arXiv:2301.02996v2 [math.NA] 3 Feb 2024

# 关于闭曲面积分格式收敛速率的一点说明

Gentian Zavalani[1],Elima Shehu[2],和 Michael Hecht[3]

[1,3]先进系统理解中心（CASUS），德国格尔利茨 D-02826·[1,3]亥姆霍兹-德累斯顿-罗森多夫研究中心，德国德累斯顿 D-01328。[1]德累斯顿工业大学·[2]马克斯·普朗克数学科学研究所，德国莱比锡[2]奥斯纳布吕克大学，德国奥斯纳布吕克····

**摘要**

本文对采用 [PS22] 中提出的曲面参数化在离散曲面上进行积分的误差进行分析，并证明了为何用于近似光滑曲面和被积函数的偶次多项式比奇次多项式具有更高的收敛速率。此外，我们给出了一些数值算例来说明所得结果，并提出了一种可能的方法，以克服原方法存在的问题。

**关键词** 数值积分；曲面积分；收敛速率；最近点投影；切比雪夫-洛巴托节点。

## 1 引言

许多应用，包括数学物理和数学生物学 [YQ09], 都需要对曲面上的积分进行精确近似。曲面积分是许多数值方法中的一项基础操作，包括边界积分法、有限元法、曲面有限元法和有限体积法。由于对曲面和被积函数采用了分片线性近似，在离散曲面（例如曲面三角剖分）上的积分通常只有一阶或二阶精度 [Geo98]。为提高精度阶数，本文采用 [PS22] 中提出的方法，考虑光滑闭嵌入超曲面的几何多项式逼近 $\mathcal{M}$ ：针对每个单元构造最近点投影映射的局部插值多项式 $\pi \quad T \in \mathcal{T}_h^1$，其中 $\mathcal{T}_h^1$表示 $\mathcal{M}$的相容三角剖分。

本文的贡献有两点。首先，我们给出了光滑闭曲面的参数化方法，从而能够基于离散三角剖分对曲面积分进行数值近似。具体而言，这近似于提供一个分解$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ 为互不重叠的区域 $V_i$，这些区域表示为正则映射的像，见图（1）

$$\psi_i : \sigma \longrightarrow V_i \subseteq \mathcal{M}\,, \tag{1.1}$$

其中， $\sigma$ 是定义为 $\sigma := \{(s,\ t)\ \ 0 \le s \le 1,\ \ 0 \le t \le 1 - s\}$ 中的参考单纯形。

因此，曲面积分问题变为:

$$\int_{\mathcal{M}} f dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} f dS = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_0^{1-s} f\big(\psi_i(s,t)\big) g_i(s,t) ds dt\,, \tag{1.2}$$

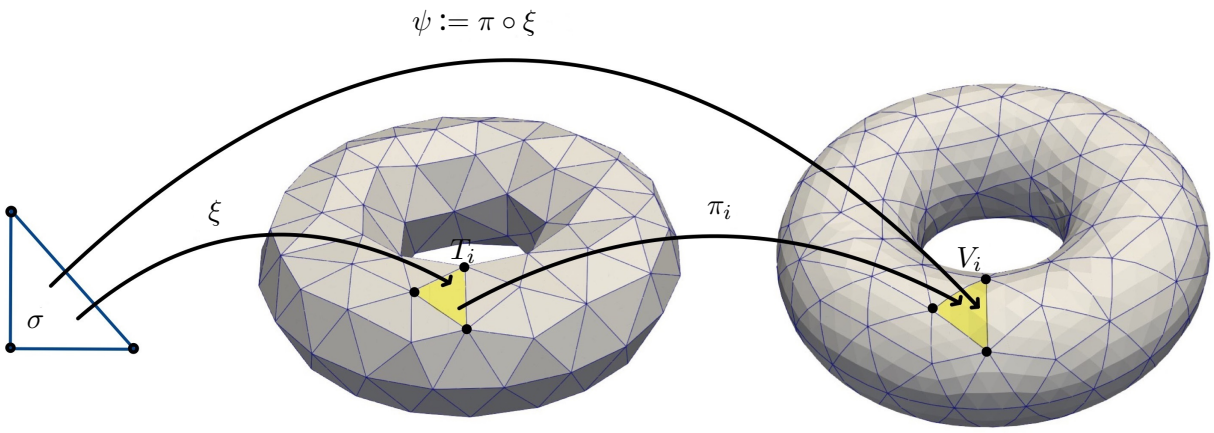



图1：光滑曲面参数化的表示，其中每个区域 $V_i$ 构成一个曲边三角形。

其中 $g_i(s,\ t) = \sqrt{\det(J^T J)}$，$J = [\partial_s \psi_i(s,\ t)\ \partial_t \psi_i(s,\ t)]$ 以及 $\partial_s \psi_i(s,\ t)\ \partial_t \psi_i(s,\ t)$分别表示 $\psi_i$ 对 $s$ 和 $t$的偏导数。我们拟用次数为 $k \in \mathbb{N}$的多项式来近似函数 $f$ 和每个参数化 $\psi_i$ 。因此，通过数值计算以下内容来近似该积分

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_0^{1-s} Q_{f,k}\big(\psi_i(s,t)\big)\tilde{g}_i(s,t)dsdt\,, \tag{1.3}$$

其中 $\tilde{g}_i(s,\ t) = \sqrt{\det(\tilde{J}^T \tilde{J})}$，其中 $J = [\partial_s Q_{\psi_i,k}(s,\ t)\ \partial_t Q_{\psi_i,\ k}(s,\ t)]$, 和 $Q_{\psi_i,\ k}$ 分别表示逼近映射 $\psi_i$的 $k-$ 次多项式，而 $Q_{f,\ k}$ 是逼近被积函数 $f$的 $k-$ 次多项式。

我们研究工作的第二部分受到 Ray 等人近期研究结果的启发。 [RWJG12], 他们将稳定化的最小二乘逼近、基于线性形函数的混合过程以及高次数求积公式结合起来，形成了一种用于在离散曲面上积分的方法。该方法的精度阶为 $\mathcal{O}\left(h^k + h^5\right)$ 其中 $k$ 表示多项式次数， $h > 0$ 表示网格尺寸（[RWJG12], 定理 1）。根据他们的数值实验，他们观察到，偶次多项式表现出的收敛率高于其理论预测。本文旨在阐明这一现象，并借助新的数值实验（第4节）和一个新定理 3.3，加深我们对该现象的理解；该定理还详细分析了在离散三角剖分曲面上积分时产生的误差。

本文结构如下。第2节对 [PS22]中引入的曲面参数化给出数学描述。在第3节中，我们利用该方法分析误差，并说明为何偶次多项式表现出更高的收敛速率。第4节通过一些数值算例总结我们的研究结果，并提出一种克服原方法部分缺点的替代方法。用于复现本文结果的代码已汇总并发布于代码仓库 https://github.com/zavala92/code_paper。

## 2 闭曲面的多项式逼近

设 $\mathcal{M}$ 为一个光滑连通可定向闭超曲面；这里所说的光滑超曲面，是指一个 C∞拓扑流形，它满足第二可数性、豪斯多夫性，并且局部欧氏维数为 2，且嵌入于维数为 3 的环境空间中。根据 Jordan–Brouwer 分解定理 [Lim88] 将 $\mathcal{M}$ 划分为内部区域和外部区域，我们将 $\mathbb{R}^3$ 记为到 $\mathcal{M}$ 的有符号距离函数，并规定其方向使得 $d > 0$ 在外部、 $d < 0$ 在 $\mathcal{M}$的内部。将 $\mathcal{M}$ 的外单位法向量记为 $n(x) = \nabla d(x)$，其中 $\nabla$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的标准梯度（详见 [Dem09] ）。给定 $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$，对于每个点 $x \in \mathcal{M}$，切空间 $T_x\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$是一个线性子空间。 $\mathcal{M}$ 的切空间的不交并称为 $\mathcal{M}$的切丛：

$$T\mathcal{M} := \amalg_{x\in\mathcal{M}} T_x\mathcal{M} = \{(x, y) \,|\, x \in \mathcal{M} \,\text{and}\, y \in T_x\mathcal{M}\}.$$

