arXiv:2301.02973v2 [math.CO] 1 Dec 2023

Berge 团的饱和数

Sean English* J¨urgen Kritschgau† Mina Nahvi‡
Elizabeth Sprangel§

摘要

设 F 是一个图， $\mathcal{H}$ 是一个超图，二者都嵌入在同一个顶点集上。若存在一个双射 $\phi: E(F) \to E(\mathcal{H})$，使得对所有 $e \in E(F)$ 都有 $e \subseteq \phi(e)$，则称 $\mathcal{H}$ 为 Berge-F 。若 $\mathcal{H}$ 不包含任何 Berge-F，但向 $\mathcal{H}$ 中添加任意缺失的边都会生成一个 Berge-F的副本，则称 $\mathcal{H}$ 是 Berge-F-饱和的。饱和数 $\text{sat}_k(n,$ Berge-$F)$ 是在具有 n 个顶点的 Berge-F-饱和 k-均匀超图中边的最少数量。我们证明

$$\text{sat}_k(n, \text{Berge-}K_\ell) \sim \frac{\ell-2}{k-1}n,$$

对所有 $k,\ \ell \geq 3$均成立。此外，我们给出了一些充分条件，以推出对于一般图 F，$\text{sat}_k(n,$ Berge-$F) = O(n)$。

1 引言

极值图论关注在受限的图类上最大化或最小化某个参数。设 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{F}$ 为 k-均匀超图。若 $\mathcal{G}$ 不包含 $\mathcal{F}$ 的副本，但对于任意 $e \in E(\mathcal{G})$， $\mathcal{G}+e$ 都包含该副本，则称 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$-饱和的。极值图论中研究最为广泛的问题是 Tur´an 问题，该问题询问：在具有 n 个顶点且不含 $\mathcal{F}$ 的超图 $\mathcal{G}$ 中，边的最大数量是多少。这个最大值称为 $\mathcal{F}$ 的**极值数**或 **Tur´an 数**，记作 $\text{ex}_k(n, \mathcal{F})$。任何含有 $\text{ex}_k(|V(\mathcal{G})|, \mathcal{F})$ 条边的 $\mathcal{F}$-无超图 $\mathcal{G}$ 必然是 $\mathcal{F}$-饱和的，因此我们可以写成

$$\text{ex}_k(n, \mathcal{F}) = \max\{|E(\mathcal{G})| : |V(\mathcal{G})| = n, \mathcal{G} \text{ is } \mathcal{F}\text{-saturated}\}.$$

另一方面， $\mathcal{F}$ 的**饱和数**记作 $\text{sat}_k(n, \mathcal{F})$，是具有 n 个顶点的 $\mathcal{F}$-饱和图中边数的最小值，或者

$$\text{sat}_k(n, \mathcal{F}) = \min\{|E(\mathcal{G})| : |V(\mathcal{G})| = n, \mathcal{G} \text{ is } \mathcal{F}\text{-saturated}\}.$$

*北卡罗来纳大学威尔明顿分校数学与统计学系（EnglishS@uncw.edu）
†卡内基梅隆大学数学系（jkritsch@andrew.cmu.edu）。研究得到美国国家科学基金会 DMS-1839918 项目的资助。

‡数学系，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校（mnahvi2@illinois.edu）§数学系，爱荷华州立大学（sprangel@iastate.edu）

饱和概念最初由 Erd˝os、海纳尔和穆恩 [7] 针对图提出，随后由 Bollob´as [3] 推广到超图，他们证明了

$$\mathrm{sat}_k(n, \mathcal{K}_\ell^{(k)}) = \binom{n}{k} - \binom{n-\ell+k}{k}, \tag{1}$$

其中， $\mathcal{K}_\ell^{(k)}$ 表示以 ℓ 个顶点构成的完全 k均匀超图。自这些开创性成果以来，关于饱和函数的研究已取得诸多进展，并且许多推广形式也得到了研究。关于饱和数的动态综述，参见 [4]。

在这项工作中，我们关注 Berge 超图的饱和函数。Berge 超图是 Gerbner 和 Palmer [8] 引入的 Berge 路径和 Berge 圈的一种推广。给定一个图 F 和一个定义在同一顶点集上的超图 $\mathcal{H}$ ，如果存在一种方式，将 F 和 $\mathcal{H}$ 嵌入到同一顶点集上，使得存在一个双射 $\phi\colon\ E(F) \to E(\mathcal{H})$，并且对所有 $e \in E(F)$都有 $e \subseteq \phi(e)$，那么我们称 $\mathcal{H}$为**Berge-F** 。注意，许多非同构超图都可能是 Berge-F ，而一个超图也可能是许多非同构图的 Berge 副本。我们用 $\mathrm{sat}_k(n,$ Berge-$F)$ 表示顶点数为 n 的 Berge-F饱和 k均匀超图的最少边数。

Berge 超图的饱和数最早由第一作者及其他人于 [6], 中进行研究，其中给出了一些关于 Berge 路径、匹配、环和团的饱和函数的结果。自关于 Berge 超图饱和问题的开创性工作以来，该主题受到了广泛关注（关于这一主题的一些结果，见 [1, 2, 9, 11]）。在本工作之前，以下结果是关于 Berge 团饱和问题的唯一已知结果。

定理 1.1 ([6])。对于所有 $k \geq 3$ 和 $n \geq k+1$,

$$\mathrm{sat}_k(n, \textit{Berge-}K_3) = \left\lceil \frac{n-1}{k-1} \right\rceil.$$

我们的主要定理确定了对于所有固定的团大小 ℓ 和均匀度 k，Berge-K_ℓ 的渐近行为。

定理 1.2。对于 $\ell \geq 3$ 和 $k \geq 3$,

$$\mathrm{sat}_k(n, \textit{Berge-}K_\ell) \sim \frac{\ell-2}{k-1} n.$$

$\ell = 3$ 的情形已由定理 1.1 涵盖。当 $\ell \geq 4$时，定理 1.2 中的下界由定理 2.1 得出，而上界由定理 3.9 得出。

除了主要结果外，我们还研究了一般图的 Berge 饱和的线性性。对于（2-均匀）图，FK´aszonyi 和 Tuza [10] 证明了 $\mathrm{sat}_2(n, F) = O(n)$；而对于 k-均匀超图，Pikhurko [12] 证明了 $\mathrm{sat}_k(n, \mathcal{F}) = O(n^{k-1})$，并且这一结果是最优的，例如公式 (1) 中陈述的结果就说明了这一点 [3]。在 [6]中，有人猜想 $\mathrm{sat}_k(n,$ Berge-$F) = O(n)$，这表明 Berge 超图的饱和函数应比 k-均匀超图的饱和函数更接近图饱和的增长方式。该猜想已在均匀度 $3 \leq k \leq 5$ 的情形下得到验证 [5], ，但一般情形仍未解决。

我们证明了两个结果，表明许多图的 Berge 饱和数至多呈线性增长。第一个定理讨论具有较大最小度的图。

定理 1.3。 如果 $\delta(F) > {}^{|V}\!\!\!

