限制了热操控的函数设计。此外，变换介质通常与背景接触，而背景经历的是不改变材料性质的平凡映射。然而，如下例所示，由于式（1）的严格约束（即对所有曲线都要求保角），共形映射通常无法确保边界条件的连续性。事实上，在大多数情况下，由于两个给定域之间共形映射的唯一性，我们甚至无法考虑界面匹配。因此，我们

必须进一步发展扩散伪共形映射，并设计热引导和热扩展函数。

热引导可以使热流弯折任意角度。其虚拟空间和物理空间分别如图1(a)和图1(c)所示。在虚拟空间中，我们沿 y_0 轴施加热偏置。入口（热源）设在底部水平边界 B_0C_0 ，出口（冷源）设在顶部边界 F_0E_0。垂直边界 $F_0A_0B_0$ 和 $E_0D_0C_0$ 均为绝热边界。在物理空间中，我们希望热流流出导引器时旋转角度 φ ，且大小保持不变。图1(a)中绘出了笛卡尔坐标的网格线。这些网格线正是热流流线（x_0 恒定的曲线）和等温线（y_0 恒定的曲线）。上方矩形（高度为 W）经过旋转和平移的复合变换后，成为图1(c)中的背景区域，且其热导率保持不变。下方矩形（高度为 L）则变换为图1(c)中的部分环形区域（导引器）。值得注意的是，在入口 B_0C_0 和 BC 之间应发生恒等变换。此外，背景区域和导引器的映射在它们的界面 AD 处应具有相同的效果（即在图1(c)中方位角等于 φ 的线上；该线映射自图1(a)中的 A_0D_0 ）。其他边界 FAB 和 EDC 在物理空间中仍为绝热边界。尽管根据黎曼映射定理 [10], ，导引器与其原像之间存在共形映射，但一般而言，该映射无法将 B_0C_0 （或 A_0D_0）变换为 BC（或 AD），更不用说实现我们所期望的界面效果了（参见补充材料注释I [26]中基于拟共形映射理论的讨论）。

为构建导引器，我们采用两步法。首先使用非共形映射 [图1(a)和图1(b)]: $x_1 = \ln x_0$ and $y_1 = \varphi y_0/L$，将虚拟空间映射到一个称为辅助空间的中间空间（位置记为 $z_1 = x_1 + iy_1$）。第二步将其映射到物理空间 [图1(b)和图1(c)] ，此映射为共形映射: $z = \exp(z_1)$，由此可得到光学中的波导 [9]。复合变换也是非共形映射，因此辅助空间（记为 $\boldsymbol{\kappa}_1$）和物理空间中的热导率（满足 $\boldsymbol{\kappa}(z) = \boldsymbol{\kappa}_1(z_1)$）应为对角各向异性，在笛卡尔坐标系中写作 $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_0 \mathrm{diag}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_0}/\frac{\partial y_1}{\partial y_0}, \frac{\partial y_1}{\partial y_0}/\frac{\partial x_1}{\partial x_0}\right)$。然而，如果 $\boldsymbol{\kappa}_0$ 本身具有对角各向异性，例如 $\boldsymbol{\kappa}_0 \sim \mathrm{diag}\left(\frac{\partial y_1}{\partial y_0}/\frac{\partial x_1}{\partial x_0}, \frac{\partial x_1}{\partial x_0}/\frac{\partial y_1}{\partial y_0}\right)$，则可以消除另外两个空间中的各向异性。此外，由于只有 $\kappa_0^{y_0y_0}$会产生热流，我们可以取 $\kappa_0 = \kappa_0^{y_0y_0}$，而不改变任何空间中的结果。这样，所有空间中的热导率均为各向同性，并且

我们有

$$\kappa(z) = \kappa_1(z_1(z)) = \kappa_0 \frac{\varphi}{L} \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