$\mathcal{M}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中 $x$ 处的法空间是切空间 $T_x\mathcal{M}$的正交补，即$N_x\mathcal{M} = \left(T_x\mathbb{R}^3\right)^{\perp}$. 法丛是 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 中的一个三维光滑嵌入子流形，

$$N\mathcal{M} := \amalg_{x\in\mathcal{M}} N_x\mathcal{M} = \{(x, z) \,|\, x \in \mathcal{M} \,\text{and}\, z \in N_x\mathcal{M}\}.$$

设 $\delta : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个正的连续函数。考虑法丛的以下开管状邻域：

$$N_\delta = \{(x, y_x) \mid \|y_x\| < \delta\,(x)\},$$

其中 $y_x$ 是附着于 $x$处的法向量。映射 $\mathcal{F}\colon N\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3\,(x, y) \mapsto x + y$ 是光滑的，并且存在一个 $\delta$ 使得其限制 $\mathcal{F}|_{N_\delta}$ 成为到其像 [Lee13]上的微分同胚。因此，$\mathcal{N}_\delta = \mathcal{F}(N_\delta)$ 是 3–维的开光滑嵌入子流形，属于 $\mathbb{R}^3$ ，并构成 $\mathcal{M}$的管状邻域。

我们假设存在一个欧几里得三维空间中的多面体曲面 $\mathcal{M}_h$ ，它被定义为一个与 $\mathcal{M}$同胚的紧子集 $\mathcal{M}_h \subseteq \mathbb{R}^3$ 。这个离散曲面由有限多个三角形组成，其顶点位于 $\mathcal{M}$中，从而确保每条边都包含在某条（仿射）直线中，且每个面都包含在某个（仿射）平面中：

$$\mathcal{M}_h = \bigcup_{i=1}^{n} T_i, \quad \mathcal{T}_h^1 = \bigcup_{i=1}^{n} \{T_i\},$$

其中，每个三角形 $T_i$ 都参数化在一个参考单形上， $\mathcal{T}_h^1$ 是由平坦三角形组成的集合，其网格尺寸为 $h = \max^{T_i\in\mathcal{T}_h^1} \operatorname{diam}(T_i)$。如果对任意$T_i$， $T_j \in \mathcal{T}_h^1$，其中 $T_i \neq T_j$的交集 $T_i \cap T_j$要么为空，要么是 $T_i$ $(k < 2)$ 的一个真 k 维子单形，则称集合 $\mathcal{T}_h^1$为相容三角剖分。假设 $\mathcal{M}_h$ 包含于管状邻域 $\mathcal{N}_\delta$中。在这些条件下，我们定义一个唯一的非线性最近点投影映射：

$$\pi : \mathcal{N}_\delta \supseteq \mathcal{M}_h \longrightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

形式为

$$\pi\,(x) = x - d\,(x)\, n\,(x)\ ,$$

它将每个 $x \in \mathcal{M}_h$ 映射到 $\mathcal{M}$上最近的点，使得 $(x - \pi(x)) \perp T_{\pi(x)}\mathcal{M}, \quad \forall x \in \mathcal{M}_h$。我们假设 $\mathcal{N}_\delta$ 还具有以下性质：对于每个点 $x \in \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{N}_\delta$ ，都存在唯一一点$\pi(x)$，它位于 $\mathcal{M}$ 上，且使到 $\mathcal{M}$ 的距离 $x$最小。换言之，最近点投影 (2.1) 的计算是一个局部极小值问题 [BV21] ，具体如下：

$$\pi : \mathcal{M}_h \ni x \mapsto \underset{y\in\mathcal{M}}{argmin}\, \|y - x\|\,, \tag{2.2}$$

其中，非线性投影将点 $x \in \mathcal{M}_h$ 映射到 $\mathcal{M}$ 上距离 $x$最近的点。

标准曲面积分方法的精度仅限于一阶或二阶，这是因为它们对曲面几何和被积函数都采用了分片线性近似。要获得高阶精度，我们必须对曲面的几何形状和被积函数都构造高阶近似。

基于 [PS22] ，现在我们给出一个曲面 $\mathcal{M}_h^k$的构造，它在局部通过参考单纯形上的多项式参数化 $\sigma$ ，其次数为 $k$，并插值于光滑曲面 $\mathcal{M}$。如前所述，我们首先考虑光滑曲面 $\mathcal{M}_h$ 的一个分片平面三角剖分，其顶点位于 $\mathcal{M}$上。为简化记号，省略变换映射（1.1）和 $\mathcal{M}_h$ 的三角剖分中的下标。对于任意三角形 $T \in \mathcal{T}_h^1$，其顶点为 $q_1$、$q_2$、$q_3 \in \mathbb{R}^3$，我们定义如下映射

$$\xi : \sigma \longrightarrow T, \quad q_i = \xi\left(\hat{p}_i\right), \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \xi(s,t) = q_1 + \big(q_3 - q_1\big)s + \big(q_2 - q_1\big)t$$

它是一个仿射线性参数化，将 $\sigma$ 中的每个顶点$\hat{}p_i$ 映射到 $T.$ 中的顶点 $q_i$ 。我们用 $\bar{q}_i = \xi(\hat{}p_i)$表示 $\sigma$ 中非顶点节点在单纯形 $T$上的像，其中 $N(2,k)$是向量空间$\mathcal{P}_{2,k}(\sigma)$中次数为 $k$的二元多项式的维数。设 $\mathcal{L}_1^k(\hat{}p) \quad \mathcal{L}_2^k(\hat{}p) \ldots, \mathcal{L}_{N(2,k)}^k(\hat{}p)$为 $\sigma$ 上与节点$\hat{}p_1, \ldots \hat{}p_{N(2,k)}$对应的次数为 $k$ 的局部拉格朗日基函数。令

$$p_i := \pi\left(\bar{q}_i\right) = \big(\pi \circ \xi\big)\left(\hat{p}_i\right) = \psi\left(\hat{p}_i\right), \quad \text{where} \quad \psi := \pi \circ \xi, \quad 3 < i \leq N(2,n)$$

并定义 $Q_{\psi,k}$ 为映射 $\psi$的 $k$–阶多项式插值 :

$$\mathcal{I}_k : C^0\big(\sigma, \mathbb{R}\big) \longrightarrow P_k(\sigma), \quad \psi \mapsto Q_{\psi,k}, \quad Q_{\psi,k}\left(\hat{p}\right) := \sum_{i=1}^{N(2,n)} p_i \mathcal{L}_i^k\left(\hat{p}\right) \tag{2.3}$$

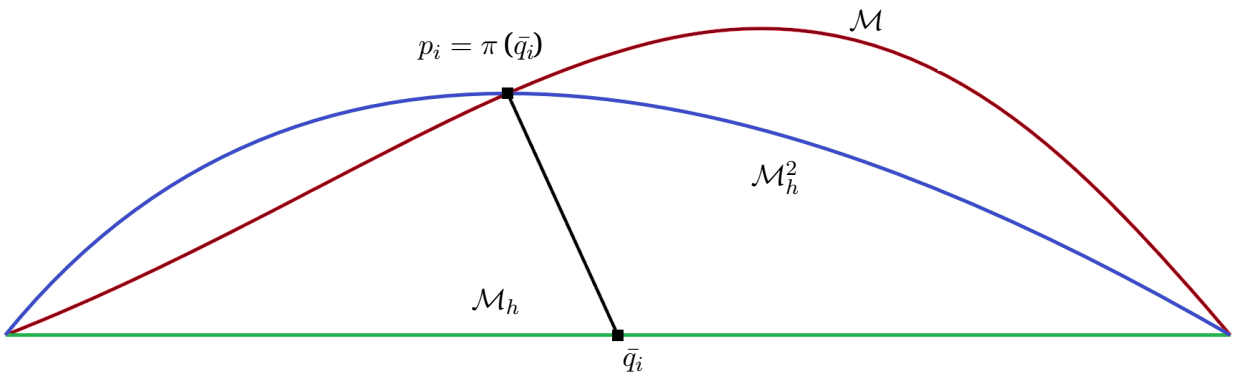
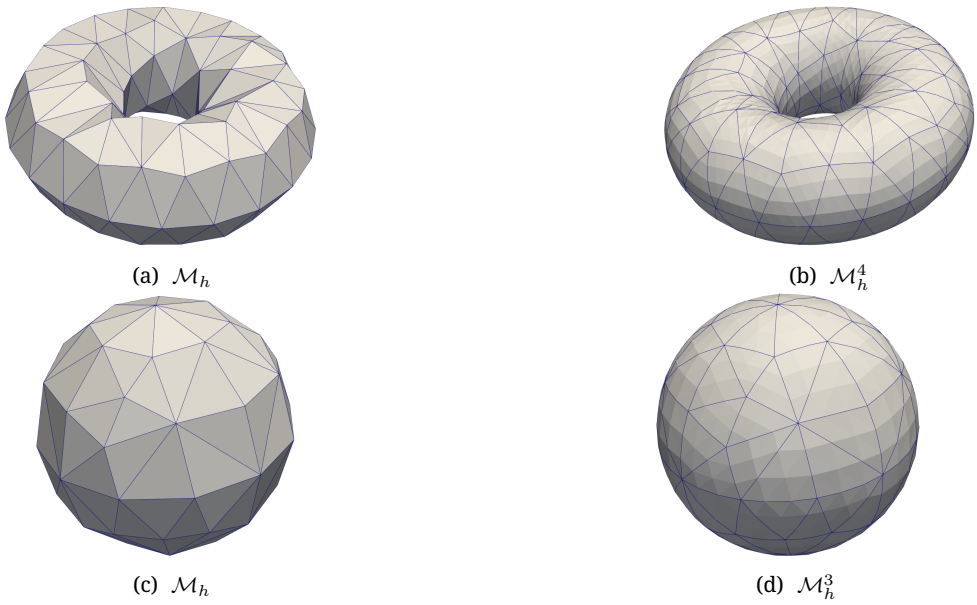