和 1.4。最后，在第5节中，我们简要讨论确定 Berge-K_4 的饱和数精确值这一开放问题。

2 Berge-K_ℓ 饱和的下界

这里给出 $\mathrm{sat}_k(n,$ Berge-$K_\ell)$ 的渐近下界。幸运的是，同一论证适用于所有 $k \geq 2$ 和 $\ell \geq 3$。

定理 2.1. 对于任意 $k \geq 2$ 和 $\ell \geq 3$,

$$\mathrm{sat}_k(n, Berge\text{-}K_\ell) \geq (1+o(1))\frac{\ell-2}{k-1}n.$$

证明。设 $\mathcal{H}$ 是一个 k-均匀的 Berge-K_ℓ-饱和超图。将顶点集$V(\mathcal{H}) = X \cup A \cup B$划分为，其中

$$X = \{v \in V(\mathcal{H}) \mid d(v) \geq \log^2 n\},$$

$A \subseteq V(\mathcal{H}) \setminus X$，使得 $v \in A$ 当且仅当 v 包含在至少 $\ell-2$ 条与 X相交的边中，并且 $B = V(\mathcal{H}) \setminus (X \cup A)$。注意，若 $|X| > n/\log n$，则通过计算度数，$|E(\mathcal{H})| > \frac{|X|}{\log_k^{\,2} n} = \omega(n) \geq (1+o(1))\frac{\ell-2}{k-1}n$，因此除非 $|X| \leq n/\log n = o(n)$，否则结论成立。

我们也将证明 $|B| = o(n)$。事实上，首先注意到，每个非边 $f \subseteq B$都包含一个顶点对 $u, v \in f$该顶点对由 $\ell-2$ 条长度为2的Berge路径连接，因为将 f添加到$\mathcal{H}$ 会生成一个 Berge-K_ℓ。由于 $u \notin A$，这些 Berge 路径中至少有一条必须包含 $A \cup B$中的一个铰接顶点。每个顶点 $a \in A \cup B$ 至多可以充当 $\binom{d(a)}{2}(k-1)^2\binom{|B|}{k-2}$ 个大小为 k 的非边 $f \subseteq B$ 的这一铰接顶点，因为我们可以在 $\binom{d(a)}{2}$ 中选择长度为2的Berge路径中的两条超边，然后分别以至多 $(k-1)$ 种方式选择顶点 u 和 v，最后再以 $\binom{|B|}{k-2}$ 种方式选择 f中的其余 $k-2$ 个顶点。因此，如果 p是 k-集 $f \subseteq B$中不是 $\mathcal{H}$的边的总数，那么

$$p \leq \sum_{a \in A \cup B}\binom{d(a)}{2}(k-1)^2\binom{|B|}{k-2} \leq k^2\binom{|B|}{k-2}\sum_{a \in A \cup B}\binom{\log^2 n}{2} \leq k^2\binom{|B|}{k-2}\frac{n\log^4 n}{2}. \quad (2)$$

另一方面，由于每个顶点 $b \in B$ 的度都小于 $\log^2 n$，根据度数计数，B 至多包含 $\frac{|B|}{\log_k^{\,2} n}$ 条边，因此

$$\binom{|B|}{k} - \frac{|B|\log^2 n}{k} \leq p. \quad (3)$$

如果 $|B| \geq n/\log n$，则（3）的左侧大于 $\frac{1}{2}\binom{|B|}{k}$。将其与（2）的右侧进行比较并稍作整理，可得

$$\frac{(|B|-k+2)(|B|-k+1)}{k^3(k-1)} \leq n\log^4 n,$$

这与 $|B| \geq n/\log n$ 矛盾。因此，正如所声称的，$|B| = o(n)$。

因此，由于 $|X|$，$|B| = o(n)$，我们必有 $|A| = (1 + o(1))n$。现在，让我们计算 $\mathcal{H}$ 中至少包含一个 A 中的顶点且至少包含一个 X 中的顶点的边数。每条这样的边至多包含 A 中的 $k-1$ 个顶点，而根据 A 的定义，A 中的每个顶点至少属于 $\ell-2$ 条这样的边，因此，至少包含一个来自 X 的顶点且至少包含一个来自 A 的顶点的边数至少为

$$\frac{\ell-2}{k-1}|A| \leq |E(\mathcal{H})|.$$

由于 $|A| = (1 + o(1))n$，定理成立。 □

3 上界

本节中，我们为所有均匀度 $k \geq 3$ 和所有团大小 $\ell \geq 4$ 给出 Berge-K_ℓ-饱和构造。本文分为三个小节。在第3.1节中，我们陈述并证明一些简单的观察，这些观察将在后续各节中发挥作用。在第3.2节中，我们构造特定的小型 k-均匀 Berge-K_ℓ-饱和超图，它们还具有以下性质：每个顶点对都是 ℓ-好的，并且每个含有 $\ell-1$ 个顶点的集合都包含一个 Berge 团。由于 $\ell = 4$ 时存在一些技术限制，我们为 $\ell = 4$ 提供一种构造，为 $\ell \geq 5$ 提供另一种构造。在第 3.3 节中，对于所有足够大的 n，我们利用第 3.2 节构造的小型超图，找到一个定义在 n 个顶点上且边数较少的 Berge-K_ℓ 饱和超图。

3.1 上界工具

这里给出两个简单的观察，它们将有助于证明我们的构造是 Berge-K_ℓ-饱和的。

观察 3.1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个超图，且 u、$v \in V(\mathcal{H})$ 满足 $v \preceq u$。设 $e \in 2^{V(\mathcal{H})}$ 满足 $v \in e$。

$$e' = \begin{cases} e & \text{if } u \in e, \\ (e \setminus \{v\}) \cup \{u\} & \text{if } u \notin e. \end{cases}$$

对于任意图 F，若 $\mathcal{H} + e$ 包含一个新的 ***Berge-F***，其中 u 不是核心顶点，则 $\mathcal{H} + e'$ 包含一个新的 ***Berge-F***。此外，在 $\mathcal{H} + e$ 中存在一个新的 ***Berge-F***，且在 $\mathcal{H} + e'$ 中存在一个新的 ***Berge-F***，使得这两个 ***Berge-F*** 的核心顶点相同，但可能以 u 作为核心顶点，而非 v。

证明。假设 $H + e$ 包含一个 Berge-F，记为 $\mathcal{F}$，它使用超边 e，且其中 u 不是核心顶点。若 v 在 $\mathcal{F}$ 中不是核心顶点，则 $(\mathcal{F} - e) + e'$ 是一个 Berge-F，其见证与 $\mathcal{F}$ 相同。若 v 是核心顶点，则由于每条包含 v 的超边也包含 u，$(\mathcal{F} - e) + e'$ 是一个 Berge-F，其核心顶点与 $\mathcal{F}$ 相同，只是以 u 替代了 v。

□

观察3.2。设 $\mathcal{H}$ 为一个超图，且 u、$v \in V(H)$ 满足 $v \preceq u$。如果 $\mathcal{H}$包含一个 ***Berge-F***，其核心顶点包括 v 而不包括 u，那么 $\mathcal{H}$ 也包含一个具有相同核心顶点的 ***Berge-F***，只是用 u替代 v。

