arXiv:2301.02987v1 [cs.NE] 8 Jan 2023

MathMods Erasmus Mundus Program

University of L'Aquila

University of Hamburg

University of Barcelona

Master Thesis

神经网络模型

作者：普拉门 Dimitrov

顾问：莱昂纳多教授 Guidoni黛博拉教授 Amadori

2023年1月10日

摘要

本文介绍了当前与神经网络相关的数学模型汇编，并提出了一种结构和动力学更为复杂的新模型族，以实现一系列认知能力。首先，本文概述了生物神经网络的形态学和生理学基础，以及人工神经网络的发展历程与现状。接着，第一部分综述了所有当前的数学模型及其部分衍生性质。第二部分则提出一种新的模型族，将其与其他模型进行比较，并从解析和数值两个方面加以发展。最后，讨论了其他重要方面以及未来需要解决的局限性。

目录

1 背景 3

1.1 引言.31.2 生物神经网络.51.3 人工神经网络.10

2 神经网络的数学模型 16

2.1 逼真神经元模型.162.1.1 基于电导的模型.162.1.2 多区室模型.192.1.3 简化电导模型.202.2 最小神经元模型.212.2.1 脉冲（脉冲式）模型.222.2.2 发放率（基于发放率的）模型.242.2.3 群体模型.262.2.4 二元模型.292.3 扩展至网络.292.3.1 活动——势动力学研究 . . . . . 292.3.2 连接关系——突触可塑性研究 37

3 提出的模型 42

3.1 公式化.423.1.1 模型族的构建.423.1.2 模型族的动机.513.2 数学分析.543.2.1 通用逼近.543.2.2 扩展图解释.563.2.3 相空间分解.613.2.4 网络基元研究.693.3 数值实现.883.3.1 特征检测器.883.3.2 目标跟踪器.913.3.3 模式分类器.93

4 讨论 99

4.1 其他考量.994.2 当前局限.1014.3 未来发展.101

附录 103

参考文献 112

1 背景

1.1 引言

大脑是唯一一种孕育出众多学科的人体器官；这些学科源自截然不同且彼此独立的研究路径，并各自聚焦于此，却并未真正交汇形成共同理论。诸如.....这样的科学学科

- 心理学
- 行为科学
- 认知科学
- 精神病学
- 人工智能
- 机器学习
- 神经病学
- 神经科学
- 神经解剖学

都致力于研究这一器官的不同方面。心理学类科学采取更高层次（符号层面）的方法，而神经解剖学类科学则采取较低层次（电路层面）的方法。人们希望两者能在中间某处交汇，通过较低层次的生理学和形态学特征，充分解释较高层次的认知现象。然而，这至今尚未实现；而一旦实现，就如同终于建立起一套全面而连贯的理论，解开那些目前只有哲学领域才会提出的有关人类心智的疑问。

人工智能和机器学习等更偏重工程的领域，介于两端之间，试图通过更抽象的方法（Lisp、A*搜索）以及模拟大脑自然结构的方法（人工神经网络、新认知机）来再现高层次现象。这些领域的最终目标，是让所实现的算法具有某种实用价值——无论是图像、语音或文本识别与分类等依赖人类的任务，还是自动驾驶汽车和实时翻译。这些领域通常致力于为特定任务开发算法，力求在特定的、普遍认可的数据集上达到最高准确率。为此，只要在给定数据集上取得良好的实证结果，通常就足以促使人们采用所开发的技术，而这也使得所实现的算法日趋专门化。然而，神经科学中的许多研究结果表明，存在一种通用方法，它有望成为人工智能各个应用领域的解决方案——从语音和图像识别到语言理解与翻译 [73, 5, 72]。尽管高度专门化的实现方案在特定应用领域中表现更好，但人们必须

进而倡导对更普遍的认知行为进行建模和再现，并运用更严谨的数学方法，从这种普遍性中得出有益的结论。

然而，构建这样一种通用算法并非易事。这也是人工智能领域屡遭失望、兴趣消退并受到严厉批评的原因之一，这些时期通常被称为人工智能寒冬。要构建某种事物，就应当彻底理解它；而对大脑缺乏全面或至少充分的理解，是人们屡次尝试解释大脑的主要原因之一。图1 只是对同一问题的众多描绘之一——每个

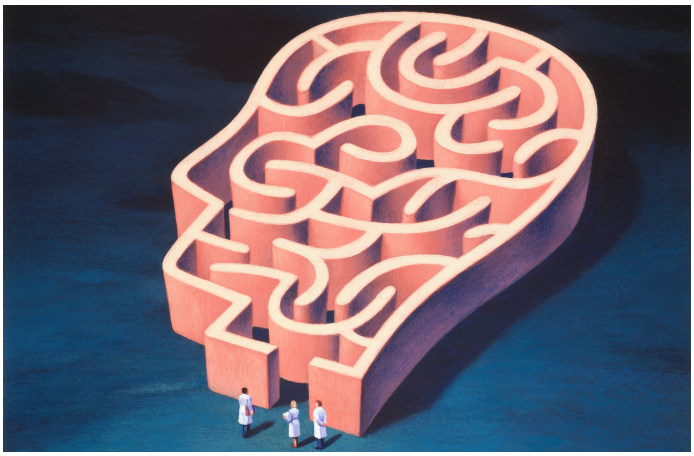


图 1：从许多不同的科学角度研究大脑的复杂度，最终会使所有参与者各自迷失方向。

每门学科都像一道闪光，照亮同一个庞大物体的不同角度，但没有任何一道光能看清它的全貌，也无法看出它究竟有多大。而且，对必须面对的种种局限的认识，远不只局限于工程领域。在精神病学中，使用精神科药物会带来许多副作用，因为用它们治疗复杂的精神障碍，有点像想换汽车发动机油，却打开油罐把油倒在整个发动机机体上——有些油会滴进正确的位置，但更多的只会弊大于利 [3]。纵观过去几个世纪医学的发展，这就是当今解决与大脑有关的神经系统问题的方式。神经科学领域的整体进展，例如功能性磁共振成像，对于确定大脑中受特定刺激激活的区域确实很有帮助，但这种脑图十分粗略，而且依据的是血液密度增加，而不是实际的神经元脉冲。即使我们能够记录每个神经元每一次脉冲的完整历史，并储存整个神经回路或连接组，正如 [1], 所提出的那样，仅从行为可能种类极少、例如果蝇这样最简单的生物体的大脑中生成的数据，就会包含约 10^4

个神经元供分析。

因此，务必不要低估这里涉及的困难。尽管如此，仅仅是这种通用方法存在的可能性就足够吸引人，因此我们希望朝这个方向迈出一步。具体而言，我们将考察上述科学领域中的数学建模框架，并以神经网络为重点，因为它们是这些领域共同的最低公分母。我们将研究主要神经元模型及其衍生过程，并在探讨中附上相关网络模型的更多参考资料。以此为起点，我们将提出一类模型，并根据它们必须表现出的认知行为来为其提供最充分的依据。我们汇集了这些认知现象，并期望它们具有足够的普遍性，能够被塑造成适用于不同应用领域的解，例如前文提到的那些领域。模型的有效性取决于这些要求是否有效；我们将通过所构建的模型，从分析和数值两个方面深入研究这一点。我们会在最后一节讨论这一问题；但为了能够概述现有模型，本节首先需要补充一些相关生命科学和计算科学的背景知识。

1.2 生物神经网络

人脑主要由 1000 亿个神经元细胞构成，每个神经元又与约 10000 个其他神经元相连。因此，由此形成的网络在可能性和解释方式方面都具有极大的潜在复杂度。许多人称其为地球上、甚至可能是宇宙中最复杂的机器 [46, 18]。除了连接关系可能组合出的庞大数量外，神经元还分化为许多不同类型，承担不同功能，而且远非构成大脑的全部。大脑中还存在其他类型的细胞，估计其数量甚至是神经元的五倍（占大脑细胞的 90%），即若干种神经胶质细胞。它们在维持神经网络、神经发育以及生成髓鞘方面发挥着关键作用；髓鞘用于绝缘，也是神经冲动快速传导的主要原因之一。尽管这些细胞具有不可或缺的支持作用，我们在此不作进一步讨论，而是聚焦于主要的通信基础设施。本节将首先概述神经元的形态学与生理学——神经元是大脑中最基本的节点或元素；随后简要介绍单个神经元如何以成对、网络及系统的方式彼此通信；最后讨论可塑性，这是神经网络最具代表性的特性之一。

大脑中的 1000 亿个神经元具有许多共同特征。这些神经元在解剖结构上存在很大差异，但其总体形态学特征以及电学和配体依赖性响应，使这些细胞可归类为神经元 （该术语由 Wilhelm von Waldeyer 于 1891 年创造） [56]。神经元与大多数其他细胞不同，因为它们具有极性，并拥有不同的形态学区域，且各自具有特定功能。

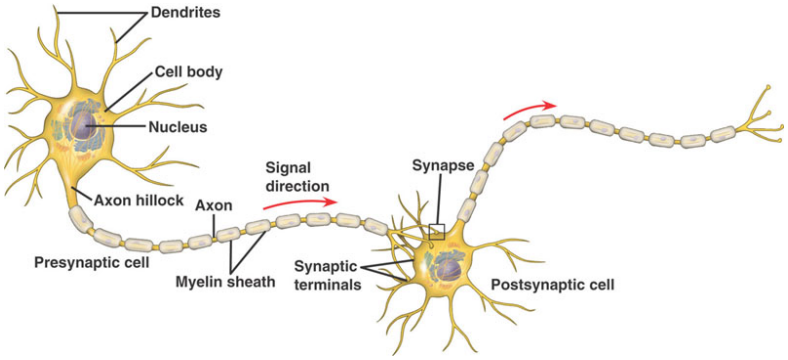


图 2：神经元形态与生理学。

神经元通常具有一个中央细胞体或 胞体，其形状各异。胞体包含细胞核，以及大部分基因组表达和合成机制，负责生成构成神经元细胞质和细胞膜的蛋白质、脂质和糖类。一般而言，神经元的胞体延伸出输入和输出，如图 2所示。

神经元接收其他神经元连接的区域，即输入端，由胞体细胞膜向外延伸、广泛分支的树状结构组成，这些结构称为树突 （该名称由威廉·希斯于 1889 年创造，源自希腊语 dendros，意为“树”）。在图中所示的脊椎动物神经元中，树突直接从细胞体伸出；而在无脊椎动物神经元中，树突则从轴突伸出。此外，在大多数神经元中，胞体也是接收部位。

输出端称为轴突 （该名称由鲁道夫·阿尔伯特·冯·科利克于 1896 年创造），它从胞体（偶尔也从树突）以单一结构伸出。轴突传导传播中的电化学信号，称为动作电位 （也称尖峰或冲动）；这些信号通常在轴突基部或轴丘 处触发，并从胞体向外传至神经元的末梢 区域。轴突可能相当长，在某些人类感觉神经细胞和运动神经细胞中可延伸约一米。轴突末梢区域的突触 是一个神经元与另一个神经元形成连接的部位；后者称为突触后 神经元，而前者相应地称为突触前神经元。信息通过突触传递过程传递。

然而，值得注意的是，这些关于神经元组织方式的一般规则有许多例外。有些树突也可充当输出系统 [69]。在某些神经元中，例如外周感觉神经元，输入是经由轴突传递的。神经元可以有多种分支形式，也可以完全没有分支，例如颈动脉球中的受体细胞、脊椎动物舌头味觉系统中的受体细胞，或视网膜中的光感受器 [56]。

最后一个重要的形态学特征是，突触前细胞与突触后细胞并未直接连接——二者之间存在一个间隙，称为

突触间隙。因此，突触前神经元与突触后神经元之间的通信（突触传递）是通过一种神经递质实现的，即一种化学信使：它在突触前末梢通过动作电位释放（这一过程称为胞吐作用），随后在突触间隙中扩散并与选择性受体结合。受体结合会导致细胞膜中离子通道的通透性发生变化，进而使突触后神经元的膜电位发生变化，这种变化称为突触后突触电位（突触后电位，*PSP*），随后可能在突触后神经元中引发动作电位。由此可得出结论：神经元之间的信号传递与其电生理特性的变化有关。

现在，让我们进一步介绍有关神经元电生理特性的一些细节和重要术语。突触前动作电位引起的突触后电位（PSP）变化，可能是细胞膜极化状态降低，称为去极化；也可能是极化状态升高，称为超极化。在没有任何突触前刺激时，突触后细胞内侧相对于外侧的膜电位约为 -60 mV，称为静息电位。超极化会使细胞内的电位变得更加负，而足够强的去极化则会触发动作电位。动作电位伴随着极其迅速的去极化，在短短 0.5 毫秒内达到约 $+40$ mV 的峰值 [6]。达到峰值后，紧接着是同样迅速的不应期，在此期间神经元无法被兴奋；这一过程还伴随着一个复极化阶段，从而完成一个去极化-复极化周期。

引发动作电位所需去极化达到的电压称为阈值。多个突触前脉冲可使膜电位发生较小变化，并随时间累积（时间总和与树突区域上的空间总和合称突触整合）；也可以由单个超阈值脉冲达到阈值，但由此产生的动作电位在幅度、形状和持续时间上都相同。即使输入刺激引起的去极化远大于阈值，动作电位也不会发生变化。突触前脉冲也可能引起超极化，从而减小突触后侧动作电位的变化。因此，突触后电位可分为兴奋性突触后电位（*EPSP*）和抑制性突触后电位（*IPSP*）：前者负责引起去极化，后者负责引起超极化。IPSP 之所以称为抑制性突触后电位，是因为它会阻止突触后神经元产生动作电位，从而调节兴奋性信号引发这一事件的能力。由此可见，突触传递有两种基本形式，即兴奋和抑制。

一般来说，突触前细胞中的单个动作电位不会产生足够大的兴奋性突触后电位，无法达到阈值并必然触发动作电位。但持续时间较长的阈下刺激也可能引发多个动作电位（尖峰序列或脉冲序列），其频率取决于

刺激的强度。感受器细胞也是如此，无论是触压还是光照强度；运动细胞也一样，其输出频率决定了肌肉的收缩程度 [56]。这一点，再加上动作电位具有相同的特性，表明神经系统通过各向同性脉冲的频率而非其振幅和形状来编码信息。

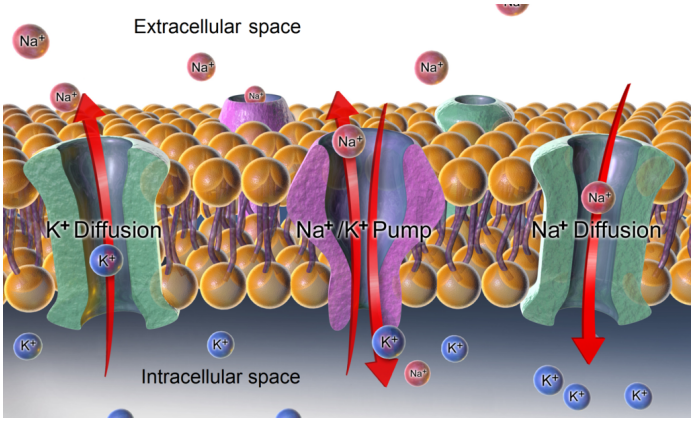


图 3：离子门由离子泵和离子通道构成。离子泵维持细胞膜的非平凡平衡电位，而离子通道则负责神经元的主动电特性 [63]。

动作电位的产生是神经元主动电特性的一个例子，因为它们是通过主动的、电压依赖机制产生的 [56]。更具体地说，突触前侧的神经递质释放会激活离子通道，从而可能影响膜电位。神经元的被动电特性对于描述后续章节数学模型中的整体动力学也非常重要。细胞膜由双脂层构成，几乎是完美的绝缘体，但其中嵌有作为蛋白质的离子门。这些离子门可以是离子泵或离子通道。此外还有非门控“漏”通道（始终开放、可透过钾的通道）。我们提及这些通道是为了完整起见，但后文只考虑离子门。

离子泵会持续消耗能量，将离子从细胞膜的一侧转运到另一侧（具体取决于所转运的离子及相应的离子泵，例如，细胞内钠离子浓度较低，而钾离子浓度较高），并通过神经元内外离子浓度的差异维持电压差。当两侧之间不再有离子流动时，离子通道便达到平衡。在单一离子占主导地位的系统中，平衡时的膜电位就是该离子的反转电位／能斯特电位 。中枢神经系统中的主要离子包括钠、钾、钙和氯离子。

与神经元的形态学类似，其生理特性也有许多例外。尽管大多数离子（电压门控）通道的电导会因膜去极化而增加，但有些通道的电导会在细胞膜超极化时增加。除了轴突尖峰，动作电位也能沿树突传播，或朝胞体方向传播（向心尖峰），或远离胞体并到达最远端的树突分支（离心尖峰）；其传播方向主要取决于离子通道在树突树上的分布。轴突也可以在尖峰传播初期分支，形成并行通路；或者在稍后分支进入远端树突。这两种情况下都会产生非常相似的脉冲序列，但由于轴突直径不同且可能发生尖峰传导失败，传导结果也会有所不同。

现在让我们从网络层面来看，更具体地说，看看实验中可观察到的几种常见网络连接类型。大脑的所有区域都存在三大类连接——前馈 （自下而上）连接将激活传递给处理路径上更靠后的神经元，而这条路径始于外部输入；侧向 （循环）连接用于在处理路径上被视为处于同一阶段的神经元之间进行通信；反馈（自上而下）连接则将激活传回。前馈连接和反馈连接的数量通常相当，而侧向连接的数量则多于前两者。前馈网络 仅由前馈连接构成，不允许出现回路；循环网络 也包含侧向连接；而全循环网络 允许所有神经元之间存在任意方向的连接。这也就是为什么谈到全循环网络时，人们只谈连接，而不再考虑整体分类。

为了完整描述大脑中的各种解剖组织结构，我们必须纳入对系统层级结构的说明。后文介绍的任何网络模型，重点主要在于新皮层回路，因此我们将简要概述新皮层的一些主要组织结构。新皮层是大脑皮层外层，也是进化过程中较晚形成的部分。尽管新皮层，或简称皮层，可在水平方向划分为四个脑叶，分别负责不同的认知功能和模态，但它们的精细结构彼此相似；这一点使其与脑干等较古老的大脑部分显著不同。 [83]新皮层的结构由六层（根据计数方式也可能为十层）组成，其中第四层通常被视为输入层（因为白质传入纤维数量占主导），而第五层主要向外投射，因此被视为输出层。白质主要由轴突构成，连接相距较远的区域，这意味着它必然承担全局通信的功能。第二层和第三层被认为负责长距离的横向（层内）通信。第六层神经元则大多投射至第一层。神经元还排列成柱；人们认为柱是功能单元（柱内的神经元储存冗余信息），因为这些柱内及柱间都呈现出相似的连接模式。

最后，也许神经网络最重要的特性，也是其长期进化优势的来源，在于其突触可塑性。突触传递效能持续（十分钟或更久）增强，称为长时程增强（*LTP*）；同类效能降低则称为长时程抑制（*LTD*）。实现此类突触可塑性的生理和生物物理机制可能有多种，包括释放位点数量、神经递质释放概率、递质受体数量，以及离子通道电导和动力学的变化；多篇论文已在特定细胞类型中证实了这些机制[83]。此外，研究人员还在一些细胞中通过实证观察到脉冲时序可塑性和钙依赖性可塑性，后文将进一步探讨部分模型和学习规则中的相关内容。

1.3 人工神经网络

毫无疑问，许多与神经网络相关的模型都是缺乏严格数学处理的算法，但它们在特定任务上却能达到非常高且可测量的准确率。这些模型属于机器学习领域中的计算模型，值得在此作简要介绍，同时也介绍后续章节中涉及的计算术语。随着这类算法或人工神经网络（*ANN*）日益先进、复杂，我们也应努力更严谨地理解它们，而不只关注其生物神经网络对应物。我们将首先概述机器学习中使用的基本术语和概念，因此这些内容对人工神经网络以及我们之后的数值实现也很重要。随后，我们将转向经典思想与发展历程，并介绍其借助深度学习取得的最新拓展。最后，我们会介绍一些针对所有这些计算模型的现有批评。

所有机器学习算法都基于归纳，而非（例如数学上的）演绎。正如该学科名称所示，这些算法通过经验数据学习执行特定任务，而这些任务无法以任何直接明了的方式通过算法加以指定。如果它们进行的是有监督学习，那么任务就是根据输入值预测输出值或标签；输入是由输入—输出值对构成的示例训练集。之所以称为有监督，是因为训练标签会教网络正确答案；相较之下，无监督学习则不提供这些答案。此外还有介于两者之间的范式，例如强化学习：它不提供正确答案，但此时称为智能体的算法仍会从环境中收到奖励或惩罚形式的反馈；还有半监督学习，它在训练阶段结合有监督和无监督方法，同时使用有标签和无标签数据。

有监督学习中的两项主要任务是分类，即算法必须预测一个离散标签值；以及回归，即该值是连续的。因此，有监督学习被定义为：根据有限个已知值，近似所有可能输入上的一个函数。尽管这一点在统计学中也得到了深入研究，但这里的重点是寻找能够逐步学习（近似该函数，并利用它为新的输入预测标签）的算法，使其在所有数据上实现最佳泛化。而这

一问题也在统计学中得到了深入研究，这里的重点是寻找能够逐步学习（近似该函数，并利用它为新的输入预测标签）的算法，使其在所有数据上实现最佳泛化。为此，除了训练集之外，通常还会使用测试集，以避免过拟合，即在训练集上表现过好，而在“全新”的测试集上表现差得多。欠拟合是另一种风险，不过通常较小。过拟合通常由自由参数过多或训练集过小造成，因此也可以通过一种称为交叉验证的技术加以缓解。该技术通过划分训练集，在每个分区上进行测试、在其余部分上进行训练，从而获得验证误差，帮助选择这些参数。随后，便可以在机器学习领域共享且广为人知的标准化数据集上，根据准确率或测试误差比较算法的性能。无监督学习的主要任务包括聚类（尽管输入没有明确的标签，仍可以推断它们之间的相似性）、降维（移除不必要的信息，以便于解释；对于人工神经网络，则是通过自编码器执行压缩），以及异常值检测。

令人惊讶的是，有多少实际应用（从道路导航到语音识别）都可以转化为上述任务，而且所有这些任务也都能由人工神经网络以及许多其他机器学习算法出色地完成。至少在经历了多次因其已显现的局限性以及人工智能领域典型的早期能力高估而遭到弃用之后，情况确实如此。

最早朝着对神经系统进行纯计算研究方向发展的重要工作，是由神经生理学家 Warren McCulloch 和数学家 Walter Pitts 完成的。他们展示了一个简单的神经元模型（即输入的阈值求和，后文也将对此进行描述）能够重现基本的与/或/非逻辑函数 [62]。这项工作极具影响力，尤其是因为当时人们相信逻辑推理能够解决人工智能问题 [50]，但它缺乏学习这一关键能力，因此后来由神经生物学家 Frank Rosenblatt 在其 感知机 模型中加以扩展，引入了权重（以及偏置项，其作用类似于直接注入神经元胞体的电流），从而使一个输入能够比另一个输入产生更大的影响 [75]。

他所采用的学习指导原则，基于心理学家 Donald Hebb 的另一项基础性研究。Hebb 推测，突触变化由突触前神经元和突触后神经元的相关活动驱动，也就是说，一起放电的神经元会连接在一起 [34]。更形式化地说，如果神经元 A 的放电经常通过某个突触促使神经元 B 放电，那么从神经元 A 到神经元 B 的突触强度就会增加。赫布学习 通常就是对这一推测的称呼，它还可以通过多种方式加以推广，其中一种方式是：如果神经元 A 反复未能促使神经元 B 放电，也降低该突触的强度。

随后，感知机会通过沿着误差减小的方向重新调整权重来学习：如果其输出与期望标签不匹配，就调整权重，从而使期望输出与实际输出更加相关。由于存在求和阈值化

或对输入之和应用激活函数，感知机能够执行二元分类；通过为每个类别添加一个单元 或神经元来构成一个层，还可以将其扩展为多类别分类。该层是一个输出层，与输入全连接；由此形成的两层网络是人工神经网络（ANN）最典型的例子之一，即用于近似向量值函数的感知机人工神经网络。因此，对输入状态向量进行分类的一种方法是，在各个输出中选择加权和最大的那个。

Widrow 和 Hoff 的*ADALINE* [87]是对生物学合理性更大胆的偏离。尽管它的主要贡献在于通过记忆电阻器（记忆电阻器）在电路中实现神经元，但它也探索了彻底简化感知机的可能性：去掉激活函数，只输出每个神经元的加权和。这种线性形式在数学上更易于研究，因为它消除了模型神经元中的跳跃间断点和非线性。此外，学习／近似问题可以重新表述为优化问题，并利用误差的导数进行随机梯度下降或其他梯度下降。

尽管连接主义认为复杂计算可以由许多彼此连接的简单单元完成，这一思想伴随着最初的计算模型出现，但这些模型本身在计算能力上存在根本局限。例如，对感知机的一项主要批评是，它无法复现异或逻辑函数，因为这违反了线性可分条件 [66]。解决这一问题、扩展感知机并最终走出第一个人工智能寒冬的方法，是加入隐藏层并采用反向传播学习。如果在输入层与输出层之间设置多个层，负责多个层次的抽象和特征提取，就能执行复杂得多的计算，包括近似异或函数。由于上文所述的第一种权重优化方法不再适用（我们只知道输出层的误差），因此，利用链式法则将误差从输出层反向传播至所有隐藏层的权重，把修正量拆分并重新分配到整个网络中。这种方法与多层人工神经网络更强的计算能力一同，在一系列论文中得到了展示，其中最著名的是 Rumelhart、Hinton 和 Williams 的论述 [76]。一项具有重大数学意义的成果，为彻底解决各种近似问题提供了依据：证明多层人工神经网络是通用近似器，也就是说，只要中间层有足够多的隐藏单元，它们就能以任意精度近似有限维空间之间的任意博雷尔可测函数 [42]。

采用反向传播学习的多层人工神经网络是目前最先进的人工神经网络。这类网络在经历第二次人工智能寒冬后，经过少量修改，以深度神经网络或 *DNNs*的形式重新出现。这些修改包括更加谨慎的权重初始化以及激活函数的选择 [28]。最早讨论“深度学习”的论文之一同样出自 Hinton [36]，其主要研究了 DNN 的一种变体，即下文所述的“深度信念网络”；该网络通过逐层进行最优训练，

采用半监督学习（使用无监督学习初始化权重）。这类人工神经网络/DNN 变体正是本节余下部分将要讨论的内容。人工神经网络的主要分类基于此前对前馈、循环和全循环网络的连接关系分类。随后，DNN 的变体又依据模态专门化（用于视觉输入的 CNNs、用于序列输入的 LSTMs）和连接关系（作为全循环网络的 DBNs）进行分类。

作为一种在计算机视觉领域表现出色的人工神经网络/深度神经网络变体，卷积神经网络（*CNN*）最初由 LeCun 应用于手写邮政编码识别 [52]。CNN 带来的主要实用改进是加入了卷积层：不同于每个神经元都为其每个输入配置独特的权重，这种结构让神经元在前一层中多个互不重叠、大小相同的子区域上使用相同的权重（并以相同方式调整这些权重）。这样一来，我们就不必让多个神经元分别学习相同的特征，例如特定的边缘方向；神经元的选择性也因此不再受特征在图像中位置的影响。这一设计的灵感源自 Fukushima 的新认知机 [24]，而新认知机又受到 Hubel和Wiesel 关于视觉神经系统层级组织的实证研究的启发 [45]，因为他们观察并建模的复杂细胞具有一定程度的空间不变性。另一项实用改进同样借鉴了其中对边缘敏感的简单细胞、复杂细胞和超复杂细胞的层级排列方式，即加入池化层作为一种下采样方式，将一层映射到尺寸更小的后续层。如此一来，自由参数的数量随之减少，过拟合的可能性和训练时间也因此降低；与此同时，后续层中的神经元能够“看到”前一层的特征，从而对应于原始输入图像中更大的区域。

ANN/DNN 的另一种较为成功的变体是深度信念网络（*DBN*），顾名思义，它能够对感知到的输入形成内部表征。DBN 的理论基础是玻尔兹曼机，这是一种图模型（图），通过基于能量的学习进行学习，其中节点是隐随机变量和可见随机变量，而可见变量决定隐变量的概率。玻尔兹曼机最重要的对称性特征是：可根据隐变量（输出）计算可见变量（输入）的概率，从而能够从内部表征生成原始输入。这类模型称为生成式图模型。深度信念网络由多层受限玻尔兹曼机组成（仅具有前馈／反馈连接），由 Hinton、Neal 和 Dayan 提出，之后又由他们提升了性能。在后续论文中，他们加入了识别权重（前馈）和生成权重（反馈），并提出了用于无监督训练的“唤醒-睡眠”算法 [35]。

循环神经网络的一种变体，擅长处理文本或语音识别等序列信息，称为长短期记忆网络（*LSTM*）。它相较于此前的竞争者具有显著优势，例如时间——

延迟神经网络（在滑动窗口内的多个离散时间点使用不同权重），以及通过时间反向传播的循环网络；后两者无法学习长期信息——前者是因为窗口长度固定，后者是因为深度学习中反向传播的局限性 [50]。由 [38] 提出的 LSTM 解法包含一种称为恒定误差环（CEC）的特殊单元，它们具有激活函数、恒等函数，以及一个权重为 1、连接到自身的连接。0。这样一来，作为恒等函数导数的误差（链式法则）不会随着时间推移而消失，网络也能发现并学习时间上相隔很远的相关性。随后，CEC 与多个非线性自适应单元相连，这些单元可能具有乘性激活函数，用于学习非线性行为。

所有这些模型中一个反复出现且经常受到批评的问题，是其生物学合理性 [15]。由于它们纯粹是计算模型，因此会针对 MNIST、ImageNet、TIMIT 等可比数据集上的准确率进行优化。由于它们不一定对自然现象进行建模，而只是从中汲取灵感，因此只要能够实现最初的目标，就可以根据需要偏离自然现象，从而获得工程自由度。与此同时，生物相似性正是神经网络区别于随机森林和支持向量机等其他机器学习技术的特征；后者同样能够实现非常高的准确率，但并不假设具有这种相似性。从这个意义上说，人工神经网络处于取自自然的特征与源于工程创造力的特征之间的中间地带。如何平衡二者，会对每个计算模型的最终性能产生很大影响。因此，诸如

- 人工神经网络的反向传播学习
- 卷积神经网络固定大小区域上的相同权重
- 深度置信网络的概率性（尽管不一定如此）反馈连接
- LSTM 的 CEC

都可以有更自然、更普遍的解释。如果确实需要进行计算上的简化，最好还是尽可能寻找最自然的解，并明确说明任何不可避免的计算简化。

其他重要的批评意见涉及这些模型大多缺乏反馈连接，以及灾难性干扰/遗忘这一现象：全新的输入模式可能会导致已经学会的模式被迅速遗忘。考虑反馈连接或许很重要，至少因为经验观察表明，反馈连接的数量大致与前馈连接相同。然而，大多数人工神经网络模型都忽略了它们，这意味着忽视了生物神经网络整体动力学的重要组成部分。还有一类完全循环的网络，其研究方向与深度神经网络截然不同；为求完整起见，我们在此仅提及自组织映射（SOM），也称科霍宁映射。

[49] 以及主动共振理论（ART）提出的模型 [8]。ART 方案也解决了灾难性干扰问题，但在统计上不一致，并且采用集中式策略（而非并行且完全局部的策略）。我们所说的局部策略，是指仅利用突触或神经元内部完全局部的信息，而不使用任何关于网络状态的全局信息。因而，更自然的解或许类似于群体智能（SI）：通过去中心化决策形成复杂的自组织系统。

2 神经网络的数学模型

2.1 真实神经元模型

在回顾神经元模型时，我们主要介绍其数学表述，有时也会涉及模型的构建。对于任何进一步的数学研究，我们都会列出开展该研究的主要参考文献。此外，我们还会提及认知科学中的一些预测及与之吻合的观察结果，并提供相关主要来源，以便读者深入探究。

在神经元建模及由此产生的神经网络建模中，最重要的任务之一，是在多种不同的生物学可信度层级中作出选择，同时捕捉神经元的关键特征，以实现预期认知层级的行为。认为我们越贴近复杂的经验现实，就越有可能实现目标，这种看法并非全然错误；但在大多数情况下，实践中仍难以奏效，因为计算资源有限，而且我们所纳入的复杂度可能存在多种解释。然而，即便已有各种经过简化、力求降低计算成本的模型，并且这些模型都选择了保留哪些特征、舍弃哪些特征，神经元的关键特征仍可能存在于更真实的模型中。因此，将这些神经元模型也纳入讨论十分重要。

2.1.1 基于电导的模型

生物学细节最丰富、同时又足够通用的神经元模型，是那些包含由流经细胞膜离子通道的电流所引发动力学的模型。膜电导由此产生动作电位，并成为这类模型的主要关注点。霍奇金-赫胥黎神经元的提出 [39] 是计算神经科学领域的里程碑，也是许多简单扩展的起点，因此在任何神经元基于电导的模型研究中都不可忽略。研究乌贼巨轴突时，霍奇金和赫胥黎发现了三种电流：钠电流、钾电流，以及一种氯离子漏电流[−]，它也涵盖了其他通道。由于脂质双层细胞膜将细胞体内外的离子隔开，因此起到电容器的作用。由于离子泵造成离子浓度差，进而产生非零平衡电位（能斯特电位），因此起到电池的作用。来自离子通道的三种电流与为电容器充电的电流，共同构成总施加电流。

$$I(t) = I_C(t) + \sum_{k=1}^{3} I_k(t) = I_C(t) + I_{Na}(t) + I_K(t) + I_L(t) \tag{1}$$

我们可以利用上述类比，轻松地构建一个被动神经元的膜电导方程，即仅包含 I_C 和 I_L 项:

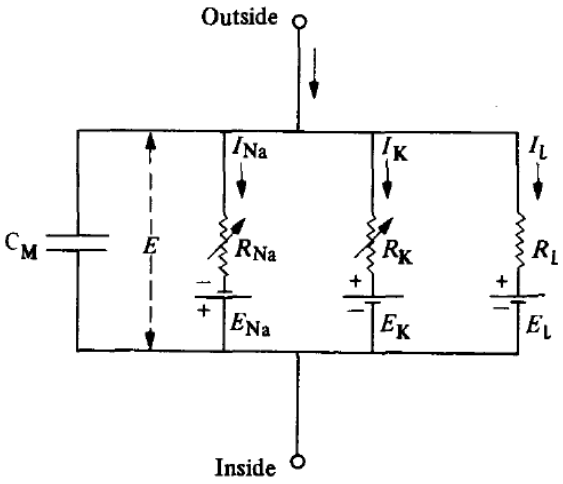


图 4：所示霍奇金-赫胥黎神经元模型的等效电路 [39]。

电路。根据电流的定义 $I = dQ/dt$ 和容量的定义 $Q = VC$ 其中 Q 是电荷，V 是电压，而 C是电容，我们可以得到 $I_C = dQ/dt = CdV/dt$。根据欧姆定律$V - E = \Delta V = IR$ 其中 E 是静息电位（被动膜的稳态电压），而 R 是漏通道的电阻，因此可得$I_L = \Delta V/R =$ （$V - E$）$/R$。随后，根据电流守恒 $I_C + I_L = 0$即可得到被动膜方程。每种离子通道都具有与漏通道类似的方程，并且可以用电导（即电阻的倒数） $g_L = 1/R$ 来简化记法。唯一的区别是，漏通道的电导为常数，而其他通道可以开启和关闭，因此其电导取决于时间和电压。这意味着我们可以直接使用它们的最大电导 g_{Na} 和 g_K，再乘以一个介于0和1之间的数，用来表示离子通道开启的概率。然后，我们可以展开电流并重新整理（1），得到

$$C\frac{dV}{dt} = I_C(t) = I(t) - (g_{Na}m^3h(V - E_{Na}) + g_Kn^4(V - E_K) + g_L(V - E_L))$$

其中，钠通道有两个系数（门控变量） m 和 h，因为它们有激活门和失活门，并且所有此类系数都进行了幂次运算，以匹配实验数据。 E_{Na} 和 E_K 现在是反转电位，而量 $V - E_K$ 则是每种离子的驱动力。为了完善模型，我们添加微分方程来控制三个门控变量，这些方程

基于蛋白质动力学，具有激活速率 α 和失活速率 β:

$$\begin{cases} C\dfrac{dV}{dt} = I(t) - (g_{Na}m^3h(V-E_{Na}) + g_K n^4(V-E_K) + g_L(V-E_L)) \\ \dfrac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m m \\ \dfrac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n n \\ \dfrac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h h \end{cases} \tag{2}$$

