arXiv:2301.02981v1 [math.CO] 8 Jan 2023

图的坚韧度与规范化拉普拉斯特征值

Xueyi Huang[a, b]，Kinkar Chandra Das[b, *]和 Shunlai Zhu[a]

[a]华东理工大学数学学院，

中国上海 200237

[b]成均馆大学数学系，

韩国水原 16419

摘要

给定一个连通图 G，图 τ_G 的坚韧度定义为比值 $|S|/\omega_{G-S}$ 的最小值，其中 S 遍历图 G 的所有点割集，ω_{G-S} 是从 G 中删去 S 的所有顶点后得到的子图 $G-S$ 的连通分支数。本文根据图 G 的最大度、最小度和归一化拉普拉斯特征值，给出图 τ_G 的坚韧度下界。这可以视为对 Brouwer 坚韧度猜想的略微推广，该猜想已由 Gu（2021）证实。此外，我们刻画了达到 Gu和 Haemers（2022）给出的关于坚韧度和拉普拉斯特征值的两个下界的图。

关键词：坚韧度、归一化拉普拉斯特征值、代数连通度。

2010 年 MSC：05C50，05C42

1. 引言

设 G 是一个顶点集为 V_G （$|V_G| = n$）的无向简单图。对于任意 $v \in V_G$，我们用 d_v 表示 v 的度，即在 G 中与 v 相邻的顶点数。特别地，令 Δ_G 和 δ_G 分别表示 G 中顶点的最大度和最小度。对于 V_G 的任意子集 S，我们用 $\nu_S = \sum_{v\in S} d_v$ 表示其体积

*通讯作者。电子邮件地址：huangxymath@163.com（X. Huang），kinkardas2003@gmail.com（K. C. Das），zs- lkqds@163.com（S. Zhu）。

S 在 G 中，$G[S]$ 是由 S 诱导的 G 的子图，而 $G-S$ 是由 $V_G \setminus S$ 诱导的 G 的子图。对于 X、$Y \subseteq V_G$，我们用 $e_{X,\,Y}$ 表示 X 与 Y 之间的边数（两端均在 $X \cap Y$ 中的边计数两次），用 e_X 表示两端均包含在 X 中的边数。显然，$e_{X,\,X} = 2e_X$。此外，两个图 G 和 H 的图的联图，记为 $G \vee H$，是由 $G \cup H$ 得到的图，其中将 G 的每个顶点与 H 的所有顶点相连。

G 的邻接矩阵是一个 (0, 1) 矩阵 $A_G = (a_{uv})_{u,\ v\in V_G}$ 其中 $a_{uv} = 1$ 当且仅当 u、v 是不同且相邻的顶点。令 $D_G = \mathrm{diag}\{d_v : v \in V_G\}$ 表示 G的对角度矩阵。于是，我们分别称 $L_G = D_G - A_G$ 和 $\mathcal{L}_G = D_G^{-1/2} L_G D_G^{-1/2}$ 为 G的拉普拉斯矩阵和规范化拉普拉斯矩阵。这里，如果 v 是 G中的孤立顶点，我们总是取 $(D_G^{-1/2})_{vv} = 0$ 。A_G、L_G和 $\mathcal{L}_G$ 的特征值分别称为 G的邻接特征值、拉普拉斯特征值和规范化拉普拉斯特征值，分别记作 $\lambda_1^G \geq \lambda_2^G \geq \cdots \geq \lambda_n^G$、$\mu_1^G \geq \mu_2^G \geq \cdots \geq \mu_n^G$和 $\xi_1^G \geq \xi_2^G \geq \cdots \geq \xi_n^G$。容易看出，$\mu_n^G = \xi_n^G = 0$，并且 $\xi_1^G \leq 2$，等号成立当且仅当 G 至少含有一个非平凡二分图分支[6]。此外，μ_1^G 和 μ_{n-1}^G 分别称为 G的拉普拉斯谱半径和代数连通度。