图2：光滑曲面 $\mathcal{M}_h^2$（蓝线）的二阶近似构造。图中展示了一个“基础”三角剖分 $\mathcal{M}_h$（绿线）的单纯形。插值节点（此处为一条边的中心 $\bar{q}_i$）沿投影线（灰线）通过映射 $\pi$投影到光滑曲面 $\mathcal{M}$（红线）上。随后，对投影后的节点 $\pi(\bar{q}_i)$以及 $\mathcal{M}_h$ 的顶点进行插值，得到光滑曲面 $\mathcal{M}_h^2$的二阶近似。

Now,

$$Q_{\psi,k} : \sigma \to \tilde{T}^k := Q_{\psi,k}\big(\sigma\big)$$

通过对点 $p_i \in \mathcal{M}$ 使用拉格朗日多项式$\mathcal{L}_1^k(\hat{}p) \quad \mathcal{L}_2^k(\hat{}p) \ldots, \mathcal{L}_{N(2,k)}^k(\hat{}p)$ . 进行插值，定义多项式映射 $Q_{\psi,k}$ 。因此，对于每个单纯形 $T \in \mathcal{T}_h^1$，我们计算投影 $\pi(\bar{q}_i)$ 并



(a) $\mathcal{M}_h$ (b) $\mathcal{M}_h^4$

(c) $\mathcal{M}_h$ (d) $\mathcal{M}_h^3$

图 3：拉格　　朗日参数化的环面和平面球面，使用顶点和边上的等距节点。

定义等参单纯形 $\tilde{T}^k$，方法是对投影后的等距节点的坐标进行 $k$ 阶拉格朗日插值（见图 (2)）。此外，如果基础三角剖分 $\mathcal{T}_h^1$ 足够精细，那么映射 $Q_{\psi,k}$ 是一个微分同胚。对映射 $\psi$的插值多项式求导，得到：

$$\partial_s Q_{\psi,k}(\hat{p}) := \sum_{i=1}^{N(2,n)} p_i \partial_s \mathcal{L}_i^k(\hat{p}), \quad \partial_t Q_{\psi,k}(\hat{p}) := \sum_{i=1}^{N(2,n)} p_i \partial_t \mathcal{L}_i^k(\hat{p}). \tag{2.4}$$

变换的雅可比行列式通过方程（2.4）计算。已知$Q_{\psi,\ k}$ 是一个微分同胚 $\forall T \in \mathcal{T}_h^1$，则对不重叠的映射后的单元求并：

$$\mathcal{M}_h^k := \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h^1} Q_{\psi,k}(T) = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h^1, \hat{p}\in\sigma} \sum_{i=1}^{N(2,n)} \pi\big(\xi(\hat{p}_i)\big)\mathcal{L}_i^k(\hat{p}). \tag{2.5}$$

因此，我们成功得到了连续曲面 $k$的 次离散近似 $\mathcal{M}_h^k$ $\mathcal{M}$。图（3）展示了将此过程应用于环面和球面的示意图。在 $k=1$这一特定情形下，我们将离散近似记为 $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_h^1$。

## 3 积分精度

本节将证明主定理：以其 $k$–阶多边形近似 $\mathcal{M}_h^k$ 替代 $\mathcal{M}$ 时的积分精度，并说明网格中的对称三角形与偶次多项式相结合可提高全局误差。这引出了以下定义。

**定义3.1**（对称三角形）。给定一组三角形 $\mathcal{T}_h^1$ [Rup95]，一对全等三角形 $T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3}$，$T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5} \in \mathcal{T}_h^1$如图（4）所示，若它们满足以下性质，则称其关于公共顶点$\mathbf{x}_1$, 对称

$$(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) = -(\mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_1), \quad (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = -(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1). \tag{3.1}$$

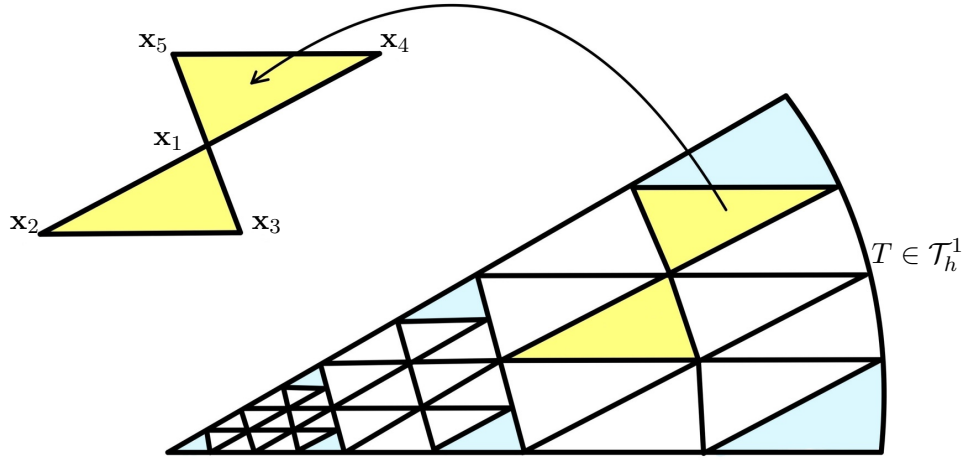



图4：示意图　　二分细化以及从三角剖分 $\mathcal{T}_h^1$中得到的一对对称三角形。

传统上，三角剖分网格 $\mathcal{T}_h^1$的三角剖分细化所采用的具体技术通常被认为并不重要，只要网格尺寸 $h \longrightarrow 0$ 为 $n \longrightarrow \infty$即可。然而，考虑到积分过程的影响后，情况便更为复杂。选择合适的三角剖分类型，可能会意外地抵消误差。现在，考察一个相容三角剖分 $\mathcal{T}_h^1$，我们使用二分细化将每个三角形 $T \in \mathcal{T}_h^1$细分为四个较小的三角形，具体做法是用直线连接其各边的中点。新单元彼此全等，且与 $T$相似。重复进行二分细化$m-$ 次后，该层的三角形总数约为 $\mathcal{O}$（$2^{2m}$）。这种细化方式的一个优点是，每一组网格点都包含前一层的网格点。在此细化过程中，我们会得到大小各异的三角形单元。例如，在图4中，可以看到三种大小不同的三角形单元。

设 $\mathcal{C}_m$，$m \in \mathbb{N}$ 表示 $T \in \mathcal{T}_h^1$ 中在第 $m$个细化层级上大小相等的三角形集合，并令 $n_m$ 表示该集合中三角形的数量，则可写为

$$\mathcal{C}_m = \bigcup_{i=1}^{n_m} \{T^i_{h(\frac{1}{2})^m}\}, \text{ where } h = \operatorname{diam}(T).$$

