存在测量误差时 $\mathbb{S}^d$上的密度估计与回归分析

Jeong Min Jeon 和 Ingrid Van Keilegom

运筹学与统计研究中心

鲁汶大学，比利时

arXiv:2301.03000v1 [math.ST] 8 Jan 2023

摘要

本文研究在单位超球面 $\mathbb{S}^d$ 上观测到的污染数据的密度估计与回归分析，其中 $d \in \mathbb{N}$。我们的方法论和理论基于一般 $\mathbb{S}^d$上的调和分析。我们建立了新的非参数密度估计量和回归估计量，并研究其渐近性质，包括收敛速率和渐近分布。我们还基于估计量的渐近分布和经验似然技术，给出渐近置信区间。最后，我们介绍实现方面的实用细节以及数值研究结果。

关键词：超球面数据、测量误差、非参数密度估计、非参数回归

1 引言

涉及测量误差数据的统计分析一直是统计学中的一项难题。当某些变量因测量误差而无法被精确观测时，直接应用现有的、针对无误差变量设计的方法会导致错误的推断。为说明这一点，我们考虑一个简单情形：协变量 X 和响应变量 Y 均为实值。为了在点 x处估计回归函数 $m(x) = \mathrm{E}(Y|X = x)$，可以在每个点 x附近对 Y_i 应用“局部平滑”。例如，Nadaraya-Watson估计量 m 是对与落在每个点 x邻域内的 X_i相对应的 Y_i 取加权平均。这样做是合理的，因为与接近 x 的X_i 相对应的 Y_i 包含关于 $m(x)$的“准确信息”。现在，假设无法获得 X_i

但是 $Z_i = X_i + U_i$ 是的观测值，其中 U_i 是未观测到的测量误差。在这种情况下，朴素方法——直接对 Y_i 中与 Z_i 落在点 x邻域内的观测值取加权平均——应当会失效，因为 X_i 与此类 Z_i 相对应的值可能远离 x ，因此相应的 Y_i 可能无法提供关于 m 在 x处的准确信息。为解决这一问题，研究者提出了适当的校正方法。仅举数例，[57] 提出了去卷积核密度估计量， [19] 和 [20] 分别研究了其收敛速率和渐近分布。基于去卷积核，[21] 研究了 Nadaraya-Watson 型回归估计量的收敛速率， [14] 则研究了局部多项式型回归估计量的渐近分布。关于测量误差问题的入门介绍，请参阅 [46] 和 [13]。然而，上述研究仅限于欧几里得数据。

随着各领域中非欧几里得数据迅速涌现，非欧几里得数据分析正成为现代统计学中的一个重要课题。这一分析颇具挑战性，因为一般而言，非欧几里得空间不具有向量空间结构。关于非欧几里得数据分析的最新综述，参见 [45]。在单位超球面 $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}$ 上观测到的 $\|x\| = 1\}$ for $d \in \mathbb{N}$，称为超球面数据，是最常见的非欧几里得数据之一。超球面数据包括圆形数据（$d = 1$）、球面数据（$d = 2$）以及其他更高维的数据（例如 [55], [26]）。以往针对无误差圆形、球面或一般超球面数据的研究涉及密度估计（[27], [23]）、回归分析（[8], [51], [52], [32]）和统计检验（[11], [5], [24]）。其中， [8]未涵盖测量误差问题，而仅考虑响应变量和预测变量均为球面变量，且响应变量围绕一个未知正交矩阵与预测变量的乘积对称分布的情形。关于超球面数据分析的最新综述，参见 [49]。

超球面数据出现于气象学和天文学等领域。然而，这些领域的数据容易因测量设备的技术限制而包含测量误差。例如，精确测量风向、太阳上太阳黑子的位置，或从地球指向某个天体的方向并不容易，因为它们移动得非常快，和／或距离非常遥远（例如 [2], [22]）。此外，这类测量有时会受到途中某些物质的干扰。另外，欧几里得数据中的每个观测向量有时会经过归一化，使其具有单位范数，以确保数据分析仅