1973年，Chv´atal [8] 提出了图韧性的概念。对于非完全连通图 G，其坚韧度 τ_G 定义为 $\tau_G = \min_{S\subseteq V_G,\ \omega_{G-S}\geq 2} |S|/\omega_{G-S}$，其中 ω_{G-S} 表示 $G-S$中的连通分支数。按照惯例，我们定义完全图 K_n 的坚韧度为 $\tau_{K_n} = \infty$。在原论文中[8], , Chv´atal 证明了：$\tau_G \geq 1$ 如果 G 是哈密顿图。过去几十年来，研究表明，坚韧度与圈、匹配、因子、生成树以及图的各种结构参数[2]密切相关。

1995年，Alon [1] 首次将邻接特征值引入图韧性的研究。他证明了 $\tau_G > (d^2/(d\lambda + \lambda^2) - 1)/3$ ，如果 G 是连通的 d-正则图，其中 $\lambda = \max\{|\lambda_2^G|, |\lambda_n^G|\}$。几乎与此同时，Brouwer [3, 4] 证明每个连通的 d-正则图 G 都满足 $\tau_G > d/\lambda - 2$，并进一步猜想$\tau_G \geq d/\lambda - 1$，这就是著名的 Brouwer 坚韧度猜想。此后，一些研究者为解决这一猜想付出了努力[9, 10, 14]。最近，Gu [15] 证实了 Brouwer 坚韧度猜想。

本文受 Gu [15], 的工作启发，首先考虑根据一般图的最大度、最小度和规范化拉普拉斯特征值，给出其坚韧度的下界。

定理 1.1 设 G 是一个具有 n 个顶点且满足 $\Delta_G = \Delta$ 和 $\delta_G = \delta$的连通图。则

$$\tau_G \geq \max\left\{\frac{1}{\Delta}, \frac{\Delta+\delta}{\Delta n}, \frac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} - 2\right\},$$

其中 $\xi = \max\{|1-\xi_1^G|, |1-\xi_{n-1}^G|\}$。

若 G 是 d-正则的，则 $\Delta = \delta = d$ 且 $\xi = \lambda/d$。根据定理 1.1，

$$\tau_G \geq \frac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} - 2 = \frac{1}{\xi} - 1 = \frac{d}{\lambda} - 1,$$

这与 Brouwer 坚韧度猜想的结论一致。这表明定理 1.1 可视为 Brouwer 坚韧度猜想的一个略微推广。

最近，Gu 和 Haemers [16] 利用拉普拉斯特征值给出了图的坚韧度的两个下界。

定理 1.2 ([16]) 设 G 是一个具有 $\delta_G = \delta$ 的 n 阶连通图，则

$$\tau_G \geq \frac{\mu_1^G \mu_{n-1}^G}{n(\mu_1^G - \delta)} \tag{1}$$

and

$$\tau_G \geq \frac{\mu_{n-1}^G}{\mu_1^G - \mu_{n-1}^G}. \tag{2}$$

本文的第二部分将重点刻画达到定理 1.2中下界的图。

定理 1.3 设 G 是一个阶数为 n 且具有 $\delta_G = \delta$ 的连通图。则 (1) 和 (2) 中的等号成立，当且仅当 $G \cong H \vee (n-\delta)K_1$，其中 $1 \leq \delta \leq n-2$ 且 H 是任意一个阶数为 δ 且具有 $\mu_{\delta-1}^H \geq 2\delta - n$。

根据（2）和定理 1.3，我们得到一个关于图的代数连通度的上界，该上界由坚韧度和拉普拉斯谱半径表示，并刻画了极值图。

推论 1.1 设 G 是一个具有 n 个顶点、拉普拉斯谱半径为μ_1^G 且坚韧度为 τ_G的连通图。那么

$$\mu_{n-1}^G \leq \frac{\tau_G}{\tau_G + 1}\,\mu_1^G$$

等号成立当且仅当 $G \cong H \vee (n-\delta)K_1$，其中 $1 \leq \delta \leq n-2$和 H是任意一个阶为 δ 且满足 $\mu_{\delta-1}^H \geq 2\delta - n$的图。