我们还绘制了图1(b)和图1(c)中的网格线，它们由图1(a)中对应的网格线映射而来。这三组网格线均相互正交，因为它们恰好分别是各自空间中的流线和等温线。直观地说，我们将第一步中的映射称为“拟保角”映射，因为它保持了某些曲线的正交性。先进行拟保角映射，再进行共形映射，所得复合映射仍是拟保角映射。图1(a)和图1(c)中的流线分布均匀，因此热流大小没有变化。此外，导引器中的热流确实如预期那样转过了 φ 角。

为验证我们的设计，我们进行了实验，参数如下： $a = 0.5$、$L = 3W = \varphi/0.65$、$\varphi = \pi/6$ 和 $\kappa_0 = 400$ W m^{-1} K^{-1} （例如，铜）。这里，单位长度为40 cm。根据公式（4）得到的热导率分布如图2(a)所示，背景的热导率与 κ_0相同。非均匀的 κ 由铜和空气孔 [组成的复合结构近似实现，如图2(b)]所示。我们绘制了六条直线，包括图2(b)中的入口（直线1）和出口（直线6）。直线4是导引器与背景的界面。直线2和直线3将导引器三等分，直线5则位于背景中部。理想情况下，图2(b)标出了各条直线（等温线）上相对于出口的温差。总热偏置为 ΔT，通过水浴加热或冷却样品来实现。图2(c)显示了测得的温度。六条直线均大致为等温线，我们绘制了与其平均值对应的水平线（不包括边缘极值）。值得注意的是，直线4至直线6之间的温差几乎相等。由此可得，样品能够使热流弯曲，同时保持其均匀性。有关实验装置和数据的更多详情见补充材料注释II [26]。

接下来，我们设计一种热膨胀器，将点源发出的热流转换为平行流。在虚拟空间 [图3(a)], 中，我们考虑下半平面。等温线为以点源为中心的同心半圆，热流大小随方位角变化。为确定温度分布，需要给出某条等温线上的温度值，例如，通过外部热源将 $\{z_0 : |z_0| = 1, y \leqslant 0\}$ 处设为290 K。除点源所在位置外， x_0轴为绝热。通过采用光学对应结构 [9], 中使用的共形映射 $z = i\frac{i+z_0}{i-z_0}$ ，即莫比乌斯变换，单位下半圆盘映射为物理空间 [图3(b)]中的单位上半圆盘。

点源现在位于 $z=i$，其功率变为 $Q=Q_0/2$，以确保 $T(z)=T_0(z_0(z))$。x轴上的直径 $\{z:\ |x|\leqslant 1, y=0\}$ 是由 $\{z_0:\ |z_0|=1, y\leqslant 0\}$ 映射而来的等温线（也是外部热源），其上的热流相互平行（沿负y轴方向）。不过，热流大小随其映射来源的方位角而变化。对于实际应用，我们希望热流均匀化，使其在连接到 $\{z:\ |x|\leqslant 1, y=0\}$ 的矩形延伸段中保持平行，同时将外部热源移至延伸段底部。可通过 $z=i^{i+z_1\ (z_0)\ i-z_1\ (z_0)}$ 实现均匀化。这里，$\mathrm{Arg}[z_1]=2\arctan\left(\frac{\mathrm{Arg}[z_0]-2\pi}{\text{辐角}[z_0]-\pi}\right)+2\pi$ 是从虚拟空间到辅助空间的拟保角映射，而 Arg 表示辐角（关于如何构造该映射，见补充材料注释III [26]）。这种方法与共形映射具有相同的外部热源和绝热边界条件。现在，扩展器中的热导率为

$$\kappa(x,y)=\kappa_1\left(1+\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2-1\right)^2}{x^4+2x^2\left(y^2+1\right)+\left(y^2-1\right)^2}}\right)^{-1}. \tag{5}$$

由于 κ 仍然是各向同性的，x轴上的热流可以保持平行。在图 3(c) 中，我们绘制了新物理空间中的热场。可以看到，流线与 x轴的交点现在均匀分布，这与图 3(b) 中的情况不同。这直观地体现了均匀化。我们进一步在图 3(d) 中展示了两种映射产生的 x轴上的热流。理论结果与 COMSOL Multiphysics (https://www.comsol.com/) 得到的有限元数值结果一致。在补充材料注释 IV [26], 中，我们验证了设计在考虑延伸时的性能。方程 (5) 也可以用转置双极坐标写成紧凑形式（见补充材料注释 V [26]）。