证明。这直接由以下事实得出：每条包含 v 的超边也都包含 u。

□

3.2 关于顶点对饱和的小超图

我们的第一个构造针对一个较小的超图，该超图是 Berge-K_4-饱和的，并具有一些良好的附加性质。

构造 3.3。 固定 $k \geq 3$。令 $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_{k-3}\}$ (当 $k = 3$ 时我们允许 $D = \emptyset$) 和 $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ 为互不相交的顶点集。令 $\mathcal{C}(k, 4)$ 为具有 $V(\mathcal{C}(k,4)) = C \cup D$ 的 k-均匀超图，并且

$$E(\mathcal{C}(k, 4)) = \{\{c_i, c_{i+1}, c_{i+2}\} \cup D \mid i \in [5]\},$$

其中指标 i 以5为模。

值得注意的是， $\mathcal{C}$(3,4) 是一个含 5 个顶点的 3-均匀紧环 。现在我们证明， $\mathcal{C}$(k,4) 具有如下性质：每个顶点对都是 4-良好的，且任意三个顶点构成一个 Berge 团。很容易看出， $\mathcal{C}$(k,4) 是 Berge-K_4-饱和的，但我们直到第 3.3 节才明确证明这一点。

引理3.4。 令 $k \geq 3$ ，且令 $\mathcal{C} := \mathcal{C}(k, 4)$ 。则

1. $V(\mathcal{C})$ 中的每个顶点对都是4-良好的，并且
2. $V(\mathcal{C})$ 中的每组三个顶点都是某个 *Berge*-K_3 的核心顶点。

证明。 首先证明（1）。令 $xy \subseteq V(\mathcal{C})$ 。首先，考虑 $xy = c_i c_j$ 对某个 $i, j \in [5]$ 成立的情形。不妨设 $j \in \{i+1, i+2\}$（模 5）。在这两种情形下， $\mathcal{C} + c_i c_j$ 都包含一个核心顶点为 c_{i-1}、 c_i、 c_{i+1} 和 c_{i+2} 的 Berge-K_4，其 Berge 边映射为

$$\begin{aligned}
c_{i-1}c_i &\mapsto c_{i-2}c_{i-1}c_i \cup D,\\
c_{i-1}c_{i+1} &\mapsto c_{i-1}c_i c_{i+1} \cup D,\\
c_{i-1}c_{i+2} &\mapsto c_{i+2}c_{i+3}c_{i-1} \cup D\\
c_{i+1}c_{i+2} &\mapsto c_{i+1}c_{i+2}c_{i-2} \cup D,\\
c_i c_{i+1} &\mapsto \begin{cases} c_i c_{i+1} & \text{if } j = i+1,\\ c_i c_{i+1} c_{i+2} \cup D & \text{if } j = i+2, \end{cases}\\
c_i c_{i+2} &\mapsto \begin{cases} c_i c_{i+1} c_{i+2} \cup D & \text{if } j = i+1,\\ c_i c_{i+2} & \text{if } j = i+2. \end{cases}
\end{aligned}$$

现在，如果 x 和 y 中恰有一个属于 D，不妨设为 $x \in D$、 $y = c_i$，则注意到 $c_{i+1} \preceq x$；因此根据观察 3.1，由于 $\mathcal{C} + c_i c_{i+1}$ 包含一个核心顶点为 c_{i-1}、 c_i、 c_{i+1} 和 c_{i+2} 的 Berge-K_4，$H + xy$ 也包含一个 Berge-K_4 。

最后，若 $x, y \in D$，则注意到 $c_1 \preceq x$ 和 $c_2 \preceq y$，因此两次应用观察 3.1。我们首先注意到，由于 $\mathcal{C} + c_1 c_2$ 包含一个 Berge-K_4 ，其核心顶点为 c_5、 c_1、 c_2 和c_3，而 $\mathcal{C} + c_1 y$ 包含一个 Berge-K_4，其核心顶点为 c_5、 c_1、 y 和 c_3，于是 $\mathcal{C} + xy$ 包含一个 Berge-K_4。

现在我们来关注 (2)。令 $xyz \subseteq V(\mathcal{C})$。首先考虑 $xyz \subseteq C$的情形。根据对称性，不妨假设 $xyz = c_1c_2c_3$ 或 $xyz = c_1c_2c_4$。若 $xyz = c_1c_2c_3$，则

$$\begin{aligned} c_1c_2 &\mapsto c_5c_1c_2, \\ c_1c_3 &\mapsto c_1c_2c_3, \\ c_2c_3 &\mapsto c_2c_3c_4, \end{aligned}$$

是一个贝尔 格边映射，对于具有核心顶点 x、y、z 的贝尔热-K_3。如果 $xyz = c_1c_2c_4$，则 n

$$\begin{aligned} c_1c_2 &\mapsto c_5c_1c_2, \\ c_1c_4 &\mapsto c_4c_5c_1, \\ c_2c_4 &\mapsto c_2c_3c_4, \end{aligned}$$

再次得到一个贝尔热-K_3。

如果 $xyz \not\subseteq C$，由于对于所有 $i \in [5]$、$j \in [k-3]$ 都有 $c_i \preceq d_j$，根据重复应用观察 3.2，从包含于 C 中的任意三元组开始（该三元组还包含 xyz 中属于 C 的任意元素），我们可以用属于 D 的 xyz 中的顶点替换 C 中的顶点，每一步都保持该三元组是某个贝尔热-K_3 的核心这一性质，最终得到一个具有核心顶点 xyz 的贝尔热-K_3。 □

下面的构造和引理类似于构造 3.3 和引理3.4，但针对 $\ell \geq 5$ 的情形。

构造 3.5。固定 $k \geq 3$、$\ell \geq 5$。令 $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_{k-3}\}$ 和 $C = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\ell\}$。从顶点集为 C 的（2- 一致）图 $K := K_\ell - c_1c_2$ 的一个副本开始，并按以下方式将 K 的边扩展为 k- 一致超边。令 $e \in E(K)$。

1. 若 $c_1 \in e$、$c_2 \notin e$，则将 e 扩展为 $e \cup \{c_2\} \cup D$。*2.* 若 $e = \{c_2, c_3\}$，则将 e 扩展为 $e \cup \{c_4\} \cup D$。*3.* 若 $e = \{c_2, c_4\}$，则将 e 扩展为 $e \cup \{c_5\} \cup D$。*4.* 若 $c_1 \notin e$、$c_2 \in e$，且 c_3、$c_4 \notin e$，则将 e 扩展为 $e \cup \{c_3\} \cup D$。*5.* 若 c_1、$c_2 \notin e$，则将 e 扩展为 $e \cup \{c_1\} \cup D$。

令 $\mathcal{C}(k, \ell)$ 为所得的 k-均匀超图。

引理3.6。令 $k \geq 3$、$\ell \geq 5$，并令 $\mathcal{C} := \mathcal{C}(k, \ell)$。则

1. $V(\mathcal{C})$ 中的每个顶点对都是 ℓ-良好的；*2.* $V(\mathcal{C})$ 中的每个 $\ell - 1$ 个顶点组成的集合，都是一个 *Berge*-$K_{\ell-1}$ 的核心顶点。