2. 预备知识

本节回顾一些基本引理，以备后用。

引理 2.1（[5, 15]）设 n_1，……，n_p为满足 $\sum_{i=1}^p n_i \leq 2p-1$的正整数。那么，对于满足 $0 \leq \ell \leq \sum_{i=1}^p n_i$的每个整数 ℓ，都存在某个 $\mathcal{I} \subset \{1,\ldots,p\}$ 使得 $\sum_{i\in\mathcal{I}} n_i = \ell$。

回顾一下， ν_S（S）$=\sum_{v\in S} d_v$ 表示 G中 S （$S \subseteq V_G$）的体积。

引理 2.2（非正则扩张混合引理，[7]）设 G 是一个具有 n个顶点的图。对于任意两个子集 X 和 Y，属于 $V = V_G$，有

$$\left|e_{X,Y} - \frac{\nu_X \nu_Y}{\nu_V}\right| \leq \xi \cdot \sqrt{\nu_X \nu_Y \left(1 - \frac{\nu_X}{\nu_V}\right)\left(1 - \frac{\nu_Y}{\nu_V}\right)},$$

其中 $\xi = \max\{|1 - \xi_1^G|, |1 - \xi_{n-1}^G|\}$。特别地，

$$\left|2e_X - \frac{\nu_X^2}{\nu_V}\right| \leq \xi \cdot \nu_X \left(1 - \frac{\nu_X}{\nu_V}\right).$$

设 G是一个图。 G的独立集是由两两不相邻的顶点组成的集合。独立数 α_G 是 G所有独立集中基数的最大值。下面三个引理给出了 α_G的不同类型的上界。

引理 2.3（[21], 定理 3.2）设 G 是一个具有 n 个顶点的图，且满足 $\Delta_G = \Delta$ 和$\delta_G = \delta$。则

$$\alpha_G \leq \frac{n\Delta}{\Delta + \delta}.$$

Le理 2.4 设 G 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的图，且满足 $\delta_G = \delta$。则

$$\alpha_G \leq \frac{2m\xi}{\delta(\xi + 1)},$$

其中 $\xi = \max\{|1 - \xi_1^G|, |1 - \xi_{n-1}^G|\}$。

证明。 设 I 是 G的一个最大独立集，即 $|I| = \alpha_G$。 于是 $e_I = 0$，由引理 2.2，

$$\frac{\nu_I^2}{\nu_V} \leq \xi \cdot \nu_I \left(1 - \frac{\nu_I}{\nu_V}\right),$$

这意味着

$$\nu_I \leq \frac{\xi}{\xi + 1} \cdot \nu_V.$$

结合这一点与 $\nu_I \geq \delta|I| = \delta\alpha_G$ 和 $\nu_V = 2m$ 可得

$$|I| \leq \frac{2m\xi}{\delta(\xi + 1)}.$$

结论由此得出。 □

注 2.1 值得一提的是，引理 2.4 也可以由以下主要结果推导得出[18]。

引理 2.5（[13, 20]）设 G 是一个有 n 个顶点、至少有一条边且$\delta_G = \delta$的图。那么

$$\alpha_G \leq \frac{n(\mu_1^G - \delta)}{\mu_1^G}. \tag{3}$$

此外，如果 I 是 G 的一个独立集，且(3) 中的等号成立，那么由 G_1中连接 I与 $V_G \setminus I$的边所诱导的 G二部子图 G_1是$(\delta, \mu_1^G - \delta)$-半正则的，也就是说， I 中的每个顶点的度为 δ，而 $V_G \setminus I$ 中的每个顶点的度为$\mu_1^G - \delta$ （在 G_1中）。

非完全图 G的点连通度 κ_G 是使 $G - S$ 不连通的 S （$S \subset V_G$）的最小基数。显然， $\kappa_G \leq \delta_G$。Fiedler 的一个著名结果[12] 指出，每个阶为 n 的非完全连通图 G 都满足$\mu_{n-1}^G \leq \kappa_G$。在 [19], 中，Kirkland、Molitierno、Neumann 和 Shader 刻画了满足 $\mu_{n-1}^G = \kappa_G$的图的结构。从他们的证明中，我们可以推导出以下结果。