例如，根据图 4中的示意图，可得

$$\mathcal{C}_0 = T,\ \mathcal{C}_1 = \bigcup_{i=1}^{n_1} \{T^i_{(\frac{h}{2})}\},\ \mathcal{C}_2 = \bigcup_{i=1}^{n_2} \{T^i_{h(\frac{1}{2})^2}\},\ \mathcal{C}_3 = \bigcup_{i=1}^{n_3} \{T^i_{h(\frac{1}{2})^3}\},\ \mathcal{C}_4 = \bigcup_{i=1}^{n_4} \{T^i_{h(\frac{1}{2})^4}\}.$$

注意，在每个二分细化步骤中，至少有两个三角形不满足定义3.1。如图 4所示，这些三角形可根据其蓝色阴影辨认出来。因此，在 $T \in \mathcal{T}_h^1$经过第 $m$个细化层级后，对称三角形对的密度为 $\mathcal{O}$（$\tilde{n}_m$），而其余三角形的密度为 $\mathcal{O}\left(\sqrt{\tilde{n}_m}\right)$。其中，$\tilde{n}_m$ 表示 $T \in \mathcal{T}_h^1$经过第 $m$次细化后的三角形总数。

**注3.2**（对称三角剖分）。 任何经过前文所述细化过程的（光滑闭合）曲面三角剖分网格都称为对称三角剖分。

鉴于这些事实，我们陈述本文的主定理，表明对于对称三角剖分，偶数阶近似优于奇数阶近似。

**定理 3.3.** 设 $\mathcal{M}$ 是一个光滑闭嵌入超曲面，且 $f \in \mathbf{C}^{k+2}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$。考虑光滑曲面的一种分片线性三角剖分 $\mathcal{M}_h$，其网格尺寸为 $h$，且其顶点位于 $\mathcal{M}$ 上；设 $\mathcal{M}_h^k$ 是通过对 $\pi \in \mathbf{C}^{k+3}\left(\mathcal{M}_h, \mathbb{R}^3\right)$ 进行局部拟合构造的光滑曲面的 $k-$ 阶近似。考虑一种对称三角剖分，其中包含 $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}\left(h^{-2}\right)$ 个对称三角形，而非对称三角形的数量有界于 $\mathcal{O}(\sqrt{n}) = \mathcal{O}\left(h^{-1}\right)$。那么 $-$

$$\left|\int_{\mathcal{M}} f\, dS - \int_{\mathcal{M}_h^k} Q_{f,k}\, dS\right| \leq \begin{cases} Ch^{k+2}, & k \equiv 0 \ (mod\ 2) \\ Ch^{k+1}, & k \equiv 1 \ (mod\ 2), \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $Q_{f,k}: \mathcal{M}_h^k \to \mathbb{R}$ 是一个近似被积函数 $f$ 的 $k-$ 阶多项式。

在着手证明定理3.3之前，我们需要三个引理。

**引理 3.4**。 设 $T$ 是 $\mathcal{T}_h^1$ 中的一个三角形，并假设 $\psi \in \mathbf{C}^{k+1}(T)$ 且 $k \geq 0$，则有

$$\|\psi - Q_{\psi,k}\|_{L^\infty(T)} \leq ch^{k+1} \max_{l+p+q=k+1}^{l,p,q\geq 0} \max_{(x,y,z)\in T} \left|\frac{\partial^{k+1}\psi(x,y,z)}{\partial x^l \partial y^p \partial z^q}\right| \tag{3.3}$$

其中 $h = diam(T)$。常数 $c$ 取决于 $k$，但与 $\psi$ 和 $T$均无关 .

证明。 为了证明这个引理，我们将使用多变量泰勒公式。记为$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$，其中 $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2|$, $h := (h_1, h_2) = (s - 0, t - 0)$ 且 $\partial_{\alpha_1} = \partial_s$, $\partial_{\alpha_2} = \partial_t$.首先，考虑映射 $\psi$ 的 $k-$ 阶插值

$$Q_{\psi,k}(\hat{p}) := \sum_{i=1}^{N(2,n)} p_i \mathcal{L}_i^k(\hat{p}).$$

利用泰勒公式在点 (0,0) 附近对 $\psi$ 展开，我们得到:

$$\psi(\hat{p}) = \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{\partial^\alpha}{\alpha!}\psi(0) h^\alpha\right) + \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-\mu)^k \frac{d^{k+1}\psi(s\mu, t\mu)}{d^{k+1}\mu} d\mu. \tag{3.4}$$

记 $H(\hat{p}) = \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-\mu)_k \frac{d^{k+1}\psi(s\mu,\ t\mu)}{d^{k+1}\mu}\ d\mu$，通过使用阶数为 $k$ 的多项式对方程（3.4）中的每一项进行插值，并利用第一项的插值是精确的这一事实，因为它是一个次数为 $\leq k$ 的多项式，即

$$\mathcal{I}_k \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{\partial^\alpha}{\alpha!}\psi(0) h^\alpha\right) = \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{\partial^\alpha}{\alpha!}\psi(0) h^\alpha\right), \tag{3.5}$$

我们得到

$$Q_{\psi,k}(\hat{p}) = \sum_{|\alpha|=k} \left(\frac{\partial^\alpha}{\alpha!}\psi(0) h^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{N(2,n)} H(\hat{p}_i) \mathcal{L}_i^k(\hat{p}). \tag{3.6}$$

将式（3.6）从式（3.4）中相减，得到

$$\psi(\hat{p}) - Q_{\psi,k}(\hat{p}) = H(\hat{p}) - \sum_{i=1}^{N(2,n)} H(\hat{p}_i) \mathcal{L}_i^k(\hat{p}). \tag{3.7}$$

式（3.7）的右端可以写成

$$H\left(\hat{p}\right)-\sum_{i=1}^{N(2,n)}H\left(\hat{p}_i\right)\mathcal{L}_i^k\left(\hat{p}\right)=\frac{1}{k!}\int_0^1(1-\mu)^k E\left(\mu;s,t\right)d\mu, \tag{3.8}$$

其中， $E(\mu;s,\ t)$ 具有以下形式

$$E\left(\mu;s,t\right):=\frac{d^{k+1}\psi\left(s\mu,t\mu\right)}{d^{k+1}\mu}-\sum_{i=1}^{N(2,n)}\mathcal{L}_i^k\left(\hat{p}\right)\frac{d^{k+1}\psi\left(s_i\mu,t_i\mu\right)}{d^{k+1}\mu}. \tag{3.9}$$

需要注意的是，公式（3.7）的左端受到项$E(\mu;s,\ t)$行为的影响，而该项本身又受到 $\frac{d^{k+1}\psi\ (s\mu,\ t\mu)}{d^{k+1}\mu}$ 的影响。对于 $k=0$，我们有

$$\max_{0\leq\mu\leq1,\,\hat{p}\in\sigma}\left|\frac{d\psi\left(s\mu,t\mu\right)}{d\mu}\right|\leq ch\max\left\{\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L^\infty},\left\|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\|_{L^\infty},\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L^\infty}\right\}, \tag{3.10}$$

其中

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L^\infty}:=\max_{(x,y,z)\in T}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|$$

对于 $\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$\frac{\partial\psi}{\partial z}$，情况类似。沿用对 $\psi$ 的高阶导数进行推理，我们得到

$$\max_{0\leq\mu\leq1,\,\hat{p}\in\sigma}\left|\frac{d^{k+1}\psi\left(s\mu,t\mu\right)}{d^{k+1}\mu}\right|\leq ch^{k+1}\max\left\{\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L^\infty},\left\|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\|_{L^\infty},\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L^\infty}\right\}. \tag{3.11}$$

利用（3.8），得到

$$H\left(\hat{p}\right)-\sum_{i=1}^{N(2,n)}H\left(\hat{p}_i\right)\mathcal{L}_i^k\left(\hat{p}\right)=\mathcal{O}\left(h^{k+1}\right). \tag{3.12}$$

将公式（3.7）与公式（3.12）结合，得到公式（3.3）。 □

接下来，我们回顾以下引理。

**引理 3.5** ([Chi93])。 设 $k$ 为一个偶整数。设 $\psi(\hat{}p)\in\mathcal{P}_{k+1}$ 为$\sigma$上的 $k+1$ 次多项式，且设 $Q_{\psi,k}(\hat{}p)$ 为其 $k$次插值多项式。那么，对于每个 $\hat{}p\in\sigma$

$$\int_\sigma\partial_s\left(\psi\left(\hat{p}\right)-Q_{\psi,k}\left(\hat{p}\right)\right)dsdt=0,\quad\int_\sigma\partial_t\left(\psi\left(\hat{p}\right)-Q_{\psi,k}\left(\hat{p}\right)\right)dsdt=0. \tag{3.13}$$