证明。令 K、C 和 D 如构造 3.5 中所定义。注意，将 $E(K)$ 中的边扩展为 $E(\mathcal{C})$ 中的边，给出了一个双射 $\phi: E(\mathcal{C}) \to E(K)$。为了证明 $\mathcal{C}$ 中的每个顶点对 xy 都是 ℓ-良好的，我们证明存在对 ϕ 的一种修改，它以边 xy 为见证，构成一个 Berge-K_ℓ。

情况 1： $xy \subseteq C$。令 K^* 为 K_ℓ 的一个副本，其顶点集为 C。在此情形下，我们将证明 K^* 是 $\mathcal{C}+xy$ 中一个 Berge-K_ℓ 的见证。注意，若 $xy = c_1c_2$，则再加上 $xy \mapsto c_1c_2$，ϕ 就构成一个 Berge-K_ℓ。

情形 1.1： $c_1 \in xy$、$c_2 \notin xy$，记作 $x = c_1$。于是根据构造 3.5 (1)，$\phi^{-1}(xy) = c_1yc_2 \cup D$，因此令 ϕ_{xy}：$E(\mathcal{C}) \cup \{xy\} \to E(K^*)$ 定义如下

$$\phi_{xy}(e) = \begin{cases} xy = c_1y & \text{if } e = xy, \\ c_1c_2 & \text{if } e = c_1c_2y \cup D, . \\ \phi(e) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

情形 1.2： $c_2c_3 = xy$，记作 $c_2 = x$ 和 $c_3 = y$。我们有 $\phi^{-1}(xy) = c_2c_3c_4 \cup D$，而 $\phi^{-1}(c_3c_4) = c_1c_3c_4 \cup D$，最后 $\phi^{-1}(c_1c_3) = c_1c_2c_3 \cup D$。因此，令 ϕ_{xy}：$E(\mathcal{C}) \cup \{xy\} \to E(K^*)$ 定义如下

$$\phi_{xy}(e) = \begin{cases} xy = c_2c_3 & \text{if } e = xy, \\ c_3c_4 & \text{if } e = c_2c_3c_4 \cup D, \\ c_1c_3 & \text{if } e = c_1c_3c_4 \cup D, \\ c_1c_2 & \text{if } e = c_1c_2c_3 \cup D, \\ \phi(e) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

情形 1.3： $c_2c_4 = xy$，设 $c_2 = x$ 和 $c_4 = y$。我们有 $\phi^{-1}(xy) = c_2c_4c_5 \cup D$，而 $\phi^{-1}(c_4c_5) = c_1c_4c_5 \cup D$，最后 $\phi^{-1}(c_1c_4) = c_1c_2c_4 \cup D$。因此，我们令 ϕ_{xy}：$E(\mathcal{C}) \cup \{xy\} \to E(K^*)$ 定义如下

$$\phi_{xy}(e) = \begin{cases} xy = c_2c_4 & \text{if } e = xy, \\ c_4c_5 & \text{if } e = c_2c_4c_5 \cup D, \\ c_1c_4 & \text{if } e = c_1c_4c_5 \cup D, \\ c_1c_2 & \text{if } e = c_1c_2c_4 \cup D, \\ \phi(e) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

情形 1.4： $c_2 \in xy$, $c_1, c_3, c_4 \notin xy$，设 $c_2 = x$。注意，$\phi^{-1}(xy) = c_2yc_3 \cup D$，而 $\phi^{-1}(c_3y) = c_3yc_1 \cup D$，且 $\phi^{-1}(c_1y) = c_1yc_2 \cup D$。由此得到 ϕ_{xy}：$E(\mathcal{C}) \cup \{xy\} \to E(K^*)$ 定义如下

$$\phi_{xy}(e) = \begin{cases} xy = c_2y & \text{if } e = xy \\ c_3y & \text{if } e = c_2yc_3 \cup D \\ c_1y & \text{if } e = c_3yc_1 \cup D\ . \\ c_1c_2 & \text{if } e = c_1yc_2 \cup D \\ \phi(e) & \text{otherwise} \end{cases}$$

情形 1.5： $c_1c_2 \cap xy = \emptyset$。于是 $\phi^{-1}(xy) = c_1xy \cup D$，且 $\phi^{-1}(c_1x) = c_1xc_2 \cup D$。令 ϕ_{xy}： $E(\mathcal{C}) \cup \{xy\} \to E(K^*)$ 定义如下

$$\phi_{xy}(e) = \begin{cases} xy & \text{if } e = xy, \\ c_1x & \text{if } e = c_1xy \cup D, \\ c_1c_2 & \text{if } e = c_1xc_2 \cup D, \\ \phi(e) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在所有子情形中， ϕ_{xy} 给出一个 Berge-K_ℓ。

情形 2： $|xy \cap C| = 1$。不失一般性，假设 $x \in C$ 和 $y \in D$。令$c \in C \setminus \{x\}$ 为任意一个顶点，并注意到 $c \preceq y$。根据情况 1， $\mathcal{C} + xc$ 包含一个 Berge-K_ℓ，其所有核心顶点都在 C 中（特别地， y 不是核心顶点）。于是根据观察 3.1， $\mathcal{C} + xy$ 包含一个 Berge-K_ℓ。

情况 3： $xy \subseteq D$。注意到 $c_1 \preceq x$ 和 $c_2 \preceq y$。根据情况 1， $\mathcal{C} + c_1c_2$ 包含一个 Berge-K_ℓ，其所有核心顶点都在 C中。于是根据观察 3.1， $\mathcal{C} + xc_2$ 包含一个 Berge-K_ℓ，其所有核心顶点都在 $C \cup \{x\}$中，因此再次根据观察 3.1， $\mathcal{C} + xy$ 包含一个 Berge-K_ℓ。

现在证明引理3.6的第2条。首先，令 $X \subseteq C$ 为一个含有 $\ell - 1$个顶点的集合，并令 $c \in C \setminus X$ 和 $x \in X$。根据引理3.6第1条的情况 1， $\mathcal{C} + cx$包含一个Berge-K_ℓ，且其所有核心顶点都在 C中。特别地， X 中的每个顶点都是核心顶点，并且$cx \not\subseteq X$，因此 $\mathcal{C}$ 必然包含一个在 X上的Berge-$K_{\ell-1}$。

现在假设 $X \subseteq V(\mathcal{C})$、 $|X| = \ell - 1$，但 $X \not\subseteq C$。回顾 $c_i \preceq d_j$ 对所有 $i \in [\ell]$、 $j \in [k-3]$ 均成立。因此，从任意一个满足 $X \cap C \subseteq X' \subseteq C$的 $\ell - 1$ 个顶点的集合 X' 开始，通过反复应用观察3.2，我们可以逐个地用 $X \cap D$ 中的顶点替换 $X' \setminus X$ 中的顶点。在每一步中，我们都保持当前$\ell - 1$ 个顶点的集合是某个Berge-$K_{\ell-1}$的核心这一性质，最终得到一个在 X上的Berge-$K_{\ell-1}$。 □