引理 2.6（[19], 定理 2.1）设 G 是一个具有 n 个顶点的非完全连通图。若 $\mu_{n-1}^G = \kappa_G = \kappa$，则对于任意大小为 κ 的点割集 S，有 $G = G[S] \vee (G - S)$ 且 $\mu_{\kappa-1}^{G[S]} \geq 2\kappa - n$。反之，若 G 的形式为 $G_1 \vee G_2$，其中 G_1 是一个具有 κ 个顶点且满足 $\mu_{\kappa-1}^{G_1} \geq 2\kappa - n$ 的图，而 G_2 是一个具有 $n - \kappa$ 个顶点的非连通图，则 $\mu_{n-1}^G = \kappa_G = \kappa$。

引理 2.7（[11], 定理 7.1.9）设 G 是一个阶为 n 的图， H 是一个阶为 n' 的图。那么，$G \vee H$ 的拉普拉斯特征值为 $n + n'$、$\mu_1^G + n'$、……、$\mu_{n-1}^G + n'$、$n + \mu_1^H$、……、$n + \mu_{n'-1}^H$、0。

引理 2.8（[16, 17]）设 G 是一个阶为 n的图，且 S 是G的点割集。假设 $V_G \setminus S = X \cup Y$满足 $X \cap Y = \emptyset$ 且 $|X| \leq |Y|$。那么

$$|X| \leq \frac{\mu_1^G - \mu_{n-1}^G}{2\mu_1^G} \cdot n \ and \ |S| \geq \frac{2\mu_{n-1}^G}{\mu_1^G - \mu_{n-1}^G} \cdot |X|,$$

其中，每个等号成立的条件都是 $|X| = |Y|$。

3. 定理1.1 和1.3 的证明

定理的证明 1.1. 由于 $\tau_{K_n} = \infty$ 根据定义，我们可以假设 $G \ncong K_n$。令 S为 G 的一个点割集，使得 $\tau_G = |S|/\omega_{G-S}$。令 $\tau = \tau_G$， $\omega = \omega_{G-S}$ 且 $U = V_{G-S}$。

则 $\omega \geq 2$、$|S| = \tau\omega \leq n-2$和 $|U| = n - \tau\omega$。显然，$\omega \leq e_{S,\,U} \leq |S| \cdot \Delta = \tau\omega \cdot \Delta$，我们有

$$\tau \geq \frac{1}{\Delta}.$$

此外，从 $G-S$的每个连通分支中恰取一个顶点，可得一个大小为 ω的独立集。于是，由引理 2.3,

$$\omega \leq \alpha_G \leq \frac{n\Delta}{\Delta+\delta},$$

由此可得

$$\tau = \frac{|S|}{\omega} \geq \frac{1}{\omega} \geq \frac{\Delta+\delta}{n\Delta}.$$

因此，剩下只需证明

$$\tau \geq \frac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} - 2.$$

若 $\xi \geq \dfrac{\delta}{2\Delta-\delta}$，则$\dfrac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} \leq 2$，此时无需证明。下文中，我们始终假设 $\xi < \dfrac{\delta}{2\Delta-\delta}$，即$\dfrac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} > 2$。由引理 2.4,

$$\omega \leq \alpha_G \leq \frac{2m\xi}{\delta(\xi+1)} \leq \frac{n\Delta\xi}{\delta(\xi+1)} < \frac{n}{2}. \tag{4}$$

若 $|U| \leq \dfrac{2n\Delta\xi}{\delta}(\xi+1)$，则由式 (4) 可得

$$\tau = \frac{n-|U|}{\omega} \geq \left(n - \frac{2n\Delta\xi}{\delta(\xi+1)}\right) \cdot \frac{\delta(\xi+1)}{n\Delta\xi} = \frac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} - 2,$$

如所欲证。现在假设 $|U| > \dfrac{2n\Delta\xi}{\delta}(\xi+1)$。于是由式 (4) 可得

$$|U| \geq 2\omega + 1. \tag{5}$$

设 U_1、U_2、.....、U_ω $(|U_1| \leq |U_2| \leq \cdots \leq |U_\omega|)$ 分别为图 $G-S$ 的各连通分支的顶点集。下面的讨论分为两种情形。