霍奇金和赫胥黎提出的这个模型抓住了钠和钾离子通道产生尖峰的本质，但也很容易扩展到其他类型的离子通道。生物学真实性的拥护者只需为新离子通道的动态添加一个方程，并在主方程的求和中加入一项，就可以得到一个一般形式的系统:

$$\begin{cases} C\dfrac{dV}{dt} = I(t) - \sum\limits_{k=1} I_k(t) = I(t) - \sum\limits_{k=1} g_k m_k^{p_k} h_k^{q_k}(V-E_k) \\ \dfrac{dm_k}{dt} = \alpha_{m,k}(V)(1-m_k) - \beta_{m,k}m_k \\ \dfrac{dh_k}{dt} = \alpha_{h,k}(V)(1-h_k) - \beta_{h,k}h_k \end{cases} \tag{3}$$

各种模型中添加的离子通道包括:

1. 钠通道

   (a) 快速钠电流 I_{Na} 与 Hodgkin-Huxley模型中的类似。(b) 持续性钠电流 I_{NaP} 缺少失活门，因此没有变量 $h = 1$。

2. 电流为 I_K的钾通道

   (a) 常数为 1 I_{A1}的快速失活钾电流 (b) 常数为 2 I_{A2}的快速失活钾电流 (c) 常数为 1 I_{K2a}的缓慢失活钾电流 (d) 常数为 2 I_{K2b} 的缓慢失活钾电流

3. 带电流的钙通道 $I_{Ca^{2+}}$

   (a) 低阈值钙电流 I_T - 无失活门 (b) 高阈值钙电流 I_L - 去极化后通道会关闭的失活电流

这些因素的不同组合会产生不同的动力学，有些情况下仅在数量上有所不同，而另一些情况下在性质上也有所不同 [27]。低阈值钙电流就是一个很好的例子，它能够预测并解释抑制后反弹这一现象，即由抑制性输入引发的动作电位。另一个模型则是在此基础上加入快速失活钾电流，称为 Connor-Stevens 神经元模型 [14]。

2.1.2 多区室模型

提高神经元模型生物学合理性的第二种途径，是在细胞内部引入空间差异。复杂的神经元几何结构，以及不同区室之间自然存在的膜电位差异，都会导致不同的动力学行为，而此类模型可以将这些因素纳入考量。电流差异在细长的树突上尤其明显。若将上述模型视为单区室模型，那么下一步就很明确了：只需将神经元划分为不同区域，每个区域都由相同的单区室模型描述，但具有不同的离子通道浓度（势和门控变量）；此外，除了各区室离子通道产生的横向电阻外，还要在区室之间加入纵向电阻。当然，这一做法假设区室内部的势变化可以忽略，或者其造成的误差足够小，不会影响对结果的解释。

非分支电缆的一个例子如下：

$$C\frac{dV_m}{dt} = I_m(t) - \sum_{k=1} I_k^m + g_{m,m+1}(V_{m+1} - V_m) - g_{m,m-1}(V_{m-1} - V_m) \quad (4)$$

其中， I_m 是流入区室 m 的电流，最后两项分别表示与前一个区室和后一个区室的相互作用（在电缆末端的情况下，其中一项会缺失）。常数$g_{m,\ m'}$ 决定了从区室 m 到区室 m'的电导（因此也决定了电阻）。电流之和可以像式（1）中那样替换为离子电流，但每个区室的通道电导各不相同。随后，通过增添或移除与最后两项类似的项 [17]，即可将这种方法扩展到各种基于分支的耦合。

多区室模型也可以与更简单的单区室模型结合使用，例如后续章节介绍的LIF神经元；在将区室分辨率提高以模拟复杂的树突结构时，后者可以帮助应对由此带来的部分计算挑战。此类多区室模型的另一个主要缺点是自由参数数量众多，不同数值的多种组合都可能产生相同且合理的生物神经网络行为 [81]。

对细长的树突

电缆的势动力学，最佳近似方法是超越这类多区室模型，进一步采用电缆理论，即使用一种称为电缆方程的非线性扩散方程 [70]。随后，使用电缆方程而非一组常微分方程（上文介绍的较简单方法）的多区室模型，可以更准确地近似整个树突树上的势动力学，从而也能考虑单区室模型内部的空间变化。这类模型有时也称为 Rall型模型，其中一些模型做出了有趣且准确的预测，例如树突-树突尖峰[71]，但它们超出了本文综述的范围。

2.1.3 简化的基于电导的模型

上述模型具有极高的生物学细节，其一大优势是所有量都易于解释，并且能够与实验数据进行比较。然而，分析由这类神经元构成的网络时，一大缺点是仿真所面临的计算挑战，以及从整个网络层面解释这些模型的复杂度。为解决这一问题，一种主要尝试是降低完整基于电导的模型所表征的动力系统的维数，通常将其简化为二维系统，其中一个变量可大致对应膜电位，另一个变量通常称为“弛豫”变量。

最早提出、如今已成为经典的这类简化模型是 FitzHugh–Nagumo 神经元

$$\begin{cases} \dot{u} = c(v + u - u^3/3 + z) \\ \dot{v} = -(u - a + bv)/c \\ 1 - 2b/3 < a < 1, 0 < b < 1, b < c^2 \end{cases} \tag{5}$$

它可以由阻尼振荡器

$$\ddot{u} + k\dot{u} + u = 0$$

通过将阻尼常数替换为关于 u 的二次项，得到范德波尔振荡器

$$\ddot{u} + c(u^2 - 1)\dot{u} + u = 0$$

然后进行李纳变换 [22]。两个未知量分别为表示膜电位（或简称电压）的 u，以及表示恢复变量（也称适应或不应期）的 v； a、 b和 c 是在特定范围内的常数系数，而 z 表示外部输入刺激。

相平面分析表明，该模型保留了霍奇金-赫胥黎模型（2）的定性特征，即阈值-尖峰动力学、不应期、尖峰适应，以及在心肌兴奋中观察到的其他生理现象。当神经元受到足够大的扰动而远离静息电位处的平衡点时，基本上会在相空间中经历一次偏移，然后返回该平衡点。这条轨迹就代表神经元的动作电位。除了其

在较低维数下保留的特性，（5）也表明（2）是具有兴奋性和振荡行为的一大类非线性系统中的一个特例。

进一步的简化以5为基础，采用了多种方式。最广泛使用的此类模型是 Hindmarsch-Rose 神经元模型

$$\begin{cases} \dot{u} = v - F(u) + z - w \\ \dot{v} = G(u) - v \\ \tau \dot{w} = H(u) - w \end{cases} \tag{6}$$

其中，z 保留了输入刺激的含义，$F(u)$ 是三次多项式，而 $G(u)$ 是 u 二次多项式，二者均由 Fitzhugh-Nagumo 方程推广而来，但增加了第三个未知量 w，它渐近趋近于一个线性函数 $H(u)$ [74]。模型（6）可以再现所有复杂的神经元行为，前提是我们为 F、G和 H [48] 找到了正确的函数。

另一个因其参数精确且可测量而广受欢迎的模型是 Morris-Lecar神经元；而近期提出的 Izhikevich神经元则能很好地表示各种膜电位动力学，同时保持很高的计算效率，即

$$\begin{cases} \dot{u} = 0.04u^2 + 5u + 140 - v + z \\ \dot{v} = a(bu - v) \end{cases} \tag{7}$$

并带有辅助的脉冲后重置机制

$$\text{if } u \geq 30\text{mV then } \begin{cases} u \leftarrow c \\ v \leftarrow v + d \end{cases}$$

其中，u 和 v 分别是通常所说的膜电位和恢复变量 [47, 48]。根据 [48]，中的计算，本文介绍的所有简化电导型模型（也称为 Hodgkin-Huxley型模型）在模拟 1 毫秒时间窗时，性能至少比原始 Hodgkin-Huxley模型（2）高一个数量级（以每秒浮点运算次数或 FLOPS 计算）。与此同时，其中大多数模型都能够再现生物脉冲神经元最显著特征中的大部分。下一部分将介绍的最小神经元模型，仿真所需的 FLOPS 最少。

2.2 最简神经元模型

计算效率最高的神经元模型通常只保留膜电位的阈值动力学，有时也保留其亚阈值动力学。它们以抽象的方式描述这些动力学，完全排除了一开始导致阈值及亚阈值行为的电生理动力学。由于其方程形式简单，我们通常会立即将胞体输入分解为多个

突触前贡献之和，并指定这些贡献的性质以及神经元输出。

对于所传递信号或神经编码的本质，存在各种假设 [17]。神经元通过动作电位进行通信，这些动作电位几乎是完全相同的脉冲。因此，要最真实地模拟神经元之间的通信及由此形成的网络，就应保留这一特征。如果这类尖峰列的具体时间和频率并未编码重要信息，我们就可以通过对时间取平均并计算脉冲计数率来简化它们。由此得到的神经元模型称为放电率模型。如果局部神经元群体中并未编码重要信息，也就是说，这些神经元的响应几乎相同且连接关系相似，我们就可以在群体内取平均并计算群体率。由此得到的神经元模型称为群体模型。显然，缺乏时间编码（相互独立的尖峰）和／或群体编码（各个神经元相互独立的放电概率）是一项强假设，而一些实验结果已经与之相矛盾 [17]。

2.2.1 脉冲（脉冲式）模型

脉冲神经元模型被认为构成了神经网络的第三代，之前是基于率或连续型的第二代（下文将介绍），以及二进制第一代（下文最后介绍） [58]。尽管有这些大胆的主张，但这类模型在实现其预期应用——以足够高的层次再现认知现象——方面仍面临困难，原因主要也在于计算限制。

漏积分发放模型是主要的神经元模型之一，它将生物物理机制简化到最低限度，却能产生动作电位，最早由 [51] 提出。该模型在生理复杂性方面非常有限，但能较好地再现神经元的阈值现象和亚阈值动力学。

其推导与（2）的推导相似，但更简单。根据电荷守恒，这次对于 $k = 1$

$$I(t) = I_C(t) + \sum_{k=1}^{1} I_k(t) = I_C(t) + I_L(t) = C\frac{dV}{dt} + g_L(V - E_L)$$

并取较简单的静息电位 $E_L = 0$ 以及 $g_L = 1/R$

$$I(t) = C\frac{dV}{dt} + \frac{(V - 0)}{R} = C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}$$

最后，将其乘以 R，并将 $\tau = RC$ 替换为漏积分器的时间尺度常数

$$RI(t) = RC\frac{dV}{dt} + V = \tau\frac{dV}{dt} + V$$

最终的漏积分发放神经元公式如下

$$\tau \frac{dV}{dt} = -V(t) + RI(t) \tag{8}$$

此外还需满足以下条件：当 V 达到阈值 $V_{threshold}$ 时，将其重置为 V_{reset}，以处理神经元的阈值动力学。重置后，模型仍由同一个常微分方程支配，直到发生另一个离散的发放/重置事件。发放条件与漏积分（衰减至 RI 稳态）的结合，定义了漏积分发放神经元模型。

LIF神经元的一个主要问题是模型过度简化，且缺乏一些相当重要的动力学特征的可重复性，例如不应期（输入足够大时，神经元在上次发放事件后任意短的区间内都可以再次受到激发）和脉冲率适应（经验观察表明，面对持续较长时间的恒定输入时，神经元的放电频率不会降低）。另一方面，该模型足够简单，因此能够求出恒定输入下的显式解，这是一个难得且颇具价值的数学性质。有关这一推导，以及对该模型优缺点的进一步阐述，可参见 [17]。

LIF模型的一种直接扩展可以是如下的一般非线性积分发放模型

$$\tau \frac{dV}{dt} = -F(V(t)) + G(V(t))I(t) \tag{9}$$

具有相同的重置条件 [27]。式（9）的一个特例是二次积分发放模型

$$\tau \frac{dV}{dt} = -C(V(t) - V_{reset})(V - V_C) + RI(t) \tag{10}$$

经过变量变换后，它也可称为生物神经元的 theta模型（其在单位圆上的稳定性分析非常有趣，也包含在 [27]中）。

在产生动作电位的生物物理机制方面进行了最大程度简化的第二种主要神经元模型是脉冲响应模型（SRM） [25]。它由积分方程表示：

$$u_i(t) = \eta(t - t_i) + \sum_j w_{ij} \sum_k \epsilon_{ij}(t - t_i, t - t_j^k) + \int_0^\infty \kappa(t - t_i, s) I(t - s) ds \tag{11}$$

其中，索引为 i 的神经元具有一个单一的量 u_i，其静息值为 $u_{rest} = 0$，会对固定时刻 t_i 的突触前脉冲以及外部输入电流 $I(t)$（最后一项）作出响应。相对于神经元 i 的突触前神经元以 j 为索引，具有强度 w_{ij}，且每个神经元都有以 k 为索引、发生于以下时刻的尖峰

$t_j^k < t$。输入脉冲所引发响应的时间演变由 ϵ 表示，而动作电位和后电位的形式由 η 描述。将突触前神经元及其在先前时刻的尖峰求和后，如果数值 u_i 达到某个（不一定固定的）阈值 $\alpha = \alpha\,(t - t_i)$，就会触发一个输出脉冲。这里，$t_i$ 是固定的，表示最近一次动作电位发生的时刻

$$t_i = \max t_i^k < t$$

为加入不应期 Δ，我们只需在时间 $t_i + \Delta$ 之前将阈值设为一个很大的值。引入总 PSP 量后，记法可以简化为

$$h(t|t_i) = \sum_j w_{ij} \sum_k \epsilon_{ij}(t - t_i, t - t_j^k) + \int_0^\infty \kappa(t - t_i, s) I(t - s) ds$$

在这种情况下，模型变为

$$u_i(t) = \eta(t - t_i) + h(t|t_i) \tag{12}$$

关于 SRM 的进一步阐释及其性质，请参见 [27]。

漏积分发放神经元（LIF）是脉冲响应模型神经元（SRM）的一种特殊情况。为说明这一点，我们需要将 $V_i = u_i$ 取作 i号神经元的势，并将式（8）中的输入电流推广为

$$\tau \frac{du_i}{dt} = -u_i(t) + RI(t) = -u_i(t) + R(\sum_j w_{ij} \sum_k \beta(t - t_j^k) + I_i(t)) \tag{13}$$

其中，$I(t)$ 是施加于胞体的外部电流，而 β 是在时刻 t_j^k产生的突触后电流脉冲。关于这一比较的更多细节，也可参见 [27]。

2.2.2 放电率（基于速率的）模型

表示神经元间通信、进而表示神经网络的最详尽方式，是保留用于节点间通信的神经元脉冲，因为可能存在与时序相关的模式，例如同步放电和相关放电，以及只有通过这种通信方式才能捕捉到的动力学。然而，如果我们假设情况并非如此，就可以通过用放电率替代尖峰，大幅降低计算成本；这是因为参数数量和时间尺度都能减少，而且解析解释也会更容易。

动作电位在持续时间、振幅和形状上的变化非常小，因此在脉冲神经网络模型中通常会忽略这些变化，并将动作电位视为发生在单个时刻的相同事件 $0 \leq t_i \leq T$。于是，神经元响应函数 $\rho(t)$ 可定义为

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{n} \delta(t - t_i) \tag{14}$$

并可用于获得振幅由$h(t)$定义的任意响应序列，如下所示

$$\sum_{i=1}^{n} h(t-t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t-\tau)h(\tau)d\tau = \rho \star h \tag{15}$$

我们可以根据神经元响应函数（14），在连续统假设下推导出放电率（此处指脉冲计数率）：

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \rho(\tau)d\tau \tag{16}$$

或者，也可以根据 $\langle \rho(t) \rangle$ 得出，该值是对神经元受到相同刺激的多个实验试次取平均所得。从这个意义上说， $r(t)$ 也可以解释为放电的概率密度。

最基本的具有电流动力学的发放率模型可通过 [17] 构建:

$$\begin{cases} \tau_s \dfrac{dI_s}{dt} = -I_s + \sum_{i=1}^{N_u} w_i u_i = -I_s + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \\ v = F(I_s) = (I_s - \alpha)^+ \end{cases} \tag{17}$$

其中， u 表示输入放电率， v 表示输出发放率；向量$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别表示输入单元和输出单元的集合。 w_i 系数是突触的权重/强度，这些突触接收输入放电率 u_i ；此处它们为常数，但通常也可以随时间变化，以反映神经元可塑性。第一个方程将胞体处的总输入电流 I_s 与来自总共 N_u 个树突的发放率联系起来。这是一个简单的动力学方程，描述总输入电流以衰减的方式趋于稳态。第二个方程通过激活函数 F 将输出发放率 v 与总输入电流联系起来；该激活函数通常取为正部函数 $w_+(x) := \max(x, 0)$。这是一个瞬时方程，其中 α 起到阈值常数的作用。

需要注意的是，(17) 是对多种神经生理现象的简化且在一定程度上合并的版本:

1. 突触输入 i 的幅度和符号由 w_i 决定， w_i 也包含了突触前末梢释放神经递质的概率。2. 放电率 u_i 是实际脉冲序列的时间平均值，如 $r(t)$ 的定义所述，并涵盖了突触前脉冲的突触电导的所有动力学特性，例如树突电缆的主动和被动特性、多次脉冲的线性求和等。3. 激活函数 F 通过额外的常数乘数，将 I_s 的单位转换为放电率的单位，从而使最终模型中的权重w_i 无量纲。

如果不假设第二个方程是瞬时的，也就是说，输出发放率对胞体电流的依赖是动态的，那么发放率模型可扩展为

$$\begin{cases} \tau_s \dfrac{dI_s}{dt} = -I_s + \sum_{i=1}^{N_u} w_i u_i = -I_s + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \\ \tau_r \dfrac{dv}{dt} = -v + (I_s - \alpha)^+ \end{cases} \tag{18}$$

其中， τ_r 是时间尺度，它决定了在恒定输入下， v（t）接近其稳态的速度；否则，它决定了 v跟随 I_s 变化的速度。

最后，考虑到两个时间尺度 τ_s 和 τ_r 存在较大差异，尤其是 $\tau_r \gg \tau_s$，我们可以假设 $I_s \approx const$ ，并针对第二个方程进行准稳态近似，从而得到单方程发放率模型

$$\tau_r \frac{dv}{dt} = -v + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} - \alpha)^+ \tag{19}$$

2.2.3 群体模型

上一节使用的发放率是脉冲计数率；当时间平均窗口相对于输入发生任何变化的时间尺度非常小时，这种指标效果良好。但在许多反应时间较短的实际情形中，并非如此。不过，我们也可以将发放率视为群体平均，而不是时间平均。由此得到一个广义神经元，它代表一个局部群体聚合体；与其他广义神经元的相互作用等同于与其他亚群体的相互作用。

首先，最重要的群体模型是 Wilson-Cowan模型 [88]。假设局部群体聚合体具有相似的性质和连接；脑组织相对较小体积内几乎相同的响应以及局部冗余的存在，都证实了这一点。在进一步假设局部连接随机但稠密，且空间距离较近的情况下，我们可以忽略空间相互作用，只需研究群体聚合体的时间动力学，更具体地说，是聚合体中单位时间内处于活跃状态的部分。

考虑兴奋性群体和抑制性群体后，便会得到两个这样的未知量，分别为 $E(t)$和 $I(t)$，其中 0 表示静息电位状态。要建立模型，我们需要推导出细胞中敏感（且未处于不应期）细胞所占比例，以及至少接收到阈值兴奋的细胞所占比例的表达式。如果不应期细胞的不应期为 r 毫秒，那么不应期细胞所占比例以及敏感细胞所占比例分别为

$$\int_{t-r}^{t} E(t')dt' \Rightarrow 1 - \int_{t-r}^{t} E(t')dt' \tag{20}$$

抑制性群体也同理。至少接收到阈值兴奋的细胞可由函数 S_e 和 S_i 给出，这些函数称为亚群响应函数，表示在原本没有任何细胞处于不应期的情况下，亚群中对给定兴奋水平作出响应的细胞的预期比例。这些函数可以根据单细胞阈值分布 $D(\theta)$或单细胞突触数量 $C(\omega)$定义如下

$$S(x) = \int_0^{x(t)} D(\theta)d\theta \qquad \text{or} \qquad S(x) = \int_{\theta/x(t)}^{\infty} C(\omega)d\omega \tag{21}$$

其中，单细胞阈值分布假设突触数量为常数，反之亦然； $x(t)$表示所有细胞所受到的平均兴奋（当突触数量足够多时，这是一个合理的假设）。在第二种情况下，所有至少有 $\theta/x(t)$个突触的细胞都会受到阈值兴奋；再加上希望使 $S(x)$成为S形函数（亚群体为空和全部亚群体分别对应渐近值0和1），这便是积分上下限的原因。

作为最终方程中的第三个乘数，我们应加上在时间 t由兴奋性细胞或抑制性细胞产生的平均兴奋水平。

$$A_E = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')(c_1E(t') - c2I(t') + P(t'))dt' \tag{22}$$

$$A_I = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')(c_3E(t') - c4I(t') + Q(t'))dt' \tag{23}$$

若假设刺激的效应以速率衰减α，且每个细胞将其输入突触相加，其兴奋性和抑制性突触的平均数量分别由常数 c给出，外部输入为 $P(t)$或 $Q(t)$。由（20）、（21）和（22），即可得到Wilson-Cowan模型：

$$\begin{cases} E(t+\tau) = [1 - \int_{t-r}^{t} E(t')dt']S_eA_e \\ I(t+\tau') = [1 - \int_{t-r'}^{t} I(t')dt']S_iA_i \end{cases} \tag{24}$$

这里，我们取在时间 t既敏感又超过阈值的细胞比例。假设这两个事件彼此不相关，且各自的发生概率相互独立。

其他群体模型也采用 LIF 和尖峰响应模型神经元作为组成单元。这些模型得到的偏微分方程会跟踪神经元状态随时间和空间的变化：前一种情况下是膜电位密度，后一种情况下是不应期密度（由于尖峰响应模型神经元所处的不应期状态） [27]。

除了 Wilson-Cowan 模型外，种群动力学还有其他积分形式，其中一种特别值得一提的是 Gerstner 提出的形式：

$$A(t) = \int_{-\infty}^{t} P_I(t|t')A(t')dt' \tag{25}$$

其中 $P_I(t|t')$ 是一个核，表示在输入为 t 、且神经元上一次脉冲发放时间为 $I(t')$ 的条件下，该神经元在时间 t' 发放脉冲的概率密度；而 $A(t)$ 是给定时刻[26]的群体活动。该方程可在以下假设下推导得出：

1. 群体中的神经元总数保持不变。2. 神经元不表现出适应，即神经元 i 的状态仅取决于最近一次放电的时间 t'_i。3. 在足够小的时间尺度上，神经元彼此独立，即对每个神经元而言，该时间尺度内区间 $(t, t+\Delta)$ 中的尖峰数是一个独立随机变量。根据大数定律，对于足够大的网络，这些数值将依概率收敛于其期望值，而我们将研究这些期望值。

第二个假设意味着，在 t' 时发生过放电的神经元于 ˆ $t \in [t', t]$ 再次放电的概率为 $\int_{t'}^{t} P_I(s|t')ds$。然后，将在 t' 时发生过放电的神经元直到 t 都未再次放电的概率定义为 $S_I(t|t') = 1 - \int_{t'}^{t} P_I(s|t')ds$。

第三个假设有助于我们在 $N \to \infty$ 的热力学极限下考虑该模型，其中 N 是群体的规模。于是，在时间 t ，最后一次放电发生于 ˆ $t \in [t_0, t_1]$、$t_0 < t$、$t_1 < t$ 的神经元比例的平均值为 $\int_{t_0}^{t_1} S_I(t|t')A(t')dt'$ ，其中 $A(t')\Delta t'$ 是在 ˆ $t \in [t', t' + \Delta t']$ 内曾放电（不一定是最后一次放电）的神经元比例，而其中预期有 $S_I(t|t')$ 的神经元会在 t' 到 t 期间存活且不放电。

最后，第一个假设与“所有神经元过去某个时刻都曾放电”的假设相结合（包括有限时间内未曾放电的所有神经元的 $-\infty$ ），意味着如果我们将下界扩展到 $-\infty$ 、将上界扩展到 t ，就会得到

$$1 = \int_{-\infty}^{t} S_I(t|t')A(t')dt' \tag{26}$$

这将成立 $\forall t$ ，因为神经元的数量是常数，而且它们都已在区间 $[-\infty, t]$ 内激活。

对 (26) 求导，并利用以下事实：根据 $S_I(t|t')$ 的定义， $P_I(t|t')$， $= -\frac{d}{dt}(S_I(t|t'))$；此外，显然 $S_I(t|t) = 1$，由此可得

$$0 = S_I(t|t)A(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{dt} S_I(t|t')A(t')dt' = A(t) - \int_{-\infty}^{t} P_I(t|t')A(t')dt'$$

方程（25）具有高度非线性，因为核 $P_I(t|t')$ 非线性地依赖于总输入电流，而总输入电流又非线性地依赖于群体活动 $A(t)$。

2.2.4 二元模型

这里为了完整起见，值得一提的最简神经元模型是麦卡洛克-皮茨（MCP）神经元 [62]，前文在人工神经网络的介绍中也讨论过。事实上，它在生物学上极不真实，因此属于人工神经元这一独立类别。这种神经元本质上是一个阈值函数（用数字逻辑术语来说，是一个阈值θ 门），例如

$$v = \begin{cases} 1 \text{ if } \sum_i u_i > \theta \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{27}$$

它是人工神经网络中经常使用的少数几种人工神经元之一。它也被称为感知机（更具体地说，是在求和项中加入权重 w_i 时），这一名称也用于称呼所有由该神经元派生的网络（单层或多层感知机，即 MLP）。根据 [58]，这类网络是第一代神经网络模型。

2.3 网络扩展

之前研究过的任何神经元模型都可以与相同类型甚至不同类型的其他神经元进行耦合，从而形成具有共享动力学特性的网络，例如振荡、同步，以及可能出现的混沌行为 [19, 2, 33]。然而，我们能够以计算上可行的方式进行耦合的神经元数量，在很大程度上取决于神经元模型的复杂度：一端是多区室模型，另一端是最简模型。之所以研究由可能经过简化的神经元组成的网络，并将其作为主要单元，而不是研究详细的单神经元模型，是因为存在一些只能由神经元动力学的耦合产生、无法通过其他方式重现的现象。感知、学习或记忆回忆等一般认知能力都属于这一范畴。

2.3.1 活动——势动力学研究

我们将基于放电率神经元（17，19）构建各种类型的网络（前馈网络、循环网络等），最终在最小神经元模型的选择上采取折中方案。这些网络的构建思路如图5所示。对于前馈网络，我们只需将（19）推广到一个未知量向量，从而得到权重矩阵 W、阈值常数向量 $\boldsymbol{\alpha}$，以及两层单元——u 个输入和 v 个输出。对于仅含前馈连接和侧向连接（无反馈连接）的分层循环网络，我们还要在输出层 v 内加入相互作用，其中 M 表示侧向连接的强度或权重。若要分别处理兴奋性与抑制性交互作用（假设戴尔定律成立时，我们需要这样处理；单元相对于其他单元只能是兴奋性的或抑制性的），只需将输出层（v）中的单元划分为兴奋性单元 $\mathbf{v_E}$ 和抑制性单元 $\mathbf{v_I}$，并将侧向连接（M）划分为权重非负的 $\mathbf{M_{EE}}$ 和 $\mathbf{M_{IE}}$，以及权重非正的 $\mathbf{M_{EI}}$ 和 $\mathbf{M_{II}}$。

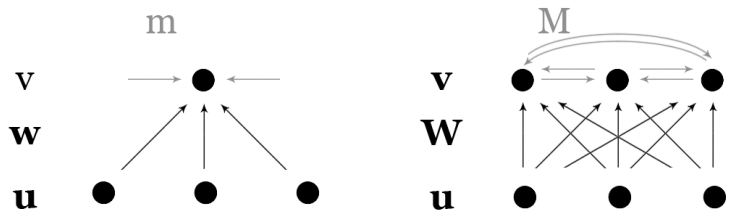


图5：使用向量记法从单神经元模型构建网络模型。

对于全循环网络，输入 $\mathbf{u}$将是取决于输出 $\mathbf{v}$ 的未知量，并通过反馈连接与之关联。不过，我们不必为反馈连接的权重增加更多方程和矩阵。相反，我们可以利用这样一个事实：加入反馈连接后，所有可能类型的连接都会被纳入其中，因此无需再区分它们。于是，我们只需将所有类别合并为一类，并将其中一些 v_i 神经元视为输入单元，其余视为隐藏单元，从而允许任意两个 v_i 和v_j之间存在任何可能的连接。为推广所得模型，我们应添加一项 $\mathbf{U}$ ，用于表示施加到每个神经元的外部输入（有时称为偏置或控制/躯体输入/电流）。最后，根据（17），我们可以推导出第二种循环网络，称为加性网络。它反映的是总输入电流或膜电位的动力学，而非神经元的输出。

完成上述所有构建后，我们得到以下放电率网络模型：

1. 前馈网络

$$\tau_r \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha})^+ \tag{28}$$

2. 循环网络

(a) 具有前馈连接和侧向连接的分层网络

$$\tau_r \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\alpha})^+ \tag{29}$$

(b) 兴奋-抑制网络

$$\begin{cases} \tau_E \dfrac{d\mathbf{v_E}}{dt} = -\mathbf{v_E} + (\mathbf{W_E} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M_{EE}} \cdot \mathbf{v_E} + \mathbf{M_{EI}} \cdot \mathbf{v_I} - \boldsymbol{\alpha})^+ \\ \tau_I \dfrac{d\mathbf{v_I}}{dt} = -\mathbf{v_I} + (\mathbf{W_I} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M_{IE}} \cdot \mathbf{v_E} + \mathbf{M_{II}} \cdot \mathbf{v_I} - \boldsymbol{\alpha})^+ \end{cases} \tag{30}$$

(c) 全循环网络

i. 基于输出的网络

$$\tau_r \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} + (\mathbf{U} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\alpha})^+ \tag{31}$$

ii. 加性网络

$$\tau_s \frac{d\mathbf{I}}{dt} = -\mathbf{I} + \mathbf{U} + \mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha})^+ \tag{32}$$

由于对 U 的解释过于宽泛，全循环网络（31，32）也可以被视为其他所有网络的推广。具体而言，将外部输入 U_i 解释为来自另一层 u 的神经元v_i 的总前馈输入，我们可以定义 U = W ·u，并从（31）得到（29）。此外，将侧向连接权重设为零（M = 0）可以得到前馈网络（28）；固定权重 M 的符号，令 U = [$\mathbf{U_E}$、$\mathbf{U_I}$]^T，并假设时间尺度相同 $\tau_E = \tau_I = \tau_r$，则可实现（30）中的相互作用分离。这些模型都可以从（31）出发得到。一般来说，（31）及其所有可推导出的特殊情况模型，都是基于神经元输出动力学的模型。相比之下，（32）将总输入电流 I 视为动力变量；它也可以解释为阈值化电位，而神经元输出放电率由 v = (I − $\boldsymbol{\alpha}$)$^+$ 给出。尽管当衰减系数（此处为 1）相等时，可以由（31）得到（32）；当权重矩阵 M 可逆时，也可以由（32）得到（31），但二者通常并不等价 [37]。在本节余下部分，我们将对这些网络模型进行一些数学分析，揭示它们能够再现的有趣认知层面现象，并展示研究这些模型时所用的不同数学方法。

我们可以求出（29）的线性版本的显式解，并通过一些技术性假设，将关于其稳定性和认知能力的结论推广到非线性情形 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ [17]。为此，必须假设矩阵 **M** 是对称的。具体而言，考虑网络

$$\tau_r \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{v} \tag{33}$$

由于 **M** 具有对称性，其特征值 λ_i 为实数，因此可以排序。与任意两个不同特征值相$\mathbf{i}$ 关的特征向量（满足 **M** ·$\mathbf{e_i}$ = $\lambda_i \mathbf{e_i}$）彼此正交（若经过归一化，即$\mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{ij}$ 对于 $\lambda_i \neq \lambda_j$，则甚至标准正交）；而与重数较高的特征值相关的特征向量线性无关（因此我们仍可以选取一组标准正交向量作为基）。这意味着我们可以将（**v** 在式（33）中表示并替换为

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\mathbf{e_i} \Rightarrow \tau_r \sum_{i=1}^{N} \frac{dc_i}{dt}\mathbf{e_i} = -\sum_{i=1}^{N}(1-\lambda_i)c_i(t)\mathbf{e_i} + \mathbf{U}$$

其中 N =dim(v)，与ei作点积后，利用正交性即可将其拆分为解耦常微分方程

$$\tau_r \frac{dc_j}{dt} = -(1-\lambda_j)c_j(t) + \mathbf{e_j}\cdot\mathbf{U} \Rightarrow c_j(t) = \frac{\mathbf{e_j}\cdot\mathbf{U}}{1-\lambda_j}(1-e^{(-\frac{t(1-\lambda_j)}{\tau_r})}) + c_j(0)e^{(-\frac{t(1-\lambda_j)}{\tau_r})}$$

这个解析解可用于识别 $\lambda_j < 1$ ，即系统趋向稳态时所在的稳定区域

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\mathbf{e_i} \rightarrow \mathbf{v}_\infty = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{e_i}\cdot\mathbf{U}}{1-\lambda_i}\mathbf{e_i}$$

因此，稳态解涉及将输入向量 U投影到循环矩阵 $\mathbf{M}$ 的特征向量上，并沿着第 i 维以 $1/(1-\lambda_i) > 1$ 的倍数进行放大（若满足 $0 < \lambda_i < 1$）。当一部分特征向量$\mathbf{e_k}$ 的特征值 λ_k 小于 1 但接近 1，且相比之下其余特征值较小时，这会带来选择性放大等认知能力。在这种情况下，这些特征向量会主导总和，稳态解变为

$$\mathbf{v}_\infty \approx \sum_{k=1}^{K} \frac{\mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U}}{1-\lambda_k}\mathbf{e_k} + \sum_{k=K+1}^{N} \frac{\mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U}}{1-\lambda_k}\mathbf{e_k} \approx \sum_{k=1}^{K} \frac{\mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U}}{1-\lambda_k}\mathbf{e_k}$$

并且网络放大了输入在由所有$\mathbf{e_k}$张成的子空间上的投影。这类网络的另一种认知能力是输入整合；考虑特征值 $\lambda_k = 1$ 时可以观察到这一点，此时关于 c_k 的方程变为

$$\tau_r \frac{dc_k}{dt} = -(1-1)c_k(t) + \mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U} \Rightarrow c_k(t) = c_k(0) + \frac{1}{\tau_r}\int_0^t \mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U}(t')dt'$$

现在， c_k 可以记住先前的输入，具体来说，如果输入 $\mathbf{U}(t)$ 最初非零，但之后在很长一段时间内为零，那么所有其余的 c_i （其中$\lambda_i < 1$ ）都会趋于零，于是我们有

$$\mathbf{v}(t) \approx \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\tau_r}\int_0^t \mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U}(t')dt' + 0 \approx \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\tau_r}\int_0^t \mathbf{e_k}\cdot\mathbf{U}(t')dt'$$

其中我们假设 $c_j(0) = 0, \forall j = 1, \cdots N$。这意味着，在没有输入的情况下，投影积分将得以保留，可视为持续活动，或对先前输入积分的记忆。

我们对网络模型的具体兴趣在于这类认知层面现象——它们能够复现哪些现象，以及它们会如何解释这些现象。这些网络的活动动力学已由 [17] 进行了深入研究，此前他汇编了众多论文的研究结果。按照上述定义，前馈网络能够计算视觉引导的伸手任务所需的坐标变换 [77]。循环网络则具备执行选择性

放大、输入整合和持续活动的能力，例如维持水平眼位的记忆痕迹 [78]。将其扩展为上述非线性循环网络（主要是为了避免由（33）引入的负放电率）后，仍能保留对输入刺激的选择性放大以及持续活动，例如，在均匀电流输入时，对当时感知到的输入进行记忆。此外，该网络还能够进行选择性抑制，因此可以描述视觉处理中简单细胞和复杂细胞的响应；二者对刺激的特定位置分别具有选择性和非选择性 [79]。选择性放大和抑制还会对多个刺激产生赢家通吃式知觉，即忽略两个重叠刺激中的一个。

可以通过相平面图以及在平衡点附近进行线性化，来对（30）进行稳定性分析。研究参数还可以揭示是否可能发生Hopf分岔 [17]。更深入的分析会详细阐述加性抑制相互作用的局限性，并采用乘性抑制效应 [4]。不过，为了专注于更复杂的任务，我们暂且略过这些内容，并请有兴趣的读者参阅 [17]。当需要更高的真实性时，类似（30）的模型是描述抑制性交互的重要替代方案，因为与兴奋性相互作用相比，它允许采用不同（经验上更慢）的时间尺度和（经验上更大）的幅度。

我们主要关注（32），对它的研究也能得出关于先前网络（28、29、30）的基于电位的版本的结论。具体而言，通过谨慎选择外部输入$\mathbf{U}$ 和测得的输出发放率$\mathbf{v}$，可以将神经元划分为输入单元（外部输入非零的单元）、输出单元（测得放电率的单元）和隐藏单元（其余所有单元）。与（31）及其任何特定情形相比，这些加性网络在文献中也得到了最广泛的研究；研究时通常考虑常数输入或钳制输入$\mathbf{U}(t)$ $=\mathbf{U}$ （近来也有一些研究考察振荡输入 [91]）。在这种情况下，我们可以沿用之前的记号：

$$\tau_r \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mathbf{u} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{u}) + \mathbf{U} \tag{34}$$