**引理 3.6**。 设 $\mathcal{M}$ 为光滑闭超曲面，并考虑光滑曲面 $\mathcal{M}$ 上的分片线性三角剖分 $\mathcal{M}_h$，其网格尺寸为 $h$ 。设 $\mathcal{M}_h^k$ 为使用 $\pi\in\mathbf{C}^{k+3}\left(\mathcal{M}_h,\mathbb{R}^3\right)$的局部拟合构造的光滑曲面的 $k-$阶近似。考虑由 $\mathcal{O}(n)=\mathcal{O}\left(h^{-2}\right)$ 个对称三角形组成的对称三角剖分，而非对称三角形的数量有界于 $\mathcal{O}(\sqrt{n})=\mathcal{O}\left(h^{-1}\right)$。那么

$$\left|\int_{\mathcal{M}}dS-\int_{\mathcal{M}_h^k}dS\right|\leq\begin{cases}Ch^{k+1}, & k\equiv1\ (mod\ 2)\\ Ch^{k+2}, & k\equiv0\ (mod\ 2).\end{cases} \tag{3.14}$$

证明。 首先，将式（3.14）中的每一项都写在一个参考单纯形上

$$\int_{\mathcal{M}} dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma} g_i dsdt, \quad \int_{\mathcal{M}_h^k} dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma} \tilde{g}_i dsdt. \tag{3.15}$$

与引理3.4中相同，我们得到

$$\psi(\hat{p}) - Q_{\psi,k}(\hat{p}) = \mathcal{R}_{k+1} + \mathcal{R}_{k+2} + \mathcal{O}\left(h^{k+3}\right), \tag{3.16}$$

其中

$$\mathcal{R}_{k+1} := \sum_{|\alpha|=k+1} \left( \frac{\partial^\alpha}{\alpha!} \psi(0) h^\alpha - \sum_{i=1}^{N(2,n)} h^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\alpha!} \psi(0) \mathcal{L}_i^k(\hat{p}) \right)$$

$$\mathcal{R}_{k+2} := \sum_{|\alpha|=k+2} \left( \frac{\partial^\alpha}{\alpha!} \psi(0) h^\alpha - \sum_{i=1}^{N(2,n)} h^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\alpha!} \psi(0) \mathcal{L}_i^k(\hat{p}) \right).$$

类似地，可以展开 $\partial_{\alpha_1}\psi(\hat{}p)\ \partial_{\alpha_2}\psi(\hat{}p)$的偏导数误差，这相当于对式（3.16）求导。因此，我们有

$$\partial_{\alpha_1}\psi(\hat{p}) - \partial_{\alpha_1} Q_{\psi,k}(\hat{p}) = \partial_{\alpha_1}\mathcal{R}_{k+1} + \partial_{\alpha_1}\mathcal{R}_{k+2} + \mathcal{O}\left(h^{k+2}\right) \tag{3.17}$$

$$\partial_{\alpha_2}\psi(\hat{p}) - \partial_{\alpha_2} Q_{\psi,k}(\hat{p}) = \partial_{\alpha_2}\mathcal{R}_{k+1} + \partial_{\alpha_2}\mathcal{R}_{k+2} + \mathcal{O}\left(h^{k+2}\right). \tag{3.18}$$

利用泰勒定理，并在 $(s=0, t=0)$ 处展开，我们得到

$$\begin{aligned} g_i - \tilde{g}_i &:= \sqrt{\det(J^T J)} - \sqrt{\det(\tilde{J}^T \tilde{J})} \\ &= \mathcal{E}\left(h^{k+2}; (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j), (\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}_j)\right) + \mathcal{E}\left(h^{k+3}; (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j), (\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}_j)\right) + \mathcal{O}\left(h^{k+4}\right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中 $\mathcal{E}\left(h^{k+2}; (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}j), (\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}j)\right)$ 和 $\mathcal{E}\left(h^{k+3}; (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}j), (\mathbf{x}_\ell - \mathbf{x}j)\right)$描述了 $h$ 中阶数为 $k+2, k+3$ 的各项集合，其系数由带有相应指标 $j, \ell$ 和 $k$ 的三角形顶点组合而成。例如，对于三角形 $T_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3}$，系数由 $(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)$ 和 $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ 组合而成，这对于 $\mathcal{E}(k+2)$ 和 $\mathcal{E}(k+3)$ 均成立。从上述计算可知，$|g_i - \tilde{g}_i|$ 至少为 $\mathcal{O}\left(h^{k+2}\right)$阶，这也证实了式（[RWJG12], 定理 7）中得到的结果。不过，若假设三角剖分网格由对称三角形构成，则可以进一步改进这一结果。因此，将式 (3.19) 在参考单纯形上积分，我们有

$$\int_{\sigma} (g_i - \tilde{g}_i) dsdt = \int_{\sigma} \mathcal{E}(k+2) dsdt + \int_{\sigma} \mathcal{E}(k+3) dsdt + \mathcal{O}\left(h^{k+4}\right). \tag{3.20}$$

现在，如果 $k$ 为奇数，则得到

$$\int_{\sigma} \mathcal{E}(k+2) dsdt \neq 0$$

那么，对于每个 $T \in \mathcal{T}_h^1$，式（3.20）的左侧至少为 $\mathcal{O}\left(h^{k+2}\right)$ 阶。将式（3.20）应用于一对对称三角形 $T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3}$ 和 $T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5}$，我们得到

$$\int_{\sigma} (g_i - \tilde{g}_i) dsdt \Big|_{T_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3}} = \int_{\sigma} \mathcal{E}(k+2) dsdt + \int_{\sigma} \mathcal{E}(k+3) dsdt + \mathcal{O}\left(h^{k+4}\right) \tag{3.21}$$

$$\int_{\sigma}\left(g_i-\tilde{g}_i\right)dsdt\Big|_{T_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5}}=\int_{\sigma}\mathcal{E}\left(k+2\right)dsdt+\int_{\sigma}\mathcal{E}\left(k+3\right)dsdt+\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right). \tag{3.22}$$

由式（3.21）和式（3.22），我们有如下结果

$$\int_{\sigma}\left(g_i-\tilde{g}_i\right)dsdt=\int_{\sigma}\mathcal{E}\left(k+3\right)dsdt+\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right). \tag{3.23}$$

这是因为，式（3.21）和式（3.22）右端第一个被积函数由关于 $h$ 的 $k+2$ 阶项组成，其系数是三角形顶点的组合，因此每个被积函数都是奇函数。一般而言，对于三角形 $T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3}$，我们可以写成：

$$\mathcal{E}\left(h^{k+2};-\left(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1\right),-\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right)=-\mathcal{E}\left(h^{k+2};\left(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1\right),\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right). \tag{3.24}$$

同理，对于 $T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5}$

$$\mathcal{E}\left(h^{k+2};-\left(\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_1\right),-\left(\mathbf{x}_5-\mathbf{x}_1\right)\right)=-\mathcal{E}\left(h^{k+2};\left(\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_1\right),\left(\mathbf{x}_5-\mathbf{x}_1\right)\right). \tag{3.25}$$

利用性质（3.1）、式（3.24）和式（3.25），可得

$$\mathcal{E}\left(h^{k+2};\left(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1\right),\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right)+\mathcal{E}\left(h^{k+2};\left(\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_1\right),\left(\mathbf{x}_5-\mathbf{x}_1\right)\right)=0.$$

不等式（3.14）的第一部分是利用以下事实得到的：网格中对称三角形的数量 $\mathcal{M}_h$ 的阶为 $\mathcal{O}(n)$ $=\mathcal{O}\left(h^{-2}\right)$，而非对称三角形的数量有界于 $\mathcal{O}(\sqrt{n})=\mathcal{O}\left(h^{-1}\right)$，再结合式（3.20）和式（3.23）。