受向量元素相对大小而非向量本身绝对大小的影响。如果原始欧几里得数据包含测量误差，那么由此得到的超球面数据也会包含测量误差。

尽管分析受污染的超球面数据十分重要，但相关研究却寥寥无几，而且现有研究大多仅限于在 $\mathbb{S}^1$ 或 $\mathbb{S}^2$ 上进行反卷积密度估计（例如 [18], [28], [40], [41]）。针对其他类型受污染非欧几里得数据的研究还包括：在特殊正交群（[38]）、紧致连通李群（[42]）、庞加莱上半平面（´）以及六维欧氏运动群（[31]）上进行反卷积密度估计。上述所有反卷积密度估计研究都只考察了其估计量的收敛速率。近期，[44]研究了带有受污染李群值预测变量的密度估计与回归分析。据我们所知， [33] 是唯一一项研究受污染流形值变量回归分析的工作。然而，由于 [33] 上的 $\mathbb{S}^d$ 和 $d = 2$ 上的 $d \geq 4$ 并非李群，因此研究这些尚未探索的情形十分重要。

本文的首要目标是构建$\mathbb{S}^2$ 上的反卷积回归估计量，并研究其收敛速率。我们还旨在构建 $\mathbb{S}^2$上反卷积密度估计量和回归估计量的渐近分布与渐近置信区间。尽管这些内容十分重要，文献中却尚未对此进行研究。为在更一般的设定下实现这些目标，我们转而研究 $\mathbb{S}^d$ 上针对 $d \in \mathbb{N}$的反卷积密度估计与回归分析。这些一般性问题在文献中也尚未得到探讨。我们在 $\mathbb{S}^d$ 上的反卷积密度估计量推广了 [18]中引入的 $\mathbb{S}^1$ 上的反卷积密度估计量，以及 [28]中引入的 $\mathbb{S}^2$ 上的反卷积密度估计量。我们在 $\mathbb{S}^d$ 上的反卷积回归估计量也推广了 [33]中引入的 $\mathbb{S}^1$ 上的反卷积回归估计量。我们为这些一般性估计量奠定了理论基础，并建立了它们的若干有限样本性质。我们还研究了密度估计量的一致一致性，以及密度估计量和回归估计量的收敛速率。此外，在一个高层次条件下，我们推导了这两种估计量的渐近分布和两类渐近置信区间，并验证了该高层次条件在某些情形下成立。此外，我们还介绍了若干数值研究，并提供了一些关于实现的实践细节；尽管这些内容十分重要，文献对此却关注较少。我们强调，推导这些结果的方式与

本文与欧几里得情形中的方法截然不同，因为本文基于统计学中较少涉及的超球谐波分析。此外，处理 $\mathbb{S}^d$ 比处理 $\mathbb{S}^2$ 更具挑战性，因为一般的超球谐波分析远比 $\mathbb{S}^2$上的调和分析复杂。事实上，这会使每个结果的分析都更加复杂，并需要进行更广泛的讨论。

本文结构安排如下。在第2节中，我们介绍一般的超球谐波分析，并给出一些实际例子，以及具有若干有限样本性质的估计量。第3节展示估计量的收敛速率和渐近分布。第4节构造渐近置信区间，并在第5节介绍模拟研究和真实数据分析。补充材料包含更多实际细节和所有技术性证明。

2 预备知识与方法论

2.1 预备知识

我们的方法论主要基于 d维单位超球面 $\mathbb{S}^d$ 上的调和分析，其中 $d \in \mathbb{N}$。下面简要介绍相关内容。更多细节可参见 [1] 和 [17]。

若函数 $f\colon \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C}$ 满足以下形式，则称其为 $d+1$ 变量中的 $l \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ 次调和齐次多项式： f取如下形式

$$f(t_1, \ldots, t_{d+1}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}_0^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = l} c_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \prod_{i=1}^{d+1} t_i^{\alpha_i}$$