其中，u 为神经元电位，W 为递归权重矩阵，a(u) 是放电率的一般激活函数，满足 a(u) $=(a(u_1) \cdots, a(u_n))^T$，而 U 是神经元的外部输入。由于激活函数 $a(x) =(x - \alpha)^+$，因此整个向量场都是全局 Lipschitz连续的，Lipschitz 常数为 1，故很容易确立方程 (32) 的解的存在唯一性。对于方程 (34) 的不连续激活函数，也已有充分的研究结果。方程组 (32, 34) 的稳定性在记忆回忆、模式识别和序列预测模型中起着关键作用。稳定的加性网络称为吸引子网络（也称自联想记忆、以 [40, 41]，命名的 Hopfield网络，或以 [13] 命名的 Cohen-Grossberg-Hopfield网络），这是因为其动力学存在吸引子。本节的最终目标正是阐明这一点，并为前面提到的主要认知现象提供数学解释。

在某些条件下，最一般的循环网络（34）是稳定的，并且可以通过使用能量（李雅普诺夫）泛函证明其全局收敛

$$E(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u})^T \mathbf{W}\mathbf{a}(\mathbf{u}) - \mathbf{U}^T\mathbf{a}(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{N_u} \tilde{E}(u_i) \tag{35}$$

泛函 $E(\mathbf{u})$ 由 [13] 引入，最后一项为

$$\tilde{E}(u_i) = \int_0^{u_i} sa'(s)ds$$

以及 [41]，最后一项为

$$\tilde{E}(u_i) = \int_0^{a(u_i)} a^{-1}(s)ds$$

其中，倒数第二项可通过变量替换$y = a(s)$从第一项得到，假设 $a(0) = 0$。在假设矩阵 $\mathbf{W}$ 为对称矩阵且激活函数单调非递减 $a'(u) \geq 0$的情况下，该能量的时间导数为负半定。具体而言，第一种情况下可表示为

$$\frac{dE(\mathbf{u})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{dE}{du_i}\frac{du_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}[(-\sum_{j}^{N} w_{ij}a(u_j) - U_i + u_i)\frac{da(u_i)}{du_i}]\frac{du_i}{dt} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} a'(u_i)(\frac{du_i}{dt})^2 \leq 0 \text{ if } a'(u_i) \geq 0$$

而第一种情况下可表示为

$$\frac{dE(\mathbf{u})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{dE}{da(u_i)}\frac{da(u_i)}{du_i}\frac{du_i}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(-\sum_{j}^{N} w_{ij}a(u_j) - U_i + a^{-1}(a(u_i)))\frac{da(u_i)}{du_i}\frac{du_i}{dt} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} a'(u_i)(\frac{du_i}{dt})^2 \leq 0 \text{ if } a'(u_i) \geq 0$$

在第二种情况下，为了使用拉萨尔不变性原理证明系统稳定，我们还需要 $E(\mathbf{u})$ 连续且有下界，从而保证收敛到一个不变集。对于任何饱和连续可微激活函数，这一条件都成立。如果激活函数有下界，但至少是局部利普希茨连续的，例如 $a(x) = (x - \alpha)^+$，则我们需要沿轨迹对能量求导，如下所示：

$$D^+E(\mathbf{u_0}) = \lim_{h\to 0^+} \inf \frac{E(\mathbf{u_0} + h\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{u_0})) - E(\mathbf{u_0})}{h}$$

并在（35）的定义中用拉东积分替换黎曼积分。最后，如果激活函数因而能量泛函仅连续，则其导数可取为

$$D^+E(\mathbf{u_0}) = \lim_{h\to 0^+} \inf \frac{E(\mathbf{u}(h,\mathbf{u_0})) - E(\mathbf{u_0})}{h}$$

其中 $\mathbf{u_0} = \mathbf{u(0)}$ 和 $\mathbf{u}(t,\mathbf{u_0})$ 是初始条件为 $\mathbf{u_0}$ [32] 的轨迹。显然，之前的线性情形 $a(x) = x$ 是光滑的，但没有下界，因此可以充当积分器。

我们非常重视这些网络模型的稳定性分析，因为这本身就代表了一种认知现象。当网络的活动动力学在没有外部影响的情况下收敛到少数几个固定／平衡／稳态时，我们可以将其与记忆回忆这一认知过程相比较。记忆回忆可被视为一般模式识别过程的一部分；如果识别的是时空模式，甚至也可视为预测过程的一部分。更一般地说，吸引子网络，或动力学趋向吸引子的网络，可被视为一种基于信息的全部或部分内容作为初始条件来存储和检索信息的方式（基于内容而非基于地址的信息检索）。任何纯粹回忆起的空间记忆，都是相空间中的平衡点；该相空间包含所有可能的网络活动状态。检索到的时空记忆（包括状态序列）则是该相空间中的一般吸引子，例如振荡（咀嚼、行走及其他节律性输出）对应的极限环、直线或其他子空间，甚至是在混沌网络行为情况下出现的分形。

让我们回到这里所描述的具体网络模型，考察空间（静态）记忆或平衡点。如果初始活动处于某个特定记忆的吸引域内，那么在任何进一步的演化或模式匹配过程中，该记忆将逐渐被回忆为稳态。类似于（32）的典型自联想网络还具有其他性质，即满足使其能够收敛到平衡点的条件。其演化是从给定的初始条件 $\mathbf{v(0)}$开始研究的。如果该初始条件处于记忆状态 $\mathbf{v}_m$ 对应于 $m \in [1;\ N]$ 其中 N表示网络中存储的记忆总数，则网络将收敛，记忆回忆也将成功。回忆出错误的记忆是回忆失败的另一种情况，此外还有状态发散的情况。对这类联想记忆的任何进一步分析，都是一个关于权重的优化问题：最大化可回忆记忆的总数 N 以及每个记忆的吸引域大小。另一个出现在使用李雅普诺夫泛函（35）的网络中的问题，是会出现并非记忆的伪平衡点。

对类似于（31）的网络进行综合以存储 N 记忆，在二值输出的情况下，可由 [17] 推导得出。记忆$\mathbf{v}_m$ 是（31）的一个平衡点，因此必须满足

$$\mathbf{v}_m = (\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}_m - \boldsymbol{\alpha})^+ = \mathbf{a}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}_m)$$

其中我们假设没有外部输入$\mathbf{U} = \mathbf{0}$。我们关注的是构造$\mathbf{M}$的权重，并最大化 N 向量$\mathbf{v}_m$ 的数量，使它们能够通过适当选择$\mathbf{M}$同时满足该方程。考虑二进制值，我们可以要求每个$\mathbf{v}_m$ 具有 γN 个激活单元，即值为 1 的单元，以及（$1-\gamma$）N个非激活单元，即值为 0 的单元。我们可以将 γ称为每个记忆的稀疏度，因为 γ 越高，就能以更少的单条记忆信息存储更多记忆。为保证平衡点的存在性，我们需要李雅普诺夫函数（35），该函数必须有下界（可通过使激活函数$\mathbf{a}$ 饱和来实现），并且要求$\mathbf{M}$为对称矩阵。令权重矩阵为

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} - \frac{\mathbf{11}}{\gamma N} \text{ where } \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_m = \lambda \mathbf{v}_m \tag{36}$$

即，$\mathbf{v}_m$ 是矩阵$\mathbf{K}$的简并特征向量，我们得到

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{a}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_m) = \mathbf{a}((\mathbf{K} - \frac{\mathbf{11^T}}{\gamma N}) \cdot \mathbf{v}_m) = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{v}_m - \frac{\mathbf{1}(\mathbf{1}^T \cdot \mathbf{v}_m)}{\gamma N}) =$$
$$= \mathbf{a}(\lambda \mathbf{v}_m - \frac{\mathbf{1}(\gamma N)}{\gamma N}) = \mathbf{a}(\lambda \mathbf{v}_m - \mathbf{1})$$

对每个分量求解可得以下条件

$$0 = a(-1) \qquad 1 = a(\lambda - 1)$$

关于激活函数的条件，对于 $a(x) = (x - \alpha)^+$ 成立，其中 $\lambda = 2$。接下来需要找到$\mathbf{K}$，使其至少近似满足$\mathbf{K} \approx \lambda \mathbf{v}_m$，同时还要满足 M 是对称矩阵。在对模式随机性作出某些假设的情况下，可以做到这一点，如 [17]所示。

文献 [64]对具有预定平衡点、吸引域、收敛速度等特性的吸引子网络的综合/设计方法进行了更全面的综述。不同方法在计算需求、容量、稳定性和限制方面差异显著。例如，早期由 [40] 提出的综合方法具有

$$w_{ij} = \sum_m (2u_m^i - 1)(2u_m^j - 1) \tag{37}$$

可达到 $0.15N$的容量。由于权重矩阵是针对（34）构造的，因此记忆由$\mathbf{u}_m$ 而非$\mathbf{v}_m$表示。我们可以看到，如果$u_m^i = u_m^j = 0$ 或 $u_m^i = u_m^j = 1$ 对于某个 m 而言，权重 w_{ij} 就会增加 1；如果它们不同，则会减少 1。其他综合方法包括外积法、投影学习规则和特征结构法 [64]。所有这些方法都致力于通过即时或渐进学习来创建和修改吸引子，这将在下一节讨论。

2.3.2 连接关系——突触可塑性研究

突触强度或突触可塑性，以及网络整体的连接性，均由非活动依赖机制和活动依赖机制决定。人们普遍认为，非活动依赖机制负责轴突最初的靶向、神经支配层等；而神经元输入选择性的专门化与发展，以及皮层映射，也由活动依赖机制决定。大脑中的海马体、新皮层和小脑区域的实验结果表明，突触强度与神经活动相关 [17]。大多数包含某种适应机制（长时程增强和/或长时程抑制）的模型都采用某种形式的赫布学习。非赫布突触可塑性也是可能的，例如仅基于突触前或突触后放电的学习。非突触可塑性的一个例子是仅基于神经元自身活动的内在可塑性。

关于可塑性，任何可适应模型都需要考虑以下几个重要方面：

- 我们应对突触强度施加一定的界限——界限或突触饱和应能防止突触强度不受控制地增长，也要避免其跨越零点，即从兴奋性变为抑制性，或反之。

- 我们应设法通过某种突触竞争来保持突触强度的多样性，因为如果它们都收敛到零或最大值，连接关系中包含的信息就会丢失。

- 可塑性通过根据学习规则更新突触强度来实现；学习规则可以是动力学方程，也可以是离散更新步。

本节剩余部分将回顾最常用的、用于描述权重动力学的学习规则，从最简单但最不实用的规则开始，最后介绍其中最实用但高度专门化的规则。

在前面介绍的基于发放率的网络（28）基础上，我们再次将权重 $w_{ij} = w_{ij}(t$视为突触强度，但这次不再将其视为常数系数。由于 w_{ij} 现在取决于活动，即发放率 v_i 和 u_j，因此我们需要另一个方程来描述其动力学。不过，由于学习／连接关系的时间尺度 τ_w 通常远慢于感知／活动时间尺度 τ_r，我们可以使用准稳态近似，并假设 $v_i = \mathbf{w_i} \cdot \mathbf{u}$ 在第一个方程中瞬间达到稳态，因此能够实现适应的最简单网络模型为

$$\tau_w \frac{d\mathbf{w_i}}{dt} = v_i \mathbf{u} = (\mathbf{w_i} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \tag{38}$$

其中方程由 i 编索引，也就是说，我们倾向于使用指标记法

而非张量表示法。该网络采用基本的赫布学习规则

$$\tau_w \frac{d\mathbf{w_i}}{dt} = F(v_i, \mathbf{u}) = v_i \mathbf{u} \tag{39}$$

因为可以立即验证，输入$\mathbf{u}$ 与输出 v_i 的同步活动会对$\mathbf{w_i}$的导数产生正效应。现在我们可以看到，对于所选择的每条学习规则，都能生成一个不同的网络模型（相同的 QSSA，但不同的可塑性动力学）。

两种著名的赫布型学习规则是相关性规则和协方差规则；分别使用以下内容即可得到它们:

$$F(v_i, \mathbf{u}) = \langle v_i \mathbf{u} \rangle \Rightarrow \tau_w \frac{d\mathbf{w_i}}{dt} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w_i} \tag{40}$$

$$F(v_i, \mathbf{u}) = (v_i - \theta_v)\mathbf{u} \text{ or } F(v_i, \mathbf{u}) = v_i(\mathbf{u} - \theta_\mathbf{u}) \Rightarrow \tau_w \frac{d\mathbf{w_i}}{dt} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{w_i} \tag{41}$$

输入相关矩阵 Q $= \langle$uu$\rangle$ 和输入协方差矩阵 C $= \langle$(u $- \langle$u$\rangle$)(u $- \langle$u$\rangle$)$\rangle = \langle$ uu$\rangle - \langle$u$\rangle^2 = \langle$(u $- \langle$u$\rangle$)u$\rangle$。这里有一些值得注意的观察：两条协方差规则（41）都包含阈值（输出阈值 θ_v 或输入阈值 θ_u），用于将长时程抑制与长时程增强活动分隔开来（导数从负变为正，即 $\mathbf{w_i}$的零流线）。第一条方程仅在突触前活动非零时才会修改突触强度，而第二条方程仅在突触后活动不为零时才会修改突触强度。

到目前为止的所有学习规则都不稳定，因此不太实用。一种改进且稳定的规则是 Bienenstock-Cooper-Monroe（BCM）规则

$$\begin{cases} \tau_w \dfrac{d\mathbf{w_i}}{dt} = F(v_i, \mathbf{u}) = v_i \mathbf{u}(v_i - \theta_v) \\ \tau_\theta \dfrac{d\theta_v}{dt} = v_i^2 - \theta_v \end{cases} \tag{42}$$

它通过阈值 θ_v，在支持 LTP 的同时也支持 LTD。让θ_v 在 $\tau_\theta < \tau_w$ 作用下比 v_i 增长得更快，是在这里实现稳定性的方法。也可以使用权重归一化规则（从而兼顾突触间竞争以及神经元内部资源有限的问题），但这需要利用单个突触之外的全局信息，因此不再具有生物学意义。一种稳定、具有竞争性且局部的规则是 Oja规则

$$\tau_w \frac{d\mathbf{w_i}}{dt} = F(v_i, \mathbf{u}) = v_i \mathbf{u} - \alpha v_i^2 \mathbf{w_i} \tag{43}$$

其中 $\alpha > 0$ 是一个常数。它具有局部性，因为 w_{ij} 只依赖于 v_i、 u_j和w_{ij}，而在一般归一化中，我们还需要 w_{ik} 和 u_k 才能使 $k \neq j$

完成计算。它是稳定且具有竞争力的，因为如果我们将方程（43）乘以 $\mathbf{w_i}$ 并使用 $v_i = \mathbf{w_i} \cdot \mathbf{u}$，所得的方程

$$\tau_w \frac{d|\mathbf{w_i}|^2}{dt} = 2v_i \mathbf{w_i} \cdot \mathbf{u} - 2\alpha v_i^2 |\mathbf{w_i}|^2 = 2v_i^2(1 - \alpha|\mathbf{w_i}|^2)$$

具有 $|\mathbf{w_i}|^2 = \frac{1}{\alpha}$ 作为有限的稳态（稳定性）常数（竞争——要增加一个权重并保持该常数不变，就必须减少另一个权重）。

我们将要考察的最后一个非常重要的学习规则是基于时序的规则

$$\tau_w \frac{d\mathbf{w_i}}{dt} = F(v_i, \mathbf{u}) = \int_0^{+\infty} H(\tau) v_i(t) \mathbf{u}(t - \tau) + H(-\tau) v_i(t - \tau) \mathbf{u}(t) d\tau \quad (44)$$

该规则源于一种尝试：将基于放电率的赫布学习与基于脉冲的实证结果联系起来。在这些结果中，如果突触前脉冲在足够短的时间窗口内先于突触后脉冲出现，就会观察到显著的突触增强[27]。如果突触后脉冲先于突触前脉冲出现，突触强度则会受到抑制；如果时间窗口过大，突触可塑性不会发生变化。该规则是一种近似，其中 τ 表示突触前和突触后放电率评估时刻之差。在这里 $H(\tau)$ 描述了权重变化率与差值 τ 之间的函数关系，一个合适的候选函数可以是类似于 $\frac{1}{x}$、 $x \in \mathbb{R}$的有界形式。如果该函数始终与 τ同号，则（44）中的第一项表示长时程增强，第二项表示长时程抑制。加入适当的边界后，该规则是稳定的；在考虑脉冲网络模型时，它具有竞争性。最重要的是，它取决于突触前和突触后活动的先后顺序。

尽管上述模型只是经过可塑性增强的前馈网络，但它们已经能够表现出多种认知层面的学习现象，例如初级视觉皮层细胞眼优势的发展、方向选择性以及痕迹学习 [17]。另一方面，加入如（29）所示的侧向连接，可以重现输出层上眼优势条带的形成以及其他附加现象。

添加侧向连接有多种方式：可以添加固定的侧向连接，同时保持前馈连接具有可塑性；也可以固定前馈连接，并添加可塑性侧向连接；还可以使所有连接都具有可塑性。在许多情况下，单纯使用前馈网络可能会导致输出层出现冗余，例如，每个神经元都会获得相同的权重和输入选择性，例如使用（43）。一种应对方法是，在前馈 Oja规则之外，添加采用反赫布学习规则的可塑性侧向连接（抑制第二层中相关的放电，以减少该层所有放电中的冗余，

这一现象在自然界中也有观察到），并结合前馈 Oja规则

$$\begin{cases} \tau_w \dfrac{dw_{ij}}{dt} = v_i u_j - \alpha v_i^2 w_{ij} \\ \tau_M \dfrac{dm_{ij}}{dt} = -v_i v_j + \beta m_{ij} \end{cases} \tag{45}$$

第二个方程是反赫布基本规则，也就是符号相反且增加了一个39学习规则（ βm_{ij} 项，以确保所有权重不会收敛到零（即赫布学习现在反转的不稳定性）。只要适当选择一个 $\beta > 0$ 常数，这个网络模型在神经元之间便是稳定且非平凡的。

如果将突触修饰建模为离散过程而非连续过程（当输入由模式时间序列构成时，离散过程更为合适），我们可以使用离散学习/更新规则

$$\mathbf{w_i} \to \mathbf{w_i} + \epsilon F(v_i, \mathbf{u}) \tag{46}$$

要得到上述任一连续学习规则的离散版本，只需使用正确的 $F(v_i, \mathbf{u})$。此时，要从模型的形式化角度区分无监督学习和有监督学习非常容易。对于无监督学习（即我们上文隐含讨论的情况）， v_i 将由网络通过 $v_i = \mathbf{w_i} \cdot \mathbf{u}$ 生成，再将其代入 $F(v_i, \mathbf{u})$，即可得到无监督学习规则。对于有监督学习， v_i 已作为期望输出值给出 $v_i(t) = \bar{v}_i$，随后将其代入 $F(v_i(t), \mathbf{u}(t)) = F(\bar{v}_i, \mathbf{u}(t))$。

监督式赫布学习规则无法良好发挥作用的两个重要例子是：通过感知机神经元进行二元分类，以及通过放电率神经元进行函数近似。如果我们将类似于（27）的感知机模型视为二元分类器，那么当且仅当存在一个超平面，将输入空间划分为两个半空间，且每个半空间对应一个二进制值时，感知机才可能对输入进行完美分类。这一条件称为线性可分性条件。当神经元的放电率由刺激参数 $v(s) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(s) = \sum_i w_i f_i(s)$ 的函数给出时，就可以进行函数近似。对于放电率而言，如果输入神经元 u_i，被近似的函数就是刺激函数的线性组合。在这两个例子中，监督式赫布学习规则都无法良好发挥作用，因为它们不依赖于网络的实际表现。因此，我们可以引入误差校正学习规则：从权重的初始猜测开始，将输入 $v(u^k)$ 所产生的实际神经元输出与期望输出 u^k 进行比较，并调整权重以减小两者之间的误差。这里，我们省略了 $\bar{v}^k$ 索引，因为我们只考虑一个神经元；同时加入 i 索引，因为我们考虑的是随时间变化的离散输入序列。二元分类可以通过感知机学习规则来实现

$$\mathbf{w} \to \mathbf{w} + \frac{\epsilon_w}{2}(v^m - v(\mathbf{u}^m))\mathbf{u}^m \text{ and } \theta \to \theta - \frac{\epsilon_w}{2}(v^m - v(\mathbf{u}^m)) \tag{47}$$

函数近似则可以通过 δ学习规则来实现

$$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} - \epsilon_w \nabla_w E \tag{48}$$

其中 θ 是（27）中的阈值， E（s）是平方误差函数，它使德尔塔规则成为梯度下降中的一个更新步骤。

迈出上文讨论的基于速率的学习规则，并转向脉冲模型中的可塑性，是由 [27] 提出的，也被认为更具生物学真实性。

3 提出的模型

3.1 公式化

现在，我们将构建并阐释一系列复杂度逐渐增加的基于速率的模型。它们与上一节中的常规神经网络模型在形态上有显著差异，但在适当条件下，可以化简为这类网络，或者更准确地说，可被解释为这类网络，从而获得与前文相同的结果。当然，重点在于它们所要描述的全新且更一般的认知现象。

3.1.1 模型族的构建

正如我们之前提到的，从更复杂且在生物学上更逼真的模型中挑选合适的特征，同时将一切可由计算效率更高的机制替代的部分抽象掉，是至关重要的。在本节提出的模型中，我们正是这样做的：从突触整合以及远端树突树中进一步提取可能的特征。

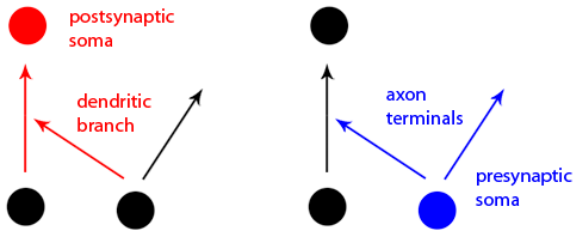


图 6：具有元连接的简单电路与实际神经元形态学的比较。

朝着多区室模型的方向发展时，我们希望为树突树的每个分支设置独立的动力学。独立的激活/阈值函数 $a(\cdot)$ 应捕捉动作电位向胞体传播的特性，而局部突触后电位 $e(\cdot)$则应根据突触前输入单独确定。为降低计算和符号表示的复杂度，我们将只考虑单次分支的情况，即树突只能分支一次，并且树突及其子分支各自具有独立的动力学。我们不将完整的电缆偏微分方程作为这种动力学，而是构建自己的抽象，以捕捉所需的一些基本特性。我们将神经元胞体视为简单的单元，而轴突和无分支树突则可以统称为连接。最后，树突的子分支以及部分轴突末梢将称为元连接，因为可以宽泛地将其定义为与其他连接相连的连接。

我们从（28）出发，开始构建一个新模型：首先为每个单元、连接和元连接定义一个微分方程，然后为每个方程添加更专门的动力学，最后定义一个输入输出层前馈网络。与之前一样，随后我们将逐步提高网络拓扑的复杂度，转向循环网络和全循环网络。具有类似于（28）的动力学的基本前馈模型、 N 输入，以及 M 输出表示为

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{dv_i}{dt} = -v_i + (\sum\limits_{j=1}^{N} w_j^i c_j^i - \alpha)^+ \\ \tau_r \dfrac{dc_j^i}{dt} = -c_j^i + (\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} c_k^{ji} + u_j - \alpha)^+ \\ \tau_r \dfrac{dc_k^{ji}}{dt} = -c_k^{ji} + (u_k - \alpha)^+, \ k \neq j \end{cases} \tag{49}$$

其中 $i \in [1;\ M]$, $j \in [1;\ N]$，以及 $k \in [1;\ N]$。该记法与之前用于基本基于率的网络的记法相似，即 v_i 表示第 i 个输出，u_j 表示第 j 个输入单元，而 $\mathbf{W}$ 张量表示常数权重。不过，通向输出单元的通路还具有动力学，其中 c_j^i 表示从输入单元 j 到输出单元 i 的常规连接， c_k^{ji} 则表示从输入单元 k 到从 j 到 i的连接的元连接。

将动力学从放电率输出改为内部势
$\sum_{j=1}^{N} w_j^i c_j^i$ $u_j^i = \sum_{k=1 k\neq j}^{N} w_k^{ji} c_k^{ji} + u_j$ $u_k^{ji} = u_k$ U_j u^i = , , ,

并将其作为输入单元的内部势，其放电输出率由 $\tau_r \dot{u}_j = -u_j + (U_j - \alpha)^+$ 决定，我们得到

$$\tau_r \frac{du^i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} w_j^i \tau_r \frac{dc_j^i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} w_j^i c_j^i + \sum_{j=1}^{N} w_j^i (\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} c_k^{ji} + u_j - \alpha)^+ =$$

$$= -u^i + \sum_{j=1}^{N} w_j^i (u_j^i - \alpha)^+$$

$$\tau_r \frac{du_j^i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} \tau_r \frac{dc_k^{ji}}{dt} + \tau_r \frac{du_j}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} [-c_k^{ji} + (u_k - \alpha)^+] + \tau_r \frac{du_j}{dt} =$$

$$= -\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} c_k^{ji} - u_j + u_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} (u_k^{ji} - \alpha)^+ - u_j + (U_j - \alpha)^+ =$$

$$= -u_j^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji}(u_k^{ji} - \alpha)^+ + (U_j - \alpha)^+$$

$$\tau_r \frac{du_k^{ji}}{dt} = \tau_r \frac{du_k}{dt} = -u_k + (U_k - \alpha)^+ = -u_k^{ji} + (U_k - \alpha)^+$$

而 v_i 表示基本放电率模型中第 i 个输出神经元的输出 [17]，因此在（49）中也表示应用激活函数后得到的量；而 u^i 则是第 i 个输出神经元的总累积势。我们不再对输入的线性求和应用激活函数，而是像从（31）过渡到（32）那样，对激活后的输入进行线性求和。接下来我们将滥用符号，用 u_k表示输入单元的内部势。由此得到的模型如下：

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -u^i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j^i (u_j^i - \alpha)^+ \\ \tau_r \dfrac{du_j^i}{dt} = -u_j^i + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji}(u_k^{ji} - \alpha)^+ + (u_j - \alpha)^+ \\ \tau_r \dfrac{du_k^{ji}}{dt} = -u_k^{ji} + (u_k - \alpha)^+, \ k \neq j \end{cases} \tag{50}$$

注意，在上述模型中，内部势取决于瞬时输出放电率的加权和。我们也可以再次滥用符号，将 $U_k := (u_k - \alpha)^+$ 替换为系统的外部输入，这次重用 U_k。当然，这种替换仅适用于前馈网络和侧向网络，因为如果存在连接到输入单元的连接，其势 u_i 就会成为系统的未知量。

除了更详细的网络结构之外，另一个主要扩展是添加一个“上下文”项 e，它取代了外部输入项 $a(u_k) = (u_k - \alpha)^+$（50）中由以下函数定义的部分

$$e(c, u, C_i) = \begin{cases} \dfrac{ca(u)}{h(C_i)} & \text{if} \quad h(C_i) \neq 0 \\ \dfrac{a(u)}{MN} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{51}$$

其中 $C_i = \{c_i^{0,1}, \ldots, c_i^{N,M}\}$ 和

$$h(C_i) = \sum_{l=1}^{M} \sum_{\substack{m=0 \\ m\neq i}}^{N} c_i^{ml} \tag{52}$$

与激活函数 $a(\cdot)$ 类似，$e(\cdot)$ 可称为分布函数，因为它用于确定势在传递至不同单元的输出之间的分布。为描述该分布函数，我们采用了

约定 $c_i^l = c^{0,\ i\ l}$。本质上，分布函数 $e(\cdot)$ 根据其他元连接上已累积的势，将其突触前单元的总输出拆分，从而确定连接处的势。如果不存在这样的势，它就会将势均匀分配，这类似于突触前单元的广播。使用激活函数$a(u) = (u-\alpha)^+$，我们得到如下形式

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -u^i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j^i a(u_j^i) \\ \tau_r \dfrac{du_j^i}{dt} = -u_j^i + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} a(u_k^{ji}) + e(u_j^i, u_j, u_j^{0,1}, \ldots, u_j^{N,M}) \\ \tau_r \dfrac{du_k^{ji}}{dt} = -u_k^{ji} + e(u_k^{ji}, u_k, u_k^{0,1}, \ldots, u_k^{N,M}),\ k \neq j \end{cases} \tag{53}$$

我们将要考虑的第二项重大扩展，是在未满足阈值条件时加入势能存储。我们可以立即将（53）重新表述为

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -a(u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j^i a(u_j^i) \\ \tau_r \dfrac{du_j^i}{dt} = -a(u_j^i) + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} a(u_k^{ji}) + e(u_j^i, u_j, u_j^{0,1}, \ldots, u_j^{N,M}) \\ \tau_r \dfrac{du_k^{ji}}{dt} = -a(u_k^{ji}) + e(u_k^{ji}, u_k, u_k^{0,1}, \ldots, u_k^{N,M}),\ k \neq j \end{cases} \tag{54}$$

现在，u^i 的衰减受到阈值条件的约束。如果没有激活 $a(u) = (u-\alpha)^+ = 0$，势就会被存储起来；而在此前的情形中，势则会直接消失。这将导致不同的短期行为，并且还会受到先前时刻活动的影响。对于具有势能存储的系统，使用不连续激活/阈值函数更为合适

$$a(u) = \begin{cases} u \text{ if } u > \alpha \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{55}$$

该函数会在输出中反映此前存储的势。因此，当提到形式（54）时，我们将假定使用不连续激活。

最后，我们可以依据高速公路优先级准则阻止发射：只有当某个（元）连接的输入单元发射时，该连接才会发射；也就是说，对所有连接和元连接使用扩展激活函数。

$$\bar{a}(c, u) = \begin{cases} c \text{ if } c > \alpha \text{ and } u > \alpha \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{56}$$

采用此类动力学的前馈网络的最终形式为

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -a(u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j^i \bar{a}(u_j^i, u_j) \\ \tau_r \dfrac{du_j^i}{dt} = -\bar{a}(u_j^i, u_j) + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} \bar{a}(u_k^{ji}, u_k) + e(u_j^i, u_j, u_j^{0,1}, \ldots, u_j^{N,M}) \\ \tau_r \dfrac{du_k^{ji}}{dt} = -\bar{a}(u_k^{ji}, u_k) + e(u_k^{ji}, u_k, u_k^{0,1}, \ldots, u_k^{N,M}),\ k \neq j \end{cases} \tag{57}$$

如果较大的树突受到充分激发，激活函数 $\bar{a}(\cdot)$ 将进一步传播势；若确实如此，它将发挥阈值函数的标准作用。

在充分说明选择这些扩展的理由之前，我们将以类似于将神经元扩展为网络模型时所采用的方法，用其他网络变体补充完整模型定义。为了能够考虑循环网络，我们需要进一步阐述方程之间的耦合，以及用于描述不同连接关系范围的索引方式。根据上述构造，元连接只能取决于单元，连接只能取决于元连接和单元，而单元只能取决于连接。因此，单元只能接收前馈、侧向和反馈连接。前馈元连接可以定义为：从同一层连接到前馈连接，或从下一层连接到反馈连接；反馈元连接和侧向元连接（分别指向侧向连接的内向和外向连接）也同样如此。因此，根据可接受的连接类型，循环网络类型可能会有更大的多样性。为了推导出一些类似于前述常规网络的循环网络模型，我们必须作出一些简化假设，从而导出约化耦合：

- 为简化索引并进行现象学研究，我们只考虑与前馈连接相连的元连接。
- 尽管我们会根据连接类型给出完整定义，但之后仍会排除侧向连接和/或反馈连接，以降低研究的复杂度。

请注意，在（仅含连接的）常规网络中，移除反馈连接会使任何层向量方程完全解耦；而在这里，情况不再如此，并且当网络包含两个或更多层时，其演化也会有所不同。

鉴于此，索引的水平顺序和垂直顺序都将用于传达有关被索引连接的信息，如图 7所示。由于我们首先采用了简化假设，相同的索引方法可立即扩展到元连接的索引。

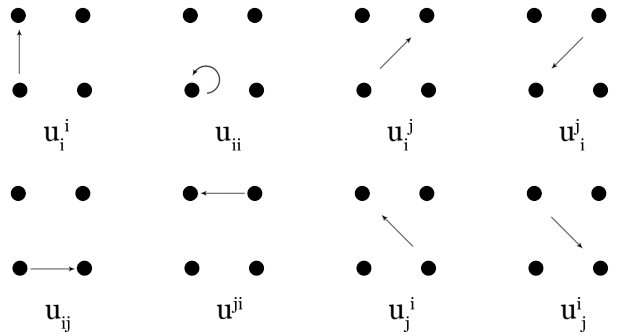


图7：2×2网络中连接的索引情形。

使用此索引约定和约化耦合，我们可以定义一个具有前馈和侧向连接关系的极简分层网络，形式如下：

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -a(u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j{}^i \bar{a}(u_j{}^i, u_j) + \sum_{l=1}^{M} w^{li} \bar{a}(u^{li}, u^l) \\ \tau_r \dfrac{du_j{}^i}{dt} = -\bar{a}(u_j{}^i, u_j) + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k{}^{ji} \bar{a}(u_k{}^{ji}, u_k) + e(u_j{}^i, u_j, u_j{}^{0,1}, \ldots, u_j{}^{NM}) \\ \tau_r \dfrac{du^{li}}{dt} = -\bar{a}(u^{li}, u^l) + \bar{e}(u^{li}, u^l, u^{l1}, \ldots, u^{lM}) \\ \tau_r \dfrac{du_k{}^{ji}}{dt} = -\bar{a}(u_k{}^{ji}, u_k) + e(u_k{}^{ji}, u_k, u_k{}^{0,1}, \ldots, u_k{}^{NM}),\ k \neq j \end{cases} \tag{58}$$

其中 $i,\ l \in [1;\ M]$ 以及 $j,\ k \in [1;\ N]$。一个之后也将用于获得特征检测结果的兴奋-抑制网络模型示例如下：我们有两组神经元，每个神经元都会兴奋同组内的邻居，并抑制另一组内的邻居。

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -a(u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \bar{a}(u_j{}^i, u_j) \\ \tau_r \dfrac{du_j{}^i}{dt} = -\bar{a}(u_j{}^i, u_j) + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \bar{a}(u_k{}^{ji}, u_k) - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \bar{a}(v_k{}^{ji}, v_k) + e(u_j{}^i, \ldots) \\ \tau_r \dfrac{du_k{}^{ji}}{dt} = -\bar{a}(u_k{}^{ji}, u_k) + e(u_k{}^{ji}, u_k, u_k{}^{0,1}, \ldots, u_k{}^{NM}),\ k \neq j \end{cases} \tag{59}$$

分别为 v 组增加三个方程，并将所有权重常数设为 1。再次需要指出，为了简化计算，我们在这个模型中忽略了戴尔定律。

，但我们可以将这两组进一步拆分为多个神经元组，其中一些组只有抑制性输出，另一些组只有兴奋性输出，从而将其纳入考虑。我们将在第 3.3.1 节中进一步探讨这个模型。

采用上述索引的简化的全循环网络

$$
\begin{cases}
\tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -a(u^i) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j{}^i \bar{a}(u_j{}^i, u_j) + \sum_{l=1}^{M} w^{li} \bar{a}(u^{li}, u^l) \\
\tau_r \dfrac{du_j{}^i}{dt} = -\bar{a}(u_j{}^i, u_j) + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k{}^{ji} \bar{a}(u_k{}^{ji}, u_k) + \sum_{l=1}^{M} w^l{}_{ji} \bar{a}(u^l{}_{ji}, u^l) + e(u_j{}^i, u_j, \dots) \\
\tau_r \dfrac{du^{li}}{dt} = -\bar{a}(u^{li}, u^l) + \bar{e}(u^{li}, u^l, u^{l1}, \dots, u^{lM}, u^l{}_{0,1}, \dots, u^l{}_{NM}) \\
\tau_r \dfrac{du^i{}_j}{dt} = -\bar{a}(u^i{}_j, u^i) + \bar{e}(u^i{}_j, u^i, u^{i1}, \dots, u^{iM}, u^i{}_{0,1}, \dots, u^i{}_{NM}) \\
\tau_r \dfrac{du_k{}^{ji}}{dt} = -\bar{a}(u_k{}^{ji}, u_k) + e(u_k{}^{ji}, u_k, u_k{}^{0,1}, \dots, u_k{}^{NM}),\ k \neq j \\
\tau_r \dfrac{du^l{}_{ji}}{dt} = -\bar{a}(u^l{}_{ji}, u^l) + \bar{e}(u^l{}_{ji}, u^l, u^{l1}, \dots, u^{lM}, u^l{}_{0,1}, \dots, u^l{}_{NM}) \\
\tau_r \dfrac{du_j}{dt} = -a(u_j) + \displaystyle\sum_{i=1}^{M} w^i{}_j \bar{a}(u^i{}_j, u^i) + U_j
\end{cases}
\tag{60}
$$