此时，我们注意到，如果 $k$ 为偶数，那么

$$\int_{\sigma}\mathcal{E}\left(k+2\right)dsdt=0.$$

这是由引理3.5 导致的，因为 $\mathcal{E}\left(k+2\right)$表示对$k+1$阶多项式进行积分时产生的误差。因此，我们有

$$\int_{\sigma}\left(g_i-\tilde{g}_i\right)dsdt=\int_{\sigma}\mathcal{E}\left(k+3\right)dsdt+\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right). \tag{3.26}$$

同样，将式(3.26)改写为关于一对对称三角形的形式，可得$T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3}$ 和$T_{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5}$

$$\int_{\sigma}\left(g_i-\tilde{g}_i\right)dsdt\Big|_{T_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3}}=\int_{\sigma}\mathcal{E}\left(k+3\right)dsdt+\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right) \tag{3.27}$$

$$\int_{\sigma}\left(g_i-\tilde{g}_i\right)dsdt\Big|_{T_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_4,\mathbf{x}_5}}=\int_{\sigma}\mathcal{E}\left(k+3\right)dsdt+\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right). \tag{3.28}$$

Now, 若 $k$ 为偶数且三角形成对对称，则其产生的误差为

$$\int_{\sigma}\left(g_i-\tilde{g}_i\right)dsdt=\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right). \tag{3.29}$$

这是因为当 $k$ 为偶数时，以下结论成立。

$$\mathcal{E}\left(h^{k+3};\left(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1\right),\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right)+\mathcal{E}\left(h^{k+3};\left(\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_1\right),\left(\mathbf{x}_5-\mathbf{x}_1\right)\right)=0.$$

与奇数情形一样，结合式（3.26）和式（3.29），可得到不等式（3.14）的第二部分。 □

现在我们可以证明定理3.3

定理 3.3 的证明。 与引理 3.6一样，将函数 $f$ 在点（0，0）附近利用泰勒公式展开，可得

$$f\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)-Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)=\mathcal{R}_{k+1}+\mathcal{O}\left(h^{k+2}\right), \tag{3.30}$$

其中 $\mathcal{R}_{k+1}$ 具有如下形式

$$\mathcal{R}_{k+1}:=\sum_{|\alpha|=k+1}\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\alpha!}f\left(0\right)h^{\alpha}-\sum_{i=1}^{N(2,n)}h^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}}{\alpha!}f\left(0\right)\mathcal{L}_{i}^{k}\left(\hat{p}\right)\right).$$

对等式 (3.30) 两边积分，得到

$$\int_{\sigma}\left(f\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)-Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\right)g_{i}dsdt=\int_{\sigma}\mathcal{R}_{k+1}g_{i}dsdt+\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right). \tag{3.31}$$

利用 $|g_i|=\mathcal{O}\left(h^2\right)$，右侧的积分项至少为 $\mathcal{O}\left(h^{k+3}\right)$ 阶。如果 $k$ 为偶数，由于存在对称三角形，右侧积分的第一项为 0，因此我们可以以 $\mathcal{O}\left(h^{k+4}\right)$ 阶精度计算左侧积分；而当 $k$ 为奇数时，有如下结果

$$\int_{\sigma}\left(f\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)-Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\right)g_{i}\,ds\,dt=\mathcal{O}\left(h^{k+3}\right). \tag{3.32}$$

假设 $\mathcal{M}_h^k$ 由三角形 $\tilde{T}^k$组成，即 $\mathcal{M}_h^k=\bigcup_{i=1}^n\tilde{T}_i^k$以及用 (1.1) $\mathcal{M}=\bigcup_{i=1}^n V_i$参数化的光滑闭曲面。则

$$\int_{\mathcal{M}}fdS=\sum_{i=1}^{n}\int_{V_i}fdS,\quad\int_{\mathcal{M}_h^k}Q_{f,k}dS=\sum_{i=1}^{n}\int_{\tilde{T}_i^k}Q_{f,k}dS. \tag{3.33}$$

让我们在参考单纯形上重写等式 (3.33)，求积公式在该单纯形上定义

$$\int_{\mathcal{M}}fdS=\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma}f\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)g_{i}dsdt,\quad\int_{\mathcal{M}_h^k}Q_{f,k}dS=\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma}Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\tilde{g}_{i}dsdt. \tag{3.34}$$

利用引理 3.6，可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{M}}fdS-\int_{\mathcal{M}_h^k}Q_{f,k}dS\right|&\leq\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma}\left(f\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)g_{i}-Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\tilde{g}_{i}\right)dsdt\right|\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{\sigma}\left(f\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)-Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\right)g_{i}+Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\left(g_{i}-\tilde{g}_{i}\right)dsdt\right|\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma}\left|\left(f\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)-Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\right)g_{i}\right|dsdt\\&+\int_{\sigma}\left|Q_{f,k}\left(\psi\left(\hat{p}\right)\right)\left(g_{i}-\tilde{g}_{i}\right)\right|dsdt\\&\leq\begin{cases}Ch^{k+2}, & k\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2)\\Ch^{k+1}, & k\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 2)\end{cases}\end{aligned}$$

□

对于最后一个不等式，我们使用了公式（3.31）和公式（3.32）。

# 4 结果与讨论

为了验证我们的发现，我们利用高斯-博内定理设计了测试 [PPCT01]，[Spi99]，针对一系列由以下方程给出的经典光滑闭曲面：

1) 椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，　$a$，　$b$，　$c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。 2) 环面 ( $(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2-4R^2(x^2+y^2)=0$，　$0<r<R\in\mathbb{R}$.3) 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，　$R\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

高斯曲率的解析表达式为

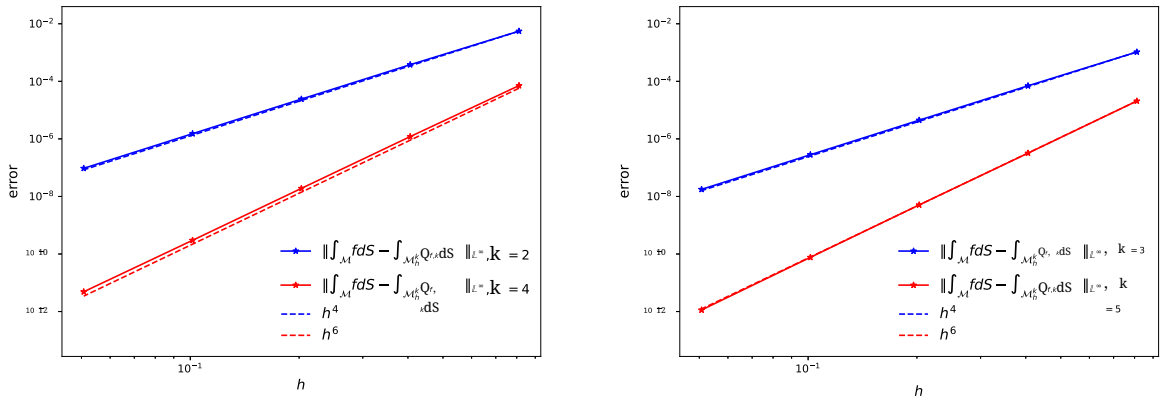
1) Ellipsoid　$K_{\text{Gauss}}=\frac{1}{(abc)^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^2}$，　$a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) 环面 $K_{\text{Gauss}}=\cos v\,(r\,R+r\cos v)$，其中我们使用环面坐标：

$$(x,y,z)=\big((R+r\cos\theta)\cos\varphi,(R+r\cos\theta)\sin\varphi,r\sin\theta\big),\ \varphi,\theta\in[0,2\pi).$$

3) 球面 $K_{\text{Gauss}}=\frac{1}{R^2}$，　$R\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。

在所有实验中，我们采用 Persson 和 Strang 的算法 [PS04] 生成德劳内三角剖分[1]，作为初始 $\mathcal{M}_h^1$ 曲面近似，并在每个三角形上采用高斯求积公式 $deg=12$，使用 32 个求积点 [Dun85]。