情形 1. $\sum_{i=1}^{\omega-1} |U_i| = \omega - 1$。

在这种情况下，每个 $U_i (1 \leq i \leq \omega-1)$ 只包含一个顶点。令 $W = \cup_{i=1}^{\omega-1} U_i$。则 $|W| = \omega - 1$ 且 $e_{W,\,U} = 0$。由引理 2.2,

$$\frac{\nu_W\nu_U}{\nu_V} \leq \xi \cdot \sqrt{\nu_W\nu_U\left(1-\frac{\nu_W}{\nu_V}\right)\left(1-\frac{\nu_U}{\nu_V}\right)} \leq \xi \cdot \sqrt{\nu_W\nu_U\left(1-\frac{\nu_U}{\nu_V}\right)},$$

这导致

$$\frac{\nu_W \nu_U}{\nu_V \cdot \xi^2} \leq \nu_V - \nu_U = \nu_S. \tag{6}$$

注意到 $\nu_W \geq \delta|W|$, $\nu_U \geq \delta|U|$, $\nu_V \leq \Delta n$和 $\nu_S \leq \Delta|S| = \Delta\tau\omega$。根据（6），我们得到

$$\tau \geq \frac{\delta^2|W||U|}{n\Delta^2\xi^2\omega} = \frac{\omega-1}{\omega} \cdot \frac{\delta^2|U|}{n\Delta^2\xi^2} = \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \cdot \frac{\delta^2|U|}{n\Delta^2\xi^2} \geq \frac{\delta^2|U|}{2n\Delta^2\xi^2}.$$

将此与 $|U| > \frac{2n\Delta\xi}{\delta}(\xi+1)$ 结合可得

$$\begin{aligned}\tau &> \frac{\delta^2}{2n\Delta^2\xi^2} \cdot \frac{2n\Delta\xi}{\delta(\xi+1)} = \frac{\delta}{\Delta}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi+1}\right) \geq \frac{\delta}{\Delta}\left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \\ &\geq \frac{\delta}{\Delta}\left(\frac{1}{\xi} - \left(\frac{2\Delta}{\delta} - 1\right)\right) = \frac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} - 2,\end{aligned}$$

如所需。

情况 2。$\sum_{i=1}^{\omega-1}|U_i| \geq \omega$。

采用与[15, 断言 2], 相同的方法，可以得到以下断言。为便于查阅，我们再次写出证明。

断言 1 存在某个 $\mathcal{I} \subset [\omega] = \{1, 2, \cdots, \omega\}$，使得 $R_{\mathcal{I}} = \cup_{i\in\mathcal{I}} U_i$和 $T_{\mathcal{I}} = U \setminus R_{\mathcal{I}} = \cup_{i\in[\omega]\setminus\mathcal{I}} U_i$满足 $e_{R_{\mathcal{I}},\ T_{\mathcal{I}}} = 0$和 $|R_{\mathcal{I}}|, |T_{\mathcal{I}}| \geq \omega$。