3.3 大规模情形下的饱和构造 n

这里给出最终的构造，它将给出定理 1.2 中所需的上界。

构造 3.7. 固定 $k \geq 3$ 和 $\ell \geq 4$，并令 $n \geq 10k^2\ell$。令 $\mathcal{C} := \mathcal{C}(k, \ell)$，并令 $c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}$ 为 $\mathcal{C}$ 中互不相同的顶点。令 $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足

$$a(k-1) + b(k-2) = n - |V(\mathcal{C})| - 1 \tag{4}$$

以及 $1 \leq b \leq k-1$。接着我们构造超图 $\mathcal{S} := \mathcal{S}(n, k, \ell)$，其顶点集为

$$V(\mathcal{S}) = V(\mathcal{C}) \cup \bigcup_{i=1}^{a} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{b} B_i \cup \{v\}$$

其中，对所有 $i \in [a]$， $|A_i| = k-1$；对所有 $i \in [b]$， $|B_i| = k-2$，注意到 $|V(\mathcal{S})| = |V(\mathcal{C})| + a(k-1) + b(k-2) + 1 = n$。令

$$E(\mathcal{S}) = E(\mathcal{C}) \cup \{A_i \cup \{c_j\} \mid i \in [a], j \in [\ell-2]\} \cup \{B_i \cup \{v, c_j\} \mid i \in [b], j \in [\ell-2]\}. \tag{5}$$

关于 $\mathcal{S}(n, k, 4)$ 的示意图请见图*1*。

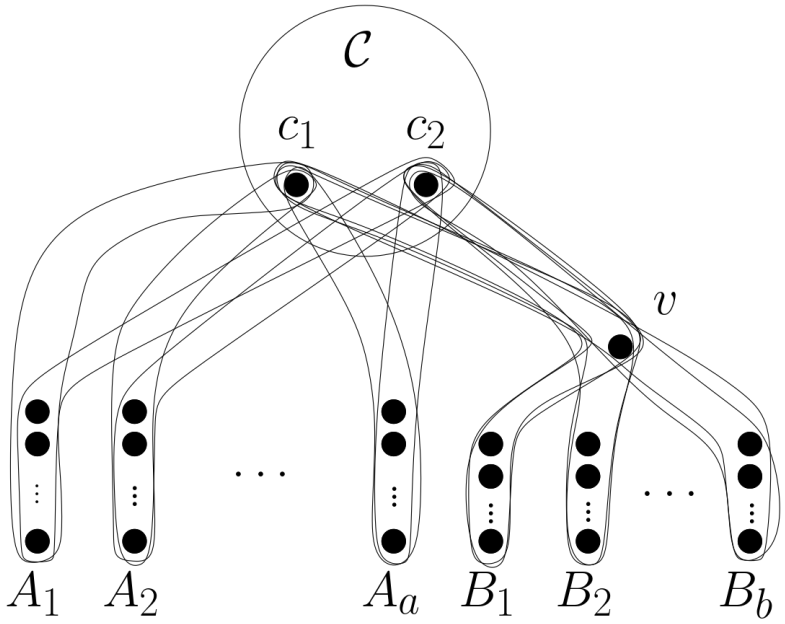


图1：构造 $\mathcal{S}(n,\ k,\ 4)$

界 $n \geq 10k^2\ell$ 并非最优，只是一个易于表述且足够大的界，可以保证构造 3.7 中存在一组整数 a, b 。

现在我们证明 $\mathcal{S}(n,\ k,\ \ell)$ 是 Berge-K_ℓ-饱和的，这将给出定理 1.2 所需的上界。

引理 3.8. 对于所有 $k \geq 3$、 $\ell \geq 4$ 和 $n \geq 10k^2\ell$，超图 $\mathcal{S} := \mathcal{S}(n, k, \ell)$ 都是 *Berge-*K_ℓ-饱和的。

证明。 首先，我们证明 $\mathcal{S}$ 不含 Berge-K_ℓ。事实上，度至少为 $\ell - 1$ 的顶点仅位于 $V(\mathcal{C}) \cup \{v\}$ 中。顶点 v 只有 $\ell - 2$ 个度至少为 $\ell - 1$ 的邻点，因此 v 不可能是任何 Berge-K_ℓ 的核心顶点，所以任何 Berge-K_ℓ 都必须包含在 $V(\mathcal{C})$ 中；但 $\mathcal{S}$ 中仅有 $\binom{\ell}{2} - 1$ 条边在 $V(\mathcal{C})$ 中至少有两个顶点，因此 $\mathcal{S}$中不存在 Berge-K_ℓ。

现在，令 $e \in E(\mathcal{S})$。由引理 3.4 (1) 和引理 3.6 (1)， $V(\mathcal{C})$中的每个顶点对都是 ℓ-好，因此我们可以假设 $|e \cap V(\mathcal{C})| \leq 1$。

情况 1： 假设存在顶点对 $X,\ Y \in \{A_i \mid i \in [a]\} \cup \{B_i \mid i \in [b]\}$，满足 $X \neq Y$，且 $X \cap e \neq \emptyset$和 $Y \cap e \neq \emptyset$。为简便起见，设 $X,\ Y \in \{A_i \mid i \in [a]\}$，因为当 X 或 Y中有一个或多个属于 $\{B_i \mid i \in [b]\}$ 时，情况几乎完全相同。令 $x \in X \cap e$ 和$y \in Y \cap e$。我们声称存在一个核顶点为 $\{x, y, c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}$的 Berge-$K_\ell$。事实上，由引理 3.4 (2) 和引理 3.6 (2)，存在一个核顶点为 $\{c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}$的 Berge-$K_{\ell-2}$，且仅使用来自 $\mathcal{C}$ 的边。于是，边 $X \cup \{c_i\}$ 和 $Y \cup \{c_i\}$ 可分别对每个 $i \in [\ell - 2]$ 起到 xc_i 和yc_i 的作用（当 $X \in \{B_i \mid i \in [b]\}$时，我们使用边$X \cup \{v, c_i\}$），最后， e 可起到 xy的作用，从而完成 Berge-K_ℓ。

情形 2： 假设 $e \cap (V(\mathcal{C}) \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}) \neq \emptyset$。令 $c \in e \cap (V(\mathcal{C}) \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\})$，并令 $x \in e \setminus \{c\}$。注意，由于 $|e \cap V(\mathcal{C})| \leq 1$，所以 $x \notin V(\mathcal{C})$。我们将假设 $x \in A_1$，因为

如果 $x \in A_i$ 对于 $i \in [a] \setminus \{1\}$、$x \in B_i$ 对于 $i \in [b]$ 或 $x = v$，则情形几乎完全相同。我们声称存在一个核心顶点位于 $\{x, c, c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}$ 中的 Berge-K_ℓ。事实上，根据引理 3.4 (2) 和引理 3.6 (2)，存在一个核心顶点位于 $\{c, c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}$ 中且仅使用来自 $\mathcal{C}$ 的边的 Berge-$K_{\ell-1}$。于是，超边 $A_1 \cup \{c_i\}$ 可在 $i \in [\ell-2]$ 中充当 xc_i 的角色，而超边 e 则充当 xc 的角色，从而完成 Berge-K_ℓ。