有助于研究网络基元，同时仍能区分各层。我们排除了$u_j{}^{ji}$ 类型的连接，却没有排除 $u^j{}_{ji}$ 类型的连接，这一出于工程考虑的选择并不十分重要，可以忽略。前馈和反馈元连接 $u_k{}^{ji}$ 和 $u^l{}_{ji}$ 的索引，是对元连接原本所需索引的简化版本，因为我们只允许 ji 表示前馈连接 $u_j{}^i$。与之前一样，输出层单元 u^i 可以替换为 v_i，此时我们可以使用与上述类似的多层（两层以上）索引，但用 v^{ji} 代替 u^{ji}，以包含有关起始参考单元的信息。使用这种扩展索引时，$u^i{}_j$ 指的是**u** 层中来自 u_i 的反馈连接，而 $v^i{}_j$ 则指**v** 层中来自 v_i 的反馈连接。

函数 $a(\cdot)$ 和 $e(\cdot)$ 在每种连接类型下都相似，唯一的区别是我们还添加了扩展版的分布函数

$$
\bar{e}(c, u, C_i) = \begin{cases} \dfrac{ca(u)}{\bar{h}(C_i)} \text{ if } \bar{h}(C_i) \neq 0 \\ \dfrac{a(u)}{MN} \text{ otherwise} \end{cases} \qquad \bar{h}(C_i) = \sum_{m=1}^{M} [u^{im} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq i}}^{N} (u_i{}^{nm} + u^i{}_{nm})]
\tag{61}
$$

与 $C_i = \{u^{i1}, \ldots, u^{iM}, u_i{}^{0,1}, \ldots, u_i{}^{NM}, u^i{}_{0,1}, \ldots, u^i{}_{NM}\}$ 其中对于网络（58）我们更具体地有

$$C_l = \{u^{l1}, \ldots, u^{lM}\} \qquad h(C_l) = \sum_{m=1}^{M} u^{lm}$$

对于网络（60），我们可以更具体地得到

$$C_l = \{u^{l1}, \ldots, u^{lM}, u^l{}_{0,1}, \ldots, u^l{}_{NM}\} \qquad h(C_l) = \sum_{m=1}^{M} [u^{lm} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq j}}^{N} u^l{}_{nm}]$$

最后，如果按照以下约定将所有未知量排列成一个张量，就可以从（57）构造出一个完全循环折叠版本$u_k^{ji} = u_{kji}$，$u_j^i = u_{j0i}$，$u^i = u_{00i}$，$u_i = u_{i00}$ 并对方程进行对称化

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du_{00i}}{dt} = -a(u_{00i}) + \sum_{j=1}^{N} w_{j0i} \bar{a}(u_{j0i}, u_{j00}), i \neq 0 \\ \tau_r \dfrac{du_{j0i}}{dt} = -\bar{a}(u_{j0i}, u_{j00}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} w_{kji} \bar{a}(u_{kji}, u_{k00}) + e(u_{j0i}, u_{j00}, \ldots), j, i \neq 0 \\ \tau_r \dfrac{du_{kji}}{dt} = -\bar{a}(u_{kji}, u_{k00}) + e(u_{kji}, u_{k00}, u_{k01}, \ldots, u_{kNM}), k, j, i \neq 0, k \neq j \\ u_{000} = 1, \; u_{kj0} = 0, \forall j \neq 0, \; u_{0ji} = 0, \forall j \neq 0, \text{ and } u_{kki} = 0, \forall k, i \neq 0 \end{cases}$$

现在，对于 $i \in [0; \; M], j \in [0; \; N]$ 和 $k \in [0; \; N]$。令 $a(u_{00i}) = \bar{a}(u_{00i}, \; 1)$，$w_{jji} = 0$，并对所有单元重新编号，使输入单元、隐藏单元和输出单元不再有所区别（因此，也将连接、元连接和动力学考虑到输入单元 u_i），我们可以看到

$$\tau_r \frac{du_{00i}}{dt} = -\bar{a}(u_{00i}, u_{000}) + 1 \sum_{j=1}^{N} w_{j0i} \bar{a}(u_{j0i}, u_{00j}) + 0 \bar{e}(u_{00i}, u_{000}, u_{001}, \cdots, u_{0NN})$$

$$\tau_r \frac{du_{j0i}}{dt} = -\bar{a}(u_{j0i}, u_{00j}) + 1 \sum_{k=1}^{N} w_{kji} \bar{a}(u_{kji}, u_{00k}) + 1 \bar{e}(u_{j0i}, u_{00j}, u_{j01}, \ldots, u_{jNN})$$

$$\tau_r \frac{du_{kji}}{dt} = -\bar{a}(u_{kji}, u_{00k}) + 0 \sum_{l=1}^{N} w_{lki} \bar{a}(u_{lki}, u_{00l}) + 1 \bar{e}(u_{kji}, u_{00k}, u_{k01}, \ldots, u_{kNN})$$

$u_{000} = 1, \; u_{kj0} = 0, \forall j \neq 0, \; u_{0ji} = 0, \forall j \neq 0,$ 以及 $u_{kki} = 0, \forall k, i \neq 0$

可化简为

$$\begin{aligned} \tau_r \frac{du_{kji}}{dt} = -\bar{a}(u_{kji}, u_{00k}) + c_{kji} \sum_{l=1}^{N} w_{lki} \bar{a}(u_{lki}, u_{l00}) + \\ + b_{kji} \bar{e}(u_{kji}, u_{00k}, u_{k01}, \ldots, u_{kNN}) + U_{kji} \end{aligned} \tag{62}$$

以及常量张量

$$b_{kji} = 0 \text{ if } k = 0 \text{ else } 1$$
$$c_{kji} = 0 \text{ if } j \neq 0 \text{ else } 1$$

外部输入张量 U_{kji} 以及相同的预先设定的 $u_{000} = 1$， u_{kj0} =0，以及 $u_{0ji} = 0$， $\forall j \neq 0$。全循环模型（62）是对所有先前模型的推广，在特定假设下（例如$w_{jji} = 0$）可由该模型推导得出。

请注意，所有已介绍的模型都没有考虑其动力学中的延迟，而这对于实际物理实现是必不可少的，并且在神经网络模型中也得到了广泛研究。之所以如此，是因为与生物和物理上的真实性相比，我们更关注这些模型纯粹的计算层面；这与人工神经网络逐渐偏离其生物对应物的情况类似。此外，这些模型在网络连接或突触可塑性方面也是静态的，网络活动的演化过程中不会发生学习。这是因为我们需要降低整个系统的复杂性，以便深入研究并验证新引入的结构和势动力学。为使本文内容完整，我们至少会提出一条可与上述任一形式结合使用的学习规则。

要为任意元网络添加可塑性，只需为所有连接和元连接的权重添加动力学。尽管赫布学习广受欢迎，我们仍将提出一种不同的学习规则：它不基于突触前神经元与突触后神经元之间的相关性，而仅基于突触前神经元的活动。选择这种规则的理由与一种现象有关：仅仅通过回忆就能巩固信息，而这也使有意遗忘变得困难。满足许多其他要求的这类简单的基于访问的学习规则如下：

$$\tau_w \frac{dw}{dt} = -uw + u^2 \tag{63}$$

其中 w 携带 u 的索引，也就是说，它是连接 u 的权重。当然，权重动力学 τ_w 的时间尺度必须显著大于势 τ_r 的时间尺度。这条学习规则的具体形式，通过在连接未被使用时停止修改 $u = 0$ 的权重，避免遗忘固定时间窗口内未被回忆的所有内容。否则，权重会缓慢收敛到势的当前值，但其变化速率仍与势及差值 u（$u - w$）成正比。势越大，对权重变化的影响就越大；这是为了避免简单的线性学习，也就是说，习得信息的重要性越高，所需的重复次数就越少。较大的差值影响更大，这凸显了意外性的重要性，也说明了长期维持较大权重的难度，尤其是在势较小的情况下。

较小的势难以长期维持。式（63）的离散版本是更新规则

$$w \to w + \epsilon(-uw + u^2) \tag{64}$$

如果将 w 至 u 都限制为不超过 1，则学习规则是稳定的，且其收敛更有意义。否则，可以考虑一种更复杂的规则，在该规则中， w 会随着 $u \to \infty$而饱和。该学习规则也完全是局部的——它只与局部势耦合，不使用来自网络的全局信息。然而，与赫布规则相比，使用这种学习规则获得有意义的存储信息更具挑战性。例如，要对处理路径上更远处动作电位的成功或失败提供任何反馈，就必须设置从上层返回下层的反馈连接，而全循环网络是其中的关键要求。对于任何正势，该学习规则也无法改变权重的符号，因此必须预先确定抑制性连接。这两项计算方面的缺点都与实际的解剖学观察相符。

3.1.2 模型族的动机

我们以当前所构建的模型族的动机作为本部分的收尾。最简单的形式（49）具有与常规多层网络（第 3.2.1 节）相近的逼近能力。内部势形式（50）可以解释为一种扩展图，其中每个节点都可以表示一个单元或一条连接，并且所有节点都具有加性全循环网络的动力学（第 3.2.2 节）。这种解释有助于我们利用关于其适定性和多稳态的现有理论，并保留（28、29、30）的全部认知能力，因为这些模型只是加性网络的特例。同时，这种解释也揭示了该动力学的一些局限，以及为何除了采用更复杂的网络结构之外，还要在后续模型中对其进行扩展。

所有后续形式的完整数学推导，即复杂度足以支撑我们选择相应动力学的模型，将与其动机分开阐述；动机是本节的主要主题，而完整推导将从下一部分的主要章节开始。（53、54）的相空间分解为流形限制稳定性提供了充分条件（第3.2.3节）。（57、58、59、60）网络基元的案例研究将这一分析扩展到完整相空间中的吸引子，并推导出实现所需额外能力所必需的网络层级动力学；我们将在此展示这些能力（第3.2.4节）。在整个分析过程中，只要不需要更受限的网络拓扑，我们就使用（62）并将其化简为上述各种形式。

引入这一模型族的主要目的，是仅通过其网络层级动力学来描述认知层面现象，类似于文献（28）、（29）和（30）中的选择性放大、输入整合等现象，但这里讨论的是涉及信息压缩和不确定性最小化的活动。下图展示了这类活动的一些示例，以及

实现这些活动的网络电路。有人或许会认为，具有中枢神经系统且能够最大限度降低环境不确定性的生物体，拥有具有进化优势的处理能力；但这绝不是我们定义这些概念的出发点。

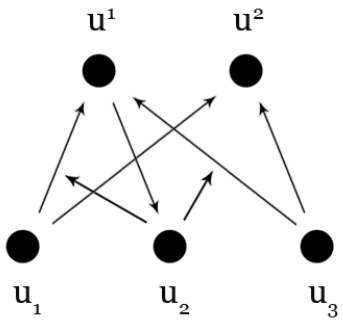


图 8：实现对输入的注意的网络电路。

图 8 展示了一个电路。尽管它经过了过度简化，但它体现了网络行为的许多方面。输入 $u_1u_2u_3$ 可以属于不同的模态：例如一个由 3 个像素/光感受器组成的灰度图像，其中每个输入都包含一个亮度值；或一个由 3 个字母组成的单词 ABC，其中每个输入都是二进制的，反映该字母是否从文本流中解析而来，等等。输出 u^1 和 u^2 存储的是概念，或者更确切地说，是从输入中抽象出的内容。 u_1 分别连接到 u^1 和 u^2 的两个输出连接可分别表示为 ${u_1}^1$和 ${u_1}^2$，它们是对输入的不同解释 u_1，每个概念对应一种解释。反过来，输入连接 ${u_1}^1$和 ${u_3}^1$则是概念 u^1的表征。

电路 8 中的连接关系经过预先设定，以便让更多局部定义¯ ¯浮现出来。如果我们考虑输入 ABC，即 $u_1 = 1$、 $u_2 = 0$和 $u_3 = 0$，唯一激活的输入 u_1 会将其信号同时广播到 ${u_1}^1$和${u_1}^2$。输入 $A\bar{B}\bar{C}$ 会带来不确定性，因为u_1 没有单一的解释。然而，由于电路中的连接关系，这种不确定性最终会通过激活元连接 ${u_2}^{11}$而得到解决，从而提高 ${u_1}^1$中的势。这样一来， u_2，或者更准确地说，其解释 ${u_2}^{11}$，就是正确解释输入 u_1的关键语境 ${u_1}^1$。如果 u_3 始终处于激活状态，而输入是¯而非 ABC，情况也一样—— u_2 将成为解释额外输入 u_3 为${u_3}^1$的上下文。由于 u_2 会将 u_1 和 u_3 都指向 u^1，因此可以认为它是 u^1 的一个特征，对激活 u^1 并帮助其战胜诸如 u^2这样的替代概念（具有相同表征）具有更大的重要性。反过来，相对于 u^2而言， u_2 与u_1 和 u_3 则是组成部分（具有相同解释）。

若要深入了解某些动力学背后的动机，我们必须更详细地追踪输入 ABC 的处理过程。由于 u_1 的广播，且两个输出连接中都没有先前存储的势能，因此我们有

${u_1}^1 = 0.5$ 和 ${u_1}^2 = 0.5$均如此。将 u_1 的势视为在各输出连接之间分配的资源，有助于处理病态情况：某个输入被学习得过于充分（拥有许多解释），以至于在激活方面压制或蚕食网络。在这种情况下，发射信号会扩散到许多输出连接中，因此每个连接的作用都微不足道，除非它被置于上下文中（通过学习更多与之相连的元连接），并得到当前上下文的支持。虽然 ${u_1}^1 = 0.5 < \alpha$ 若阈值 $\alpha = 1$，作为网络属性的势能存储最终会导致 u^1 激活，前提是 u_1 以相同速率持续放电更长时间。与此同时，设置阈值通常有助于避免对任意微小的输入（例如扩散的输入）作出反应，并促成整体稀疏活动。通过反馈连接发射 ${u^1}_2$ 体现了网络对自身输入的假设与控制，也体现了对¯已学习输入 ABC 的想象／重构，这通过回忆输入 B实现。回路$u^1 \to {u^1}_2 \to u_2 \to {u_2}^{11} \to {u_1}^1$为 ${u_1}^1$提供来自其自身激活的反馈，但这方面以及后续分析均超出本文的讨论范围。增加通过 ${u_1}^1$的发射，同时采用信号资源策略，会减少通过 ${u_1}^2$的发射，从而形成一种不涉及专门抑制性连接的弱抑制。这与实证观察相符：观察显示，抑制性连接的数量要少得多（尤其是抑制性中间神经元，或中枢神经系统内的神经元），而非采用常规网络中常见的 1 [68] 比率；这类网络需要对激活进行充分控制。

为了进一步增强此类电路的可信度，我们必须提及一些认知层面属性，例如图9所展示的表征具有高度异质性。作为输入的一种抽象，某个概念（例如三角形）可以对大量输入噪声和损坏非常不敏感（即具有鲁棒性），前提是这些变化并非特征；但如果输入中多出一个被激活的输入，而它恰好是某个概念的特征，那么这个概念也可能对此类微小差异非常敏感。以三角形为例，若恰当位置上增加第四个点，先前所有的点都会指向正方形概念。尽管特征对其余整体输入的上下文影响最大，但它们也会受到上下文影响（不过，与已完全解析／解释的输入相比，仍会进行广播），因此对于给定概念而言，其结构并非固定不变。

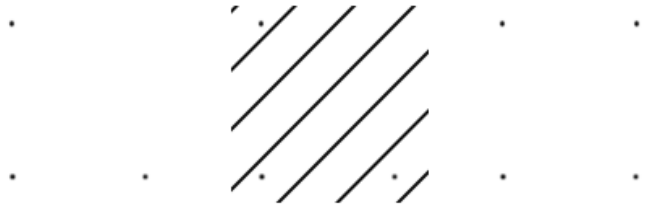


图9：三角形表征的异质性。

另一个示例性电路可以展示认知层面现象，例如垂直注意（朝向抽象层级中不确定性较高的部分）、通过扩散各自特征的影响并集中竞争特征的影响来实现概念间的竞争，等等。当然，目前研究的案例是对实际网络电路的过度简化，旨在用不切实际的少量连接展示相当多此类现象。事实上，此处出现的许多定义都应当更加一般化：

- 一个概念的解释/表征可以是输入/输出连接的组合，也称为内部状态
- 一个概念可以存储为激活状态（即一组激活单元）或激活模式（状态的时间序列），而不是单个单元（祖母细胞 [29]）

所有展示出的行为都不一定与任何经验现实相符，所有模型也不一定能够重现这些行为。只要网络能够实现足够普适的目标，并通过数值实现进行评估，第一点就不是必要条件。第二点则是我们当前数学分析的主要目标之一，同时还要为可能的新行为及其产生机制提供指导。

3.2 数学分析

对所提出模型的数学研究包括分析其逼近能力（能够学习和表征哪些类型的输入）、适定性（其解的存在性与唯一性，或将研究范围限制在能够保证这些性质的区域内）、稳定性（较简单形式的多稳态和多周期性，以及较复杂形式的部分稳定性），以及整体动力学（关注最复杂的形式，尤其是从较简单到较复杂的网络基元）。

3.2.1 通用逼近

模型（49）与具有任意数量隐藏单元的多层网络类似，是任意博雷尔可测函数的通用逼近器。为了证明这一点，我们需要用到 [42] 中的一些定义和定理。

定义 3.1。对于任意 $r \in \mathbb{N}$, A^r 是所有仿射函数 $A\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}\colon A(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b$ 的集合，其中 $\mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ 且 $b \in \mathbb{R}$。

定义 3.2。对于任意（博雷尔）可测函数 $G(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以及 $r \in \mathbb{N}, \Sigma^r(G)$ 是函数类 $\{f\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}\colon f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j G(A_j(\mathbf{x}))\}$，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r, \beta_j \in \mathbb{R}, A_j \in A^r, q \in \mathbb{N}$。

定义 3.3. 对于任意（Borel）可测函数 $G(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，以及 $r \in \mathbb{N}$，$\Sigma\Pi^r(G)$ 是函数类 $\{f\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}\colon f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \prod_{k=1}^{l_j} G(A_{jk}(\mathbf{x}))\}$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$， $\beta_j \in \mathbb{R}$， $A_{jk} \in A^r$， $l_j \in \mathbb{N}$， $q \in \mathbb{N}$。

定义 3.4. 度量空间 (C^r, ρ_k) 中的子集 S，若对于 $f, g \in C^r$，度量 $\rho_k(f,g) = \sup_{x\in K} |f(x) - g(x)|$，则称其在 C^r 中于紧集上一致稠密；也就是说，对于每个紧子集 $K \subset \mathbb{R}^r$， S 都是 C^r 中的 ρ_k-稠密子集。

定义 3.5. 给定 $(\mathbb{R}^r, B^r)$ 上的概率测度 μ，定义度量ρ_μ：$M^r \times M^r \to \mathbb{R}$如下：$\rho_\mu(f, g) = \inf\{\epsilon > 0\text{：}\ \mu\{x\text{：}\ |f(x) - g(x)| > \epsilon\} < \epsilon\}$。

定理 3.1. 设 C^r 为从 $\mathbb{R}^r$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数集合。设 G 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的任意连续非恒定函数。那么 $\Sigma\Pi^r(G)$ 在 C^r 中于紧集上一致稠密。

定理 3.2。 设 M^r 为从 $\mathbb{R}^r$ 到 $\mathbb{R}$的博雷尔可测函数集合， B^r 为 $\mathbb{R}^r$上的博雷尔 σ-代数。对于任意连续非恒定函数G： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$、任意 $r \in \mathbb{N}$以及 $\mathbb{R}^r, B^r)$ 上的任意概率测度 μ，都有 $\Sigma\Pi^r(G)$ 在 M^r 中是 ρ_μ- 稠密的。

因此，当输入被限制在第一个定理中的紧区间 $x_i \in [a, b]$ 内时，表示神经元瞬时输出的函数 $f(\mathbf{x}) \in \Sigma^r(G) \subset \Sigma\Pi^r(G)$ 可以以任意高的精度逼近任意连续函数；根据第二个定理，它也可以在概率测度下逼近任意博雷尔可测函数。具有 r个输入单元、 q个隐藏单元和 1 个输出单元的网络，其输出单元的形式为 $f \in \Sigma\Pi^r(G)$，即 $f = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \prod_{k=1}^{1} G(\mathbf{w}^{jk} \cdot \mathbf{x} + b_{jk}) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j G(\mathbf{w}^j \cdot \mathbf{x} + b_j)$ $= \sum_{j=1}^{q} \beta_j G(\sum_{i=1}^{r} w_{ij} x_i + b_j)$。输入单元分别为 x_i，连接到一个隐藏单元的权重由向量 $\mathbf{w}^j$表示，而其势为 $A_j = \mathbf{w}^j \cdot \mathbf{x} + b_j$，其中 b_j 表示第 j 个隐藏单元的偏置项（外部输入）。隐藏单元的激活函数为$G(A_j)$，每个连接到输出单元的权重由 β_j表示。对于大小为 s 的输出层，我们只需取一个向量值函数，使得对于$i \in [0, \ f_i \in \Sigma^r(G)\text{；}\ s]$。

现在我们将通过考察神经元 $v_i = g(\mathbf{x})$ 的输出，证明 (49) 具有相同的逼近能力。具体而言，考虑 (49) 的一个线性变体，其中 $\alpha = 0$

$$
\begin{cases}
\tau_r \dfrac{dv_i}{dt} = -v_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j^i c_j^i \\
\tau_r \dfrac{dc_j^i}{dt} = -c_j^i + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} c_k^{ji} + u_j \\
\tau_r \dfrac{dc_k^{ji}}{dt} = -c_k^{ji} + u_k, \ k \neq j
\end{cases}
$$

假设变量具有瞬时影响，我们得到

$$\begin{cases} v_i = \sum_{j=1}^{N} w_j^i c_j^i \\ c_j^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} c_k^{ji} + u_j \\ c_k^{ji} = u_k,\ k \neq j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_i = \sum_{j=1}^{N} w_j^i (\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} u_k + u_j) \\ c_j^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^{ji} u_k + u_j \\ c_k^{ji} = u_k,\ k \neq j \end{cases}$$

因此，去掉索引 i 并考虑单个输出 v ($M = 1$)，我们得到

$$v = g(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{N} w_j (\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k^j u_k + u_j) = \sum_{j=1}^{N} w_j (\sum_{k=1}^{N} w_k^j u_k), \quad w_j^j = 1$$

最后，将记号改为 $u_k = x_k$, $w_j = \beta_j$, $k = i$, $G(u) = u$, $q = r = N$，并利用 $b_j = 0$，我们最终可以看出

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j G(\sum_{i=1}^{r} w_i^j x_i) \Rightarrow g(\mathbf{x}) \in \Sigma^r(G) \subset \Sigma\Pi^r(G)$$

并且由于 $G(u) = u$ 是连续的非常函数，且 $x_i \in [0, 1]$ 根据定理 3.1，我们可以逼近任意连续函数。或者，利用定理 3.2，对于 $G(u) = u$ 连续的非非常函数，我们可以得出，式 (49) 的线性变体是一个通用逼近器，能够逼近 r 维空间上的任意博雷尔可测函数。我们可以考虑不含动力学且输出单元上没有阈值的原始式 (49)，此时 $G(u) = (u - \alpha)^+$ 仍然是连续且非常的。因此，我们仍然可以应用这些定理，并得出结论：形式如式 (49) 的输入输出层网络是一个通用逼近器。这里一个重要区别是，尽管 [42] 最初讨论的是至少有三层的任意神经网络（第 1.3 节），但网络 (49) 只有两层。这一点符合直觉，因为式 (49) 具有更复杂的动力学，例如连接上的动力学；同时，这也更符合这样的观察：新皮层仅有六层（第 1.2 节），却能执行所有复杂操作。

3.2.2 扩展图解释

下面我们将介绍文献中关于（62）的一个简化版本，即（50）的张量形式的一些结果。我们将证明（50）是加性模型（34）的一个特例；加性模型是研究最广泛的神经网络，其适定性和稳定性理论已经十分成熟。我们可以通过将（34）的动力学从（62）的动力学简化为（50）的动力学来推导出（50），也可以仿照

构造（62）时的做法，但采用更简单的动力学。这里我们将采用第一种方法，把（62）化简为如下形式的全循环网络

$$\tau_r \frac{du_{kji}}{dt} = -u_{kji} + c_{kji} \sum_{l=1}^{N} w_{lki}(u_{lki} - \alpha)^+ + b_{kji}(u_{00k} - \alpha)^+ + U_{kji} =$$
$$= -d_{kji}u_{kji} + c_{kji} \sum_{l=1}^{N} w_{lki} a(u_{lki}) + b_{kji} a(u_{00k}) + U_{kji}$$

其中，$d_{kji} = 1$ 和 $a(u) = (u - \alpha)^+$ 是激活函数。

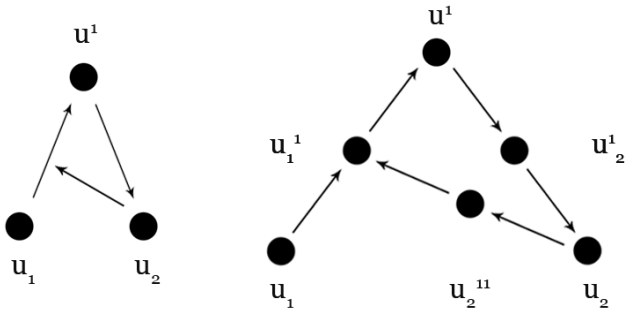


图 10：简单电路的扩展图版本。

如果将网络解释为扩展图，其中每个未知量——无论是单元、连接还是元连接——都是图中的一个节点，而两个未知量之间的依赖关系是一条边（图 10），我们就可以将这些未知量排列成一个向量，并得到一个具有 $(N + 1)^3$ 行/列的稀疏权重矩阵。具体而言，

$$\tau_r \frac{du_{kji}}{dt} = -d_{kji}u_{kji} + c_{kji} \sum_{l=1}^{N} w_{lki} a(u_{lki}) + b_{kji} a(u_{00k}) + U_{kji} =$$
$$= -d_{kji}u_{kji} + c_{kji} \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} w_{lmn}^{kji} a(u_{lmn}) + U_{kji} =$$
$$= -d_{kji}u_{kji} + \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \tilde{w}_{lmn}^{kji} a(u_{lmn}) + U_{kji}$$

当 $w_{lki} = w_{lki}^{kji}$、$\tilde{w}_{lmn}^{kji} = 0$ 如果 $l = 0$、$m \neq k$ 或 $n \neq i$，以及 $\tilde{w}_{00k}^{kji} = b_{kji}$（来自$w_{00k}^{kji} = b_{kji}/c_{kji}$）时，该定义是明确的，因为 b_{kji} 仅取决于 k，并且意味着如果 $\tilde{w}_{00k}^{kji} = 0$ 则为 $k = 0$，否则为 1。除此之外，吸收 c_{kji} 还意味着，如果 $j \neq 0$，则 $\tilde{w}_{lmn}^{kji} = 0$也成立，但 $\tilde{w}_{00l}^{kji} = 1$的情况除外。在将 kji 重新索引为 i、将 lmn 重新索引为 j，以便将 u_{kji} 排列成一个向量后，

方程变为

$$\tau_r \frac{du_i}{dt} = -d_i u_i + \sum_{j=1}^{(N+1)^3} \tilde{w}_{ij} a(u_i) + U_i \iff \tau_r \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -diag(\mathbf{d})\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{a}(\mathbf{u}) + \mathbf{U} \tag{65}$$

它就是加性模型（34）。因此，我们可以应用关于（34）的所有理论，得出其解及其吸引子的存在性和唯一性结论。由于这类网络在优化 [91] 中的广泛应用，现有的大多数结果都侧重于给出保证稳定平衡点唯一性的充分条件（单稳态）；但我们更关注（65）存在多个稳定平衡点（多稳态）和多个稳定极限环（多周期性）的情形。

解的存在唯一性显然取决于激活函数的选择 $a(\cdot)$。根据常微分方程标准理论中的 Picard-Lindel¨of 定理，对于光滑且利普希茨连续的 $a(\cdot)$，解的存在唯一性可以得到保证。对于不连续激活函数，则需要运用 Filippov理论，并以微分包含的意义定义解（即使它是一个平衡点或极限回路） [21]。

吸引子的存在性（但非唯一性）主要针对有界激活函数（饱和函数，也称为压缩函数）进行研究，这类函数可解释为最大输出发放率。然而，无界激活函数也十分重要，并且已纳入许多论文的稳定性结果中 [91]。关于激活函数类型的最后一种区分涉及单调性：最初的假设是严格单调递增的 $a(\cdot)$，后来则扩展到非递减的情形。

正如对（34）的研究中所讨论的，激活函数 $a(u) = (u - \alpha)^+$是全局利普希茨连续的，因此存在性、唯一性以及对初始数据的连续性都可以立即验证，并且对所有时间均成立。若要进一步推广到不连续激活函数，则需要一些更一般的定义，类似于最初研究单稳态 [23] 和多稳态 [54]时所采用的定义。

定义 3.6 (凸包)。对于集合 $E \subset \mathbb{R}^n$，包含 E 的最小凸集称为 E 的凸包。凸包始终存在，且等于所有包含 E 的凸集的交集。 E 的凸包的闭包记作 $K[E]$。

凸包是一个线性算子，即 $K[\alpha E_1 + \beta E_2] = \alpha K[E_1] + \beta K[E_2]$。下一条定义将用到这一性质。

定义 3.7 (解)。 考虑如下集值映射 $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

定义为

$$\phi(\mathbf{u}) = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{\mu(N)=0} K[\mathbf{f}(B(\mathbf{u},\epsilon) \setminus N)] = -diag(\mathbf{d})\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{W}} K[\mathbf{a}(\mathbf{u})] + \mathbf{U}$$

其中， N 是任意零测集， B 是以 $\mathbf{u}$ 为中心、半径为 ϵ 的球。在区间 $[t_0, t_1]$、$t_0 \le t_1 \le +\infty$ 上，满足初始条件 $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u_0}$，的方程（65）的解，是定义在 $[t_0, t_1]$ 上的绝对连续函数 $\mathbf{u}(t)$，使得 $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u_0}$，，并且对于几乎所有 $t \in [t_0, t_1]$， $\mathbf{u}(t)$ 满足微分包含 $\dot{\mathbf{u}}(t) \in \phi(\mathbf{u}(t))$。

这里， $K[\mathbf{a(u)}] = ([a_1(u_1^-)\ a_1(u_1^+)],\ \cdots [a_N(u_N^-)\ a_N(u_N^+)])^T$ 是由 $\mathbf{a(u)}$ 的每个不连续点定义的区间向量。由于平衡点本身也是解，因此我们在此也对其进行定义。

定义 3.8（平衡点）。 方程 $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n$ （65）的平衡点是方程（65） $\mathbf{u}$（t） $= \mathbf{u}^*$， $\forall t \in [0, +\infty)$ 的常值解。因此 $\mathbf{u}^*$ 满足

$$\mathbf{0} \in \phi(\mathbf{u}^*) = -diag(\mathbf{d})\mathbf{u}^* + \tilde{\mathbf{W}} K[\mathbf{a}(\mathbf{u}^*)] + \mathbf{U}$$

定义3.9（输出平衡点）。 若$\mathbf{u}^*$ 是（65）的一个平衡点，则存在一个向量 $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\mathbf{v}^* \in K[a(\mathbf{u}^*)] \qquad \mathbf{0} = -diag(\mathbf{d})\mathbf{u}^* + \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{v}^* + \mathbf{U}$$

它称为（65）对应于$\mathbf{u}^*$的输出平衡点。

有必要将输出平衡点与状态平衡点分别考虑，因为激活函数不再假设为连续函数，也就是说，状态空间中的收敛并不能保证输出收敛，而此前的情况并非如此。

定理3.3（解的局部存在性）。 假设 a: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的每个分量 a_i 都是 a 的非递减、有界且几乎处处连续的函数，并且在每个不连续点处都有有限的左右极限。那么$\forall \mathbf{u_0} \in \mathbb{R}^n$ 至少存在（$\mathbf{u}(t)$ ）的一个局部解，该解满足初始条件$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u_0}$。此外，任何解都是有界的，因此定义于 $[0, +\infty)$。

局部存在性是 [21] 的结果，并且在 a_i 不一定有界的情况下也可以推导出。整体存在性由 [23]证明，其最终目标是为单稳态提供充分条件。另一方面， [54] 使用相空间分解研究（65）的多稳态，其中 a（u） $= sgn$（u）作为激活函数。

对于光滑激活函数的情形，已有大量研究 [55, 80, 20, 65, 9,31, 7] 采用了从定制能量泛函 [7] 到矩阵测度[20] 等技术，并给出了局部和全局指数稳定性方面的结果 [55, 80, 20,

65, 9, 31], 收敛率 [20, 7], 吸引域 [65, 80, 7], 和网络综合/设计 [55, 80, 31]。近期采用连续饱和（通常为分段线性）激活函数的研究，发现可能存在 3^N平衡点，其中 2^N 渐近稳定，其余则不稳定。具体而言， [90]分析了一个具有时变时滞的 n 神经元网络，并找到了 2^N 局部指数吸引极限环存在的条件（平衡点是其特例和推论）。在 [11, 12], 中，可能的平衡点数量被扩展至 3^N，其中 $3^N - 2^N$ 平衡点被 [84, 57] 证明是不稳定的； [84, 57] 还证明， 3^N 平衡点是具有 2 个拐点的激活函数（假设其为分段线性）的一个特例。对于更一般的 $2r$ 个拐点，结果为（$2r+1$）^{N} 平衡点，其中（$r+1$）^{N} 局部指数稳定，其余则不稳定。 [43, 10, 44] 也针对具有 s 个分段的不连续分段常数激活函数，给出了类似的稳定平衡点结果，即 s^N 局部指数稳定的平衡点（若考虑周期性外部输入，则为极限环），其中 a（u）$= sgn$（u）是 $s = 2$时的特例。

选择具有任意数量角的连续（分段线性）激活函数，或具有任意数量分段的不连续激活函数，人们或许会认为，最终能够实现任意高的存储记忆数量容量，而不再受$0.15N$ （34）所给出的极其有限的初步估计所限。这种看法并不正确，因为要存储预先选定的记忆，还需要综合程序；Hopfield 对 $0.15N$ 的早期估计同样是由于他早期的综合程序（37）。特别是，如果考虑大量记忆，且它们在某些单元中都相关（向量在某些组成部分上相关），就可能得到较大的权重，从而违反 3^n 关于平衡点的充分条件 [90, 11, 84]。

将（34）以及因此将（50）解释为联想记忆时，还存在其他一些缺点，表明其动力学过于简单：

- 不稳定平衡点的存在无法在记忆层面得到恰当解释，尽管由于不可避免的扰动，这种不稳定性会使该平衡点在实践中无法被检测到。

- 在稳定平衡点存在性的充分条件下， [90, 11],每个平衡点也会有一个关于原点对称的对应平衡点，因此在完全正区域中只剩下 1^n 个平衡点；这有时可能是一个有意义的限制。

- 关于收敛的结果 [90, 11, 84]可能过于严格，因为获得这些结果的主要方法包括对相空间进行分解，并检测方程保持完全解耦的正不变区域。这意味着沿某一维度的平衡点在其他任何维度上都保持为常数，因此无法考察更有意义的情形。

- 关于吸引域 [11, 84] 的结果通常描述的是

由不稳定平衡点的稳定流形界定的凸正不变集。在许多情况下，这或许过于简单，无法充分定义为获得稳健响应而归为一组的初始条件；这些条件可能涉及部分收敛，或对线索的邻近性采用不同的概念。

- 对激活函数进行过度分段，也会导致出现许多小型吸引区域，使网络无法用于模式补全、分类或其他任何用途。与更简单的激活函数相比，这种做法在生物学上的意义也较小，例如 $a(u) = (u-\alpha)^+$，后者能更好地反映放电率近似。

由于激活函数无界， $a(u) = (u-\alpha)^+$ 具有更复杂的动力学，更符合神经元很少处于上饱和区间这一观察结果，并能处理赢家通吃网络中的伪平衡点 [86]。关于这类线性阈值函数的研究涉及轨迹有界性的充分条件（适用于对称和非对称连接） [86, 89, 92], 、全局吸引集的确定 [89, 92], 、完全收敛 [89], ， 以及不变集内指数稳定极限环（因而也包括平衡点）的存在性 [92]。

3.2.3 相空间分解

我们可以从（53， 54）中的（62）推导出（57）的张量形式，方法与上一节相同，或者类似于我们从（57）推导出（62）的方式，得到

$$\tau_r \frac{du_{kji}}{dt} = -d_{kji}u_{kji} + c_{kji}\sum_{l=1}^{N} w_{lki}a(u_{lki}) + b_{kji}\bar{e}(u_{kji}, u_{00k}, \dots) + U_{kji}$$
$$\tau_r \frac{du_{kji}}{dt} = -a(u_{kji}) + c_{kji}\sum_{l=1}^{N} w_{lki}a(u_{lki}) + b_{kji}\bar{e}(u_{kji}, u_{00k}, \dots) + U_{kji}$$