断言 1 的证明。我们断言 $|U_\omega| \geq 3$，否则便有 $|U| \leq 2\omega$，这与（5）矛盾。此外，如果 $|U_\omega| \geq \omega$，那么我们可以取 $\mathcal{I} = \{1, \ldots, \omega-1\}$，结论便立即得出。因此，只需考虑 $3 \leq |U_\omega| \leq \omega-1$。令 $\ell = \omega - |U_\omega|$。则 $1 \leq \ell \leq \omega-3$。如果 $\sum_{i=1}^{\omega-1}|U_i| \leq 2\omega-3$，根据引理 2.1，存在某个 $\mathcal{I}_1 \subset \{1, \ldots, \omega-1\}$，使得 $\sum_{i\in\mathcal{I}_1}|U_i| = \ell$。取 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \{\omega\}$。根据（），我们可知 $|R_{\mathcal{I}}| = \ell + |U_\omega| = \omega$、$|T_{\mathcal{I}}| = |U| - |R_{\mathcal{I}}| \geq \omega+1$ 5 $e_{R_{\mathcal{I}}\,T_{\mathcal{I}}} = 0$ $\sum_{i=1}^{\omega-1}|U_i| > 2\omega-3$，并且，，如所需。若，令 U_i' 为 $U_i (i = 1, \ldots, \omega-1)$ 的非空子集，使得 $\sum_{i=1}^{\omega-1}|U_i'| = 2\omega-3$。再次根据引理 2.1，存在某个 $\mathcal{I}_1 \subset \{1, \ldots, \omega-1\}$，使得 $\sum_{i\in\mathcal{I}_1}|U_i'| = \ell$。令 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \{\omega\}$。于是我们可知 $|R_{\mathcal{I}}| = \sum_{i\in\mathcal{I}_1}|U_i| + |U_\omega| \geq \sum_{i\in\mathcal{I}_1}|U_i'| + |U_\omega| = \ell + |U_\omega| = \omega$、$|T_{\mathcal{I}}| = \sum_{i\in[\omega]\setminus\mathcal{I}}|U_i| \geq \sum_{i\in[\omega]\setminus\mathcal{I}}|U_i'| = 2\omega-3-\ell \geq 2\omega-3-(\omega-3) = \omega$，且 $e_{R_{\mathcal{I}},\ T_{\mathcal{I}}} = 0$，如所求。□

令 $\mathcal{I}$ 为 $[\omega]$ 由断言 1保证的子集，并令 $R = R_{\mathcal{I}}$ 和 $T = T_{\mathcal{I}}$。由于 $e_{R,\ T} = 0$，根据引理 2.2，可得

$$\frac{\nu_R \nu_T}{\nu_V} \leq \xi \cdot \sqrt{\nu_R \nu_T \left(1 - \frac{\nu_R}{\nu_V}\right)\left(1 - \frac{\nu_T}{\nu_V}\right)},$$

或者等价地，

$$\nu_R\,\nu_T \le \xi^2(\nu_V - \nu_R)\,(\nu_V - \nu_T). \tag{7}$$

不失一般性，设 $\nu_R \le \nu_T$。则由（7）可得

$$\nu_R^2 \le \xi^2(\nu_V - \nu_R)^2,$$

也就是说，

$$\nu_R \le \xi(\nu_V - \nu_R).$$

因此，

$$\nu_R \le \frac{\xi}{\xi+1}\nu_V. \tag{8}$$

注意到 $\nu_T = \nu_V - \nu_S - \nu_R$。再次由（7），

$$\nu_R(\nu_V - \nu_S - \nu_R) \le \xi^2(\nu_V - \nu_R)(\nu_S + \nu_R),$$

这给出

$$\nu_R\nu_V \le (\xi^2\nu_V + (1-\xi^2)\nu_R)(\nu_S + \nu_R). \tag{9}$$

由（8），可知 $(1-\xi^2)\ \nu_R \le \xi(1-\xi)\nu_V$。然后由（9）可得

$$\nu_R\nu_V \le \xi\,\nu_V(\nu_S + \nu_R),$$

这意味着

$$\nu_S \ge \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\nu_R.$$

将其与 $\nu_S \le \Delta|S|$ 和 $\nu_R \ge \delta|R|$ 结合可得

$$\tau\omega = |S| \ge \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\frac{\delta}{\Delta}|R|.$$

因此，

$$\tau \ge \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\frac{\delta}{\Delta}\cdot\frac{|R|}{\omega} \ge \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\frac{\delta}{\Delta} \ge \left(\frac{1}{\xi} - \left(\frac{2\Delta}{\delta} - 1\right)\right)\frac{\delta}{\Delta} = \frac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} - 2.$$

因此，对于所有情况，我们得到

$$\tau \ge \frac{\delta(\xi+1)}{\Delta\xi} - 2,$$

结论得证。 □

现在证明定理 1.3。

定理 1.3的证明。 设 S 是 G 的一个点割集，使得 $\tau_G = |S|/\omega_{G-S}$。 设$\tau = \tau_G$, $\omega = \omega_{G-S}$ 以及 $\kappa = \kappa_G$。