情形 3： 假设 $v \in e$，且情况 1 和情况 2 均不成立。我们断言存在一个集合 $X \in \{A_i \mid i \in [a]\}$，使得 $e \cap X \neq \emptyset$。事实上，反设不存在集合 $X \in \{A_i \mid i \in [a]\}$ 使得 $e \cap X \neq \emptyset$。回顾一下，e至多能包含 $\mathcal{C}$ 中的一个顶点。由于情况 2 不成立，$e \cap \mathcal{C}$ 中的任何顶点都必须是某个 $i \in [\ell-2]$ 的 c_i。由于情况 1 不成立，e 不可能包含来自两个 B_j 的顶点，因此 e 中其余所有顶点都必须来自同一个 B_j，$j \in [b]$；然而此时 $e = \{c_i, v\} \cup B_j \in E(H)$，矛盾。不妨设 $A_1 \cap e \neq \emptyset$，记为 $a \in A_1 \cap e$。接着，与情况 1 类似，我们可以找到一个 Berge-K_ℓ，其核心顶点位于 $\{a, v, c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}$ 中。事实上，根据引理 3.4 (2) 和引理 3.6 (2)，存在一个 Berge-$K_{\ell-2}$，其核心顶点为 $\{c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}$，且只使用来自 $\mathcal{C}$ 的边。于是，对于每个 $i \in [\ell-2]$，边 $A_1 \cup \{c_i\}$ 和 $B_1 \cup \{v, c_i\}$ 分别可以充当 ac_i 和 vc_i。最后，e 可以充当 av，从而完成 Berge-K_ℓ。

情形4： 情况 1、2 或 3 均不成立。我们声称这种情况不会发生。事实上，$v \notin e$ 因为我们不属于情况 3。此外，$\mathcal{C}$ 中至多有一个顶点属于 e；如果有，则该顶点必来自 $\{c_1, c_2, \ldots, c_{\ell-2}\}$，因为我们不属于情况 2。由于我们不属于情况 1，e 至多与一个集合 $X \in \{A_i \mid i \in [a]\} \cup \{B_i \mid i \in [b]\}$相交。因此，$e$ 拥有 k 个顶点的唯一可能方式是：对于某个 $X \in \{A_i \mid i \in [a]\} \cup \{B_i \mid i \in [b]\}$和 $j \in [\ell-2]$，$e = X \cup \{c_j\}$。此外，X 必定是某个 A_i，因为 B_i只有 $k-2$个顶点；但是，对于所有 $i \in [a]$，都有 $A_i \cup \{c_j\} \in E(\mathcal{S})$，$j \in [\ell-2]$，这与假设$e \in E(\mathcal{S})$矛盾。 □

下面的定理概述了第 3 节的结果。我们的结果可能会推出比下文给出的界略强的界，但我们没有试图争取低阶项，因此这个界足以满足我们的需求。

定理 3.9. 固定 $k \geq 3, \ell \geq 4$，并令 $n \geq 10k^2\ell$。则

$$\mathrm{sat}(n, \textit{Berge-}K_\ell) \leq \frac{\ell-2}{k-1}n + \binom{\ell}{2} - 1 \tag{6}$$

证明. 由引理 3.8，$\mathcal{S} := \mathcal{S}(n, k, \ell)$ 是 Berge-K_ℓ-饱和的。令 $\mathcal{C} := \mathcal{C}(k, \ell)$。由 (5) 可知

$$|E(\mathcal{S})| = |E(\mathcal{C})| + (a+b)(\ell-2), \tag{7}$$

其中 a 和 b 是 (4) 中定义的整数。回顾一下，$|E(\mathcal{C})| = \binom{\ell}{2} - 1$。由 (4) 可得

$$a + b = \frac{n - |V(\mathcal{C})| - 1 + b}{k-1} \leq \frac{n}{k-1}, \tag{8}$$

其中，不等式由以下事实以及这一事实推出：$b \leq k-1$

$$|V(\mathcal{C})| = \begin{cases} k+2 & \text{if } \ell = 4, \\ k+\ell-3 & \text{if } \ell \geq 5. \end{cases}$$

结合 (7) 和 (8) 得到 (6)。 □

4 关于 Berge-F 饱和线性性的结果

本节将证明定理 1.3 和 1.4。我们先介绍一种构造，它将有助于证明定理 1.3。

构造 4.1. 固定 $k \geq 3$，令 F 为一个具有 $|V(F)| \geq \alpha(F) + 2$ 的（2-均匀）图，并令 $n \geq 10k|V(F)|^3$。为方便起见，设 $\nu := |V(F)| - \alpha(F) - 1$。假设 $k > \nu$，并令 a、$t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足

$$a(k - \nu + 1) + t = n - \nu \tag{9}$$

且 $0 \leq t < k - \nu + 1$。接着我们构造超图 $\mathcal{H} := \mathcal{H}(n, k, F)$，其顶点集为

$$V(\mathcal{H}) = V_1 \cup \bigcup_{i=1}^{a} A_i \cup T,$$

其中，对所有 $i \in [a]$，$|V_1| = \nu$、$|A_i| = k - \nu + 1$，且 $|T| = t$。令 $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\}$。令

$$E(\mathcal{H}) = \{(V_1 \cup A_i) \setminus \{v_j\} \mid i \in [a], j \in [\nu]\}.$$

我们并不总是认为 $\mathcal{H}(n, k, F)$ 不含 Berge-F，但以下引理表明，若它不含 Berge-F，则 Berge-F 的饱和数呈线性增长。

引理 4.2。 设 F 是一个具有 $|V(F)| \geq \alpha(F) + 2$, $k > |V(F)| - \alpha(F) - 1 =: \nu$ 和 $n \geq 10k|V(F)|^3$ 的图。若 $\mathcal{H} := \mathcal{H}(n, k, F)$ 不含 *Berge-F*，则

$$\mathrm{sat}_k(n, \mathit{Berge}\text{-}F) = O(n).$$

证明。设 $\alpha := \alpha(F)$ 且 $A := \bigcup_{i=1}^{a} A_i$。

首先，我们声称，对于任意集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha+1}\} \subset A$，其中 a_i 和 a_j 分别来自不同的 A_k，在 $\mathcal{H}$ 中存在一个 Berge-$(K_\nu \vee K_{\alpha+1})$，其核心顶点为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu\} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha+1}\}$，且其中的 v_i 对应于 K_ν。事实上，不失一般性，设 $a_i \in A_i$。现在，对于每个 $i \in [\alpha + 1]$ 和 $j \in [\nu]$，我们可以使用超边 $(V_1 \cup A_i) \setminus \{v_{j-1}\}$ 将 a_i 与 v_j 相连（v_j 的指标模 ν），从而得到一个 Berge-$K_{\nu,\,\alpha+1}$。然后，由 (9) 可知

$$a = \frac{n - \nu - t}{k - \nu + 1} \geq \frac{n - k}{k} > \nu^2 + \alpha + 1,$$

在最后一个不等式中，我们使用了关于 n 的界，以及 $\nu^2 + \alpha + 2 < 10|V(F)|^3$。特别地，这意味着我们至少有 $\nu^2 > \binom{\nu}{2}$ 个满足 $i > \alpha + 1$ 的集合 A_i。因此，对于 $i \in [a] \setminus [\alpha + 1]$ 和 $j \in [\nu]$，有大量形如 $(V_1 \cup A_i) \setminus \{v_j\}$ 的边可用于构造顶点集为 V_1 的 Berge-K_ν。由此完成了该断言的证明。