除了针对不同场景进行功能设计外，我们的方法还可以揭示某些先前基于变换理论其他方案的研究中，材料参数与坐标变换之间潜在的联系。例如，在此我们从几何角度阐释双层斗篷 [5–8]。基于变换的环形斗篷（壳层斗篷）依赖非同胚映射来生成其内边界，例如将一个点或一条线变换为闭曲线 [1, 2]。由于几何对称性，我们考虑环形斗篷的上半部分，即地毯斗篷。图 4 中的虚拟空间和物理空间展示了从半径为 R_2 的上半圆盘 D^+ 到上半环形区域 $\mathrm{A}^+=\{z$ 的变换：$R_1\leqslant|z|\leqslant R_2, y\geqslant 0\}$ [图 4(c)]。这里，A^+ 实际上是外层

双层斗篷的部分。为简便起见，我们取 $R_1 = 1$ （单位：米）。D^+ 或 A^+ 之外的区域为背景。斗篷意味着 A^+ 所围区域不会对背景造成扰动。我们仍采用两步伪保角映射。首先，通过 $x_1 = \frac{R_2}{a}x_0$ 和 $y_1 = \frac{R_2}{b}y_0$ 将 D^+ 压缩/扩展为半椭圆 $\mathrm{E}^+ = \{z_1 : 0 \leqslant x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 \leqslant 1, y_1 \geqslant 0\}$[图 4(b)]。此处取 $a^2 = R_2^2 + R_1^2$ 和 $b^2 = R_2^2 - R_1^2$，使半椭圆的焦点为（± 2，0）。对于图 4(a) 中的笛卡尔网格线，这种非共形映射保持角度不变。其次，将 E^+ 共形映射到 A^+:

$$\begin{cases} z = \dfrac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4}}{2}, & \text{if } x_1 < 0 \\ z = \dfrac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 4}}{2}, & \text{if } x_1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

该映射是逆茹科夫斯基变换的一个分支 [35]（详细说明见补充材料注 VI [26]）。特别是，A 的上边界$^+$（即 $\{z : |z| = R_2, y \geqslant 0\}$）最终也像背景一样经历恒等变换。如果沿 x_0 轴施加热偏置，图 4(a) 中的网格线表示水平流线和垂直等温线，只有 $\kappa_0^{x_0x_0}$ 对热流有贡献。令 $\kappa_0 = \kappa_0^{x_0x_0}$，可得 A 中的热导率$^+$ 为

$$\kappa = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\kappa_0, \tag{7}$$

这正是双层斗篷外层的隐身条件 [5]。此外，A 的下边界$^+$，包括 $\{z : |z| = R_1, y \geqslant 0\}$ 和 $\{z : R_1 \leqslant |x| \leqslant R_2, y = 0\}$（整体记为 Γ），均由虚拟空间中的一条流线映射而来。Γ 上的热流法向分量应为零，这可通过绝热条件来保证。这对应于双层斗篷内层的隐身条件，即热导率为零，且形状任意，只要覆盖 $\{z : |z| = R_1, y \geqslant 0\}$ 即可。

如果热偏置改为沿 y_0 轴，则对于图 4(a) 中的垂直流线和水平等温线，我们的映射仍保持角度不变。取 $\kappa_0 = \kappa_0^{y_0y_0}$，则有

$$\kappa = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}\kappa_0. \tag{8}$$

下边界 Γ 由一条等温线映射而来，从而得到另一种由零折射率材料构成的双层斗篷 [7]。我们称前一种斗篷为“普通双层隐身斗篷”，以作区分。“零折射率”指内层满足恒温条件，因此可用有效无限热导率来替代 [7, 8]。图 4(d) 和图 4(e)