现在，我们将重点讨论第一个方程（记住 $w_{kki} = 0$），并将其明确写出，其中上下文项展开为每个条件对应的示性函数之和

$$\tau_r \frac{du_{kji}}{dt} = -d_{kji}u_{kji} + c_{kji}\sum_{l=1}^{N} w_{lki}a(u_{lki}) + U_{kji} +$$
$$b_{kji}[\chi(u_{k01}, \dots, u_{kNN})\frac{u_{kji}}{\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{klm}} + (1-\chi(u_{k01}, \dots, u_{kNN}))\frac{1}{N(N+1)}]a(u_{00k}) \tag{66}$$

其中我们使用指示函数

$$\chi(u_{k01}, \dots, u_{kNN}) = \begin{cases} 1 \text{ if } \sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{klm} \neq 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{67}$$

根据激活函数的选择将相空间划分为不同区域，有助于我们获得更简单的动力学，并确定各区域中的局部稳定性条件。这是文献中研究神经网络多稳态的主要方法之一 [91] ，连续激活函数和不连续激活函数的研究均采用了这种方法。不过，在我们的情形中，我们还将考虑仿射子空间，其中上下文项简化为广播动力学；此外，还将考虑其正侧，此处的分布式发射是非奇异的。不失一般性，我们还将假设 $\alpha = 0$，即 $a(u) = (u)^+ = \max(0,\ u)$。

更具体地说，如果我们固定 $k \in [1;\ N]$，那么在半空间 $\{u_{00\bar{k}} \leq \alpha = 0\}$ 中，我们有 $\forall j \in [0;\ N], \forall i \in [1;\ N]$ 方程可简化为

$$\tau_r \frac{du_{\bar{k}ji}}{dt} = -d_{\bar{k}ji} u_{\bar{k}ji} + c_{\bar{k}ji} \sum_{l \in \mathcal{N}} w_{l\bar{k}i} u_{l\bar{k}i} + U_{\bar{k}ji}$$

其中 $\mathcal{N} \subset [1;\ N]$ 满足以下条件：当 $u_{\bar{l}\bar{k}i} > \alpha = 0$时，$l \in \mathcal{N}$。对于情况 $k = 0$，整个相空间也同样适用这一化简，因为 $b_{0ji} = 0$，因此以下结论无需额外处理即可推广到这种情况。若沿某个特定维度 $u_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}}$ 变化，并固定其余所有维度（$k \neq \bar{k}$, $j \neq \bar{j}, i \neq \bar{i}$），则可以在由此得到的一维流形上找到一个稳定平衡，如下所示

$$u_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}} = \frac{c_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}}}{d_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}}} \sum_{l \in \mathcal{N}} w_{l\bar{k}\bar{i}} u_{l\bar{k}\bar{i}} + \frac{U_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}}}{d_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}}}$$

这个部分平衡点是稳定的，因为微分方程简化为某种典型形式 $\dot{y} = -y + c$，并在 c 处存在稳定平衡。它随 $u_{l\bar{k}\bar{i}}$ 线性变化，并且相对于所有其他未知量为常数。在这两种情况下，只要 $u_{00\bar{k}} \leq 0$，其他维数上的动力学行为在定性上仍保持不变；但在第二种情况下，定量上也保持不变。如果我们改变 $u_{\bar{k}ji}$，并固定其余所有量（$k \neq k$），就能在由此得到的（$N+1$）N维流形上找到一个稳定平衡，

$$u_{\bar{k}ji} = \frac{c_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}} \sum_{l \in \mathcal{N}} w_{l\bar{k}i} u_{l\bar{k}i} + \frac{U_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}}$$

再次记住 $w_{\bar{k}\bar{k}i} = 0$，因此上述 N（$N+1$）方程彼此解耦。此外，如果 $c_{\bar{k}ji} = 0$，或者对于l，$u_{l\bar{k}i} \leq \alpha = 0$，$i \in [1;\ N]$（因此 $\mathcal{N} = \emptyset$）成立，那么 $u_{\bar{k}ji} = \frac{U_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}}$ 就像之前一样是（$N+1$） N维流形中的一个平衡，但相对于所有其他维数均为常数，即对于 $k \neq k$，沿 u_{kji} 的定量行为完全相同。最后，如果所有未知量都处于阈下区域 $u_{kji} \leq \alpha = 0$，我们便能在相空间中找到一个稳定平衡

$$u_{kji} = \frac{U_{kji}}{d_{kji}} \quad \forall k, i \in [1; N], j \in [0; N]$$

这意味着非相互作用单元的势会平衡在各外部输入与衰减率的比率上。

如果将动力学限制在子空间 $\{\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{\bar{k}lm}=0\}$ 与剩余半空间 $\{u_{00\bar{k}}>\alpha=0\}$ 的交集中，则可得 $\chi(u_{k01},\ \ldots\ldots,\ u_{kNN})=0$ 和 $\forall j\in[0;\ N],\ \forall i\in[1;\ N]$ 方程可简化为

$$\tau_r\frac{du_{\bar{k}ji}}{dt}=-d_{\bar{k}ji}u_{\bar{k}ji}+c_{\bar{k}ji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{l\bar{k}i}u_{l\bar{k}i}+b_{\bar{k}ji}\frac{u_{00\bar{k}}}{N(N+1)}+U_{\bar{k}ji}$$

从而在形式为 $N(N+1)$ 维的流形（及其低维对应流形）上达到部分平衡点

$$u_{\bar{k}ji}=\frac{c_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{l\bar{k}i}u_{l\bar{k}i}+\frac{b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}}{d_{\bar{k}ji}N(N+1)}+\frac{U_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}}$$

若 $u_{l0\bar{k}}\le 0$ 和 $u_{l\bar{k}i}\le 0$（或 $c_{\bar{k}ji}=0$）对于 $l\in[1$成立；$N],\ l\neq k$, 则我们还可得出 $u_{00\bar{k}}=\frac{U_{00\bar{k}}}{d_{00\bar{k}}}$，因此

$$u_{\bar{k}ji}=\frac{b_{\bar{k}ji}U_{00\bar{k}}}{d_{\bar{k}ji}d_{00\bar{k}}N(N+1)}+\frac{U_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}}$$

它完全解耦，因此相对于所有其他维数而言是常数。请注意，所有这些都在一个 $(N-1)N(N+1)$ 维流形上成立，该流形是子空间 $\{\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{\bar{k}lm}=0\}$。

到目前为止，我们对动力学所做的改动不多，只是将特定相互作用的一个缩放版本与某个未知的 $u_{00\bar{k}}$ 联系起来。相空间的其余部分，即区域 $\{\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{\bar{k}lm}\neq 0\}\cap\{u_{00\bar{k}}>\alpha=0\}$，是网络的主要运行区域，并导出如下方程

$$\tau_r\frac{du_{\bar{k}ji}}{dt}=-d_{\bar{k}ji}u_{\bar{k}ji}+c_{\bar{k}ji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{l\bar{k}i}u_{l\bar{k}i}+b_{\bar{k}ji}\frac{u_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}}{\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}u_{\bar{k}lm}}+U_{\bar{k}ji}$$

其中我们有 $u_{\bar{k}\bar{k}m}=0$ 根据（53）的定义。现在，为了求出部分平衡，我们将定义余项和

$$r_{kji}:=(\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}u_{klm})-u_{kji}\tag{68}$$

并使用几何论证。为便于阅读，且由于在本节末尾之前我们不会对指标做任何修改，因此将采用一种简化的非严格记法，完全省略这些指标，具体如下

$$a:=r_{\bar{k}ji}\qquad c:=U_{\bar{k}ji}+c_{\bar{k}ji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{l\bar{k}i}u_{l\bar{k}i}$$

$$b:=b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}\qquad d:=d_{\bar{k}ji}$$

这意味着平衡点满足

$$0 = -du_{\bar{k}ji} + \frac{bu_{\bar{k}ji}}{a + u_{\bar{k}ji}} + c \Rightarrow f(u_{\bar{k}ji}) = du_{\bar{k}ji} = \frac{bu_{\bar{k}ji}}{a + u_{\bar{k}ji}} + c = g(u_{\bar{k}ji})$$

对应图中所示的三种不同情形：情形 a)、情形 b) 以及其余情形 11。

当 $-ba > 0 \Rightarrow b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}r_{\bar{k}ji} < 0$ 时，我们得到情形 a)，此时在位于 $u_{\bar{k}ji} = -a = -r_{\bar{k}ji}$ 的奇点两侧分别有两个稳定平衡点 $\bar{u}^1_{\bar{k}ji}$ 和 $\bar{u}^2_{\bar{k}ji}$。显然，对于 $\dot{u}_{\bar{k}ji}$，当取值为 $-a \pm \epsilon$ 且 $\epsilon > 0$ 任意小时，上下文项将主导方程；此时它在 $-a+\epsilon$ 为正。由于 $f < g$ 在 $(-\infty, \bar{u}^1_{\bar{k}ji})$ 中 $\cup$ $(-b, \bar{u}^2_{\bar{k}ji})$，且 $f > g$ 在 $(\bar{u}^1_{\bar{k}ji}, -b)$ 中 $\cup$ $(\bar{u}^2_{\bar{k}ji}, +\infty)$，通过注意到导数 $\dot{u}_{\bar{k}ji}$ 在每个平衡点左侧递增、右侧递减，便可验证各平衡点的稳定性。特别是，在每个平衡点 $u_{\bar{k}ji} = \bar{u}^{1/2}_{\bar{k}ji} - \epsilon$ 的左侧，我们有 $f(u_{\bar{k}ji}) < g(u_{\bar{k}ji}) \Rightarrow du_{\bar{k}ji} < \frac{bu_{\bar{k}ji}}{a+u_{\bar{k}ji}} + c \Rightarrow 0 < du_{\bar{k}ji} + \frac{bu_{\bar{k}ji}}{a+u_{\bar{k}ji}} + c = \dot{u}_{\bar{k}ji}$；右侧同理。两者都意味着正向不变区域 $(\bar{u}^{1/2}_{\bar{k}ji} - \epsilon, \bar{u}^{1/2}_{\bar{k}ji} + \epsilon)$，而由于 $\epsilon > 0$ 的任意性，$\bar{u}^{1/2}_{\bar{k}ji}$ 稳定。该稳定性是局部的，因为 $f < g$ 和 $f > g$ 各自在足够小的区间内成立；吸引域分别为 $\bar{u}^1_{\bar{k}ji}$ 对应的 $(-\infty, -a)$，以及 $\bar{u}^2_{\bar{k}ji}$ 对应的 $(-a, \infty)$。当 $u_{\bar{k}ji}$ 任意大时，渐近线为 $b + c$，这与情形 b) 有关。

当 $-ba = 0 \Rightarrow b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}r_{\bar{k}ji} = 0$ 时，我们得到情形 b)，其中有一个全局稳定平衡点 $\bar{u}_{\bar{k}ji}$，且没有奇点。我们的 $g(u_{\bar{k}ji}) = b + c$ 是等于渐近极限的常函数；由于 $f(u_{\bar{k}ji}) = du_{\bar{k}ji}$ where$d$ 始终为正（作为衰减率），因此如果 $b + c = b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}} + U_{\bar{k}ji} + c_{\bar{k}ji}\sum_{l\in\mathcal{N}} w_{l\bar{k}i}u_{l\bar{k}i} > 0$，$\bar{u}_{\bar{k}ji}$ 将位于 $u_{\bar{k}ji}$的正半空间内。$\bar{u}_{\bar{k}ji}$ 的稳定性可以按照情形 a) 中的方法进行验证，平衡点可求得如下：

$$\bar{u}_{\bar{k}ji} = \frac{c_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}} \sum_{l\in\mathcal{N}} w_{l\bar{k}i}u_{l\bar{k}i} + \frac{b_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}}u_{00\bar{k}} + \frac{U_{\bar{k}ji}}{d_{\bar{k}ji}}$$

当 $-ba < 0 \Rightarrow b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}r_{\bar{k}ji} > 0$ 时，根据已有的 $f = g$ 交点数量（0、1 或 2 个），我们得到情形 c)、d)、e) 和 f)。为了推导出区分这些情形的条件，我们需要比较斜率与 f 相同的 g 点的位置。这意味着我们必须求解

$$d = g'(u^{1/2}_{\bar{k}ji}) = \left(\frac{bu^{1/2}_{\bar{k}ji}}{a + u^{1/2}_{\bar{k}ji}} + c\right)' = \frac{ba}{(a + u^{1/2}_{\bar{k}ji})^2}$$

$$\Rightarrow u^{1/2}_{\bar{k}ji} = -a \pm \sqrt{\frac{ba}{d}} = -r_{\bar{k}ji} \pm \sqrt{\frac{b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}}{d_{\bar{k}ji}}r_{\bar{k}ji}}$$

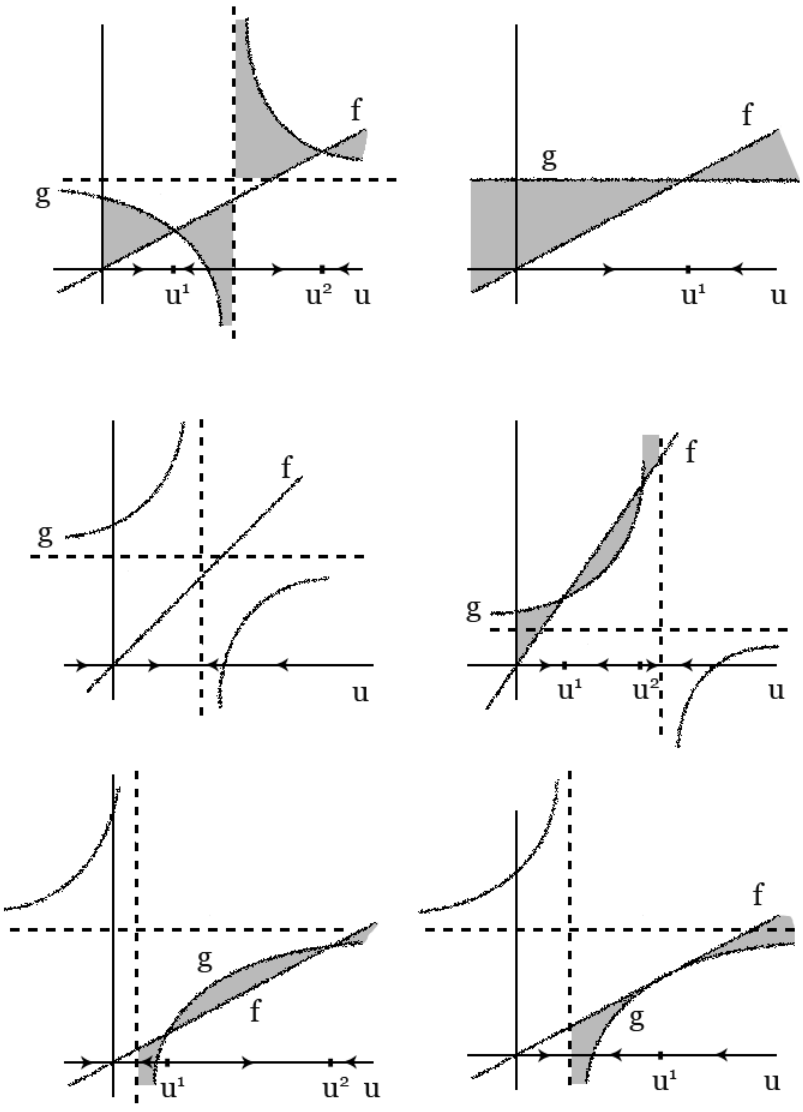


图11： $u_{\bar{k}ji}$稳定性的不同定性情形：a）两个局部稳定平衡点；b）一个全局稳定平衡点；c）没有稳定平衡点；d、e）一个稳定平衡和一个不稳定平衡，顺序相反；f）一个半稳定平衡点（仅展示两种情形中的一种）；

其中我们始终有 $u^{1/2}_{\bar{k}ji} \in \mathbb{R}$ 和 $u^{2}_{\bar{k}ji} < u^{1}_{\bar{k}ji}$，因为我们已经假设 $b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}r_{\bar{k}ji} > 0$ 和 $d_{\bar{k}ji} > 0$。因此我们计算得

$$f(u^{1/2}_{\bar{k}ji}) = d_{\bar{k}ji}u^{1/2}_{\bar{k}ji} = -d_{\bar{k}ji}r_{\bar{k}ji} \pm \sqrt{b_{\bar{k}ji}d_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}r_{\bar{k}ji}}$$

$$g(u^{1/2}_{\bar{k}ji}) = \frac{b(-a \pm \sqrt{\frac{ba}{d}})}{a - a \pm \sqrt{\frac{ba}{d}}} + c = \frac{\mp ab + b\sqrt{\frac{ba}{d}}}{\sqrt{\frac{ba}{d}}} + c = \mp\sqrt{abd} + b + c =$$

$$= \mp\sqrt{b_{\bar{k}ji}d_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}r_{\bar{k}ji}} + b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}} + U_{\bar{k}ji} + c_{\bar{k}ji}\sum_{l\in\mathcal{N}} w_{l\bar{k}i}u_{l\bar{k}i}$$

因此，如果 $f(u^{2}_{\bar{k}ji}) < g(u^{2}_{\bar{k}ji})$且 $f(u^{1}_{\bar{k}ji}) > g(u^{1}_{\bar{k}ji})$，则属于情形 c)，两者没有交点，且轨迹趋向位于 $-a$处的奇点。如果$f(u^{2}_{\bar{k}ji}) = g(u^{2}_{\bar{k}ji})$或 $f(u^{1}_{\bar{k}ji}) = g(u^{1}_{\bar{k}ji})$，则属于情形 f)：在 $-a$ 左侧或右侧有一个半稳定平衡点，轨迹在该点减速并停止，随后加速离开该点并趋向$-a$。最后，如果 $f(u^{1}_{\bar{k}ji}) > g(u^{1}_{\bar{k}ji})$且 $f(u^{2}_{\bar{k}ji}) > g(u^{2}_{\bar{k}ji})$，则属于情形 d)；如果$f(u^{1}_{\bar{k}ji}) < g(u^{1}_{\bar{k}ji})$且 $f(u^{2}_{\bar{k}ji}) < g(u^{2}_{\bar{k}ji})$，则属于情形 e)。在情形 d)中，奇点左侧有一个稳定平衡点$\hat{}u_{\bar{k}ji}$ 和一个不稳定平衡点$\check{}u_{\bar{k}ji}$，稳定平衡点的吸引域为$(-\infty, \check{}u_{\bar{k}ji})$。在情形 e)中，$\hat{}u_{\bar{k}ji}$ 不稳定，$\check{}u_{\bar{k}ji}$ 稳定，两者都位于奇点右侧，稳定平衡点的吸引域为$(\hat{}u_{\bar{k}ji}, +\infty)$。

在使用该模型时（66），我们希望避免上述分解中遇到的奇异曲面，也希望避开 $u_{\bar{k}ji}$ 负值一侧的整套动力学；在上下文项的现象学表示中，这些内容都没有太大意义。尽管根据定义，输出发放率必须始终为正，而根据推导，内部势通常允许为负，但我们将要求内部势非负，因为抑制可视为对任何正值的耗减。然而，要求所有 u_{kji} 均非负，意味着系统的某些轨迹不再可容许，因为网络的自治动力学可能会驱使某些单元的势变为负值。并非所有输出发放率模型都有这种情况，因为 $a(u) = (u-\alpha)^{+} \geq 0$ 且每个输出发放率都会衰减至一个正值。我们不会修改动力学以便在势趋近于零时停止其下降，而是采用更简单的方法，使用如下重置条件：

$$u \leftarrow 0 \text{ if } u < 0$$

假设 $u_{kji} \geq 0$ 对于 $k, j, i \in [0;\ N]$（$u_{000} = 1$除外）意味着

$$-a = -r_{\bar{k}ji} \leq 0 \qquad -ba = -b_{\bar{k}ji}u_{00\bar{k}}r_{\bar{k}ji} \leq 0$$

因此，情形 a) 不再可能。更重要的是，奇点被限制在负侧，无法通过（66）的受约束动力学到达，因为 $-a \leq 0$ 并且如果 $-a = 0 \Rightarrow -ba = 0$ 那么我们处于情形 b)，该情形没有

奇点。与奇点保持一定的 ϵ 正距离，也使我们仍能保证正区域内解的存在唯一性。此外，我们还希望在正区域内获得非平凡稳定性。因为 $-a \leq 0$ 情形 c) 和 d) 会退化为平凡稳定性，其中 $u_{\bar{k}ji}$ 收敛至零。情形 b)（ $b+c \leq 0$ ）、具有非正稳定平衡的情形 e)，以及情形 e)（ $f(u^2_{\bar{k}ji}) = g(u^2_{\bar{k}ji})$）也有相同行为。情形 e) 中若 $f(u^1_{\bar{k}ji}) = g(u^1_{\bar{k}ji})$，且半稳定平衡点位于正区域内（$u^1_{\bar{k}ji} > 0$ 因为平衡点与 $u^1_{\bar{k}ji}$重合），则会出现稍有趣一些的行为：收敛至零的过程会减缓，并趋向某个正值 $u^1_{\bar{k}ji}$。对于情形 b)（ $b + c > 0$ ），我们已经得出存在一个严格为正的平衡点，并且也已在上文说明；但这也不太有趣，因为上下文项简化为仅包含来自 $u_{00\bar{k}}$的输入。最后，最有趣的是情形 e)：它在正区域内包含非平凡稳定状态，并有一个不稳定平衡点；若要求 $u^1_{\bar{k}ji} = 0$ ，该不稳定平衡点可以被推回负区域，从而在非负区域内只留下一个固定在零处的稳定状态，并因此在零处增添一个不稳定状态；也可以使其保持为正，从而在零处增添第二个稳定状态。

但要注意，在一个 n 维流形上存在稳定平衡，并不能说明该点整体的稳定性，也不能说明整个相空间中存在一个、多个还是不存在平衡点。在前面提到的许多关于稳定性的结果中，主要方法是寻找一个区域或界限，使其中的动力学完全解耦，从而在一个维度上产生一个相对于其余维度保持不变的平衡。若所有维度都满足平衡存在条件，则可推出完整相空间中存在该平衡。在上述大多数情况下，如果作出一些额外的简化假设，例如使用分段常数激活函数（如 $a(u) = sgn(u)$）或饱和分段线性激活函数（如 $a(u) = (|u+1| - |u-1|)/2$），使得约化方程在某些饱和区域中对许多未知量都包含常数 $\tilde{c}$ ，那么我们就能得到完整平衡，而非部分平衡。唯一更复杂的情况是

$$\tau_r \frac{du_{\bar{k}ji}}{dt} = -d_{\bar{k}ji}u_{\bar{k}ji} + c_{\bar{k}ji}\sum_{l=0}^{N} w_{l\bar{k}i}\tilde{c}_{l\bar{k}i} + b_{\bar{k}ji}\frac{u_{\bar{k}ji}\tilde{c}_{00\bar{k}}}{\sum_{l=0}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_{\bar{k}lm}} + U_{\bar{k}ji} \leq$$

$$\leq -d_{\bar{k}ji}u_{\bar{k}ji} + c_{\bar{k}ji}\sum_{l=0}^{N} w_{l\bar{k}i}\tilde{c}_{l\bar{k}i} + b_{\bar{k}ji}|\tilde{c}_{00\bar{k}}| + U_{\bar{k}ji}$$

$$\tau_r \frac{du_{\bar{k}ji}}{dt} \geq -d_{\bar{k}ji}u_{\bar{k}ji} + c_{\bar{k}ji}\sum_{l=0}^{N} w_{l\bar{k}i}\tilde{c}_{l\bar{k}i} - b_{\bar{k}ji}|\tilde{c}_{00\bar{k}}| + U_{\bar{k}ji}$$

在假设势为非负的情况下，这一点是可能的，并且能够得出与 [90, 11, 84] 中类似的结论。不过，我们并不关注完全平衡态。部分平衡表示仅在未知量的某个子集上收敛；当网络的一部分需要维持振荡，而

另一部分趋于稳定，或者输入中两个相对独立的部分分别被回忆时（例如对象分割），这都是合理的。我们也可以将上界作为重置条件，尽管我们已经从 [92] 得到了关于有界性的充分条件，而这些条件可能在网络的不收敛部分上得到满足。

我们通过许多替代方法为（66）获得了一些额外的稳定性条件，例如要求雅可比矩阵的迹和行列式符号满足条件、利用 Ger- shgorin 圆盘将特征值的实部限制在负半平面内，以及尝试一些标准的能量泛函。在大多数情况下，这些条件都不易解释，也不够实用。以加性模型（34）所使用的能量泛函（35）为例。对于（66）的扩展图解释，其中 χ（u_{k01}，……，u_{kNN}）$= 1$，可以将其扩展为

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i,j,k=0}^{N} [-\frac{1}{2} \sum_{l,m,n=0}^{N} a(u_{kji}) w_{lmn}^{kji} a(u_{lmn}) - U_{kji} a(u_{kji}) - \hat{E}_{kji} + \tilde{E}_{kji}] \tag{69}$$

˜其中，项 E 是（35）的两个选项之一，例如

$$\tilde{E}_{kji} = d_{kji} \int_0^{u_{kji}} s a'(s) ds$$

ˆ，而新项 E 满足

$$\hat{E}_{kji} = b_{kji} a(u_{00k}) \int_0^{u_{kji}} \frac{s a'(s)}{s + r_{kji}} ds \tag{70}$$

在（70）具有可积性、权重张量具有特殊对称性且泛函具有适当有界性的条件下，我们可以看到

$$\frac{dE(\mathbf{u})}{dt} = \sum_{i,j,k=0}^{N} \frac{dE}{du_{kji}} \frac{du_{kji}}{dt} =$$

$$= \sum_{i,j,k=0}^{N} [(- \sum_{l,m,n=0}^{N} w_{lmn}^{kji} a(u_{lmn}) - U_{kji} - \cdots + d_{kji} u_{kji}) \frac{da(u_{kji})}{du_{kji}}] \frac{du_{kji}}{dt} =$$

$$= - \sum_{i,j,k=0}^{N} a'(u_{kji}) (\frac{du_{kji}}{dt})^2 \leq 0 \text{ if } a'(u_i) \geq 0$$

在这里，只有假设求导以及积分的多个额外依赖所产生的所有额外项（点号处）之和为零，我们才能进行第二次转换。由此还会带来一个不切实际的要求：六阶张量必须具有对称性，而这种对称性无法按照扩展图的含义映射回可容许的元网络。

像之前那样，在衰减项上使用更自然但无界的激活函数，会得到式（54）的连续张量形式。在超阈值区域 $\{u_{kji} > \alpha \ = 0\}$，区别仅在于我们假设了一个特殊情形 $d_{kji} = 1$。在亚阈值部分 $\{u_{kji} \leq \alpha \ = 0\}$，系统不稳定，其中 u_{kji} 的作用类似于积分器。不过，累积电位不会影响输出，因为我们必须将其作为 α减去。因此，采用先前激活函数的不连续版本更为合理；它在超阈值区域也有所不同，但需要使用 Filippov理论来处理不连续流。

3.2.4 网络基序研究

如果使用一组类似于以下形式的标识函数，就可以明确表示前馈网络、约化侧向网络、约化兴奋性-抑制性网络，以及约化和全循环网络（57、58、59、60、62）。

$$\chi(c,u) = \theta(c)\theta(u) = \mathbf{1}_{\{c>\alpha\}}\mathbf{1}_{\{u>\alpha\}} \tag{71}$$

如果排除单元的亚阈值情况——在这些情况下，单元表现出不稳定但具有积分器特性的行为，并满足如下条件： $\alpha = 0$ 和 $u_{00k} > 0$， $k \in [1;\ N]$，那么所有方程中都会得到连续激活函数。此外，如果将初始条件和轨迹限制在非负区域 $u_{kji} \geq 0$、 k、 j、 $i \in [0;\ N]$ 与非广播区域 $h(C_i) > 0$ 的交集内，其中 h 根据所选模型定义为（61），那么上下文项也会简化为原始项的连续形式。最后，在下一节中，我们将假设外部输入 $U_k \geq 0$ 为非负，尽管许多结论也很容易推广到外部输入为负的情况。在下一节的工程应用中，这种简化具有意义，并且排除了一些简单的亚阈值行为，使我们能够专注于上下文项最复杂的形式。于是，（57）最简单的显式形式可写为

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -\theta(u^i)u^i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j{}^i \theta(u_j{}^i)\theta(u_j)u_j{}^i = -u^i + \sum_{j=1}^{N} w_j{}^i \theta(u_j{}^i)u_j{}^i \\ \tau_r \dfrac{du_j{}^i}{dt} = -\theta(u_j{}^i)u_j{}^i + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k{}^{ji}\theta(u_k{}^{ji})u_k{}^{ji} + \frac{u_j{}^i u_j}{\displaystyle\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq j}}^{N} u_j{}^{ml}} \\ \tau_r \dfrac{du_k{}^{ji}}{dt} = -\theta(u_k{}^{ji})\theta(u_k)u_k{}^{ji} + \dfrac{u_k{}^{ji}\theta(u_k)u_k}{\displaystyle\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq k}}^{N} u_k{}^{ml}} = -\theta(u_k{}^{ji})u_k{}^{ji} + \dfrac{u_k{}^{ji}u_k}{\displaystyle\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq k}}^{N} u_k{}^{ml}} \end{cases} \tag{72}$$

其中我们有利普希茨连续流，并忽略 $u_k{}^{ki}$ 的任何方程。请注意，我们可以从最

开始就移除任何剩余的标识函数，因为 $\theta(c) = \mathbf{1}_{\{c>\alpha\}} = \mathbf{1}_{\{c>0\}}$ 和 $\theta(c)c = c$ 对于 $c \geq 0$。不过，为了适应推广到包含 $\alpha > 0$ 的情况，我们会尽可能长时间地在方程中保留它。

上述所有考量都能保证式（72）不会爆炸，即使网络轨迹不一定有界。按当前记号，非负外部输入假设 $u_k \geq 0$ 以及位于非负区域内的初始条件 ${u_k}^{ji}(0)$，现在意味着对于所有 $t > 0$， ${u_k}^{ji}(t) \geq 0$；并且由于 ${u_j}^i(t)$ 和 $u^i(t)$ 也满足同样的性质，轨迹将在所有时刻保持在非负区域内。进一步假设 $u_k \leq 1$ 意味着 $e({u_k}^{ji}, u_k) \leq 1$且 $a({u_k}^{ji}, u_k) \leq N$。利用这些界以及在 $\tau_r = 1$ 下的格朗沃尔引理，我们还可以得到

$$\frac{d{u_k}^{ji}}{dt} \leq -a({u_k}^{ji}, u_k) + 1 = 1 - \chi({u_k}^{ji}, u_k){u_k}^{ji} \leq 1 \text{ since } 0 \leq \chi({u_k}^{ji}, u_k) \leq 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow {u_k}^{ji}(t) \leq {u_k}^{ji}(0) + t$$

作为每个元连接轨迹的上界，

$$\frac{d{u_j}^i}{dt} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \chi({u_k}^{ji}, u_k){u_k}^{ji} + 1 \leq 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} {u_k}^{ji} = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} {u_k}^{ji}(0) + (N-1)t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow {u_j}^i(t) \leq {u_j}^i(0) + t(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} {u_k}^{ji}(0)) + \frac{N-1}{2}t^2$$

作为每个连接轨迹的上界，并且

$$\frac{du^i}{dt} \leq \sum_{j=1}^{N} \chi({u_j}^i, u_j){u_j}^i + 0 \leq \sum_{j=1}^{N} {u_j}^i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u^i(t) \leq u^i(0) + t\sum_{j=1}^{N} {u_j}^i(0) + \frac{t^2}{2}(N + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} {u_k}^{ji}(0)) + \frac{N(N-1)}{6}t^3$$

作为每个单元轨迹的上界。所有这些都表明，我们可以排除有限时间内发生爆炸的可能性。

产生式（72）的对单元超阈值区域和非广播区域的限制，也刻画了稳定性；上一节的所有结果同样适用。特别是，对于所有单元，由于 $b_{kji} = 0$ 我们始终处于图 11 中的情形 b)，且具有部分平衡态

$$\bar{u}_{kji} = \frac{c_{kji}}{d_{kji}} \sum_{l\in\mathcal{N}} w_{lki}u_{lki} + \frac{U_{kji}}{d_{kji}}$$

当 $c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}} w_{lki}u_{lki} + U_{kji} > 0$ 时，该状态是非平凡的。对于连接和元连接，我们再次关注非平凡稳定性（单个

零点处的稳定状态）；当 $u_{klm}=0,\ l\in[0;\ N],\ l\neq j,\ m\in[1;\ N],\ m\neq i$（考虑张量形式）时，在情形 b) 下我们再次得到该状态，并且存在一个平衡

$$\bar{u}_{kji}=\frac{c_{kji}}{d_{kji}}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}+\frac{u_{00k}}{d_{kji}}+\frac{U_{kji}}{d_{kji}}$$

但在情形 e) 中，如果我们满足条件 $f(u^1_{kji})<g(u^1_{kji})$ 和 $f(u^2_{kji})<g(u^2_{kji})$，并额外要求非负的稳定平衡；以及在情形 f) 中满足条件 $f(u^1_{kji})<g(u^1_{kji})$ 和 $u^1_{kji}>0$。利用上一节的结果，情形 e) 的主要条件可写为

$$f(u^{1/2}_{kji})<g(u^{1/2}_{kji})\Rightarrow -d_{kji}r_{kji}\pm\sqrt{b_{kji}d_{kji}u_{00k}r_{kji}}<$$
$$<\mp\sqrt{b_{kji}d_{kji}u_{00k}r_{kji}}+b_{kji}u_{00k}+U_{kji}+c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}$$

由于前面的方程，取 $d_{kji}=b_{kji}=1$ 后可得

$$-r_{kji}\pm 2\sqrt{u_{00k}r_{kji}}-u_{00k}<U_{kji}+c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}$$

由于平方根保证为实数且非负（这是基于前面的假设），带加号的不等式成立意味着带减号的不等式也成立，因此我们可以得到一个多项式

$$r_{kji}-2\sqrt{u_{00k}r_{kji}}+u_{00k}>-U_{kji}-c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}$$
$$\left(\sqrt{r_{kji}}-\sqrt{u_{00k}}\right)^2>-U_{kji}-c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}$$

当 $U_{kji}+c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}>0$ 时，该式恒成立；否则，当以下条件成立时，该式也成立

$$\left|\sqrt{r_{kji}}-\sqrt{u_{00k}}\right|>\sqrt{-U_{kji}-c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}}\tag{73}$$

用类似的方法，情形 f) 的主要条件可写为

$$f(u^1_{kji})=g(u^1_{kji})\Rightarrow\left|\sqrt{r_{kji}}+\sqrt{u_{00k}}\right|=\sqrt{-U_{kji}-c_{kji}\sum_{l\in\mathcal{N}}w_{lki}u_{lki}}\tag{74}$$

额外条件可概括为

$$u^1_{kji}>0\Rightarrow -r_{kji}+\sqrt{u_{00k}r_{kji}}>0\tag{75}$$

我们将使用非平凡稳定性的三个情形中的条件，以及本节结束前的所有假设。因此，我们必须回忆，r_{kji} 是（68）中定义的余项和。

与最简单的形式（72）相比，（60）的更复杂形式可以用示性函数表示，并结合上述所有假设写成

$$
\begin{cases}
\tau_r \dfrac{du^i}{dt} = -u^i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} w_j{}^i \theta(u_j{}^i) u_j{}^i + \sum_{l=1}^{M} w^{li} \theta(u^{li}) u^{li} \\
\tau_r \dfrac{du_j{}^i}{dt} = -\theta(u_j{}^i) u_j{}^i + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} w_k{}^{ji} \theta(u_k{}^{ji}) u_k{}^{ji} + \sum_{l=1}^{M} w^l{}_{ji} \theta(u^l{}_{ji}) u^l{}_{ji} + \dfrac{u_j{}^i u_j}{\displaystyle\sum_{m=1}^{M} \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq j}}^{N} u_j{}^{nm}} \\
\tau_r \dfrac{du^{li}}{dt} = -\theta(u^{li}) u^{li} + \dfrac{u^{li} u^l}{\displaystyle\sum_{m=1}^{M} [u^{lm} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq l}}^{N} u^l{}_{nm}]} \\
\tau_r \dfrac{du^i{}_j}{dt} = -\theta(u^i{}_j) u^i{}_j + \dfrac{u^i{}_j u^i}{\displaystyle\sum_{m=1}^{M} [u^{im} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq i}}^{N} u^i{}_{nm}]} \\
\tau_r \dfrac{du_k{}^{ji}}{dt} = -\theta(u_k{}^{ji}) u_k{}^{ji} + \dfrac{u_k{}^{ji} u_k}{\displaystyle\sum_{m=1}^{M} \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq k}}^{N} u_k{}^{nm}}, \ k \neq j \\
\tau_r \dfrac{du^l{}_{ji}}{dt} = -\theta(u^l{}_{ji}) u^l{}_{ji} + \dfrac{u^l{}_{ji} u^l}{\displaystyle\sum_{m=1}^{M} [u^{lm} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq l}}^{N} u^l{}_{nm}]} \\
\tau_r \dfrac{du_j}{dt} = -u_j + \displaystyle\sum_{i=1}^{M} w^i{}_j \theta(u^i{}_j) u^i{}_j + U_j
\end{cases}
\tag{76}
$$