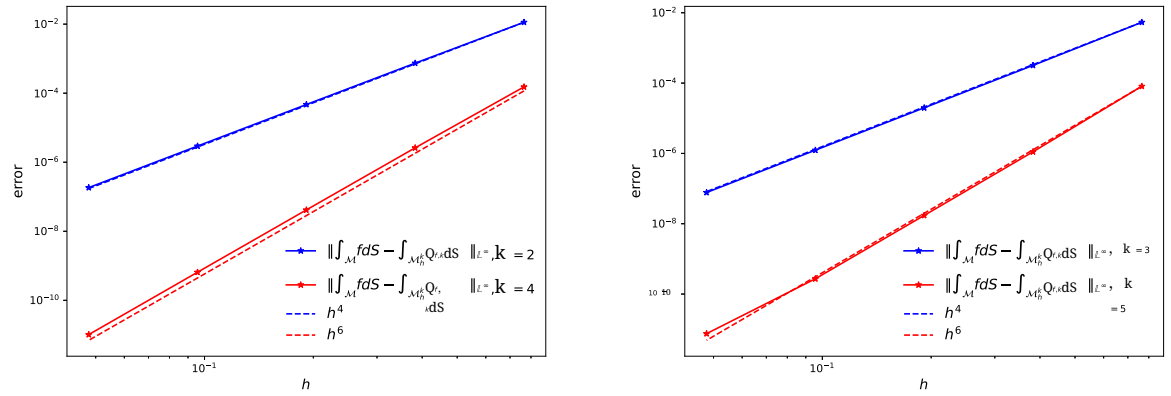

(a) 偶数阶　　(b) 奇数阶

图 5：使用半径为 $R=2$，　$r=1$ 的环面进行高斯曲率积分所得的相对误差，　$h^n$为理想收敛线。

在图 5 和图 6 中，我们展示了网格细化过程中的相对误差。为了计算相对误差，我们在流形上对高斯曲率进行积分，并将其与高斯-博内定理的预测值进行比较。图中所示的收敛速率与理论结果一致，从而证实了我们的理论结果。

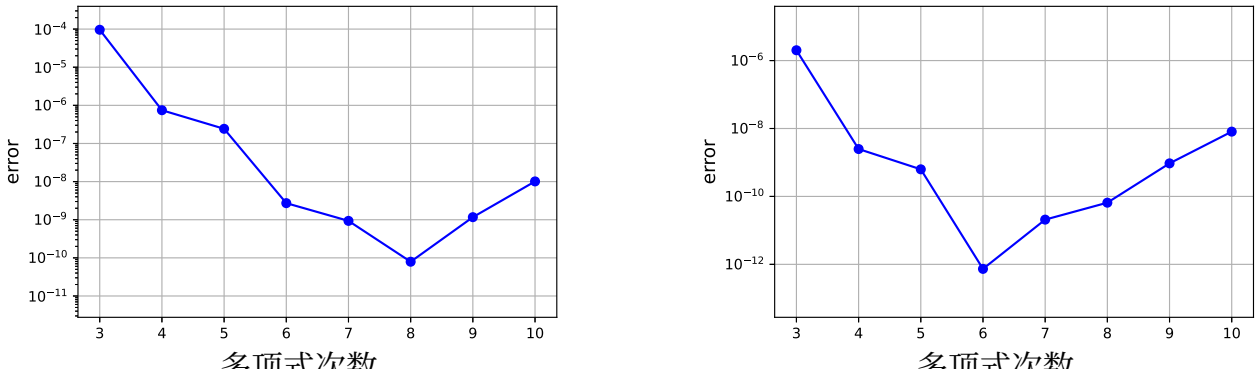
然而，正如图7所示，[PS22] 中介绍的方法存在一些局限性，会出现龙格现象。这是因为勒贝格常数 $\Lambda$ 对于等距点集呈指数增长 [MS92]。为减轻这一影响，我们提出了另一种方法。它是

[1] [GR09] 为网格生成提供了另一种可行方案。




(a) 偶数阶　　(b) 奇数阶

图 6：使用理想收敛线 $h^n$ 对单位球面上的高斯曲率进行积分所得的相对误差。




(a) 半径为 $R = 2,\ r = 1$ 的环面　　(b) $a = b = 1,\ c = 0.6$ 的椭球体。

图 7：分别使用 $N_\Delta = 2528,\ N_\Delta = 6152$ 对环面和椭球体上的高斯曲率进行积分所得的相对误差。

众所周知，在正映射下，三角形单元上的运算（例如插值、数值微分和求积）可以在参考正方形上进行。下面我们将陈述并证明一个定理，希望该定理能够为开发另一种强大的闭曲面数值积分方法铺平道路。在介绍该定理之前，我们首先回顾 [TIM63]（第 3 章）中的连续模：

给定 $\delta_1 \geq 0$ 和 $\delta_2 \geq 0$。连续函数 $f$ 的连续模表示为 $\omega(f;\ \delta_1,\ \delta_2)$，其定义如下：

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2) = \sup_{|x_1-x_2|\leq\delta_1,\, x_1,x_2\in[-1,1]} \ \sup_{|y_1-y_2|\leq\delta_2,\, y_1,y_2\in[-1,1]} |f(x_1,x_2) - f(y_1,y_2)|. \tag{4.1}$$

函数 $\omega(f;\ \delta_1,\ \delta_2)$ 是半加性的，即

$$\omega(\delta_1+\delta_2,\lambda_1+\lambda_2) \leq \omega(\delta_1+\lambda_1) + \omega(\delta_2+\lambda_2).$$

为解决龙格现象，我们建议使用切比雪夫–洛巴托节点 作为插值点。具体而言，在 $[-1,1]$的一维插值域内，我们将

我们这组新的插值点定义如下

$$\mathrm{Cheb}_n = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) : 0 \le k \le n \right\}.$$

这些点的勒贝格常数随 $n \to \infty$ 缓慢增长，可用以下表达式估算

$$\Lambda(\mathrm{Cheb}_n) = \frac{2}{\pi}\big(\log(n+1) + \gamma + \log(8/\pi)\big) + \mathcal{O}(1/n^2), \tag{4.2}$$

其中 $\gamma \approx 0.5772$ 是欧拉–马歇罗尼常数，参见 [Ber31、EZ66、Bru78]。为在正方形 $[-1,1]^2$ 上生成切比雪夫-洛巴托节点，我们考虑张量积 $\mathrm{Cheb}_n \times \mathrm{Cheb}n$，得到 $\Lambda(\mathrm{Cheb}_n \times \mathrm{Cheb}n) = \Lambda(\mathrm{Cheb}n)^2$ [CM18]。现在，我们可以陈述以下结果:

**定理 4.1**。 对于 $f \in \mathbf{C}^k\left([-1,1]^2\right)$，设 $Q_{f,n}(x,y)$ 为函数 $f$ 在切比雪夫-洛巴托节点 $\mathrm{Cheb}_n \times \mathrm{Cheb}n$上的插值多项式，则有如下估计

$$\|f(x,y) - Q_{f,n}(x,y)\|_{L^\infty([-1,1]^2)} \le \tilde{C}\ln^2(n)\, n^{-k}\left(\omega\left(\partial_x^k f(x,y); \frac{1}{n}, 0\right) + \omega\left(\partial_y^k f(x,y); 0, \frac{1}{n}\right)\right). \tag{4.3}$$

**备注 4.2**。 基于定理 4.1，在未来的工作中，我们计划结合多变量插值领域的最新进展 [HCHS17、HHCS18、HGM+20、HS18],，通过在适当选取的变换后切比雪夫-洛巴托节点上插值映射 $\psi$，提供一种能够抑制龙格现象的稳定方法。变换后的切比雪夫-洛巴托节点。

定理 *4.1*的证明。 我们考虑插值算子

$$\mathbf{I}_{[-1,1]^2} : \mathbf{C}^0\left([-1,1]^2, \mathbb{R}\right) \to \mathcal{P}_{2,n}$$

在切比雪夫–洛巴托节点 $\mathrm{Cheb}_n \times \mathrm{Cheb}n$ 上，其中 $\mathcal{P}_{2,n}$ 是最高次数为 $n$ 的二元多项式空间。其算子范数 $\|\mathbf{I}_{[-1,1]^2}\| = \Lambda(\mathrm{Cheb}n)^2 \in \mathcal{O}(\ln^2)$ 由勒贝格常数 [CM18] 给出。记 $Q^*_{f,n}(x,y)$ 为次数为 $n$. 的最佳多项式逼近。多项式的恒等定理给出 $Q^*_{f,n}(x,y) = \mathbf{I}_{[-1,1]^2}\left(Q^*_{f,n}(x,y)\right)$，利用 [HGM+20] 中的引理 7.4, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|f(x,y) - Q_{f,n}(x,y)\|_{L^\infty([-1,1]^2)} \\
&\le \left\|Q^*_{f,n}(x,y) - f(x,y)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)} + \left\|Q^*_{f,n}(x,y) - Q_{f,n}(x,y)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)} \\
&\le \left\|Q^*_{f,n}(x,y) - f(x,y)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)} + \left\|\mathbf{I}_{[-1,1]^2}\left(Q^*_{f,n}(x,y) - f(x,y)\right)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)} \\
&\le \left(1 + C_\Lambda \ln^2(n)\right)\left\|f(x,y) - Q^*_{f,n}(x,y)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