现在，任意地向 $\mathcal{H}$ 添加不会产生 Berge-F 的边，直到该超图达到 Berge-F-饱和，并将所得超图记为 $\mathcal{H}'$。令 $x \in A$ 为一个顶点。为导出矛盾，假设

$$d_{\mathcal{H}'}(x) - d_{\mathcal{H}}(x) > \binom{|V_1| + t + (\alpha-1)k^2}{k-1}.$$

这意味着 x 有 α 个邻点，我们将这些邻点记为 x_1、.....、 $x_\alpha \in A$，使得

1. x_i 和 $x_{i'}$ 不包含在同一个 A_j 中，对于 $i \neq i'$、 $j \in [a]$，并且

2. 存在一个单射 ϕ，从 $\{x_1, \ldots, x_\alpha\}$ 到 $\{e \in E(\mathcal{H}') \setminus E(\mathcal{H}) \mid x \in e\}$，使得$x_i \in \phi(x_i)$ 对于 $i \in [\alpha]$。

事实上，由于 $d_{\mathcal{H}'}(x) - d_{\mathcal{H}}(x) > \binom{|V_1|+t}{k-1}$， x必须有一个位于 $V_1 \cup T$之外的邻点，不妨记为 x_1，并且存在一条超边 $e_1 \in E(\mathcal{H}') \setminus E(\mathcal{H})$，使得 x、 $x_1 \in e_1$。超边 e_1至多与 A_i中的 k个相交。令 B_1 表示与 e_1相交的所有 A_i的并集，并注意到 $|B_1| \leq k|A_1| \leq k^2$。由于 $d_{\mathcal{H}'}(x_1) - d_{\mathcal{H}}(x_1) > \binom{|V_1|+t+k^2}{k-1}$， x必须有第二个邻点，不妨记为 x_2，且令 $e_2 \in E(\mathcal{H}') \setminus E(\mathcal{H})$满足 x、 $x_2 \in e_2$，注意到 $e_2 \neq e_1$。于是我们可以定义B_2 为与 e_1 或 e_2相交的所有 A_i的并集，并注意到 $|B_2| \leq 2k|A_1| \leq 2k^2$。通过归纳，我们可以找到 x_3、.....、 x_α，如所述。

这些边 $E(\mathcal{H}') \setminus E(\mathcal{H})$，连同 $\mathcal{H}$ 中核顶点为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_\nu, x_1, \overline{x_2, \ldots}, x_\alpha, x\}$ 的 Berge-($K_\nu \vee K_{\alpha+1}$)，构成一个 Berge-($K_{\nu+1} \vee K_\alpha$)，其中包含一个 Berge-F，这就产生了矛盾。因此，对每个顶点 $x \in A$，都有 $d_{\mathcal{H}'}(x) - d_{\mathcal{H}}(x) \leq \binom{|V_1|+t+\binom{\alpha-1}{k}k^2}{k-1}$。

现在我们可以宽松地界定 $|E(\mathcal{H}')|$。事实上，我们有 $|E(\mathcal{H})| = \nu a \leq \nu n = O(n)$，并且

$$\begin{aligned}
|E(\mathcal{H}') \setminus E(\mathcal{H})| &\leq |\{e \in V_1 \cup T\}| + |\{e \in E(\mathcal{H}') \setminus E(\mathcal{H}) \mid e \cap A \neq \emptyset\}| \\
&\leq \binom{|V_1| + t}{k} + ak\binom{|V_1| + t + (\alpha-1)k^2}{k-1} \\
&\leq k\binom{|V_1| + t + (\alpha-1)k^2}{k-1} n = O(n).
\end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{sat}_k(n, \text{Berge-}F) \leq |E(\mathcal{H}')| = |E(\mathcal{H})| + |E(\mathcal{H}') \setminus E(\mathcal{H})| = O(n).$$

□

我们需要用到 [1] 中的一个结果，以处理定理 1.3 中的一个边界情形。下面的结果远弱于 [1], 中的结果，但足以满足我们的需要。

定理 4.3 ([1])。对于任意 $k \geq 3$， $\ell \geq 1$,

$$\mathrm{sat}_k(n, \textit{Berge-}K_{1,\ell}) = O(n).$$

我们还需要一个能够处理 $k \leq \nu$ 情形的结果。令 $\beta(F)$ 表示 F 的点覆盖数。

定理 4.4 ([5])。 固定 $k \geq 3$。如果 F 是一个图，且具有 $\beta(F) \geq k+1$，那么 $\mathrm{sat}_k(n,$ *Berge-*$F) = O(n)$。

现在我们可以证明关于线性性的两个结果中的第一个。

定理 *1.3* 的证明。 首先注意，若 $\alpha(F) = |V(F)|$，则 F不含超边，因此饱和函数未定义。此外，若 $\alpha(F) = |V(F)| - 1$，则 F是一个星图，由定理 4.3 可得结论。因此，我们可以假设 $|V(F)| \geq \alpha(F) + 2$。假设 $|V(F)| - \alpha(F) - 1 =: \nu \geq k$。利用 $|V(F)| = \alpha(F) + \beta(F)$ 这一事实，可得$\beta(F) - 1 \geq k$。此时，定理 4.4 表明 $\mathrm{sat}_k(n,$ Berge-$F) = O(n)$。因此，我们将假设 $k > \nu$。

令 $\mathcal{H} := \mathcal{H}(n, k, F)$，如构造 4.1 所示。我们声称 $\mathcal{H}$ 不含 Berge-F。反设存在 $\mathcal{H}$ 中的一个 F 副本，它见证了 Berge-F 。我们有$|V(F) \cap A| \geq |V(F)| - \nu = \alpha(F) + 1$，并且还必须存在一个 $i \in [a]$，使得$|V(F) \cap A_i| \geq 2$；否则， $V(F) \cap A$中的 $\alpha(F)+1$ 个顶点将构成 F 中一个过大的独立集。设 $x, y \in A_i$。由于 $\mathcal{H}$ 只有 ν 条与 A_i 相交的边，且只有一条边可以充当 xy，同时计入两个顶点的度，因此必须有 $d_F(x) + d_F(y) - 1 \leq \nu$。但是 $d_F(x) + d_F(y) - 1 \geq 2\delta(F) - 1 > |V(F)| - \alpha(F) - 1 = \nu$，这就产生了矛盾。

因此， $\mathcal{H}$ 不含 Berge-F，所以由引理 4.2 可知，结论成立。 □

这里我们给出 [5] 中的一个构造，用于构造顶点集 V 上的 k-均匀超图，其中顶点集大小为 n （其中 n 足够大）；我们将用它来证明最终结果。我们用 $f(G)$ 表示图 G 的顶点反馈数。