通过数值计算验证了这两种斗篷的性能。除了隐形效应之外，我们还可以看到，这两种斗篷中的等温线和流线图案具有对偶关系，即交换流线和等温线的曲线族即可互相转换。此外，还可以将这种映射应用于整个复平面，以构建壳层斗篷。我们的方法还可用于设计其他几何形状的隐身器件，例如共焦椭圆斗篷（详细讨论请参见补充材料注释II [26]）。

总之，我们提出了扩散伪共形映射这一概念，可在变换热学中同时实现精确的热流调控并保持材料各向同性。通过保留特定曲线族（如等温线和流线）的角度，我们的方法能够避免各向异性，并使变换介质与背景之间的界面热流实现完美匹配。我们通过设计可行且稳健的热器件验证了这一理论，这些器件能够按需弯曲或平行化热流。此外，我们从伪保角映射的统一视角重新审视了基于散射抵消的双层斗篷。除了无需通过反向求解热方程即可重新获得相关参数外，我们还揭示了不同类型双层斗篷之间内在的几何关系。扩散伪共形映射这一思想还可进一步发展，用于调控瞬态热传导 [24, 38], 多重热学 [39, 40], 及其他扩散物理 [41–44]。对完美界面匹配的考量也有助于设计变换波介质，例如避免保角隐形器件所面临的阻抗失配 [45]。

我们感谢国家自然科学基金委员会（项目编号：11725521、12035004、12147169 和 12205101）以及上海市科学技术委员会（项目编号：20JC1414700）的资助。

* gldai@ntu.edu.cn

† ljxu@gscaep.ac.cn

‡ jphuang@fudan.edu.cn[1] U. Leonhardt, 《科学》312，1777（2006）。[2] J. B. Pendry、D. Schurig 和D. R. Smith, 《科学》312，1780（2006）。[3] S. Yang、J. Wang、G. Dai、F. Yang 和 J. Huang, 《物理报告》908，1（2021）。

[4] Y. Li, W. Li, T. Han, X. Zheng, J. Li, B. Li, S. Fan, and C.-W. Qiu, Nature Reviews Materials 6, 488 (2021).[5] T. Han, X. Bai, D. Gao, J. T. L. Thong, B. Li, and C.-W. Qiu, Physical Review Letters 112, 054302 (2014).[6] H. Xu, X. Shi, F. Gao, H. Sun, and B. Zhang, Physical Review Letters 112, 054301 (2014).[7] Y. Li, K.-J. Zhu, Y.-G. Peng, W. Li, T. Yang, H.-X. Xu, H. Chen, X.-F. Zhu, S. Fan, and C.-W. Qiu, Nature Materials 18, 48 (2019).[8] L. Xu, S. Yang, and J. Huang, Europhysics Letters 131, 24002 (2020).[9] L. Xu and H. Chen, Nature Photonics 9, 15 (2015).[10] E. M. Stein andR. Shakarchi, 复分析（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2003）。[11] U. Leonhardt and T. Tyc, 《科学》323, 110 (2009).[12] Y. Huang, Y. Zhang, J. Zhang, D. Liu, Q. Wang, B. Zhang, and Y. Luo, 纳米光子学9, 3243 (2020).[13] M. Kraft, Y. Luo, S. A. Maier, and J. B. Pendry, Physical Review X 5, 031029 (2015).[14] Q. Chen, S. A. R. Horsley, N. J. G. Fonseca, T. Tyc, and O. Quevedo–Teruel, Nature Communications 13, 2354 (2022).[15] X. Wang, H. Chen, H. Liu, L. Xu, C. Sheng, and S. Zhu, Physical Review Letters 119, 033902 (2017).[16] Y. Kim, S.-Y. Lee, J.-W. Ryu, I. Kim, J.-H. Han, H.-S. Tae, M. Choi, and B. Min, Nature Photonics 10, 647 (2016).[17] Y. Liu, F. Sun, Y. Yang, Z. Chen, J. Zhang, S. He, and Y. Ma, Physical Review Letters 125, 207401 (2020).[18] L. Xu, R. He, K. Yao, J. M. Chen, C. Sheng, Y. Chen, G. Cai, S. Zhu, H. Liu, and H. Chen, Physical Review Applied 11, 034072 (2019).[19] L. Lu, K. Ding, E. Galiffi, X. Ma, T. Dong, and J. B. Pendry, Nature Communications 12, 6887 (2021).[20] Y. Li, X. Shen, Z. Wu, J. Huang, Y. Chen, Y. Ni, and J. Huang, Physical Review Letters 115, 195503 (2015).[21] F. Yang, L. Xu, J. Wang, and J. Huang, Physical Review Applied 18, 034080 (2022).[22] G. Dai, J. Shang, and J. Huang, Physical Review E 97, 022129 (2018).[23] C. Fan, Y. Gao, and J. Huang, Applied Physics Letters 92, 251907 (2008).[24] S. Guenneau, C. Amra, and D. Veynante, Optics Express 20, 8207 (2012).[25] G. F. Naterer, 高级传热学，第3版。（CRC出版社，博卡拉顿，2022）。