若（1）中的等号成立，根据 [16], 中定理 1.2 的证明，$|S| = \kappa = \mu^G_{n-1}$ 且 $\omega = \alpha_G = n\ (\mu^G_1 - \delta)\ /\mu^G_1$。由于 $\mu^G_{n-1} = \kappa$，由引理 2.6 可知， G 具有 $G[S] \vee$ （$G - S$）的形式，其中 $\mu^{G[S]}_{\kappa-1} \geq 2\kappa - n$ 且 $1 \leq \kappa \leq n-2$。于是由引理 2.7 可得 $\mu^G_1 = n$。此外，从 $G - S$ 的每个连通分支中恰好取一个顶点，可得一个大小为 $\omega = \alpha_G = n\ (\mu^G_1 - \delta)\ /\mu^G_1 = n - \delta$ 的独立集 I。然后，根据引理 2.5， I 与 $I = V_G \backslash I$ 之间的边所诱导的是一个（δ， $n-\delta$）-半正则二部图。考虑到 $S \subset I$ 且 $\omega \geq 2$，我们断言 $G - S$ 的所有连通分支都是单点图，且 $\delta = |S| = \kappa = n - \omega$。因此， G 可写为 $H \vee\ (n-\delta)\ K_1$, 其中 $H = G[S]$ 的阶为 δ （$1 \leq \delta \leq n-2$），且 $\mu^H_{\delta-1} \geq 2\delta - n$。反过来，假设对于某个阶为 δ （$1 \leq \delta \leq n-2$）且满足 $\mu^H_{\delta-1} \geq 2\delta - n$ 的图 H，有 $G \cong H \vee\ (n-\delta)\ K_1$。则 $\delta_G = \delta$，容易验证 $\mu^G_{n-1} = \delta = \kappa_G$、 $\mu^G_1 = n$，并且

$$\tau_G = \frac{\delta}{n-\delta} = \frac{\mu^G_1 \mu^G_{n-1}}{n(\mu^G_1 - \delta)},$$

如所期望的。

现在假设（2）中的等号成立。我们断言 $G - S$ 的所有连通分支都是单点图，也就是说， $n - |S| = \omega$。事实上，若 $n - |S| \geq \omega + 1$，根据 1.2 中的定理证明 [16], , 可知 $G - S$ 的连通分支可以划分为两个不相交的集合 X 和 Y，使得 $|Y| \geq |X| \geq \omega/2$, 而（2）中的等号意味着 $|X| = \omega/2$ 和 $|S| = 2\mu^G_{n-1}/(\mu^G_1 - \mu^G_{n-1}) \cdot |X|$。于是，根据引理 2.8，必有 $|Y| = |X|$，因此 $n - |S| = |X| + |Y| = \omega$，矛盾。因此，

$$\tau_G = \frac{\mu^G_{n-1}}{\mu^G_1 - \mu^G_{n-1}} = \frac{|S|}{\omega} = \frac{n-\omega}{\omega},$$

由此可得

$$\omega = \frac{n(\mu^G_1 - \mu^G_{n-1})}{\mu^G_1}. \tag{10}$$

此外，根据引理 2.5,

$$\omega \leq \alpha_G \leq \frac{n(\mu^G_1 - \delta)}{\mu^G_1}. \tag{11}$$

结合 (10) 和 (11)，我们得到 $\mu^G_{n-1} \geq \delta \geq \kappa$，因此 $\mu^G_{n-1} = \delta = \kappa$，因为我们已知 $\mu^G_{n-1} \leq \kappa$。根据引理 2.6， G 必须是两个图的联图。于是 $\mu^G_1 = n$，并且根据 (10), $|S| = n - \omega = \kappa = \delta$。因此，再次根据引理 2.6， G 的形式为 $H \vee (n-\delta)K_1$，其中 $H = G[S]$ 的阶为 $\delta (1 \leq \delta \leq n-2)$，且 $\mu^H_{\delta-1} \geq 2\delta - n$。反过来，如果对于某个阶为 δ ($1 \leq \delta \leq n-2$) 且满足 $\mu^H_{\delta-1} \geq 2\delta - n$ 的图 H，有 $G \cong H \vee (n-\delta)K_1$，那么 $\delta_G = \delta$、 $\mu^G_{n-1} = \delta = \kappa_G$、 $\mu^G_1 = n$，并且

$$\tau_G = \frac{\delta}{n-\delta} = \frac{\mu^G_{n-1}}{\mu^G_1 - \mu^G_{n-1}},$$

如所需。 □

作者贡献

概念构思：X.H.、K.C.D.；调查研究：X.H.、K.C.D. 和 S.Z.；原稿撰写：X.H.、K.C.D. 和 S.Z.；审阅与编辑：X.H.、K.C.D.