构造 *4.5* （[5]） 。设 G 为任意图，且 n 足够大。若 $f(G) = 0$，则对于任意 a，令 $H_k(n, a, G, \emptyset)$ 表示顶点集 V 上的空图。若 $f(G) \geq 1$，令 S 为 G 的一个最小顶点反馈集，并令 $|E(G[S])| = \ell$。将（初始为空的）顶点集V 划分为三个集合 $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$，其中 $|V_1| = f(G)$，且 $|V_2| = (k-2)\ell$。我们首先在 V_1 和 V_2 之间添加 ℓ 条边，以构造一个核心顶点位于 V_1 中的 *Berge-*$G[S]$ 。具体而言，任意地为 V_1 中的顶点标记 $G[S]$ 的顶点集中的标签，然后对于 $G[S]$ 的每条 *2-*边 uv，添加一条 k-边，该边包含 V_1 中标记为 u 和 v 的顶点，以及 V_2 中的 $k-2$ 个顶点，使得添加完所有 ℓ 条边后， V_2 中的每个顶点的度均为 *1*。

现在，选择某个整数 $1 \leq a \leq k-1$，使得 $a + f(G) \geq k$。若 a 不能整除$|V_3|$，则任意选取$(|V_3| \bmod a)$ 个顶点，并将其移除以形成集合 $V_3' \subset V_3$，其中$|V_3'| = ra$，对某个 $r \in \mathbb{Z}$成立。将 V_3' 划分为 r 个大小为 a的集合，并令 $\mathcal{M}$ 为这些 a元集合构成的族。对于 $\mathcal{M}$中的每个 a元集合 A，添加包含 A 及 V_1中的 $k-a$ 个顶点的 $\binom{|V_1|}{k-a}$ 条边。将此构造称为 $\mathcal{H}_k(n, a, G, S)$。

我们证明定理 1.4 将使用 $a = k - f(G) + 1$ 或 $a = k - 1$。然而，在 [5] 中，关于构造 $\mathcal{H}_k(n, a, G, S)$ 的原始表述将 a 作为一个更一般的参数，从而便于表述他们的定理。

定理 4.6 ([5])。 设 F 是一个具有顶点反馈集 S、 $|S| = f(F)$ 的图。设 $1 \leq a \leq k-1$ 满足 $a + f(F) > k$。如果 $\mathcal{H}(n$、 a、 F、 $S)$ 不包含 *Berge-*F，那么

$$\mathrm{sat}_k(n, \mathit{Berge}\text{-}F) = O(n).$$

现在我们可以证明定理 1.4 了

定理 *1.4* 的证明。设 S 是 F 的最小顶点反馈集。首先，考虑 $f \le k$，使得 $1 \le a = k-f+1 \le k$ 的情形。令 $H := H_k(n,\ k-f+1,\ F,\ S)$。我们声称 H 不含 Berge-F。事实上，反设 H 包含一个 Berge-F，并令 F 是该 Berge-F 的一个见证。对于任意 $A \in \mathcal{M}$，H 中仅有 $\binom{|V_1|}{k-a} = \binom{f}{f-1} = f < g$ 条边与 A 中的顶点关联，因此 F 的任何环都不可能包含在集合 A 中。这意味着 V_1 是 F 的一个顶点反馈集，并且由于 $|V_1| = f$，V_1 是 F 的一个最小顶点反馈集。

同理，若 $f > k$，则我们选择 $a = k-1$，并令 $H := H_k(n,\ k-f+1,\ F,\ S)$。我们声称 H 不含 Berge-F。事实上，反设 H 包含一个 Berge-F，并令 F为该 Berge-F的一个见证。对于任意 $A \in \mathcal{M}$，H 中只有 $\binom{|V_1|}{k-a} = \binom{f}{1} = f < g$条边与 A中的顶点关联，因此 F 的任何环都不可能包含在集合 A中。这说明 V_1是 F的一个顶点反馈集，并且由于 $|V_1| = f$，V_1是 F 的一个最小顶点反馈集。

无论哪种情况，我们都按以下论证进行。对于任意 $v \in V_1$，v 必须位于 F 中的一个环 C 上，且该环不包含 V_1中的其他顶点，否则 $V_1 \setminus \{v\}$ 就会是一个更小的顶点反馈集。然而，这意味着对于某个 $A \in \mathcal{M}$，C 包含在 $\{v\} \cup A$ 中，但 H 中只有 $f < g$ 条超边与 A相交，因此超边数量不足以构造出环 C的 Berge 副本，由此得到矛盾。

因此，H 是无 Berge-F 的，由定理 4.6 可得结论。 □

5 总结

Berge-K_3 的饱和数已知其精确值，而在这里，我们只能确定较大团的饱和数的渐近行为。若能找到精确值，至少在一些较小的情形下找到，将会很有意义。最容易处理的情形是 $\mathrm{sat}_3(n,\ \text{Berge-}K_4)$。比定理 3.9 中更仔细地计算构造 3.7 中 $\mathcal{S}(n,\ 3,\ 4)$ 的边数，可以得到如下结果：

注 5.1。对于所有 $n \ge 10$,

$$\mathrm{sat}_3(n, \textit{Berge-}K_4) \le \begin{cases} n & \textit{if } n \textit{ is odd,} \\ n+1 & \textit{if } n \textit{ is even.} \end{cases}$$

要使下界达到这一结果似乎很困难，但若能看到这方面的研究，将会相当有趣。

问题 5.2。 精确确定 $\mathrm{sat}_3(n, \textit{Berge-}K_4)$。特别是，当 n 为奇数时，是否有 $\mathrm{sat}_3(n, \textit{Berge-}K_4) = n$?

参考文献

[1] B. Austhof 和 S. English，近正则超图与 *Berge* 星的饱和，《电子组合学杂志》**26**（2019），第 4 期，论文编号 4.49，11 页。

[2] M. Axenovich 和 C. Winter，关于 *Berge-*G 超图的饱和问题，《图与组合》**35**（2019），第 4 期，933–939 页。[3] B. Bollob´as，关于广义图，《匈牙利科学院学报（数学）》**16**（1965），447–452 页。[4] B. Currie、J. Faudree、R. Faudree 和 J. Schmitt，最小饱和图综述，《电子组合学杂志》（2021），DS19：2021 年 10 月 11 日。[5] S. English、D. Gerbner、A. Methuku 和 M. Tait，*Berge* 超图的饱和的线性性，《欧洲组合学杂志》**78**（2019），205–213 页。[6] S. English、P. Gordon、N. Graber、A. Methuku 和 E. Sullivan，*Berge* 超图的饱和，《离散数学》**342**（2019），第 6 期，1738–1761 页。[7] P. Erd˝os、A. Hajnal 和 J. Moon，图论中的一个问题，《美国数学月刊》**71**（1964），第 10 期，1107–1110 页。[8] D. Gerbner 和 C. Palmer，*Berge* 超图的极值结果，《SIAM 离散数学杂志》**31**（2017），第 4 期，2314–2327 页。[9] D. Gerbner、B. Patk´os、Zs. Tuza 和 M. Vizer，关于 *Berge* 超图的饱和，《欧洲组合学杂志》**102**（2022），论文编号 103477，7 页。[10] L. K´aszonyi 和 Z. Tuza，具有最少边数的饱和图，《图论杂志》**10**（1986），第 2 期，203–210 页。[11] L. Liu、C. He 和 L. Kang，随机超图中 *Berge* 星的饱和数，《电子组合学杂志》**27**（2020），第 4 期，论文编号 4.45，10 页。[12] O. Pikhurko，饱和超图的最小规模，《组合学、概率与计算》**8**（1999），第 5 期，483–492 页。