[26] 参见补充材料，其中包含参考文献 [10, 27–37]。[27] L. V. Ahlfors，《拟共形映射讲义》，第2版。（美国数学会，普罗维登斯，2006）。[28] V. Alberge 和 A. Papadopoulos，载于《Teichmüller 理论手册》第七卷，A. Papadopoulos 编（欧洲数学会，苏黎世，2020），第393–415页。[29] J. Li 和 J. B. Pendry，《Physical Review Letters》101，203901（2008）。[30] R. Liu、C. Ji、J. J. Mock、J. Y. Chin、T. J. Cui 和 D. R. Smith，《科学》323，366（2009）。[31] B. Zhang、T. Chan 和 B.-I. Wu，《Physical Review Letters》104，233903（2010）。[32] J. Zhang、J. B. Pendry 和 Y. Luo，《先进光子学》1，014001（2019）。[33] W. Zeng、L. M. Lui、F. Luo、T. F.-C. Chan、S.-T. Yau 和 D. X. Gu，《数值数学》121，671（2012）。[34] V. A. Markel，《美国光学学会杂志A辑》33，1244（2016）。[35] J. W. Brown 和 R. V. Churchill，《复变函数及其应用》，第9版。（麦格劳-希尔教育，纽约，2014）。[36] T. Han、P. Yang、Y. Li、D. Lei、B. Li、K. Hippalgaonkar 和 C.-W. Qiu，《先进材料》30，1804019（2018）。[37] J. Qin、W. Luo、P. Yang、B. Wang、T. Deng 和 T. Han，《国际传热传质杂志》141，487（2019）。[38] L. Xu、J. Liu、P. Jin、G. Xu、J. Li、X. Ouyang、Y. Li、C.-W. Qiu 和 J. Huang，《国家科学评论》，nwac159（2022）。[39] L. Xu 和 J. Huang，Physical Review Applied 12，044048（2019）。[40] G. Dai、Y. Zhou、J. Wang、F. Yang、T. Qu 和 J. Huang，Phys.Rev. Applied 17，044006（2022）。[41] R. Schittny、M. Kadic、T. B¨uckman 和 M. Wegener，《科学》345，427（2014）。[42] Y. Ma、Y. Liu、M. Raza、Y. Wang 和 S. He，《Physical Review Letters》113，205501（2014）。[43] F. G¨om¨ory、M. Solovyov、J. ˇSouc、C. Navau、J. Prat-Camps 和 A. Sanchez，《科学》335，1466（2012）。[44] W. Jiang、Y. Ma 和 S. He，Physical Review Applied 9，054041（2018）。[45] L. Xu、H. Chen、T. Tyc、Y. Xie 和 S. A. Cummer，《物理评论B辑》93，041406(R)（2016）。