我们将使用（72）和（76）作为推导更小型网络基元的起点，这些基元涉及前馈连接和反馈连接。

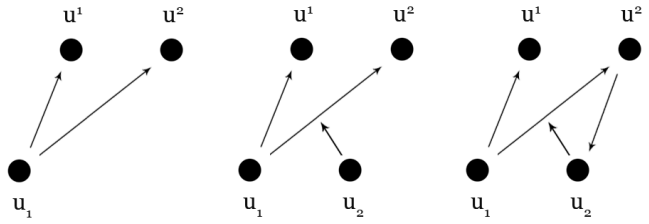


图12：复杂度逐渐增加的基元：a）广播电路；b）带有元连接的电路；c）带有反馈连接的电路；

研究特定的网络基元，有助于我们将迄今为止提出的、能够解释此类结构和动力学的各种表征与理论结论联系起来。具有足够复杂动力学的最简单电路如图所示 12 案例

a)，其中一个单元有两个输出连接。此案例是 (72) 的简化版本，仅包含四个方程

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^1}{dt} = -u^1 + {w_1}^1 \theta({u_1}^1){u_1}^1 \\ \tau_r \dfrac{du^2}{dt} = -u^2 + {w_1}^2 \theta({u_1}^2){u_1}^2 \\ \tau_r \dfrac{d{u_1}^1}{dt} = -\theta({u_1}^1){u_1}^1 + \dfrac{{u_1}^1 u_1}{{u_1}^1 + {u_1}^2} \\ \tau_r \dfrac{d{u_1}^2}{dt} = -\theta({u_1}^2){u_1}^2 + \dfrac{{u_1}^2 u_1}{{u_1}^1 + {u_1}^2} \end{cases} \tag{77}$$

因此，两个单元的部分平衡态为

$$\bar{u}^1 = {w_1}^1 {u_1}^1 \text{ if } {u_1}^1 > 0 \text{ else } \bar{u}^1 = 0 \Rightarrow \bar{u}^1 = {w_1}^1 {u_1}^1$$
$$\bar{u}^2 = {w_1}^2 {u_1}^2 \text{ if } {u_1}^2 > 0 \text{ else } \bar{u}^2 = 0 \Rightarrow \bar{u}^2 = {w_1}^2 {u_1}^2$$

且稳定。第一个连接的部分平衡态 ${u_1}^1$在图 11中较简单的情形 b) 下为

$$\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 = \bar{u}_1{}^1 = u_1 \text{ if } {u_1}^2 = 0 \text{ and } \bar{u}_1{}^1 \neq 0$$

这也符合非广播条件 ${u_1}^1 + {u_1}^2 > 0$。如果第一个连接处于情形 e)，则其稳定性条件（73）可简化为

$$\begin{cases} \text{always true if } 0 > 0 \text{ thus not possible} \\ \left|\sqrt{{u_1}^2} - \sqrt{u_1}\right| > \sqrt{0-0} = 0 \text{ if } 0 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \left|\sqrt{{u_1}^2} - \sqrt{u_1}\right| > 0$$

相应的不稳定和稳定部分平衡态为

$$0 = -\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 + \frac{\bar{u}_1{}^1 u_1}{\bar{u}_1{}^1 + {u_1}^2} \Rightarrow \theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^1 + {u_1}^2) = \bar{u}_1{}^1 u_1 \Rightarrow$$
$$\bar{u}_1{}^1(\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 + \theta(\bar{u}_1{}^1){u_1}^2 - u_1) = 0 \Rightarrow \bar{u}_1{}^1 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^1 = u_1 - {u_1}^2$$

最后一种情形 $\bar{u}_1{}^1$可能是情形 f)，此时主条件（74）表明

$$\left|\sqrt{{u_1}^2} - \sqrt{u_1}\right| = \pm 0 \Rightarrow {u_1}^2 = u_1$$

而半稳定稳态 $u^1_{kji} = -{u_1}^2 + \sqrt{u_1 {u_1}^2} = 0$ 只能是平凡解，因为它不满足条件（75）。我们将第二个连接 ${u_1}^2$的所有情况总结如下：

$$\begin{cases} \bar{u}_1{}^2 = u_1 \text{ if } {u_1}^1 = 0 \text{ and } \bar{u}_1{}^2 \neq 0 \\ \bar{u}_1{}^2 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^2 = u_1 - {u_1}^1 \text{ if } \left|\sqrt{{u_1}^1} - \sqrt{u_1}\right| > 0 \\ \bar{u}_1{}^2 = 0 \text{ if } {u_1}^1 = u_1 \end{cases}$$

其中，$\bar{u}_1{}^2 = u_1$ 是第一种情况下唯一的稳定状态，$\bar{u}_1{}^2 = 0$ 而 $\bar{u}_1{}^2 = u_1 - u_1{}^1$是第二种情况下的不稳定状态和稳定状态，$\bar{u}_1{}^2 = 0$ 是第三种情况下的半稳定状态。注意，如果第二种情况下 $u_1 - u_1{}^1 < 0$，稳定平衡 $\bar{u}_1{}^2$将不再可容许，因为它会越过原点到达负值一侧，因此只剩下零处的稳定状态。图13展示了所有部分平衡情况。根据非分布条件 $u_1{}^1 + u_1{}^2 \neq 0$，原点被排除，因此当 $u_1{}^2 = 0$ 固定时，只剩下一个部分稳定平衡 $\bar{u}_1{}^2 = u_1$，反之亦然。当 $|\sqrt{u_1{}^1} - \sqrt{u_1}| > 0$时，沿 $u_1{}^1$方向，在 $u_1{}^2$处有两个部分平衡；当 $|\sqrt{u_1{}^1} - \sqrt{u_1}| = 0$ 时会发生跨临界分岔，因此非零平衡越过零处的平衡后，它们的稳定性也会随之改变。

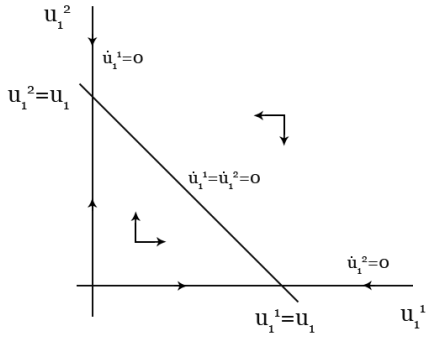


图13：的相图和$u_1{}^2$，来自基元（77）

二维曲面上的一些部分非平凡稳定状态（$\bar{u}_1{}^1$，$\bar{u}_1{}^2$）可以通过求解代数多项式系统得到

$$\begin{cases} 0 = -\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 + \dfrac{\bar{u}_1{}^1 u_1}{\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2} \\ 0 = -\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 + \dfrac{\bar{u}_1{}^2 u_1}{\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^1 u_1 \\ \theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 u_1 \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 - u_1) = 0 \\ \bar{u}_1{}^2(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 - u_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}_1{}^1 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 - u_1 = 0 \\ \bar{u}_1{}^2 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 - u_1 = 0 \end{cases}$$

与处理 1-表面上的部分平衡点的方法类似。所需的二维曲面部分平衡态是以下数对 $(s,\ u_1 - s)$，其中$s \in [0, u_1]$。仔细考察这些解，可以发现，在数对 $(0,\ u_1)$ 中，$\bar{u}_1{}^1$属于情形 f)，因为 $|\sqrt{u_1} - \sqrt{u_1}| = 0$ 且 $\bar{u}_1{}^2$属于情形 b)；而数对 $(u_1,\ 0)$ 的情况则相反。其余所有数对都满足条件 (73，且两个组成部分均属于情形 e)。绘制

$(u_1{}^1, u_1{}^2)$ 的相平面（见图13），由于零流线 $\dot{u}_1{}^1 = \dot{u}_1{}^2 = 0$ 重合，因此得到一条线吸引子。若有三个输出连接，这条线就会变成一个平面 $\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 + \bar{u}_1{}^3 = u_1$，并与三个坐标轴分别交于 $(u_1, 0, 0)$、$(0, u_1, 0)$ 和 $(0, 0, u_1)$。最后，完全平衡态为 $(\bar{u}_1{}^1, \bar{u}_1{}^2, \bar{u}^1, \bar{u}^2) = (s, u_1 - s, w_1{}^1 s, w_1{}^2(u_1 - s))$，并位于四维空间中的一条吸引子线上。由于所有未知量的部分 1-表面平衡点连续依赖于两个输出连接，因此可以对完全平衡态的稳定性作出判断。例如，由于 $u_1{}^1 \to \bar{u}_1{}^1$ 和 $u^1 \to \bar{u}^1 = w_1{}^1 u_1{}^1$ 在某个邻域内，因此有 $(u_1{}^1, u^1) \to (\bar{u}_1{}^1, w_1{}^1 \bar{u}_1{}^1)$。

对该基元的解释与其背后的直觉一致——当势在两个输出之间得到适当分配时，系统将趋于稳态，而任何此类配置都会保持不变。同时，如果某个元连接的值降至零，只要其余所有输出连接没有同时降至零并导致广播，它就会维持在零。最后，如果某个连接的值降至零，只要没有发生广播，或者它没有因输入元连接的兴奋而被推回正区域，它就会维持在零。

添加元连接，图 12 中的情形 b) 是（72）的另一种简化形式，包含五个方程，并在前一个基元（77）的基础上增加一个方程，如下所示

$$\begin{cases} \tau_r \dfrac{du^1}{dt} = -u^1 + w_1{}^1 \theta(u_1{}^1) u_1{}^1 \\ \tau_r \dfrac{du^2}{dt} = -u^2 + w_1{}^2 \theta(u_1{}^2) u_1{}^2 \\ \tau_r \dfrac{du_1{}^1}{dt} = -\theta(u_1{}^1) u_1{}^1 + \dfrac{u_1{}^1 u_1}{u_1{}^1 + u_1{}^2} \\ \tau_r \dfrac{du_1{}^2}{dt} = -\theta(u_1{}^2) u_1{}^2 + \dfrac{u_1{}^2 u_1}{u_1{}^1 + u_1{}^2} + w_2{}^{12} \theta(u_2{}^{12}) u_2{}^{12} \\ \tau_r \dfrac{du_2{}^{12}}{dt} = -\theta(u_2{}^{12}) u_2{}^{12} + \dfrac{u_2{}^{12} u_2}{u_2{}^{12}} = -\theta(u_2{}^{12}) u_2{}^{12} + u_2 \end{cases} \tag{78}$$

两个单元以及元连接的部分平衡状态可用与之前相同的方法求得，即图 11中的情形 b)

$$\bar{u}^1 = w_1{}^1 u_1{}^1 \qquad \bar{u}^2 = w_1{}^2 u_1{}^2 \qquad \bar{u}_2{}^{12} = u_2$$

$u_1{}^1$ 的 1-表面平衡点结论与之前相同

$$\begin{cases} \bar{u}_1{}^1 = u_1 \text{ if } u_1{}^2 = 0 \text{ and } \bar{u}_1{}^1 \neq 0 \\ \bar{u}_1{}^1 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^1 = u_1 - u_1{}^2 \text{ if } \left| \sqrt{u_1{}^2} - \sqrt{u_1} \right| > 0 \\ \bar{u}_1{}^1 = 0 \text{ if } u_1{}^2 = u_1 \end{cases}$$

对于 $u_1{}^2$，现在我们可以隐式地表示 1-表面平衡点：

$$(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12})(u_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 u_1 \Rightarrow$$
$$\theta(\bar{u}_1{}^2)(\bar{u}_1{}^2)^2 - (w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} - \theta(\bar{u}_1{}^2)u_1{}^1 + u_1)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12}u_1{}^1 = 0$$

并且在修改后的条件（73、74）下，分为两种情况

$$\begin{cases} \bar{u}_1{}^2 = u_1 + w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} \text{ if } u_1{}^1 = 0 \text{ and } \bar{u}_1{}^2 \neq 0 \\ \bar{u}_1{}^2 = u_{1/2} \text{ if } \left|\sqrt{u_1{}^1} - \sqrt{u_1}\right| > \sqrt{-w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12}} \\ \bar{u}_1{}^2 = -u_1{}^1 + \sqrt{u_1 u_1{}^1} \text{ if } \left|\sqrt{u_1{}^1} - \sqrt{u_1}\right| = \sqrt{-w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12}} \end{cases}$$

对于 $-w_2{}^{12}\theta\,(u_2{}^{12})\,u_2{}^{12} \geq 0 \Rightarrow w_2{}^{12} \leq 0$ 和

$$\begin{cases} \bar{u}_1{}^2 = u_1 + w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} \text{ if } u_1{}^1 = 0 \text{ and } \bar{u}_1{}^2 \neq 0 \\ \bar{u}_1{}^2 = u_{1/2} \text{ otherwise} \end{cases}$$

对于 $-w_2{}^{12}\theta\,(u_2{}^{12})\,u_2{}^{12} < 0 \Rightarrow w_2{}^{12}u_2{}^{12} > 0$。这里$u_{1/2}$ 给出了$\bar{u}_1{}^2$中的多项式的两个根。对于正权重，其判别式始终为正，因此两个根始终存在且互不相同；而对于负权重，判别式会变为零并最终变为负数，因此两个根会合并为一个半稳定点$\bar{u}_1{}^1 = -u_1{}^2 + \sqrt{u_1 u_1{}^2}$，随后消失，并在条件再次满足时重新出现（这是由于绝对值所致）。第二个根是不稳定部分平衡点，不再位于 $u_1{}^1$ 坐标轴上（根据权重的不同，对 $u_1{}^1 > 0$ 而言可能为正或负）；第一个根则是稳定部分平衡点。如果$w_2{}^{12}u_2{}^{12} < -u_1$，稳定根也会位于负半轴上，因此不会有非平凡稳定性。此外，在 $\left|\sqrt{u_1{}^2} - \sqrt{u_1}\right| < \sqrt{-w_2{}^{12}}$当 $w_2{}^{12} < 0$时，不保证存在任何类型的稳定性。图14展示了所有部分平衡点的情况。

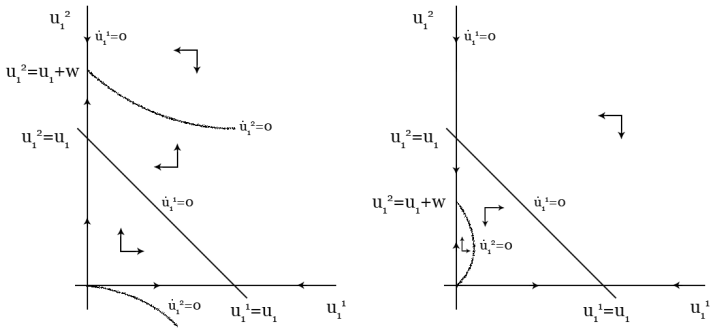


图14：相图 $u_1{}^1$ 和 $u_1{}^2$ 来自基元（78），其中 $w = w_2{}^{12}\theta\,(u_2{}^{12})\,u_2{}^{12}$，$u_1 \geq 0$，以及：a） $w_2{}^{12} > 0$；b） $w_2{}^{12} < 0$；

如果我们考虑二维面稳态，就需要求解多项式系统

$$\begin{cases} \theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^1 u_1 \\ (\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12})(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 u_1 \end{cases}$$

其中，每个分量都必须满足前述三种情形之一的条件。如果 $\theta(\bar{u}_2{}^{12}) = 0$ 我们得到先前的解，也就是式（77）的解。否则，我们得到

$$\begin{cases} \theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^1 u_1 \Rightarrow \bar{u}_1{}^1 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 = u_1 \\ (\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12})(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 u_1 \end{cases}$$

因此，当 $\bar{u}_1{}^1 = 0$ 时，第二个方程为

$$\begin{aligned} &(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12})(0 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 u_1 \\ &\bar{u}_1{}^2(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} - u_1) = 0 \\ &\Rightarrow \bar{u}_1{}^2 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^2 = u_1 + w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} \end{aligned}$$

部分 2-表面平衡点为 (0，0) 和 (0，$u_1 + w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12}$)；由于非分布条件 $u_1{}^1 + u_1{}^2 \neq 0$，我们排除 (0，0)。或者，当 $\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 = u_1$ 时，第二个方程为

$$\begin{aligned} &(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12})u_1 = \bar{u}_1{}^2 u_1 \\ &\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} = \bar{u}_1{}^2 \\ &\Rightarrow \forall \bar{u}_1{}^2 \text{ if } -w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} = 0 \end{aligned}$$

部分平衡点为 $(u_1 - a, a)$ $a \in [0, u_1]$，其仅在 $u_2{}^{12} = 0$ 或 $w_2{}^{12} = 0$ 时存在，且元连接不起作用。在这种情况下，我们将得到方程 (77) 的部分 1-曲面均衡，先前的 2-表面平衡点 $(0, u_1 + w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12})$ 将简化为 $(0, u_1) = (u_1 - a, a)$，其中 $a = u_1$。如果启用元连接效应，线吸引子将被图14 a)中的点吸引子取代，或被 b) 中的不稳定平衡点取代，具体取决于权重 $w_2{}^{12}$ 的符号。注意，点 (0, 0) 和 $(0, u_1 + w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12})$ 始终位于根轨迹上，因为它们满足关于 $\bar{u}_1{}^2$ 的方程，该方程是一个二次多项式，因此与 $u_1{}^2$ 坐标轴最多有两个这样的交点。我们可以据此论证，如果 $w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} = w < -u_1$，点 $(0, u_1 + w)$ 将位于坐标轴的负半轴一侧（图中未显示），而多项式零流线只会在非负区域与 (0, 0) 相交。或者，我们也可以将其表示为零流线在 (0, 0) 处的导数满足以下条件：

$$\begin{aligned} &(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w)(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 u_1 \Rightarrow \bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^2) = -\bar{u}_1{}^2 + \frac{\bar{u}_1{}^2 u_1}{\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w} \\ &\frac{d\bar{u}_1{}^1}{d\bar{u}_1{}^2} = -1 - \frac{w u_1}{(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w)^2} \Rightarrow \frac{d\bar{u}_1{}^1}{d\bar{u}_1{}^2}(0) = -1 - \frac{w u_1}{(0 - w)^2} > 0 \Rightarrow w < -u_1 \end{aligned}$$

由 $u_1{}^2$零流线形成的双曲线的渐近线为 $u_1{}^1 + u_1{}^2 = u_1$ 和 $u_1{}^2 = w$，因此 $u_1{}^1$ 的第二条零流线将与渐近线 $u_1{}^1 + u_1{}^2 = u_1$ 重合，且永远不会与这些零流线相交以形成其他平衡点。

如果我们考虑三维曲面上具有部分平衡的点（$\bar{u}_1{}^1$，$\bar{u}_1{}^2$，$\bar{u}_2{}^{12}$），则得到系统

$$\begin{cases} \theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^1+\bar{u}_1{}^2)=\bar{u}_1{}^1u_1 \\ (\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2-w_2{}^{12}\theta(\bar{u}_2{}^{12})\bar{u}_2{}^{12})(\bar{u}_1{}^1+\bar{u}_1{}^2)=\bar{u}_1{}^2u_1 \\ \bar{u}_2{}^{12}=u_2 \end{cases}$$

其求解方法类似，但平衡点为 $(0,\ u_1+w_2{}^{12}\bar{u}_2{}^{12},\ \bar{u}_2{}^{12})=(0,\ u_1+w_2{}^{12}u_2,\ u_2)$ 和 $(u_1-a,\ a,\ u_2)$ $a\in[0,u_1]$ 如果 $u_2=0$ 或 $w_2{}^{12}=0$。完整的平衡点与之前类似，但多了一个分量 $\bar{u}_2{}^{12}=u_2$。当元连接对连接没有影响（因为权重为零或吞吐量为零）时，其解释也相同——我们有一个线吸引子，以及一些连接；当单元的势完全分配后，这些连接便会稳定下来。不同的是，当元连接产生正效应时，它会使分配偏向这样的配置：只有得到辅助的连接会被激活传递，而没有元连接支持的连接则会收敛至零。当元连接产生负效应时，只要另一个连接 $u_1{}^1$完全停用，得到辅助的连接 $u_1{}^2$就会稳定在较低的值。否则，即使是最微弱的正势 $u_1{}^1>0$ 也会导致$u_1{}^2$完全耗尽，并使 $u_1{}^1=u_1$ 成为最终胜出者。

添加反馈连接，图 12 中的情况 c) 是（76）的简化版本，包含八个方程

$$\begin{cases} \tau_r\dfrac{du^1}{dt}=-u^1+w_1{}^1\theta(u_1{}^1)u_1{}^1 \\ \tau_r\dfrac{du^2}{dt}=-u^2+w_1{}^2\theta(u_1{}^2)u_1{}^2 \\ \tau_r\dfrac{du_1{}^1}{dt}=-\theta(u_1{}^1)u_1{}^1+\dfrac{u_1{}^1u_1}{u_1{}^1+u_1{}^2} \\ \tau_r\dfrac{du_1{}^2}{dt}=-\theta(u_1{}^2)u_1{}^2+\dfrac{u_1{}^2u_1}{u_1{}^1+u_1{}^2}+w_2{}^{12}\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12} \\ \tau_r\dfrac{du^2{}_2}{dt}=-\theta(u^2{}_2)u^2{}_2+\dfrac{u^2{}_2u^2}{u^2{}_2}=-\theta(u^2{}_2)u^2{}_2+u^2 \\ \tau_r\dfrac{du_2{}^{12}}{dt}=-\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12}+\dfrac{u_2{}^{12}u_2}{u_2{}^{12}}=-\theta(u_2{}^{12})u_2{}^{12}+u_2 \\ \tau_r\dfrac{du_1}{dt}=-u_1+U_1 \\ \tau_r\dfrac{du_2}{dt}=-u_2+w^2{}_2\theta(u^2{}_2)u^2{}_2+U_2 \end{cases} \tag{79}$$

现在所有单元的部分平衡状态为

$$\bar{u}^1=w_1{}^1u_1{}^1 \qquad \bar{u}^2=w_1{}^2u_1{}^2$$
$$\bar{u}_1=U_1 \qquad \bar{u}_2=w^2{}_2u^2{}_2+U_2$$

并且像往常一样是稳定的。单个输出 $\bar{u}^2{}_2$ 和 $\bar{u}_2{}^{12}$与所有单元处于相同情形，即图 11 中的情形 b)，其状态稳定

$$\bar{u}^2{}_2 = u^2 \qquad \bar{u}_2{}^{12} = u_2$$

竞争性连接的部分 1-表面和 2-表面平衡点$u_1{}^1$和 $u_1{}^2$如（78）所示，但由于基元中存在反馈连接和一个回路，三维曲面平衡点以及由此产生的任何全空间平衡点都显著不同。我们可以通过考察回路的完整深度来实现这一点，从而将 $u_1{}^2$ 与除 $u_1{}^1$以外的所有因素解耦。

如果我们将 $u_2{}^{12}$ 固定为 $\bar{u}_2{}^{12}$，并固定其所有依赖项，或者只考虑 7-表面稳定状态，就会得到代数多项式系统

$$\begin{cases} \theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^1 U_1 \\ (\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}\theta(\bar{u}_2{}^{12})\bar{u}_2{}^{12})(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 U_1 \\ \bar{u}_2{}^{12} = \bar{u}_2 = w^2{}_2\bar{u}^2{}_2 + U_2 = w^2{}_2\bar{u}^2 + U_2 = w^2{}_2 w_1{}^2\bar{u}_1{}^2 + U_2 \end{cases}$$

其求解方式与（78）类似，其中当 $\bar{u}_1{}^1 = 0$ 时，第二个方程为

$$\begin{aligned} &(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}U_2)(0 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 U_1 \\ &\bar{u}_1{}^2(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}U_2 - U_1) = 0 \\ &\Rightarrow \bar{u}_1{}^2 = 0 \text{ or } \bar{u}_1{}^2(1 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2) = w_2{}^{12}U_2 + U_1 \end{aligned}$$

部分平衡点为 (0，0) 和 (0，$(U_1 + w_2{}^{12}U_2)/(1 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2)$) =(0，$\tilde{U}_1$)（同样，由于 $u_1{}^1 + u_1{}^2 \neq 0$，不包括 (0，0)）。当$\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 = U_1$ 时，第二个方程为

$$\begin{aligned} &(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}U_2)U_1 = \bar{u}_1{}^2 U_1 \\ &\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2\bar{u}_1{}^2 - w_2{}^{12}U_2 = \bar{u}_1{}^2 \\ &\Rightarrow w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2\bar{u}_1{}^2 = -w_2{}^{12}U_2 \end{aligned}$$

具有部分平衡点 $(U_1 - s, s)$ $s \in [0, u_1]$，若 $w_2{}^{12} = 0$或 $U_2 = w^2{}_2 w_1{}^2 = 0$，则只有其一个特殊情形 $(U_1 + U_2/(w^2{}_2 w_1{}^2)$ $-U_2/(w^2{}_2 w_1{}^2))$ $=(U_1 + \tilde{U}_2, -\tilde{U}_2)$，其中 $s = -\tilde{U}_2$ 若 $w_2{}^{12} \neq 0$, $w^2{}_2 w_1{}^2 \neq 0$；而当 $w_2{}^{12} \neq 0$, $w^2{}_2 w_1{}^2 \neq 0$ 且 $U_2 = 0$时，只有其另一个特殊情形 $(U_1, 0)$。若 $w_2{}^{12} = 0$ 或 $U_2 = w^2{}_2 w_1{}^2 = 0$，第一个平衡点将退化为直线 $\tilde{}(0, U_1)$ $=(0, (U_1 + 0)/(1 - 0))$ $=(0, U_1)$ 上的另一个平衡点，其中 $s = U_1$，由此可得，一般来说，在这种情况下，我们在7维空间中有一个线吸引子。在其余情况下，我们有两个平衡点 $(\bar{u}_1{}^1, \bar{u}_1{}^2, \bar{u}^2, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}^2{}_2, \bar{u}_2{}^{12})$，如下所示

$$\begin{aligned} &(0, \tilde{U}_1, w_1{}^2\tilde{U}_1, U_1, w^2{}_2 w_1{}^2\tilde{U}_1 + U_2, w_1{}^2\tilde{U}_1, w^2{}_2 w_1{}^2\tilde{U}_1 + U_2) = \\ &= (0, \tilde{U}_1, w_1{}^2\tilde{U}_1, U_1, \frac{w^2{}_2 w_1{}^2 U_1 + U_2}{1 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2}, w_1{}^2\tilde{U}_1, \frac{w^2{}_2 w_1{}^2 U_1 + U_2}{1 - w_2{}^{12}w^2{}_2 w_1{}^2}) \end{aligned}$$

and

$$(U_1+\tilde{U}_2,-\tilde{U}_2,-{w_1}^2\tilde{U}_2,U_1,-{w^2}_2{w_1}^2\tilde{U}_2+U_2,-{w_1}^2\tilde{U}_2,-{w^2}_2{w_1}^2\tilde{U}_2+U_2)=$$
$$=(U_1+\tilde{U}_2,-\tilde{U}_2,-\frac{U_2}{{w^2}_2},U_1,0,-\frac{U_2}{{w^2}_2},0)$$

当我们对七维空间取一个截面，以观察此前讨论的 $({u_1}^1,{u_1}^2)$ 相平面时，可以将第一个点与二维曲面平衡点 $(0,u_1+w)$ 联系起来，将第二个点与二维曲面吸引子线上的一个点联系起来（因为 ${\bar{u}_2}^{12}=0$）。

因此，完全平衡态为 $({\bar{u}_1}^1,{\bar{u}_1}^2,\bar{u}^1,\bar{u}^2,\bar{u}_1,\bar{u}_2,{\bar{u}^2}_2,{\bar{u}_2}^{12})$，并为 u^1 增加一个额外维度：对于第一个吸引子点，该维度为 0；对于第二个吸引子点，则为 ${w_1}^1(U_1+\tilde{U}_2)$。在完整相空间中存在吸引子线的情况下，无穷多个平衡点可参数化为 $(U_1-s,s,{w_1}^1(U_1-s)\ {w_1}^2s,U_1,{w^2}_2{w_1}^2s+U_2,{w_1}^2s,{w^2}_2{w_1}^2s+U_2)$。除吸引子线之外，对第一个平衡点的解释——它是由式 (78) 中前一个 ${w_2}^{12}{u_2}^{12}\neq 0$ 平衡扩展而来的反馈扩展——揭示了环在网络中的作用。如果取 ${w_2}^{12}{w^2}_2{w_1}^2=1$，该环将不断累积势，永无止境，平衡点将位于 ${\bar{u}_1}^2=\infty$。与此同时，如果权重小于 1，${\bar{u}_1}^2$ 可以是有限的，从而使累积势随时间缩小。另一种情况是，如果存在抑制性反馈 ${w^2}_2<0$，无论正的 ${w_2}^{12}$和 ${w_1}^2$取何值，它都会缩小 ${\bar{u}_1}^2$。如果 ${w_2}^{12}=0$，稳态就简单地变为 ${\bar{u}_1}^2=U_1$，而导致先前行为的关键连接也随之消失。如果 ${w^2}_2=0$ 或 ${w_1}^2=0$，稳态则变为 ${\bar{u}_1}^2=U_1+{w_2}^{12}U_2$，此时与之前一样，只有第二个外部输入产生作用（环被中断）。第二个平衡点位于非负区域，因此当 $U_2/({w^2}_2{w_1}^2)\leq 0$ 时是可容许的，这意味着权重非正或外部输入非正，而这两种情况都会降低 ${\bar{u}_1}^1$。由于反馈连接恰好抵消了外部输入 U_2，系统达到稳态，剩下的两个输出连接位于吸引子线上的某个满足这一条件的点。特别是，若考虑抑制性反馈连接或负的外部输入 $U_2<0$，这是可能的；但若为 ${w_1}^2<0$ 则不可能，因为重置条件只会将 u^2 设为零。

在扩展到包含竞争的情形、同时仍尽量减少增加的复杂性时，会得到类似图 15所示的基元。(72) 的竞争性简化版本增加了第二个元连接，以平衡此前两个输出之间的势。动力系统的定义以直观的方式在 (78) 的基础上扩展，而两个输出连接 ${u_1}^1$和 ${u_1}^2$的 1-表面平衡点与 (78) 中 ${u_1}^2$的平衡点相同。不过，二维曲面平衡点有所不同，它们满足以下系统：

$$\begin{cases}(\theta({\bar{u}_1}^1){\bar{u}_1}^1-{w_2}^{11}\theta({u_2}^{11}){u_2}^{11})({\bar{u}_1}^1+{\bar{u}_1}^2)={\bar{u}_1}^1u_1\\(\theta({\bar{u}_1}^2){\bar{u}_1}^2-{w_3}^{12}\theta({u_3}^{12}){u_3}^{12})({\bar{u}_1}^1+{\bar{u}_1}^2)={\bar{u}_1}^2u_1\end{cases}$$

在这种情况下 ${w_2}^{11}\theta\ ({u_2}^{11})\ {u_2}^{11}=0$ 或 ${w_3}^{12}\theta\ ({u_3}^{12})\ {u_3}^{12}=0$，系统及相应的平衡点可化简为之前的基元（77、78）。还需要

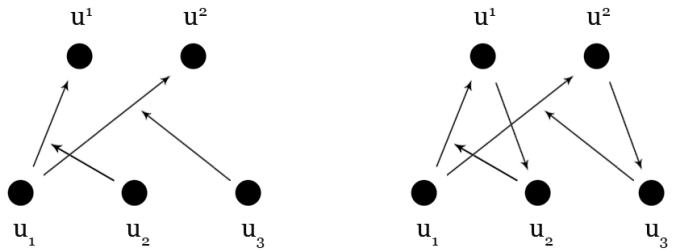


图 15：复杂度递增的基元：d）带有相互竞争的元连接的电路；e）带有相互竞争的反馈连接的电路；

求解

$$\begin{cases} (\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 - w_1)(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^1 u_1 \\ (\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2)(\bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2) = \bar{u}_1{}^2 u_1 \end{cases}$$

对于 $w_1 = w_2{}^{11}\theta(u_2{}^{11})u_2{}^{11} \neq 0$ 和 $w_2 = w_3{}^{12}\theta(u_3{}^{12})u_3{}^{12} \neq 0$。首先我们得到

$$\begin{cases} \bar{u}_1{}^1 + \bar{u}_1{}^2 = \dfrac{\bar{u}_1{}^1 u_1}{\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 - w_1} \\ \dfrac{(\theta(\bar{u}_1{}^2)\bar{u}_1{}^2 - w_2)\bar{u}_1{}^1 u_1}{\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 - w_1} = \bar{u}_1{}^2 u_1 \end{cases}$$

消去所有可能的项后，得到

$$\begin{cases} \bar{u}_1{}^1 + \dfrac{w_2\bar{u}_1{}^1}{w_1} = \dfrac{\bar{u}_1{}^1 u_1}{\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 - w_1} \\ w_2\bar{u}_1{}^1 = w_1\bar{u}_1{}^2 \end{cases}$$

它有非负解 $\bar{u}_1{}^1$ 和 $\bar{u}_1{}^2$，因此仅当 w_1 和 w_2 符号相同时，才在非负区域内存在平衡。最后，在此假设下，我们得到

$$\theta(\bar{u}_1{}^1)\bar{u}_1{}^1 - w_1 = \frac{w_1 u_1}{w_1 + w_2} \Rightarrow \bar{u}_1{}^1 = \frac{w_1(w_1 + w_2)}{w_1 + w_2} + \frac{w_1 u_1}{w_1 + w_2}$$
$$\Rightarrow (\bar{u}_1{}^1, \bar{u}_1{}^2) = \left(\frac{w_1(u_1 + w_1 + w_2)}{w_1 + w_2}, \frac{w_2(u_1 + w_1 + w_2)}{w_1 + w_2}\right)$$

具有完全显式的势

$$\Rightarrow \bar{u}_1{}^1 = \frac{w_2{}^{11}\theta(u_2{}^{11})u_2{}^{11}(u_1 + w_2{}^{11}\theta(u_2{}^{11})u_2{}^{11} + w_3{}^{12}\theta(u_3{}^{12})u_3{}^{12})}{w_2{}^{11}\theta(u_2{}^{11})u_2{}^{11} + w_3{}^{12}\theta(u_3{}^{12})u_3{}^{12}}$$
$$\Rightarrow \bar{u}_1{}^2 = \frac{w_3{}^{12}\theta(u_2{}^{11})u_2{}^{11}(u_1 + w_2{}^{11}\theta(u_2{}^{11})u_2{}^{11} + w_3{}^{12}\theta(u_3{}^{12})u_3{}^{12})}{w_2{}^{11}\theta(u_2{}^{11})u_2{}^{11} + w_3{}^{12}\theta(u_3{}^{12})u_3{}^{12}}$$

在有三个输出的情况下，平衡将是

$$(\bar{u}_1{}^1, \bar{u}_1{}^2, \bar{u}_1{}^3) = \left(\frac{w_1(u_1 + \sum_i^3 w_i)}{\sum_i^3 w_i}, \frac{w_2(u_1 + \sum_i^3 w_i)}{\sum_i^3 w_i}, \frac{w_3(u_1 + \sum_i^3 w_i)}{\sum_i^3 w_i} \right)$$

对于更多输出，情况也类似。正权重和负权重（一个零权重和两个零权重分别由前述情况表示）对应的相平面如图 16所示。

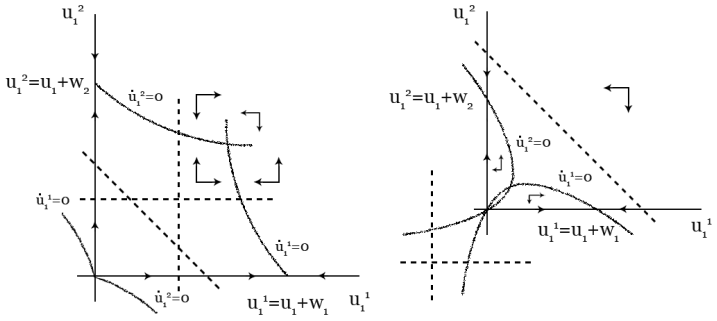


图 16：竞争基元中 $u_1{}^1$和 $u_1{}^2$的相图，其中$u_1 \geq 0$ 和：a) $w_2{}^{11} > 0$ 和 $w_3{}^{12} > 0$; b) $w_2{}^{11} < 0$ 和 $w_3{}^{12} < 0$;