此时，多变量形式的杰克逊不等式以及模的半可加性[TIM63], 给出

$$\begin{aligned}
\left\|f(x,y) - Q^*_{f,n}(x,y)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)} &\le C\left(2^k n^{-k}\omega\left(\partial_x^k f(x,y); \frac{2}{n}, 0\right) + 2^k n^{-k}\omega\left(\partial_y^k f(x,y); 0, \frac{2}{n}\right)\right) \\
&\le C 2^{k+1} n^{-k}\left(\omega\left(\partial_x^k f(x,y); \frac{1}{n}, 0\right) + \omega\left(\partial_y^k f(x,y); 0, \frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

将不等式（4.5）与（4.4）结合，可得（4.3）。 □

根据杰克逊定理的多元推广 [BBL02],，我们得到以下结果。

**推论 4.3.** 设 $f \in \mathbf{C}^k\left([-1,1]^2\right)$，我们得到估计式

$$\left\|\partial_x f\left(x,y\right)-\partial_x Q_{f,n}\left(x,y\right)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)} \leq C\left(f;n\right)\ln^2\left(n\right)n^{-(k-1)} \tag{4.6}$$

类似地

$$\left\|\partial_y f\left(x,y\right)-\partial_y Q_{f,n}\left(x,y\right)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)} \leq C\left(f;n\right)\ln^2\left(n\right)n^{-(k-1)}, \tag{4.7}$$

其中，$C$ 是一个适当的常数（与 $n$ 有关），取决于 $f(x,y)$ 和 $k$.

**注** **释 4.4.** 如果 $f \in \mathbf{C}^k\left([-1,1]^2\right)$ 满足 Dini–Lipschitz判据，即

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\ln^2\left(n\right)\omega\left(f\left(x,y\right);\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=0\,.$$

那么，式（4.3）保证一致收敛

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|f\left(x,y\right)-Q_{f,n}\left(x,y\right)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)}=0.$$

此外，容易看出，对于 $f \in \mathbf{C}^k(T)$，有

$$\left\|f\left(x,y\right)-Q_{f,n}\left(x,y\right)\right\|_{L^\infty(T)} \leq c\left\|f\left(x,y\right)-Q_{f,n}\left(x,y\right)\right\|_{L^\infty([-1,1]^2)}=\mathcal{O}\left(n^{-k}\right). \tag{4.8}$$

我们预计，通过这项工作，可以开发出一种适用于闭曲面的高效数值积分方法。相关内容将在后续工作中探讨。

## 利益冲突声明

作者声明，他们并无已知的竞争性经济利益或可能影响本文所报告工作的个人关系。

## 致谢

我们由衷感 谢 Paul Breiding 提供了许多启发性的评论和有益的建议 .

Gentian Zavalani 和 Michael Hecht 的研究部分由高级系统理解中心（CASUS）资助。该中心由德国联邦教育与研究部（BMBF）资助，并由萨克森州科学、文化与旅游部（SMWK）使用税收资金资助，依据的是萨克森州议会批准的预算。

Elima Shehu 的研究由德国研究基金会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号为 445466444。

## 参考资料

[BBL02] Thomas Bagby、Len Bos 和 Norman Levenberg。多元同时逼近。构造逼近，18(4):569–577，2002。[Ber31] Serge Bernstein。关于在整个区间上通过其在 $(n+1)$ 个区间点处的值限制次数为 n 的多项式 $p_n(x)$ 的值。苏联科学院学报，7:1025–1050，1931。

[Bru78] L Brutman。关于多项式插值的勒贝格函数。SIAM 数值分析杂志，15(4):694–704，1978。[BV21] Paul Breiding 和 Nick Vannieuwenhoven。黎曼逼近问题的条件数。SIAM 优化杂志，31(1):1049–1077，2021 年 1 月。[Chi93] David Da-Kwun Chien。三维曲面上具有光滑核的积分方程的分片多项式配置。《积分方程与应用杂志》，5:315–44，1993。[CM18] Albert Cohen 和 Giovanni Migliorati。向下封闭多项式空间中的多元逼近。载于《当代计算数学——庆祝 Ian Sloan 80 岁生日》，第 233–282 页。施普林格，2018。[Dem09] Alan Demlow。曲面椭圆问题的高阶有限元方法与逐点误差估计。SIAM 数值分析杂志，47(2):805–827，2009。[Dun85] DA794241 Dunavant。三角形的高阶高效对称高斯求积公式。《工程数值方法国际期刊》，21(6):1129–1148，1985。[EZ66] H Ehlich 和 K Zeller。插值算子范数的计算。《数学年刊》，164(2):105–112，1966。[Geo98] Kurt Georg。边界元方法中的积分近似。SIAM 科学与统计计算杂志，12，1998 年 8 月。[GR09] Christophe Geuzaine 和 Jean-Fran˛cois Remacle。Gmsh：一种具有内置前后处理功能的三维有限元网格生成器。《工程数值方法国际期刊》，79(11):1309–1331，2009。[HCHS17] M Hecht、Bevan L. Cheeseman、Karl B. Hoffmann 和 Ivo F. Sbalzarini。一般多元多项式插值的二次时间算法。arXiv 预印本，arXiv:1710.10846，2017。[HGM+20] Michael Hecht、Krzysztof Gonciarz、Jannik Michelfeit、Vladimir Sivkin 和 Ivo F Sbalzarini。单值节点上的多元插值——克服维数灾难。arXiv 预印本，arXiv:2010.10824，2020。[HHCS18] Michael Hecht、Karl B. Hoffmann、Bevan L Cheeseman 和 Ivo F Sbalzarini。多元牛顿插值。arXiv 预印本，arXiv:1812.04256，2018。[HS18] Michael Hecht 和 Ivo F. Sbalzarini。高维空间中的快速插值与傅里叶变换。载于 K. Arai、S. Kapoor 和 R. Bhatia（编），《智能计算》。2018 年 IEEE 计算会议论文集，第 2 卷，《智能系统与计算进展》第 857 卷，第 53–75 页，英国伦敦，2018。施普林格·自然。[Lee13] John M Lee。光滑流形。载于《光滑流形导论》，第 1–31 页。施普林格，2013。[Lim88] Elon L. Lima。光滑超曲面的若尔当–布劳威尔分离定理。《美国数学月刊》，95(1):39–42，1988。[MS92] T. M. Mills 和 Simon Jeffrey Smith。等距节点上拉格朗日插值的勒贝格常数。《数值数学》，61:111–115，1992。

[PPCT01] L.M.A. Pressley, A. Pressley, M. Chaplain 和 J.F. Toland。《初等微分几何》。施普林格本科数学丛书。施普林格，2001 年。[PS04] Per-Olof Persson 和 Gilbert Strang。一个简单的 MATLAB 网格生成器。《SIAM评论》，46(2):329–345，2004 年。[PS22] Simon Praetorius 和 Florian Stenger。Dune-curvedgrid——一个用于曲面参数化的 DUNE 模块。《数值软件档案》，第 1 卷第 1 期，2022 年。[Rup95] J. Ruppert。用于高质量二维网格生成的 Delaunay 细化算法。《算法杂志》，18(3):548–585，1995 年。[RWJG12] Navamita Ray、Duo Wang、Xiangmin Jiao 和 James Glimm。离散曲面上的高阶数值积分。SIAM 数值分析杂志，50(6):3061–3083，2012 年。[Spi99] M. Spivak。《微分几何综合导论》。第 1 卷，《微分几何综合导论》。Publish or Perish, Incorporated，1999 年。[TIM63] A. TIMAN。《实变量函数逼近论》。《纯粹与应用数学国际专著丛书》。培格曼，1963 年。[YQ09] Pinghai Yang 和 Xiaoping Qian。一种计算分子相互作用力的通用精确方法。《胶体与界面科学杂志》，337(2):594–605，2009 年。