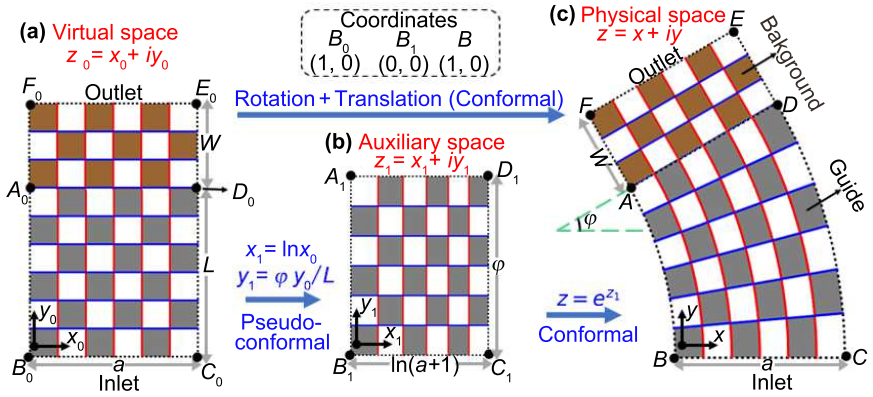


图 1. 热流导向器（灰色和白色网格）的变换，包括背景（棕色和白色网格）。(a)、(b) 和 (c) 分别表示虚拟空间、辅助空间（仅显示导引器的变换）和物理空间。

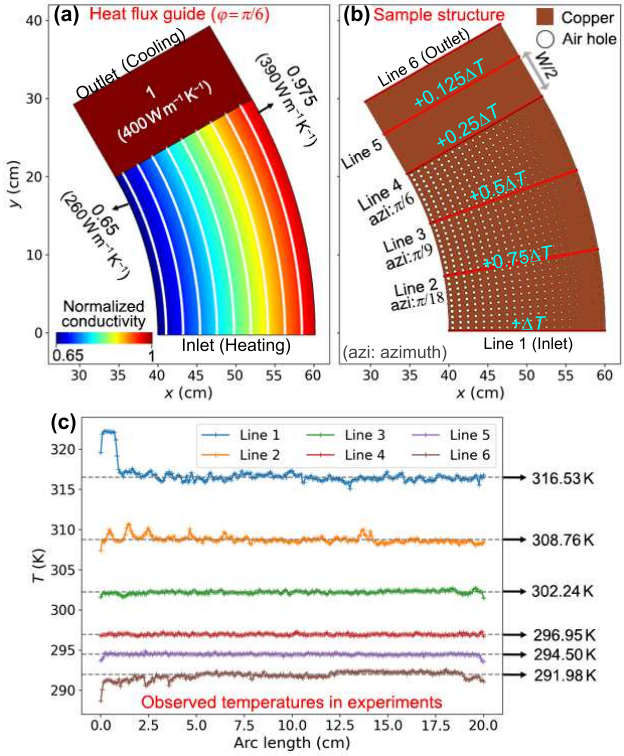


图 2. (a) 导引器的归一化热导率 (κ/κ_0) 分布。白色曲线为等值线。(b) 用于实验装置的铜制样品结构及空气孔。(c) 测量温度，显示了绘制在 (b) 中红线上的数据。弧长表示距左端点的距离。