其中 $c_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{C}$，且满足 $\sum_{i=1}^{d+1} \partial^2 f(t_1, \ldots, t_{d+1})/\partial t_i^2 \equiv 0$。对于这样的 f，其定义域限制函数 $f|_{\mathbb{S}^d}\colon \mathbb{S}^d \to \mathbb{C}$称为 $d+1$变量中的 l阶球谐函数。我们用 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$表示 $d+1$ 变量中 l 次所有球谐函数构成的空间，并称其为 $d+1$ 变量中的 l 阶球谐函数空间。

众所周知， $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$ 是一个维数为

$$N(d, l) = \frac{(2l + d - 1) \cdot (l + d - 2)!}{l! \cdot (d - 1)!}.$$

直接计算表明，对于 $l \in \mathbb{N}$， $N(1, l) = 2$ 以及 $N(2, l) = 2l + 1$，且 $N(d, 0) = 1$。众所周知，由 $\{\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d) : l \in \mathbb{N}_0\}$ 张成的向量空间是 L^2 空间 $L^2((\mathbb{S}^d, \nu)\ \mathbb{C})$ 的稠密子空间，其中 ν 是定义在 $\mathbb{S}^d$ 上的缩放球面测度，定义为

$$\nu(A) = \frac{\text{area}(\mathbb{S}^d)}{\text{Leb}(B(0,1))} \cdot \text{Leb}(\{ta : t \in [0,1], a \in A\})$$

对于 $\mathbb{S}^d$ 的任意博雷尔子集 A，其中 $\text{area}(\mathbb{S}^d)$ 是 $\mathbb{S}^d$ 的表面积，Leb 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的勒贝格测度， $B(0, 1)$ 是以零为中心、半径为一的闭球。注意， $\nu(\mathbb{S}^d) = \text{area}(\mathbb{S}^d)$。我们还注意到， $L^2((\mathbb{S}^d, \nu)\ \mathbb{C})$ 是一个内积为 $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathbb{S}^d} f(x)g(x)\ d\nu(x)$ 的可分希尔伯特空间，其中 $g(x)$ 是 $g(x)$ 的共轭。若 $\{B_q^l : 1 \leq q \leq N(d, l)\}$ 是 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$ 的一组正交归一基，则已知 $\{B_q^l : l \in \mathbb{N}_0, 1 \leq q \leq N(d, l)\}$ 构成 $L^2((\mathbb{S}^d, \nu)\ \mathbb{C})$ 的一组正交归一基。下文中，出现在 B_q^l 或其他上标中的 l 并不表示指数，而是为了记号简洁而表示一个指标。注意，常值函数 $B_1^0 \equiv (\nu(\mathbb{S}^d))^{-1/2}$ 是 $\mathfrak{B}^0(\mathbb{S}^d)$ 的正交归一基，因为在 $d + 1$ 个变量中，0 阶球谐函数都是常值函数。下面，我们总结 $l \in \mathbb{N}$ 时 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$ 的正交归一基示例。

例1。

1. $(d = 1)$ 注意到，每个 $x \in \mathbb{S}^1$ 都可以写成 $x = (\cos \varphi_x, \sin \varphi_x)^\top$，其中 $\varphi_x \in [0, 2\pi)$。我们定义 $B_q^l : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$，对于 $l \in \mathbb{N}$，令 $B_1^l(x) = \cos(l\varphi_x)/\sqrt{\pi}$，以及 $B_2^l(x) = \sin(l\varphi_x)/\sqrt{\pi}$。于是， $\{B_q^l : 1 \leq q \leq 2\}$ 构成了 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^1)$ 的正交归一基；更多细节参见 [1] 中的第 2.2 章。

2. $(d = 2)$ 注意到，每个 $x \in \mathbb{S}^2$ 都可以写成

$$x = (\cos \varphi_x \sin \theta_x, \sin \varphi_x \sin \theta_x, \cos \theta_x)^\top$$