当元连接权重 $w_2{}^{11}$和 $w_3{}^{12}$为正，因此贡献 w_1 和 w_2 也为正时（零值情况同样可简化为前述基元），这是一个稳定的二维曲面平衡，其中两个相互竞争的输出连接$u_1{}^1$和 $u_1{}^2$根据各自贡献与所有元连接总贡献的比率达到平衡。贡献为正意味着每个连接的水平渐近线均为正（斜渐近线则是同一条 $u_1{}^1 + u_1{}^2 = u_1$ 线），由此可知，零流线总会相交一次，从而形成该平衡点。当元连接权重 $w_2{}^{11}$和 $w_3{}^{12}$为负时，这是一个不稳定的二维曲面平衡；在两个失衡区域之一发生扰动后，系统将到达 (0，$u_1 + w_2$) 或 ($u_1 + w_1$，0)，并因重置条件而停留在那里。在这种情况下，水平渐近线为负，且两条零流线都必定经过点 (0，0)；但当渐近线足够负时，零流线将不再在正区域内相交，系统会收敛到 (0，0)。最后，在一个权重为正、另一个为负的情况下（图中未示出），非负区域内不存在非平凡二维曲面平衡，因为进入该区域的两条零流线分别位于 $u_1{}^1 + u_1{}^2 = u_1$ 渐近线的两侧。在这种情况下，如果 w_1 是正贡献，系统将收敛到 ($u_1 + w_1$，0)；如果w_2 是正贡献，系统则将收敛到 (0，$u_1 + w_2$)。

正权重和负权重的解释很直观——单元通过兴奋连接输出，而不会通过受抑制的连

接输出。负权重的情况可能存在一种平衡，以及某些扰动（两条连接仍保持平衡地同时增大或减小），在这些情况下，平衡会恢复；但也可能存在其他扰动（例如，一条连接的势增大而另一条连接的势减小），使平衡倾向于由单一连接胜出。正权重的情况始终处于平衡状态，不会落在任何一条连接的坐标轴上（除非权重为零，从而退化为之前的基元）；更有意思的是，每条连接的贡献与所有连接贡献总和之比，正是其权重所决定的。如果两个权重中的一个趋近于零，另一个权重对应的连接将趋近于输入总量，并体现其自身的贡献。

（76）的竞争性简化版本加入了反馈连接，因此形成了竞争回路。再次假设权重非零 ${w_2}^{11} \neq 0$ 且 ${w_3}^{12} \neq 0$（其他情况均可归结为先前的基元（77、79）），我们得到平衡的完全平衡状态

$$
\begin{aligned}
{\bar{u}_1}^1 &= \frac{{w_2}^{11} U_2 (U_1 + {w_2}^{11} U_2 + {w_3}^{12} U_3)}{(1 - {w_2}^{11} {w^1}_2 {w_1}^1)({w_2}^{11} U_2 + {w_3}^{12} U_3)} \\
{\bar{u}_1}^2 &= \frac{{w_3}^{12} U_3 (U_1 + {w_2}^{11} U_2 + {w_3}^{12} U_3)}{(1 - {w_3}^{12} {w^2}_3 {w_1}^2)({w_2}^{11} U_2 + {w_3}^{12} U_3)}
\end{aligned}
$$

当权重为正时，该平衡状态稳定；当权重为负时，该状态不稳定；并且只有两个权重符号相同时才会存在，与先前的基元类似。当两个权重之一设为零时，此平衡状态对应于（79）中放大的（第一个）平衡状态。（79）中的仅抑制性（第二个）平衡状态现在不复存在，因为每个输出连接都受到元连接的影响；抵消某个连接的贡献会使系统转而由仍有贡献的连接主导。同时，适用的放大规则与（79）中的类似，这使得原本可能因竞争激烈而几乎耗尽的连接（例如 ${w_2}^{11} U_2$）/（${w_2}^{11} U_2 + {w_3}^{12} U_3$）$\ll 1$）仍能通过 $1/(1 - {w_3}^{12} {w^2}_3 {w_1}^2) \gg 1$保持高度活跃。

回顾（72）的完整版本，所有单元的部分一表面平衡态为

$$
\bar{u}^i = \sum_{j=1}^{N} {w_j}^i \theta({u_j}^i) {u_j}^i = \sum_{j=1}^{N} {w_j}^i {u_j}^i
$$

因为 $\theta({u_j}^i) = 0$ 如果 ${u_j}^i = 0$ 否则 $\theta({u_j}^i) = 1$。所有连接的部分一表面平衡态满足

$$
(\theta({\bar{u}_j}^i) {\bar{u}_j}^i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} {w_k}^{ji} \theta({u_k}^{ji}) {u_k}^{ji}) \sum_{l=1}^{M} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{N} {u_j}^{ml} = {\bar{u}_j}^i u_j
$$

而所有元连接均满足

$$\theta(\bar{u}_k^{\ ji})\bar{u}_k^{\ ji}\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0\\m\neq k}}^{N}u_k^{\ ml}=\bar{u}_k^{\ ji}u_k\Rightarrow\bar{u}_k^{\ ji}=0\text{ or }\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0\\m\neq k}}^{N}u_k^{\ ml}=u_k$$

所有连接的条件（73，74）为

$$\begin{cases}\left|\sqrt{r_j^{\ i}}-\sqrt{u_j}\right|\geq\sqrt{-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}}\in\mathbb{R}\text{ for }\bar{u}_j^{\ i}\\ \text{always true if}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}>0\text{ for }\bar{u}_j^{\ i}\end{cases}$$

而对于元连接，这些条件可进一步简化为

$$\left|\sqrt{r_k^{\ ji}}-\sqrt{u_k}\right|\geq 0\text{ for }\bar{u}_k^{\ ji}$$

因此，所有连接的部分 1-曲面均衡点为

$$\begin{cases}\bar{u}_j^{\ i}=u_j+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}\text{ if }r_j^{\ i}=0\text{ and }\bar{u}_j^{\ i}\neq 0\\ \bar{u}_j^{\ i}=u_{1/2}\text{ if }\left|\sqrt{r_j^{\ i}}-\sqrt{u_j}\right|>\sqrt{-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}}\\ \bar{u}_j^{\ i}=-r_j^{\ i}+\sqrt{u_j r_j^{\ i}}\\ \qquad\text{if }\left|\sqrt{r_j^{\ i}}-\sqrt{u_j}\right|=\sqrt{-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}}\end{cases}$$

对于 $\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}\leq 0$ 和

$$\begin{cases}\bar{u}_j^{\ i}=u_j+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}\text{ if }r_j^{\ i}=0\text{ and }\bar{u}_j^{\ i}\neq 0\\ \bar{u}_j^{\ i}=u_{1/2}\text{ otherwise}\end{cases}$$

对于 $\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}w_k^{\ ji}\theta(u_k^{\ ji})u_k^{\ ji}>0$。所有元连接的部分 1-曲面均衡

是

$$\begin{cases} \bar{u}_k^{\,ji} = u_k \text{ if } r_k^{\,ji} = 0 \text{ and } \bar{u}_k^{\,ji} \neq 0 \\ \bar{u}_k^{\,ji} = 0 \text{ or } \bar{u}_k^{\,ji} = u_k - r_k^{\,ji} \text{ if } \left|\sqrt{r_k^{\,ji}} - \sqrt{u_k}\right| > 0 \\ \bar{u}_k^{\,ji} = 0 \text{ if } r_k^{\,ji} = u_k \end{cases}$$

¯若固定 $k \in [1;\ N]$，也就是说，考察单个输入单元的发射动力学，我们便可以利用元连接较为简单的结构，推导出一些高维空间平衡态。特别是，对于所有 $i \in [1;\ M]$，我们有

$$(\theta(\bar{u}_{\bar{k}}^{\,i})\bar{u}_{\bar{k}}^{\,i} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} w_m^{\bar{k}i}\theta(u_m^{\bar{k}i})u_m^{\bar{k}i})u_{\bar{k}} = \bar{u}_{\bar{k}}^{\,i}\,u_{\bar{k}} \text{ if } \sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} \bar{u}_{\bar{k}}^{ml} = u_{\bar{k}}$$

$$(\theta(\bar{u}_{\bar{k}}^{\,i})\bar{u}_{\bar{k}}^{\,i} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} w_m^{\bar{k}i}\theta(u_m^{\bar{k}i})u_m^{\bar{k}i})\sum_{l=1}^{M}\bar{u}_{\bar{k}}^{\,l} = \bar{u}_{\bar{k}}^{\,i}\,u_{\bar{k}} \text{ if } \bar{u}_{\bar{k}}^{ml} = 0, m \neq 0$$

其中第一种情况会产生一个吸引子（$MN-1$）平面平衡点

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} \bar{u}_{\bar{k}}^{ml} = u_{\bar{k}} \quad \text{if} \quad \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} w_m^{\bar{k}i}\theta(u_m^{\bar{k}i})u_m^{\bar{k}i} = 0$$

第二种情况则包含一个连接方程组，其求解方法与之前相同，最终得到一个平衡平衡态

$$\bar{u}_{\bar{k}}^{\,i} = \frac{\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} w_m^{\bar{k}i}\theta(u_m^{\bar{k}i})u_m^{\bar{k}i}(u_{\bar{k}} + \sum\limits_{l=1}^{M}\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} w_m^{\bar{k}l}\theta(u_m^{\bar{k}l})u_m^{\bar{k}l})}{\sum\limits_{l=1}^{M}\sum\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} w_m^{\bar{k}l}\theta(u_m^{\bar{k}l})u_m^{\bar{k}l}}$$

如果我们假设对于所有连接，或简单地对于所有 i，都满足输入平衡条件 $\sum_{m\neq\bar{k}} w_m^{\bar{k}i}\theta\left(u_m^{\bar{k}i}\right)\ u_m^{\bar{k}i} = 0$，那么第二种情况实际上就会成为第一种情况的一个子情形

$$\sum_{l=1}^{M}\bar{u}_{\bar{k}}^{\,l} = u_{\bar{k}} \quad \text{and} \quad \bar{u}_{\bar{k}}^{ml} = 0, m \neq 0 \quad \text{if} \quad \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq\bar{k}}}^{N} w_m^{\bar{k}i}\theta(\bar{u}_m^{\bar{k}i})\bar{u}_m^{\bar{k}i} = 0$$

相反，在推导第二种情况时，我们需要至少一个输出连接的平衡条件被违反，或者其总贡献非零。如果某个连接 $\bar{u}_{\bar{k}}^{\,i}$ 通常满足平衡条件，

根据上述替换可知，$\bar{u}_{\bar{k}}^{\ i} = 0$ 以及其他所有竞争连接都缺少来自 $\bar{u}_{\bar{k}}^{\ i}$ 的元连接的贡献。对于一个连接的总贡献为负、另一个连接的总贡献为正的情况，根据先前的结论，不存在稳定状态；第一个连接将衰减至零，而其他输出连接之间将恢复平衡均衡。这意味着，在考虑稳态时，我们可以排除所有总贡献为负的连接。上述分式中也可能存在其他抵消项，但只要能保证至少一个总贡献为正，并排除所有负值情况，该分式就仍然有定义。

¯固定 k的部分平衡仅是 MN维流形上的平衡点。若考虑两个输入单元 $k = 1, 2$，只要满足吸引子（$MN-1$）平面条件，就能得到包含这两个输入单元的更高维曲面均衡。

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0\\m\neq k}}^{N}\bar{u}_k^{\ ml} = u_k \quad \text{and} \quad \sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{N} w_l^{\ ki}\theta(\bar{u}_l^{\ ki})\bar{u}_l^{\ ki} = 0$$

这些条件很容易解释：当单元的总势分配到其输出连接后，所有元连接都会稳定下来；或者元连接会被永久停用（一旦停用，连接就需要元连接提供输入，才能从单元获得更多势）；当输入元连接达到平衡并稳定下来时，所有连接都会进入稳态。然而，输出单元中存在（$MN-1$）平面吸引子并非总是理想的；由于每个单元都要求输出元连接停用且输入元连接同时激活（这是非平凡总贡献要求所致），因此无法改为寻找两个单元之间的平衡均衡。取而代之的是，平衡单元均衡必须伴随另一个吸引子平面

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{\substack{m=0\\m\neq 1}}^{N}\bar{u}_1^{\ ml} = u_1 \quad \text{and} \quad \sum_{\substack{l=1\\l\neq 1}}^{N} w_l^{\ 1i}\theta(\bar{u}_l^{\ 1i})\bar{u}_l^{\ 1i} = 0 \tag{80}$$

$$\bar{u}_2^{\ i} = \frac{\sum\limits_{\substack{m=1\\m\neq 2}}^{N} w_m^{\ 2i}\theta(u_m^{\ 2i})u_m^{\ 2i}(u_2 + \sum\limits_{l=1}^{M}\sum\limits_{\substack{m=1\\m\neq 2}}^{N} w_m^{\ 2l}\theta(u_m^{\ 2l})u_m^{\ 2l})}{\sum\limits_{l=1}^{M}\sum\limits_{\substack{m=1\\m\neq 2}}^{N} w_m^{\ 2l}\theta(u_m^{\ 2l})u_m^{\ 2l}} \tag{81}$$

对所有这些内容的解释很重要——除非我们同时拥有一些上下文提供输入或整体输入特征，否则就无法得到合理解释且集中的输入。不过请注意，所有这些条件都必须渐近成立，而对任何瞬态行为都没有这样的限制；也就是说，两个单元都可能同时表现为上下文单元和特征单元

稳定下来之前。我们将用这一版本以及更复杂的式（76）双单元版本，在第 3.3.3 节初步探讨学习的可能性。

我们应以完整版本（76）来完成本节，该版本还包含连接循环。简言之，利用所有元连接以及横向连接和反馈连接（它们也没有元连接输入）这一更简单的结构，我们可以得到（$MN-1$）平面吸引子（像 $u=\bar{u}$这样的记法不够严谨）

$$
\begin{cases}
u^i=\sum_{j=1}^{N} w_j{}^i\theta(u_j{}^i)u_j{}^i+\sum_{l=1}^{M} w^{li}\theta(u^{li})u^{li} \\
\theta(u_j{}^i)u_j{}^i-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} w_k{}^{ji}\theta(u_k{}^{ji})u_k{}^{ji}-\sum_{l=1}^{M} w^l{}_{ji}\theta(u^l{}_{ji})u^l{}_{ji}=u_j{}^i \\
\sum_{m=1}^{M}[u^{lm}+\sum_{\substack{n=0\\n\neq l}}^{N} u^l{}_{nm}]=u^l=\sum_{j=1}^{N} w_j{}^l\theta(u_j{}^l)u_j{}^l+\sum_{i=1}^{M} w^{il}\theta(u^{il})u^{il} \\
\sum_{m=1}^{M}[u^{im}+\sum_{\substack{n=0\\n\neq i}}^{N} u^i{}_{nm}]=u^i=\sum_{j=1}^{N} w_j{}^i\theta(u_j{}^i)u_j{}^i+\sum_{l=1}^{M} w^{li}\theta(u^{li})u^{li} \\
\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{n=0\\n\neq k}}^{N} u_k{}^{nm}=u_k=\sum_{i=1}^{M} w^i{}_k\theta(u^i{}_k)u^i{}_k+U_k \\
\sum_{m=1}^{M}[u^{lm}+\sum_{\substack{n=0\\n\neq l}}^{N} u^l{}_{nm}]=u^l=\sum_{j=1}^{N} w_j{}^l\theta(u_j{}^l)u_j{}^l+\sum_{i=1}^{M} w^{il}\theta(u^{il})u^{il} \\
u_j=\sum_{i=1}^{M} w^i{}_j\theta(u^i{}_j)u^i{}_j+U_j
\end{cases}
$$

化简为

$$
\begin{cases}
\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} w_k{}^{ji}\theta(u_k{}^{ji})u_k{}^{ji}+\sum_{l=1}^{M} w^l{}_{ji}\theta(u^l{}_{ji})u^l{}_{ji}=0, i\in[1;M], j\in[1;N] \\
\sum_{m=1}^{M}[u^{im}+\sum_{\substack{n=0\\n\neq i}}^{N} u^i{}_{nm}]=\sum_{k=1}^{N} w_k{}^i\theta(u_k{}^i)u_k{}^i+\sum_{l=1}^{M} w^{li}\theta(u^{li})u^{li}=u^i \\
u_j=\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{n=0\\n\neq j}}^{N} u_j{}^{nm}=\sum_{l=1}^{M} w^l{}_j\theta(u^l{}_j)u^l{}_j+U_j
\end{cases}
$$

现在，每个前馈连接原有的平衡条件也扩展到了反馈元连接。还额外增加了一个输出

稳定条件，这次是从输出到输入单元；此外，这两种条件现在也都将某个单元的输入与输出联系起来。之前，我们使用了一个 N 第三类方程，然后使用一个 M 第二类方程来闭合系统（79）。

和之前一样，我们也可以得到一些平衡平衡态，但这次没有任何单元需要其输出连接满足吸引子（$NM-1$）平面条件，因为所有反馈连接都没有输入元连接，而且不会有反馈连接趋于零，从而保证存在非平凡贡献。可以像之前那样，通过假设连接环足够简单来完成，例如前面讨论的两个基元（76）的情形。否则，仍然可以通过追踪未知量对自身的各种依赖关系，或使用符号求解器，来获得解析表达式；但将其纳入本文并不实际，在数值方面进行分析更有意义。

3.3 数值实现

尽管本文侧重于元网络模型的数学表述与分析，我们仍将简要概述其一些数值实现。具体而言，我们将形式化每个应用领域的设定，并分享相关仿真的观察结果。这些已开发的原型均无意与专门的先进解决方案相竞争，其作用更多是为了说明模型族及其背后的动机。

3.3.1 特征检测器

我们将介绍的第一个数值实现，是在对（59）的近似中生成输入选择性。这可视为处理链较低层级上的对比度，即角点和边缘特征的检测。采用简单的前向欧拉法或导数的一阶近似，并将 $\delta=\tau_r$ 设为 $\tau_r du/dt \approx \tau_r(u(t+\delta)-u(t))/\delta = u(t+\tau_r)-u(t)$，再对时间尺度进行归一化，就能得到模拟算法

$$
\begin{cases}
u^i(t+1) = u^i(t) - a(u^i(t)) + \sum_{j=1}^{N} \bar{a}({u_j}^i(t), u_j(t)) \\
{u_j}^i(t+1) = {u_j}^i(t) - \bar{a}({u_j}^i(t), u_j(t)) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \bar{a}({u_k}^{ji}(t), u_k(t)) + \\
\qquad - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{N} \bar{a}({v_k}^{ji}(t), v_k(t)) + e({u_j}^i(t), u_j(t), {u_j}^{0,1}(t), \ldots, {u_j}^{NM}(t)) \\
{u_k}^{ji}(t+1) = {u_k}^{ji}(t) - \bar{a}({u_k}^{ji}(t), u_k(t)) + e({u_k}^{ji}(t), u_k(t), \ldots),\ k \neq j
\end{cases}
\tag{82}
$$

输入灰度图像的每个像素都由两类单元处理。第一类必须处理像素中的白色数量 $\omega \in [0,1]$，第二类

黑色数量 $1-\omega$。（82）中的双层结构通过生成与原图像尺寸相同的输出图像来过滤该图像，其中图像中更重要的部分或吸引网络注意力的部分具有更高的值。输入层与输出层之间的连接关系如图 17所示，此外，该网络采用细胞神经网络（也简称为 CNN）实现。这意味着，完整的层间连接被局部连接所取代：来自某个单元的元连接只会在一定范围内激活或抑制其同类或异类邻居的连接。由此便获得了稀疏连接，且输出单元仅对输入图像的某个区域作出响应；从生物学角度来说，这一区域就是它的视觉场。为避免稀疏连接造成层边界效应，该网络在环面上实现，即连接关系遵循周期曲面。

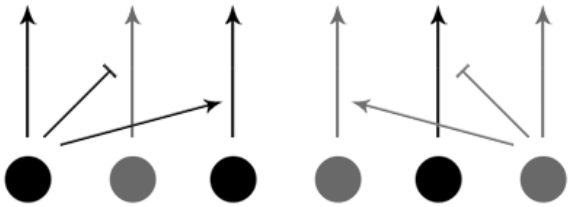


图 17：用于特征检测器的连接结构——对于给定类型的每个输入单元，图中所示的连接都会重复使用。

我们研究了上述滤波器的许多变体，其中还使用反号相互作用，或者甚至只使用兴奋作用（采用此前定义的弱抑制，即通过转移输入单元的势来降低连接的势）；我们还研究了仅当输出势处于某个范围内时才输出该势的情况（以使输出变得稀疏），或者将输出势替换为每个单元的不确定性测量（此前定义为通过每个输出连接广播少量势），以此作为网络重要性和更高注意力的指标。其中许多变体都为特征的可能解释提供了有趣的洞见，但相关讨论对于本次介绍而言过于冗长。我们将在此报告的数值结果将涉及两类单元的自兴奋和相互抑制，以及受注意输入的不确定性测量。

我们使用不同的视觉输入进行了仿真，输入范围从单条对比鲜明的线条到低分辨率短视频，其中一些收录于附录的图19中。使用纯白色或灰色（两种类型的单元活动较低但相等）输入进行合理性检验时，没有产生任何输出。观察一条分隔黑色和白色均匀区域的轮廓线时，网络立即增强了对该线条的注意力；如果线条分隔的是白色和中灰色区域，也会发生同样的情况，但所需时间更长。对比度进一步降低时，反应速度也会随之下降，最终慢到无法在观察时限内看到反应。

观察两条对比度一高一低的同时轮廓线时，网络会先注意到第一条；如果给予足够的时间，也会注意到第二条。当输入过多而计算资源有限、无法处理所有输入时，这种表现有利于实现最佳视觉处理。梯度也被简化为对比度，这意味着网络能够处理模糊输入（这是最具挑战性的特征类型之一，对于卷积神经网络和 SIFT 等主要监督算法而言，其误差率都相对较高）。整体亮度较高的轮廓线或梯度会被第一类单元识别，反之则由另一类单元识别，这表明当竞争类型处于静默状态时，单元对失衡更加敏感。

观察三角形时，网络首先注意到角，随后逐渐将注意力扩展到边，最终聚焦于内部区域。这意味着，在判断形状及其对应物体时，角具有更高的特征重要性，这也在意料之中。在面对立方体上对比度各异的角的组合时，网络先关注对比度高的角，再转向对比度低的角，表现出对比度优先于角的偏好。第一类单元更容易做到这一点，而第二类单元则更加谨慎，这主要是因为输入中白色占主导地位。观察布满噪声的星形时，网络能够先忽略部分噪声并专注于形状，优先关注外侧较尖锐的角，随后将注意力转向内侧的钝角和边。对于噪声程度不同的正方形，也观察到了相同现象，不过正方形的某些部分更难以保持显著，因而更容易受到噪声干扰。在最后这两个案例中，第一类单元表现出了上述抗噪能力；而第二类单元激活不足，可能正是其更容易受到噪声影响的原因，甚至可能是必然结果。

来自（82）的特征检测器即使在静态输入下也有了显著的发展，它会转而关注新颖性，或关注此前因注意力持续时间有限而尚未处理的输入部分。观察旋转三角形时，网络会随着运动的角而转移注意力，追踪输入图像中变化最大的部分。通常，对于静态三角形，它有时间关注不那么重要的特征；而对于运动的三角形，在输入再次变化之前，它只能来得及感知主要特征。观察静态、闪烁和运动的点时，网络注意到了这三者，尽管我们原本希望它能根据复杂度按固定顺序感知它们。具体顺序可能因网络的知识而异，也取决于哪种输入对它来说过于简单或过于复杂，以至于无法最先注意到。对于经验足够丰富的网络，我们应当预期，输入中比以往学到的变化更大的部分会得到更多关注。尽管如此，我们还发现，闪烁点周围以及沿着运动点轨迹的线上，注意力也有所增强，这暗示了注意力的时间转移，即注意力会受到视觉刺激过去位置的影响。我们在附录图20中提供了相关可视化结果和一些经过测试的视频。

以上所有结果均针对尺寸固定为 100×100 像素的图像得出，视频除外，其尺寸为 176×144 像素。我们没有对任何图像或序列帧进行缩放或预处理，尽管大多数图像都是专为这些测试制作的。为最大限度地提高可复现性，所有情况均使用同一组参数，即连接范围为 1（元连接仅连接最近邻），输出连接的势范围为 $[0.05, 3.0]$；当该值大于 1 时，由于存在不确定性，单元将被视为广播单元。增大或减小连接范围会改变检测到的特征的复杂度，可能有助于检测更大的（经过缩放且模糊的）角，并会通过扩大每个输出单元的视觉场来改变整个检测器的敏感性。增大或减小势范围会显著影响最终检测到的特征数量；通常，它用于从大量不同尺寸、难以分析的特征中，提取固定尺寸的稀疏特征。

稀疏连接的实现以及单一或多种细胞类型的对称排列，是许多中心-周边感受野网络模型的内在组成部分。这些模型涉及侧向抑制，其形式可以是输出层上的侧向连接，也可以是从输入到输出单元的前馈连接 [60, 30]，并且还会在输出层产生各种形式的对比度。对于足够简单的抑制性交互，也存在无穷小形式的表述：这类表述使用输入对点图像进行卷积。不过，当前网络还具有其他动力学特性，这些特性违背并阻止了叠加原理，因此也至少妨碍了使用卷积这一概念上直接明了的可能性。

一般来说，除非结合其他处理层（涉及特征描述符和特征匹配），否则没有公认的方法来比较特征检测的质量。在计算机视觉中，有时会通过重现 [53, 59]所描述的视觉错觉来进行研究。这样，我们就能提取视觉系统的特性，从而更深入地了解其工作方式，并为仿生工程方法及其比较提供具体依据。许多与对比度有关的错觉都可以用侧向抑制来解释，其中最著名的包括马赫带错觉、康斯威特错觉、赫尔曼网格错觉、对比效应等。使用这些错觉测试特征检测器并未得到任何结果，这可能是因为连接范围较小，也可能与网络连接方式的某些选择有关。

3.3.2 目标跟踪器

前述特征检测器可以扩展为跟踪最有趣的特征：在兴趣点附近采用更高的分辨率（单元密度），距离较远处则采用较低的分辨率。这种分辨率差异的灵感来自实验中展示的视网膜拓扑映射 [82]，该映射将视觉图像区域之间的邻近关系与视网膜上的邻近关系联系起来。事实上，他们的论文表明，这种映射存在扭曲，偏向最中央区域，而最外围区域在视网膜上所占的比例相当微不足道。采用

这种仅有两个分辨率等级的简化版本，当前的目标跟踪器可用于引导眼睛或相机朝最有趣的特征移动，从而优化信息流入，并减少对不必要细节的处理。

允许网络改变视角的另一个重要作用，由 [61]在其关于固视眼动的研究中作了解释。正如他们所展示的，即使眼睛注视着一个物体，也始终存在微小的运动，以抵消适应导致的输入逐渐消退。将网络的输出连接到摄像机电机、在较大图像中虚拟选择一个子图像，或采用任何其他能让它对环境的方向和分辨率作出决策的控制方式，都可以防止它对恒定输入过度适应。在我们的特征检测器中，这种恒定输入可能表现为广播大幅增加，进而导致注意力扩散，并使输出层上的势降低。

我们在视觉附录中加入了最后一幅图，即图21 ，其中展示了两种分辨率以及当前观测到的输入区域。低分辨率环境中感知到的信息，会引导高分辨率区域转向最受关注的特征。在一组三角形旋转的序列中，注意力，也就是追踪器的“注视”，集中在运动的角上。因此，它会跟随三角形旋转。在一组静止点、运动点和闪烁点组成的序列中，网络会将视线从运动点转向静止点，直到最终停留在静止点上。它只会短暂地看一眼闪烁点。在前一种网络无法引导注意力的情形中，尽管输入是动态的，却导致了过度适应，活动扩散到所有点及其轨迹周围。当然，追踪器的周边视觉中也出现了同样的情况，但经过足够长时间的仿真，其朝向仍固定在静止点上。我们仍然认为，它会转向动态性更强的点；选择更合适的参数、延长仿真时间，或加入学习机制，都可能实现这一点，而学习机制应有助于将注意力从过度适应的输入上移开。

对各种具有挑战性的数据集上的最先进目标跟踪算法进行了全面比较，比较工作由 [85]完成。所采用的两个比较标准是跟踪成功率，以及相对于目标中心的定位误差。为了比较目标中心，当前跟踪器至少需要多个抽象层，以便将物体构建为复合特征并对其进行跟踪。虽然可以提取跟踪成功率，但论文所采用的指标要求边界框物体之间存在重叠，而我们目前只围绕单个特征建立边界框。由于目前所有实现都只是对应用领域以及如何将模型族塑造为此类应用的说明，因此我们不会对此作进一步研究；但对于对此方向感兴趣的读者，我们建议使用多个层。

3.3.3 模式分类器

尽管鉴于当前工作的范围，要创建有效的学习规则以形成具有正确吸引域的正确吸引子似乎还遥不可及，但我们至少可以考虑一种可能的综合程序，类似于（36、37）中针对加性网络模型所采用的方法。这类程序是网络活动（势相空间）这一较易理解的研究，与网络连接关系（权重相空间）的全面研究之间完美的中间步骤。首先，它们是从结构上预先确定的特征检测通向基于记忆回忆和模式识别的无监督分类的桥梁，但这一桥梁本身仍由结构预先确定。其次，它们可以被视为瞬时学习，在这种学习中，无需担心较慢的权重动力学及其可能导致的结构稳定性，也无需担心势动力学的分岔（例如，记忆巩固可以采取对可回忆状态求导的形式，而这可以通过叉形分岔或两个平衡点的出现来实现）。通常，所有记忆都会在权重确定时一次性存储，使网络将这些记忆作为吸引子；此后权重保持固定且静态，网络活动不再引发任何学习。

综合程序有两项形式要求：

- 所有存储记忆都必须是平衡点
- 所有存储记忆都必须渐近稳定

而一些已知的综合方法满足其中一项或两项要求时，会带来额外的计算方面的缺点 [64]。因此，目标是为所有连接找到权重，使其满足针对一组所需且预先由外部选定的记忆所提出的要求。为说明如何遵循这些指导原则进行综合，我们将再次考虑前馈网络的双单元模型（80）（72），并在概念上和数值上扩展这一整体思路，考虑简化循环网络的双单元模型（76）。对于这两种模型，我们还将假设其推导中所用的所有实际条件均成立，例如非负性、连续激活等。除了这些条件之外，我们还要求特征单元的输出连接动力学 u_1 限制在集合

$$\{{u_1}^{ml} = {u_1}^{m'l'}, \forall m', m \in [0; N] \backslash \{1\}, \forall l', l \in [1; M]\} \tag{83}$$

由于我们可以保证对每个 ${u_1}^{ml} = u_1/MN$进行广播时这一点都成立，因此我们唯一还需做的就是防止对输出连接 ${\bar{u}_1}^{ml}$产生非平凡贡献，从而确保这一点始终成立。我们可以将通往这些输出连接的所有元连接的权重设为零，并禁止为它们提供非零外部输入。这个额外假设有三方面影响：

- 我们避免出现瞬态行为，以免单元在特征和上下文化单元这两种角色之间切换。这种行为有趣得多，但为求简洁，目前我们暂不考虑。

- 这样，单元的输出连接只能收敛到吸引子（$MN-1$）平面的中点；尽管存在一个退化平衡点，我们仍不会违反渐近稳定性的第二个条件。

- 我们将降低平衡点代数系统的自由度，为所有势确定完整的数值，从而能够构建一个权重系统。

我们将 u_1 称为无偏特征单元（即从未对其输出连接作出元连接贡献的单元，也就是说，它未被其他单元上下文化或解释），将 u_2 称为上下文化单元。

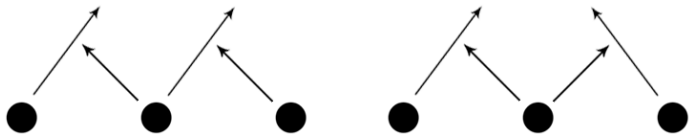


图18：关于无偏特征的假设排除了第一种情况，只允许第二种情况。

在满足上述要求和假设的情况下，当前的综合方法是：对于固定的输入，先确定势空间中的所有平衡未知量，然后在权重空间中构建代数系统 $\tilde{u}_k$，并固定（用于回忆的期望）输出 $\tilde{u}^i$。取方程（$i=1,\ 2$）的双输出版本（80），并加入关于无偏特征的额外假设（83）

$$\tilde{u}_1 = {u_1}^1 + {u_1}^2 + {u_1}^{21} + {u_1}^{22} \Rightarrow 1/4\tilde{u}_1 = {u_1}^1 = {u_1}^2 = {u_1}^{21} = {u_1}^{22}$$

然后简化两个输入单元剩余的方程

$$0 = {w_2}^{11}{u_2}^{11} = {w_2}^{12}{u_2}^{12} \text{ and } 0 = {u_2}^{11} = {u_2}^{12} \Rightarrow \forall {w_2}^{11}, \forall {w_2}^{12}$$

$${\bar{u}_2}^i = \frac{{w_1}^{2i}{u_1}^{2i}(u_2 + {w_1}^{21}{u_1}^{21} + {w_1}^{22}{u_1}^{22})}{{w_1}^{21}{u_1}^{21} + {w_1}^{22}{u_1}^{22}} = \frac{{w_1}^{2i}(u_2 + 1/4\tilde{u}_1({w_1}^{21} + {w_1}^{22}))}{{w_1}^{21} + {w_1}^{22}}$$

并加入由预先确定的输出单元所带来的约束

$$\tilde{u}^1 = {w_1}^1{u_1}^1 + {w_2}^1{u_2}^1 = {w_1}^1\frac{\tilde{u_1}}{4} + {w_2}^1{u_2}^1$$

$$\tilde{u}^2 = {w_1}^2{u_1}^2 + {w_2}^2{u_2}^2 = {w_1}^2\frac{\tilde{u_1}}{4} + {w_2}^2{u_2}^2$$

将导致欠定权重系统

$$\begin{cases} 0{w_2}^{1i} = 0 \\ 4(\tilde{u}^i - {w_1}^i\tilde{u}_1)({w_1}^{21} + {w_1}^{22}) = {w_1}^i{w_1}^{2i}(4\tilde{u}_2 + \tilde{u}_1({w_1}^{21} + {w_1}^{22})) \\ 4\tilde{u}^i - {w_1}^i\tilde{u}_1 = 4{w_2}^i{u_2}^i \end{cases}$$

使用不同的权重选择来求解该系统，并采用不同的初始条件（始终满足 ${u_1}^{ml} = {u_1}^{m'l'}$ ，因为在此限制条件下，系统的其他行为无法实现（83））进行仿真，期间恒定输入向量 $[\tilde{u}^1, \tilde{u}^2]^T$ 反复产生了期望的输出向量$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T$。类似地，我们可以将原代数系统视为一个多项式系统，其中势和权重都是未知量。由于无偏特征条件（83），吸引子（$MN-1$）平面被一个平衡点取代，原系统在所有势上都是完全确定的。因此，我们可以完全用固定的输入势和输出势来表示这些势，得到仅关于权重的方程，并利用这些方程将部分（仅输出）平衡放置在输出单元所张成的子空间内的期望位置。由于满足该系统的完全平衡点是稳定的，网络将收敛到期望的配置。由于网络仅为前馈网络，且根据（83），这样的平衡点只有一个，并且它是所有系统轨迹的 ω-极限集。这样，除了稳态的存在性之外，我们还可以保证其可达性。

这个系统的解不具有唯一性，因此可以用来匹配多组输入和平衡点。例如，为了从输入 $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [1,1]^T$ 获得平衡点 $[\tilde{u}^1, \tilde{u}^2]^T = [2,2]^T$，并从输入 $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [1,2]^T$ 获得平衡点 $[\tilde{u}^1, \tilde{u}^2]^T = [1,2]^T$，我们必须根据这两个系统的解构建一个新系统，以得到一个限制更多的解 ${w_1}^1 = 12+r$， ${w_1}^2 = 8$， ${w_1}^{22} = 0$， ${w_2}^1 = -1$， ${w_1}^{21} = r$， ${w_2}^2 = s$， ${w_2}^{11} = p$， ， ${w_2}^{12} = q$。这仍然可以手动完成，但当系统数量足够多时，我们至少需要使用符号求解器。需要注意的是，额外的自由度并非对所有可能的输入-输出关联都有用；为多个此类关联寻找权重，可能会得到平凡解或无解。之所以在某些情况下能够找到权重，或许是因为这些方程是次数大于一的多项式。从76的基元的稳定性分析可以看出，它们的平衡平衡态是关于权重的更高次多项式，看起来更有望实现这一目标。同时，正如我们接下来将展示的，这样做也是必要的。

吸引子网络最初的认知解释通常将相空间中的初始条件视为用于回忆的实际线索。随后，记忆被综合表示为渐近稳定平衡点，其吸引域则代表它们相对于这些初始条件的鲁棒性范围。相较于相对于外部输入的鲁棒性，网络先前状态的这种鲁棒性意义要小得多；在吸引子网络研究中，外部输入通常保持为常数或零。只有输入单元接收非零值的外部输入，比起网络的初始条件，更自然地体现了传递给网络的外部信息。它也更适合用于概念化识别和预测等认知任务。因此，我们最终将要求系统具有相对于外部输入而非初始