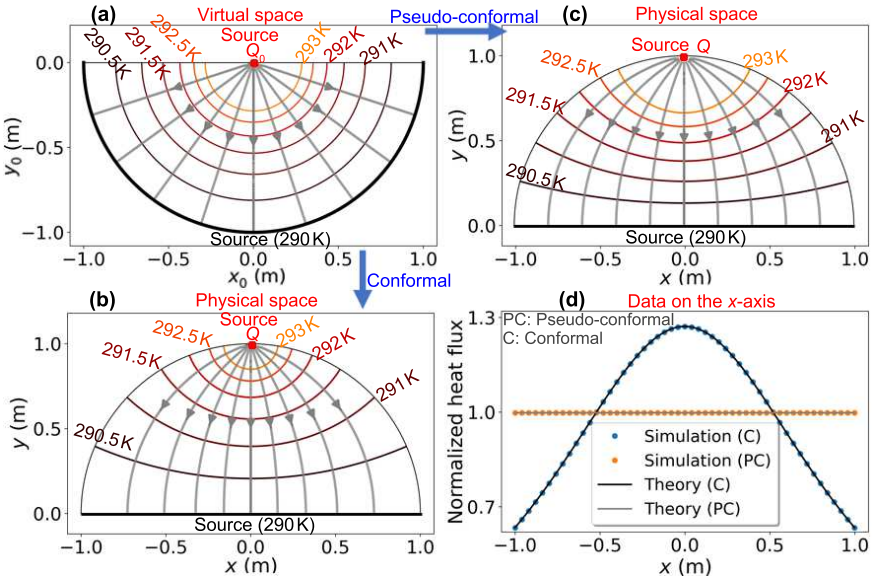


图 3. 热膨胀器。(a) 原点处有点源的虚拟空间。同心半圆为等温线。带箭头的灰色曲线表示流线，它们也是恒定方位角线，范围从 1.1π 到 1.9π （从左到右的间隔为 0.1π ）。(b) 共形映射对应的物理空间。(c) 伪保角映射对应的物理空间。(a)–(c) 中的热场根据有限元数值结果绘制。(d) 两种物理空间中 x 轴上的归一化热通量大小。实线表示理论结果，带标记的散点图表示数值结果。此处取 $\kappa_0 = 400$ W m^{-1}K^{-1} 和 $Q_0 = 3000$ W m^{-3}。

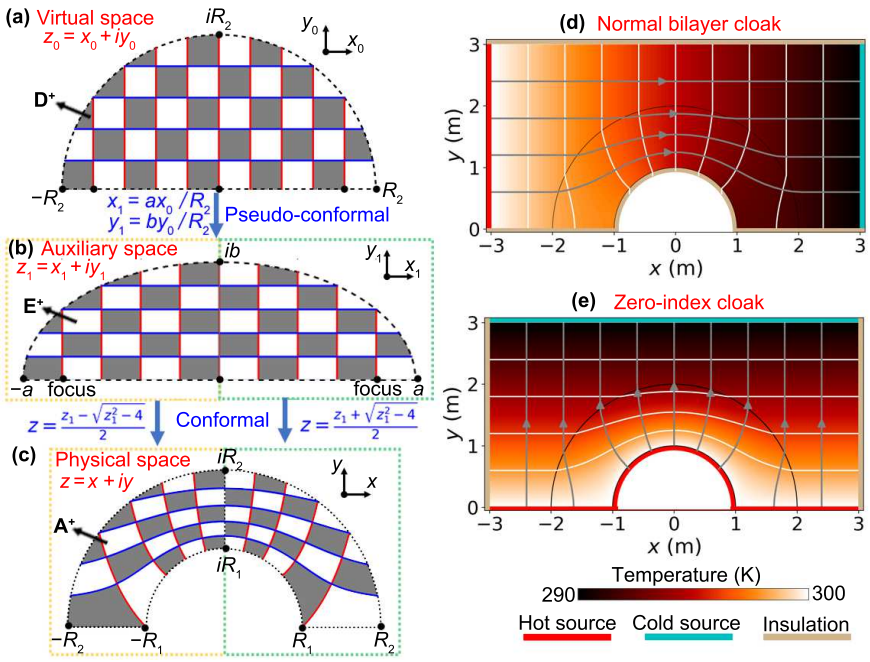


图 4. 地毯斗篷。(a)–(c) 展示了构造此类斗篷所需的几何变换。(a)、(b) 和 (c) 分别为虚拟空间、辅助空间和物理空间。(d) 为内层绝热的普通双层隐身斗篷的计算温度分布。我们分别在左右边界设置热源（300 K）和冷源（200 K），沿 x 轴产生热偏置。(e) 为内层恒温（由外部热源实现）的零折射率斗篷的计算温度分布。白色曲线表示等温线，带箭头的灰色曲线表示流线。这里取 $R_2 = 2R_1 = 2$ m 和 $\kappa_0 = 400$ W m^{-1} K^{-1}。整个仿真区域限制在一个 6 m $\times$ 3 m 的矩形内。