其中 $\varphi_x \in [0, 2\pi)$ 以及 $\theta_x \in [0, \pi)$。我们定义 $B_q^l : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$，对于 $l \in \mathbb{N}$，令

$$B_q^l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot e^{\sqrt{-1} \cdot (q-l-1)\varphi_x} \cdot d_{q(l+1)}^l(\theta_x), \tag{2.1}$$

其中 $d_{qr}^l(\theta) \in \mathbb{R}$ 对于 $1 \leq q, r \leq 2l + 1$ 和 $\theta \in [0, \pi)$ 定义为

$$c_{qr}^l \cdot \sum_{k=\max\{0, r-q\}}^{\min\{2l+1-q, r-1\}} \frac{(-1)^{k+q-r} (\cos(\theta/2))^{2l-2k+r-q} (\sin(\theta/2))^{2k+q-r}}{(2l+1-q-k)!(r-1-k)!(k+q-r)!k!} \tag{2.2}$$

对于 $c_{qr}^{l}=((2l+1-q)!(q-1)!(2l+1-r)!(r-1)!)^{1/2}$。那么， $\{B_q^l:$ $1\le q\le 2l+1\}$构成了 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^2)$的正交归一基；参见 *[58],* 第*12.9*章 *[10]*以及 *[54]* 第 *3.9*章，了解更多详情。

3. ($d\ge 3$) 对于 $l\in\mathbb{N}$ 和 $d\ge 3$，可以通过递归方式利用 $0\le j\le l$的正交归一基构造 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$ 的正交归一基。为此，我们将 $d+1$ 个变量中的 $l\in\mathbb{N}_0$ 次勒让德多项式 $P_{l,d+1}:$ $[-1,1]\to\mathbb{R}$ 定义为

$$P_{l,d+1}(t)=l!\,\Gamma(d/2)\sum_{k=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^k(1-t^2)^k t^{l-2k}}{4^k k!(l-2k)!\,\Gamma\left(k+\frac{d}{2}\right)}.$$

˜我们还将$0\le j\le l$ 的归一化缔合勒让德函数 $P_{l,d+1,j}:\ [-1,1]\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\tilde{P}_{l,d+1,j}(t)=\frac{((2l+d-1)(l+d+j-2)!)^{1/2}(1-t^2)^{j/2}}{2^{(d-1)/2+j}((l-j)!)^{1/2}\Gamma\left(j+\frac{d}{2}\right)}P_{l-j,d+1+2j}(t).$$

令 $\{B_r^j\colon 1\le r\le N(j,d-1)\}$ 为 $0\le j\le l$的 $\mathfrak{B}^j(\mathbb{S}^{d-1})$ 的一个正交归一基。注意，每个 $x\in\mathbb{S}^d$ 都可以写成

$$\begin{aligned}x=\Bigg(&\cos\varphi_x\prod_{k=1}^{d-1}\sin\theta_{kx},\sin\varphi_x\prod_{k=1}^{d-1}\sin\theta_{kx},\\&\cos\theta_{1x}\prod_{k=2}^{d-1}\sin\theta_{kx},\cos\theta_{2x}\prod_{k=3}^{d-1}\sin\theta_{kx},\ldots,\cos\theta_{(d-1)x}\Bigg)^{\top}\end{aligned}\tag{2.3}$$

对于某个 $\varphi_x\in[0,2\pi)$ 以及 $1\le k\le d-1$的 $\theta_{kx}\in[0,\pi)$。我们将$l\in\mathbb{N}$ 的 $B_{r,j}^l:$ $\mathbb{S}^d\to\mathbb{C}$ 定义为

$$B_{r,j}^l(x)=\tilde{P}_{l,d+1,j}(\cos\theta_{(d-1)x})B_r^j(s(\varphi_x,\theta_{1x},\ldots,\theta_{(d-2)x})),$$