利益冲突声明

作者声明，他们与本文不存在任何利益冲突。

致谢

作者谨向两位匿名审稿人致以诚挚谢意，感谢他们对本文提出的宝贵意见，这些意见显著提升了本文的表达效果。X. Huang 获得国家自然科学基金委员会资助（项目编号：11901540）。K. C. Das 获得韩国政府资助的国家研究基金会资助（项目编号：2021R1F1A1050646）。S. Zhu 获得大学生创新创业训练计划资助（项目编号：X202110251335）。

参考文献

[1] N. Alon，无短圈的坚韧 Ramsey 图，《代数组合学杂志》4 (1995年) 189–195.[2] D. Bauer、H. J. Broersma 和 E. Schmeichel，图的坚韧度——综述，Graphs Combin. 22 (2006) 1–35.[3] A. E. Brouwer，图的坚韧度与谱，《线性代数及其应用》226/228 (1995年) 267–271.[4] A. E. Brouwer，图的谱与连通度，《CWI 季刊》9 (1996) 37–40.[5] A. E. Brouwer、W. H. Haemers，特征值与完美匹配，《线性代数及其应用》395 (2005) 155–162.[6] F. R. K. Chung，《谱图论》，CBMS 数学区域会议系列第 92 卷，AMS Bookstore，1997年。

[7] F. Chung，《离散等周不等式》，载于：A. Grigor’yan、S. T. Yau（编），《微分几何综述：拉普拉斯算子的特征值与其他几何算子》，第 IX 卷，International Press，2004年，第 53–82 页。[8] V. Chv´atal，坚韧图与哈密顿回路，离散数学 5 (1973年) 215–228.[9] S. M. Cioabˇa、X. Gu，连通度、坚韧度、有界度生成树与正则图的谱，捷克斯洛伐克数学杂志 66 (2016) 913–924.[10] S. M. Cioabˇa、W. Wong，正则图的谱与坚韧度，离散应用数学 176 (2014) 43–52.[11] D. M. Cvetkovi´c、P. Rowlinson 和 S. K. Simi´c，《图谱理论导论》，伦敦数学会学生课本 75，剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[12] M. Fiedler，图的代数连通度，捷克斯洛伐克数学杂志 23 (1973年) 298–305.[13] C. D. Godsil、M. W. Newman，独立集的特征值界，组合理论杂志B辑 98 (2008) 721–734.[14]X. Gu，伪随机图的坚韧度，欧洲组合数学杂志 92 (2021) 103255.[15] X. Gu，Brouwer 坚韧度猜想的一个证明，SIAM 离散数学杂志 35(2) (2021) 948–952.[16] X. Gu、W. H. Haemers，由拉普拉斯特征值确定图的坚韧度，代数组合 5(1) (2022) 53–61.[17] X. Gu、M. Liu，通过拉普拉斯特征值给出的图匹配数紧下界，欧洲组合数学杂志 101 (2022) 103468.[18] J. Harant、S. Richter，独立集的一个新特征值界，离散数学 338 (10) (2015) 1763–1765.[19] S. Kirkland、J. J. Molitierno、M. Neumann 和 B. L. Shader，关于代数连通度与点连通度相等的图，《线性代数及其应用》341 (2002) 45–56.[20] M. Lu、H. Liu 和 F. Tian，图的团数与独立数的拉普拉斯谱界，组合理论杂志B辑 97 (2007) 726–732。

[21] S. O、Y. Shi 和 Z. Taoqiu，给定最小度和最大度的图中 k-独立数的精确上界，Graphs Combin. 37 (2021) 393–408。