条件。
我们开始研究 2 单元前馈网络 (80) 对外部输入的鲁棒性，方法是求得一组权重，使其能够匹配多个输入及多个期望输出平衡态。(76的双输出版本可以完整表述为

$$\begin{cases} 0 = {u_1}^{21} = {u_1}^{22} = {u_2}^{11} = {u_2}^{12} \\ \tilde{u}^i/6 = {u^i}_1 = {u^i}_2 = {u^i}_{11} = {u^i}_{12} = {u^i}_{21} = {u^i}_{22} \\ \tilde{u}_i = U_i + {w^1}_i {u^1}_i + {w^2}_i {u^2}_i = U_i + ({w^1}_i \tilde{u}^1 + {w^2}_i \tilde{u}^2)/6 \\ \tilde{u}^i = {w_1}^i {u_1}^i + {w_2}^i {u_2}^i \\ (6{u_1}^i - {w^1}_{1i}\tilde{u}^1 - {w^2}_{1i}\tilde{u}^2)({u_1}^1 + {u_1}^2) = 6{u_1}^i \tilde{u}_1 \\ (6{u_2}^i - {w^1}_{2i}\tilde{u}^1 - {w^2}_{2i}\tilde{u}^2)({u_2}^1 + {u_2}^2) = 6{u_2}^i \tilde{u}_2 \end{cases}$$

前馈情形足够简单，可以用符号求解器求解；但在这里，计算开销会变得很大，因此我们只能依赖数值求解器。使用迭代法时，我们必须为搜索指定初始猜测；我们采用全一向量，并得到了系统的一个根，随后通过仿真复现了该根。仿真中，我们使用了一种专用算法，其作用相当于网络基元计算器，也就是说，我们可以快速构建并仿真任何规模足够小的网络基元（包括上述所有网络）。由于当前网络包含回路，权重的近似误差往往会不断累积，因此我们必须将系统根的精度提高到至少 1×10^{-16}，才能对平衡态作出良好估计。此外，我们还必须将势限制在非负区域内；为此，我们将目标函数中的未知数替换为它们的平方，然后将求得的根平方，以重新计算答案。由于不加此限制时得到的解也可能位于非负区域内，并且在某些情况下能给出更准确的近似，因此我们也采用了这种做法。反过来，有时我们要求连接的权重具有非负性，以便缩小关注范围，尽管并没有直接理由必须作此要求。

一些额外的初步结果包括存储多个输入-输出对、同一输入对应多个输出，以及同一输出对应多个输入。这是通过生成额外的方程，并将每一对中的输入和输出未知数替换为固定值来实现的。以下是我们分别针对这三种情况得出的结论：

- 虽然在所有尝试的输入—输出对情况下都找到了数值解，包括输入彼此重叠、接近或相距较远（按简单欧几里得范数衡量）的情况，但随着存储的配对数量增加，回忆的准确性有所下降。这可能是因为当某个解对应多个可能的平衡点时，系统对精确解的敏感性会增加。此外，如果向网络提供学习配对之外的噪声输入，还会出现伪中间平衡态。这通常是可以预期的，因为

我们改变外部输入后，动力学也会随之改变，进而改变最终的平衡点。然而，我们关注的是将多个输入精确映射到同一个平衡点，而这正是此处的第三种情况。

- 单个外部输入产生多重平衡点时的观察结果，与前文得出的理论预测相符。具体而言，可能存在一个孤立稳定平衡点，或者一个吸引子（$NM-1$）平面；若要求存在多重平衡点，则只有第二种情况才有可能。例如，我们考察了输入 $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2]^T=[1,1]^T$对应的平衡点 $[\tilde{u}^1,\tilde{u}^2]^T=[1,1]^T$，以及输入 $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2]^T=[1,1]^T$对应的平衡点$[\tilde{u}^1,\tilde{u}^2]^T=[2,2]^T$，得到前馈连接权重 ${w_1}^1={w_2}^1=1.5297$、 ${w_1}^2={w_2}^2=1.4714$，接近零的反向连接权重 ${w^1}_1={w^2}_1=1.0336\times10^{-15}$、 ${w^1}_2=$${w^2}_2=-1.2584\times10^{-15}$，以及接近零的反向元连接权重${w^1}_{11}={w^2}_{11}=-1.7451\times10^{-14}$、 ${w^1}_{12}={w^2}_{12}=1.9641\times10^{-14}$、 ${w^1}_{21}=$${w^2}_{21}=-1.3985\times10^{-14}$和 ${w^1}_{22}=0.013\,908$、 ${w^2}_{22}=-0.013\,908$。这意味着，数值结果通过将元连接权重设为零，排除了元连接对前馈连接的任何影响。排除所有反向连接的影响后，网络便化为前馈网络；我们已经知道，这种网络至少应有一个特征单元，因此也会有一个吸引子（$NM-1$）平面。使用这些权重和外部输入 $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2]^T=[1,1]^T$进行模拟时，网络会收敛到吸引子 $[\tilde{u}^1,\tilde{u}^2]^T=[1.5297,1.4714]^T$上的某个中间值；采用不同的初始条件时，也会收敛到附近的值。

- 当然，最重要的情况是对外部输入具有鲁棒性，也就是说，针对多个外部输入获得相同的平衡。对于这类权重，例如希望从 $[\tilde{u}^1,\tilde{u}^2]^T=[1,1]^T$和 $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2]^T=[1,1]^T$获得 $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_2]^T=[2,2]^T$，数值解会因期望输入的选择而导致期望平衡出现超调$[\tilde{u}^1,\tilde{u}^2]^T=[1.33,1.33]^T$或欠调 $[\tilde{u}^1,\tilde{u}^2]^T=[0.66,0.66]^T$。因此，单个吸引子点只能解决相对于初始条件的鲁棒性问题，而不能解决相对于外部输入的鲁棒性问题。若要针对一组外部输入获得相同的吸引子，我们至少需要一个退化平衡态；更具体地说，需要一个与该组所有外部输入下 $[\tilde{u}^1,\tilde{u}^2]^T$ 的轨迹重合的吸引子。然而，要做到这一点，我们必须考虑轨迹可能为一条直线的情况，并且必须去除无偏特征这一简化假设（83），这已超出对元网络综合各种可能性的简单综述范围。

最后，为了展示一种更实用（通常规模更大）的模式分类实现，我们需要使用输入单元多于两个的网络。更大的网络会迅速增加自由参数的数量，因此需要数值求解器来求解高维系统的根。这些根代表系统在势空间和权重空间中均处于平衡状态的情形，也就是说，对应于特定的连接强度和势。单元势

通常保持固定为与预先选定的记忆相对应的期望值：输入单元对应一个训练数据样本，输出单元对应一个训练标签。每个训练对都会生成一个关于权重的系统，我们可以计算一个复合系统，或者对这些较简单系统的所有解取平均值。随后，在测试集上测量分类准确率：将每个测试样本输入网络，直到网络收敛；收敛后，提取输出单元的平衡电位，并与正确答案进行比较。

关于 MNIST 手写数字这一经典机器学习数据集（用于图像分类）的初步结果，需要求解包含 9910 个方程和 118810 个未知数的系统，其中 28x28 个输入单元固定为特定图像，10 个输出单元固定为一个二进制向量：正确数字类别对应 1，其余类别对应 0。由于针对所有输入 - 输出对的情况求解系统，需要为总计 50000 个训练样本中的每个样本求解相同数量的方程，而且正如较简单实验所观察到的，这并不能保证得到稳健的解，因此更理想的训练方式是对多个情况取平均。对于多个输入-输出对的情况，数值观测与式（76）双输出版本的预测一致，但该版本采用了规模更大的实现。

4 讨论

4.1 其他考量

这里我们将列出一些无法纳入正文、但对于全面理解我们必须探讨的各个主题仍然很重要的其他考量。首先，我们将反驳一些对作为联想记忆的吸引子网络过于简单化的批评；然后简要探讨这些网络在外部输入和经典稳定性方面的一些可能扩展；最后，我们将说明所选择的数学理论与人工神经网络和生物神经网络之间的联系。

在物体识别应用中使用吸引子的一个主要动机在于，网络可以处理连续的输入流（或等价地充当在线算法）。吸引子回忆理念的支持者可能会认为，这种做法总体上在生物学上更为合理；而反对者则可能认为，按照这种数学描述，脑活动永远不会达到稳定状态。然而，处理信息流永远不会导致完全收敛，因为输入实际上几乎从未处于稳定状态，而这种收敛充其量可能是最优的。学习的一个目标便是缩短处理时间，或提高收敛率，从而在下一次遇到相同输入时，能够更快地处理并更好地结合上下文。

我们必须排除的另一个过度简化的观点，是认为在改变输入时需要重置初始条件；这一观点由 [37]提出。Hirsch 的主要论点是，我们无法定义一个从外部输入到平衡态的映射 $H(U) = u^*$。如果我们在向 u^*收敛的过程中，将输入 U 切换为另一个输入 U，动力学以及收敛过程将发生改变，并可能收敛到一个不同的平衡点$\bar{u}^*$。切换回 U 后，将不再保证收敛到 u^*，因为切换时的初始条件现在可能位于另一个点 $\hat{u}^* \neq u^*$的吸引域内。因此，无法将一个输入映射到一个吸引子，并且在输入发生变化时需要重置初始条件。虽然这些结论是正确的，但无法将平衡点与恒定的外部输入关联起来，实际上可能正是我们所希望的效果。具体而言，我们仍然可以将一系列恒定的外部输入映射到最终平衡态，从而编码序列信息，并使网络能够根据所感知输入的序列回忆不同的记忆。

我们关于对外部输入的鲁棒性的结论，即从多个外部输入中回忆起同一个吸引子，可以扩展到在完整的外部输入序列中维持同一个吸引子。最简单的序列当然是单个恒定输入，这也是任何存储信息在复杂度增加过程中预期的第一步。恒定输入序列等同于分段恒定外部输入，并且可以推广到任意随时间变化的外部输入。对于随时间变化的输入，维持同一个吸引子的逆过程则是生成随时间变化的

该吸引子的输出。第一种情况的认知解释已给出——从随时间演变的刺激中回忆起同一个概念，例如识别熟悉的旋律或预测熟悉的轨迹。第二种情况的认知解释可以是刺激生成，例如书写手写文字或讲述一个口头故事。尽管这些设想都令人振奋，但在所有情况下，对它们进行数学和工程实现都超出了我们当前的研究范围。

在解释神经网络稳定性的方式上，我们在此还必须引入另一项扩展，即部分稳定性的概念。通常认为，回忆模式存储在网络的一部分中，而非整个网络中。模式稀疏性通常被认为介于所有细胞都参与和仅由一个“祖母”细胞参与这两个极端之间。将记忆存储在网络的子区域中，也能减少回忆所需的处理和耦合。因此，相较于在完整相空间中收敛（这在数学上也更容易处理），我们可能更关注在某个特定流形上的收敛。只要由于某些预防条件，流形之外的不稳定性在实践中无法触及，系统在流形之外的行为就可以是振荡、混沌，甚至不稳定。只要我们所考虑的计算模型集合中，包含能够完成我们所追求的高阶认知任务的模型，我们就满意了。

这引出了关于生物学合理性这一反复讨论主题的最后一点。我们倾向于使用吸引子网络进行分类，探究其记忆巩固或合成捷径的原理，而不是根据给定的正确标签反向传播误差。在特征检测方面，我们倾向于采用两种类型的单元，而不是较简单的侧向抑制方案。有人可能会认为，我们需要现实世界的验证，因此力求达到最佳的生物学真实性；模型在数值或经验预测方面取得成功，便能证实其所依据的方法，并进而揭示生物现实本身的新信息。对于特征检测器而言，这意味着预测用于黑色感知的额外单元类型：它可能是视网膜中某种已知细胞的亚型，受到第一类单元的抑制，同时也抑制第一类单元；也可能涉及一种新的相互作用，或其他机制。然而，我们关注的具体是工程领域的数学建模；只要方法能够实现其目的，我们并不在意它是否符合生物现实。此处的建模仅仅是为工程实践提供方向，以便我们寻找能够解决人工智能领域广泛问题的共同解。

我们的模型也并非都仅仅围绕工程展开。我们对计算高效且具有特定高准确性的人工神经网络的主要批评，正是它们与更简单、更自然的解之间存在过大的偏离。同时，这些解又无法从仍然难以泛化、但真正属于生物神经网络的系统中获得。解决问题时所拥有的工程自由是毋庸置疑的，但这种自由究竟能够延伸到多远，仍将是一个灰色地带。尽管如此，通用解存在的可能性及其巨大的吸引力，

是促使我们在许多计算任务中使用神经网络，而不是支持向量机或其他强大且更简单的机器学习方法的主要动力之一。尽管这种多功能解可能更难识别，但仍必须积极追寻，并且针对特定问题的实例求解，其发展方向都应尽可能接近这一通用解。

4.2 当前局限

由于这是一个新近提出的模型，因此存在许多局限。下面简要概述其中一些：

- 由于当前的元网络是一个基于速率的模型，因此它面临发放率近似所带来的所有局限。其中最重要的是，它无法像脉冲模型那样描述序列编码和与时间相关的现象；而脉冲模型也在尽可能减少生物学细节。

- 对于当前模型，连接的存在与零权重的使用并不等同。用非平凡权重来定义连接是否存在是合理的，也能很好地将数学上的一般性与具体实现联系起来，但方程中的上下文项（61）与这一概念并不兼容。也无法在该项中加入权重，因为如果其中所有权重均为零，分母就可能变为零。

- 模型的许多部分今后都可以修改，目前仍属实验性质。这也是将其作为一个模型族引入的主要原因之一，以便更灵活地对所添加的动力学进行模块化。

- 新增的结构显著增加了仿真的计算需求，因为它为所有连接（即所有成对的单元）以及所有元连接（即所有成对的单元和连接）增加了方程。

- 如前所述，对于外部输入和输入序列的鲁棒性对于记忆回忆这一概念来说直观得多，而目前这方面仍然有所欠缺。

4.3 未来发展

除了寻找更好的方法来应对当前模型所面临的局限性之外，还有两项尚未得到充分发展和研究的重大扩展，分别是

- 可塑性——具体而言，是指学习能力，它可以带来对输入的适应和泛化

- 抽象——多层网络能够进行层次化表征，将低层特征组合成更高层的特征

关于第一个方向，找到一种方法使网络能够适当地重组自身，是存储其执行最基本认知任务所需信息的唯一途径。这也带来了关于监督的更多挑战，例如如何获得有关存储质量或成效的反馈，以及我们能否构建已知的网络结构，例如前馈与反馈的区分、连接循环、细胞特化和特化细胞排列。

关于第二个方向，多个层可以像深度神经网络的情况一样，为目标检测和分类等任务提供多个抽象层级。它们可以让网络在更具挑战性的数据集上对图像进行分类，例如 CIFAR-10、CIFAR-100、STL-10、SVHN 和 ILSVRC2012 任务 1。在最接近真实情况的情形下，可以在视频数据集上测试具有多层学习能力的版本；这些数据集最接近真实环境数据，有助于认知发展。

附录

可视化结果

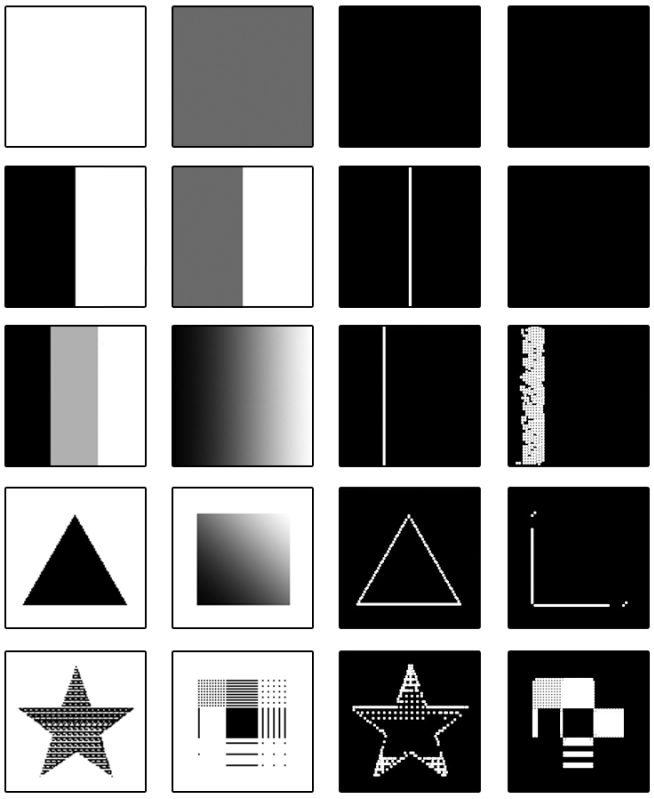


图19：使用特征检测器进行的视觉实验——每一行代表一个独立案例，前两个框显示两个阶段，后两个框显示结果：a）白色和灰色均匀输入——两个阶段中两种单元类型的输出；b）高对比度和低对比度的轮廓线——经过足够长时间后的输出（高对比度使用两种单元类型，低对比度使用第一种单元类型），以及低对比度的短期输出（对于第一种单元类型，该输出保持为长期输出；对于第二种单元类型，则相反）；c）两条同时出现的高对比度和低对比度轮廓线以及一个梯度——对于两条轮廓线，始终显示第二种单元类型的输出；对于梯度，则显示较晚阶段的输出；d）引入角的形状——三角形的两种单元类型输出，以及正方形的第一种单元类型输出（固定阶段）；e）被噪声隐藏的形状——星形和正方形的第一种单元类型输出（固定阶段）；

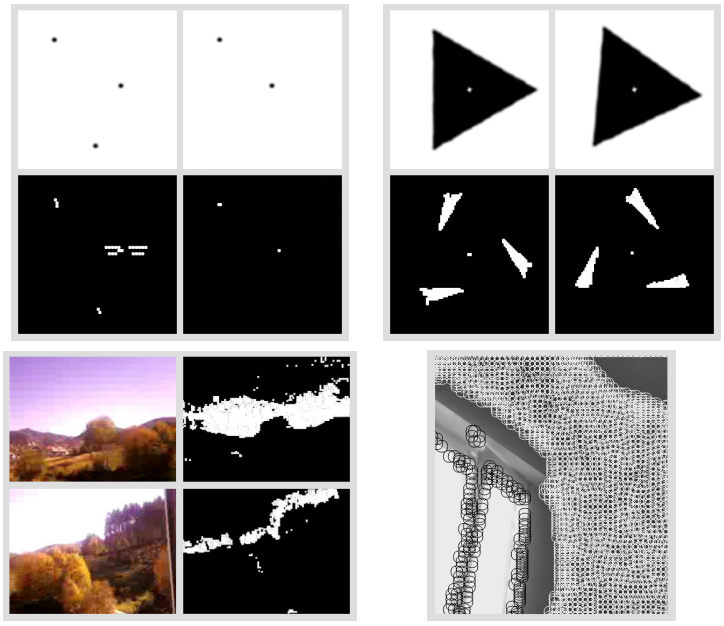


图20：作为时间特征的运动检测：a）静止、移动和闪烁的点（左上），白色显示两幅快照，黑色显示第一种和第二种单元类型的输出；b）旋转三角形（右上），白色显示两幅快照，黑色显示第一种和第二种单元类型的输出；c）视频（左下），左侧显示两幅快照，右侧显示第一种单元类型的响应；d）相机（右下），长时间曝光导致过度适应；

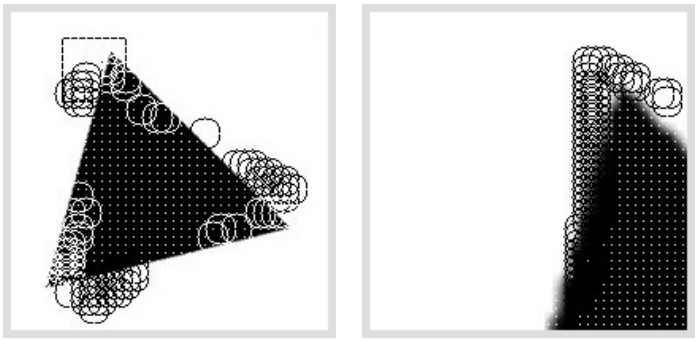


图21：目标跟踪器的分辨率——与定向注意子区域相对应的周边视觉（左）和中央视觉（右）。

所使用的技术

我们的首选主要编程语言是 Python（2.7），并结合使用 NumPy 和 OpenCV 软件包，分别用于数值处理和计算机视觉处理。我们还使用了开源领域中主要的 MPI 绑定软件包之一，即 mpi4py [16]。为了充分利用 Caliban 提供的超级计算资源，有必要针对 MPI（消息传递接口）移植和开发原型代码。Caliban 是拉奎拉大学的高性能集群，相关工作主要用于特征检测器的参数探索，以及对多种细胞神经网络连接关系的研究。得益于代码的设计，我们能够实现并行化：仿真采用步同步虚拟时间，并在连接较为松散的区域内局部运行，同时使用光环交换技术，以及内存映射和区域限制数据文件加载。

我们还在网络综合部分进一步使用了 Octave 和 Maxima 等软件，并在 Theano、Torch 和 TensorFlow 上编写和测试了一些小段代码。

参考文献

[1] A Paul Alivisatos、Miyoung Chun、George M Church、Ralph J Greenspan、Michael L Roukes 和 Rafael Yuste，《脑活动图谱项目与功能连接组学的挑战》，Neuron 74（2012年），第 6 期，970–974。[2]B Ambrosio 和 MA Aziz-Alaoui，《FitzHugh–Nagumo 型耦合反应–扩散系统的同步与控制》，Computers & Mathematics with Applications 64（2012年），第 5 期，934–943。[3] David Anderson，《你的大脑不只是一个化学物质袋》，2016年。[4] Francesco P Battaglia 和 Alessandro Treves，《现实自联想记忆中的稳定且快速的循环处理》，《神经计算》10（1998年），第 2 期，431–450。[5] C Buchel，《晚期失明者与先天性失明者视觉皮层中的不同激活模式》，Brain 121（1998年），第 3 期，409–419。[6] John H. Byrne，《神经元与神经元网络导论》，2016年。[7] Jinde Cao 和 Qing Tao，《Hopfield 连续反馈神经网络吸引域与收敛速率的估计》，Journal of Computer and System Sciences 62（2001年），第 3 期，528–534。[8] S. Carpenter、G.A.Grossberg，《自组织神经网络进行自适应模式识别的艺术》，Computer 21（1988年），第 3 期，77–88。[9] Tianping Chen 和 Shun Ichi Amari，《非对称 Hopfield 网络的稳定性》，IEEE Transactions on Neural Networks 12（2001年），第 1 期，159–163。[10] Xiaofeng Chen、Yafei Zhou 和 Qiankun Song，《具有不连续激活函数的时滞神经网络的多稳态性》，International Symposium on Neural Networks，Springer，2010年，第 603–610 页。[11] Chang-Yuan Cheng、Kuang-Hui Lin 和 Chih-Wen Shih，《循环神经网络中的多稳态性》，SIAM Journal on Applied Mathematics 66（2006年），第 4 期，1301–1320。[12] ，《时滞神经网络中的多稳态性与收敛性》，Physica D: Nonlinear Phenomena 225（2007年），第 1 期，61–74。[13] Michael A Cohen 和 Stephen Grossberg，《竞争型神经网络实现全局模式形成与并行记忆存储的绝对稳定性》，IEEE transactions on systems, man, andcybernetics（1983年），第 5 期，815–826。[14] C. F. Connor、J. A. Stevens，《根据分离的神经元胞体的电压钳数据预测重复放电行为》，The Journal of Physiology 213（1971年），第 1 期，31–53。[15] Francis Crick，《关于神经网络的近期兴奋》，Nature 337（1989年），第 6203 期，129–132。

[16] Lisandro Dalcin，Python 的 MPI，http://pythonhosted.org/mpi4py/，2016年。[17] Peter Dayan 和 L. F. Abbott，《理论神经科学：神经系统的计算与数学建模》，麻省理工学院出版社，2005年。[18] 《经济学人》，《大脑工作》，2011年。[19] Rubem Erichsen Junior 和 Leonardo Gregory Brunnet，《Hindmarsh–Rose 神经元网络中的多稳态》，《物理评论 E：统计、非线性与软物质物理》78（2008年），第6期，061917，6页。[20] 方宇光和 Thomas G Kincaid，《动力神经网络的稳定性分析》，IEEE Transactions on Neural Networks 7（1996年），第4期，996–1006。[21] A. F. Filippov 和 F. M Arscott，《具有不连续右端的微分方程》，克鲁维尔学术出版社，1988年。[22] Richard FitzHugh，《神经膜理论模型中的冲动与生理状态》，《生物物理学杂志》1（1961年），第6期，445–466。[23] M Forti 和 P Nistri，《具有不连续神经元激活的神经网络的全局收敛性》，《IEEE 电路与系统汇刊 I：基础理论与应用》50（2003年），第11期，1421–1435。[24] 福岛邦彦，《新认知机：一种不受位置偏移影响的模式识别机制的自组织神经网络模型》，《生物控制论》36（1980年），第4期，193–202。[25] Wulfram Gerstner，《神经网络模型中的活动时间结构》，《物理评论 E》51（1995年），第1期，738。[26] ，《脉冲神经元的种群动力学：快速瞬态、异步状态与锁定》，《神经计算》12（2000年），第1期，43–89。[27] Wulfram Gerstner 和 Werner M Kistler，《脉冲神经元模型》，剑桥大学出版社，2002年。[28] Xavier Glorot 和 Yoshua Bengio，《理解深度前馈神经网络训练的困难》，载于《国际人工智能与统计学会议论文集》（AISTATS'10）。人工智能与统计学学会，2010年。[29] Charles G Gross，《"祖母细胞"的谱系》，《神经科学家》8（2002年），第5期，512–518。[30] Stephen Grossberg，《自适应模式分类与通用再编码：I. 神经特征检测器的并行发展与编码》，《生物控制论》23（1976年），第3期，121–134。[31] Allon Guez、Vladimir Protopopsecu 和 Jacob Barhen，《关于非线性连续神经网络的稳定性、存储容量与设计》，IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 18（1988年），第1期，80–87。

[32] *Jack K Hale*，《常微分方程》，*Wiley-Interscience*，*1969*年。[33] *Himesh Handa* 和 *BB Sharma*，《外部电刺激下耦合的混沌 *Fitzhugh–Nagumo* 神经元与 *Hindmarsh–Rose* 神经元群的同步》，《非线性动力学》（*2016*年），*1–16*。[34] *D. O Hebb*，《行为的组织》，*Wiley*，*1949*年。[35] *G. Hinton*、*P Dayan*、*B. Frey* 和 *R. Neal*，《无监督神经网络的"醒眠"算法》，《科学》*268*（*1995*年），第*5214*期，*1158–1161*。[36] *Geoffrey E. Hinton*、*Simon Osindero* 和 *Yee-Whye Teh*，《深度置信网络的快速学习算法》，《神经计算》*18*（*2006*年），第*7*期，*1527–1554*。[37] *Morris W Hirsch*，《连续时间网络中的收敛激活动力学》，《神经网络》*2*（*1989*年），第*5*期，*331–349*。[38] *Sepp Hochreiter* 和 *J¨urgen Schmidhuber*，《长短期记忆》，《神经计算》*9*（*1997*年），第*8*期，*1735–1780*。[39] *Alan Hodgkin* 和 *AndrewHuxley*，《膜电流的定量描述及其在神经传导与兴奋中的应用》，《数学生物学通报》*52*（*1990*年），第*1–2*期，*25–71*。[40] *John J Hopfield*，《具有涌现集体计算能力的神经网络与物理系统》，《美国国家科学院院刊》*79*（*1982*年），第*8*期，*2554–2558*。[41] ,《具有分级响应的神经元拥有类似双态神经元的集体计算特性》，《美国国家科学院院刊》*81*（*1984*年），第*10*期，*3088–3092*。[42] *Kurt Hornik*、*Maxwell Stinchcombe* 和 *Halbert White*，《多层前馈网络是通用逼近器》，《神经网络》*2*（*1989*年），第*5*期，*359–366*。[43] *Gan Huang* 和 *Jinde Cao*，《具有不连续激活函数的神经网络的多稳态》，《非线性科学与数值模拟通讯》*13*（*2008*年），第*10*期，*2279–2289*。[44] *Yujiao Huang*、*Huaguang Zhang* 和 *Zhanshan Wang*，《具有不连续激活函数的时变时滞递归神经网络中多个平衡点的动力稳定性分析》，《神经计算》*91*（*2012*年），*21–28*。[45] *D. H. Hubel* 和 *T. N. Wiesel*，《猫的视觉皮层中的感受野、双眼交互作用与功能结构》，*The Journal of Physiology 160*（*1962*年），第*1*期，*106–154*。[46]《独立报》，《人脑是宇宙中最复杂的结构。让我们尽一切努力揭开它的奥秘》，*2014*年。

[47] E. M. Izhikevich, 《脉冲神经元的简单模型》, IEEE Transactions on Neural Networks 14（2003年）, 第6期, 1569–1572（英文）。
[48] ———, 《皮层脉冲神经元应采用哪种模型? 》, IEEE Transactions on Neural Networks 15（2004年）, 第5期, 1063–1070（英文）。[49] Teuvo Kohonen, 《拓扑正确特征图的自组织形成》, 《生物控制论》43（1982年）, 第1期, 59–69。[50] Andrey Kurenkov, 《神经网络与深度学习的"简要"历史》, 2015年。[51]Louis Lapicque, 《作为极化处理的神经电兴奋的定量研究》, 《普通生理与病理学杂志》9（1907年）, 第1期, 620–635。 Y. LeCun、B. Boser、J. S. Denker、D. Henderson、R. E. Howard、W. Hubbard 和 L. D. Jackel, 《反向传播应用于手写邮政编码识别》, 《神经计算》1（1989年）, 第4期, 541–551。 Daniel S Levine 和 Stephen Grossberg, 《神经网络中的视觉错觉：线条中和、倾斜后效与角度扩张》, 《理论生物学杂志》61（1976年）, 第2期, 477–504。[52] J-H Li、AN Michel 和 W Porod, 《一类神经网络的分析与综合：具有无限粒度的变结构系统》, IEEE 电路与系统汇刊36（1989年）, 第5期, 713–731。[53] Jian-Hua Li、Anthony N Michel 和 Wolfgang Porod, 《一类神经网络的定性分析与综合》, IEEE 电路与系统汇刊35（1988年）, 第8期, 976–986。[54] Rodolfo Llinas, 《神经元》, Scholarpedia 3（2008年）, 第8期, 1490。[55] Wenlian Lu、Lili Wang 和 Tianping Chen, 《一类细胞神经网络多个平衡点的吸引域》, IEEE Transactions on Neural Networks 22（2011年）, 第3期, 381–394。[56] Wolfgang Maass, 《脉冲神经元网络：神经网络模型的第三代》, 《神经网络》10（1997年）, 第9期, 1659–1671。[57] Stephen L Macknik 和 Susana Martinez-Conde, 《侧向抑制网络的空间和时间效应及其与时空边缘可见性的相关性》, 《神经计算》58（2004年）, 775–782。[58] Hanspeter A Mallot, 《计算神经科学》, Springer, 2013年。[59] Susana Martinez-Conde、Stephen L Macknik 和 David H Hubel, 《固视眼动在视觉感知中的作用》, Nature Reviews Neuroscience 5（2004年）, 第3期, 229–240。[60] Warren S. McCulloch 和 Walter Pitts, 《神经活动中固有观念的逻辑演算》, 《数学生物物理学通报》5（1943年）, 第4期, 115–133。

[63] Blausen Medical, 《Blausen画廊2014》, 2014年。[64] Anthony N Michel 和 Jay A Farrell, 《通过人工神经网络实现联想记忆》, IEEE控制系统杂志10（1990年）, 第3期, 6–17。[65] Anthony N Michel、Jay A Farrell 和 Wolfgang Porod, 《神经网络的定性分析》, IEEE 电路与系统汇刊36（1989年）, 第2期, 229–243。[66] Marvin Minsky 和 Seymour Papert, 《感知器》, 麻省理工学院出版社, 1988年。[67] Catherine Morris 和 Harold Lecar, 《藤壶巨型肌纤维中的电压振荡》, 《生物物理学杂志》35（1981年）, 第1期, 193。[68] Michael Okun 和 Ilan Lampl, 《兴奋与抑制的平衡》, Scholarpedia 4（2009年）, 第8期, 7467。[69] D. Pinault、Y. Smith 和 M. Deschenes, 《成年大鼠丘脑网状核中的树突-树突和轴突-轴突突触》, 《神经科学杂志》17（1997年）, 第9期, 3215–3233。[70] Wilfrid Rall, 《神经元的核心传导理论与电缆特性》, 第3章, 第39–97页, John Wiley and Sons, Inc., 2011年。[71] Wilfrid Rall、G.M. Shepherd、T.S. Reese 和 M.W. Brightman, 《嗅球中用于抑制的树突-树突突触通路》, Experimental Neurology 14（1966年）, 第1期, 44–56。[72] V. Ramachandran, 《幻肢的感知：D. O. Hebb讲座》, Brain 121（1998年）, 第9期, 1603–1630。[73] Josef P. Rauschecker, 《大脑皮层中的代偿性可塑性与感觉替代》, 《神经科学趋势》18（1995年）, 第1期, 36–43。[74] R. M. Rose 和 J. L. Hindmarsh, 《丘脑神经元中离子电流的组装 I：三维模型》, 《英国皇家学会会刊B辑：生物科学》237（1989年）, 第1288期, 267–288。[75] F. Rosenblatt, 《感知机：大脑中信息存储与组织的概率模型》, 《心理学评论》65（1958年）, 第6期, 386–408。[76] David E. Rumelhart、Geoffrey E. Hinton 和 Ronald J. Williams, 《通过反向传播误差学习表征》, Nature 323（1986年）, 第6088期, 533–536。[77] E. Salinas 和 L. F. Abbott, 《从感觉网络向运动网络传递编码信息》, 《神经科学杂志》15（1995年）, 第10期, 6461–6474。[78] H. S. Seung, 《大脑如何保持眼睛静止》, 《美国国家科学院院刊》93（1996年）, 第23期, 13339–13344。[79] H. Sompolinsky 和 R. Shapley, 《关于方向选择性机制的新视角》, Curr. Opin. Neurobiol. 7（1997年）, 第4期, 514–522。

[80] Subramania I Sudharsanan 和 Malur K Sundareshan, 《动力学神经网络的平衡表征及联想记忆的系统综合过程》, IEEE Transactions on Neural Networks **2**(1991), no. 5, 509–521.[81] A. L. Taylor、J. M. Goaillard 和 E. Marder, 《多种电导如何决定多区室模型的电生理特性》, 《神经科学杂志》**29** (2009), no. 17, 5573–5586.[82]Roger B Tootell、Martin S Silverman、Eugene Switkes 和 Russell L DeValois, 《灵长类纹状皮层视网膜拓扑组织的脱氧葡萄糖分析》, 《科学》**218** (1982), no. 4575, 902–904.[83] T. Trappenberg, 《计算神经科学基础》, Fundamentals of Computational Neuroscience, 牛津大学出版社, 2010.[84] Lili Wang、Wenlian Lu 和 Tianping Chen, 《具有分段线性非递减激活函数的神经网络中多重平衡点的共存与局部稳定性》, Neural Networks **23** (2010), no. 2, 189–200.[85] Qing Wang、Feng Chen、Wenli Xu 和 Ming-Hsuan Yang, 《在线目标跟踪算法的实验比较》, SPIE Optical Engineering+ Applications, 国际光学与光子学学会, 2011, pp. 81381A–81381A.[86] Heiko Wersing、Wolf-J¨urgen Beyn 和 Helge Ritter, 《具有非饱和分段线性传递函数的循环神经网络的动力学稳定性条件》, 《神经计算》**13** (2001), no. 8, 1811–1825.[87] B. Widrow, 《采用化学"记忆电阻器"的自适应"Adaline"神经元》, 技术报告 1553-2, 斯坦福电子实验室, 斯坦福, 加利福尼亚州, 1960年10月.[88] Hugh R. Wilson 和 Jack D. Cowan, 《局部模型神经元群中的兴奋性与抑制性交互作用》, 《生物物理学杂志》**12**(1972), no. 1, 1–24.[89] Zhang Yi、Kok Kiong Tan 和 Tong Heng Lee, 《具有非饱和分段线性传递函数的循环神经网络的多稳态分析》, 《神经计算》**15** (2003), no. 3, 639–662.[90] Zhigang Zeng 和 Jun Wang, 《时滞细胞神经网络中周期性外部输入引发的多周期性与指数吸引性》, 《神经计算》**18** (2006), no. 4, 848–870.[91]Huaguang Zhang、Zhanshan Wang 和 Derong Liu, 《连续时间循环神经网络稳定性分析综述》, 《IEEE神经网络与学习系统汇刊》**25** (2014), no. 7, 1229–1262.[92] Lei Zhang、Zhang Yi 和 Jiali Yu, 《具有非饱和分段线性传递函数的时滞循环神经网络的多周期性与吸引性》

函数，IEEE Transactions on Neural Networks**19** （2008年），第1期，158–167页。