其中 $s(\varphi_x,\ \theta_{1x},\ \ldots,\ \theta_{(d-2)x})$ 是 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上定义为 (*2.3*) 右侧的点，其中 $d-1$ 替换为 $d-2$。那么， $\{B_{r,j}^l:\ \ 1\le r\le N(j,\ d-1)\ 0\le j\le l\}$ 构成 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$的正交归一基；更多细节请参见 *[1]* 第 *2.11* 章。

2.2 方法论

在本节中，我们介绍方法论。令 X 为取值于 $\mathbb{S}^d$ 的随机向量， f_X 为其相对于 ν的密度。我们假设 f_X 平方可积。

令 $SO(d+1)$表示所有 $(d+1) \times (d+1)$ 实特殊正交矩阵构成的空间。回顾一下，若一个 $(d+1) \times (d+1)$ 实矩阵 A 满足$A^\top A = AA^\top = I_{d+1}$ 且 $\det(A) = 1$，则称其为特殊正交矩阵，其中 I_{d+1} 是 $(d+1) \times (d+1)$ 单位矩阵。我们假设无法观测到 X，只能观测到 $Z = UX$，其中 U 是取值于 $SO(d+1)$ 的不可观测测量误差，而 UX 表示矩阵 U与向量 X 之间的矩阵乘法。注意，由于 $\|UX\|^2 = X^\top U^\top UX = X^\top X = 1$，因此 $Z \in \mathbb{S}^d$。这种测量误差也很自然，因为 $SO(d+1)$中的每个矩阵都会沿某个方向旋转 $\mathbb{S}^d$ 中的每个点。例如， $SO(2)$中的每个矩阵都可以写成

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

对于某个 $\varphi \in [0, 2\pi)$，它会将 $\mathbb{S}^1$ 中的每个点沿逆时针方向旋转 φ角度。此外， $SO(d+1)$ 在 $\mathbb{S}^d$上具有传递性，即对于任意 x_1， $x_2 \in \mathbb{S}^d$，都存在 $u \in SO(d+1)$ 使得 $ux_1 = x_2$。我们的首要目标是根据 n个独立同分布观测 $\{Z_i : 1 \le i \le n\}$估计 f_X。第二个目标是在模型中估计回归函数m： $\mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$

$$Y = m(X) + \epsilon \tag{2.5}$$

根据 n 个独立同分布观测 $\{(Y_i, Z_i): 1 \le i \le n\}$，其中 Y 是实值响应变量，ϵ 是满足 $\mathrm{E}(\epsilon|X) = 0$的误差项。我们注意到，这个回归问题尚未针对 $d = 2$ 和 $d \ge 4$进行研究。本文中，我们始终假设 U 与 (X, ϵ) 独立。这类假设在测量误差问题的文献中很常见。

下面，我们介绍一个对我们的方法论至关重要的卷积性质。我们将任意两个函数 $g \in L^2((SO(d+1), \mu), \mathbb{C})$ 和 $f \in L^2((\mathbb{S}^d, \nu), \mathbb{C})$ 的卷积 $g * f \in L^2((\mathbb{S}^d, \nu), \mathbb{C})$ 定义为

$$(g * f)(x) = \int_{SO(d+1)} g(u) f(u^{-1}x)\, d\mu(u),$$

其中， u^{-1} 是 u的逆矩阵， $u^{-1}x$ 是矩阵u^{-1} 与向量 x之间的矩阵乘法， μ 是 $SO(d+1)$上的归一化 Haar 测度。回顾一下， μ 是 $SO(d+1)$上唯一满足左平移不变性质 $\mu(A\mathcal{S}) = \mu(\mathcal{S})$的博雷尔概率测度，其中该性质对每个 $A \in SO(d+1)$和博雷尔子集 $\mathcal{S} \subset SO(d+1)$均成立，其中$A\mathcal{S} = \{AS : S \in \mathcal{S}\}$。我们定义 f 在次数 $l \in \mathbb{N}_0$处的超球傅里叶变换

以及阶数 $1 \le q \le N(d,l)$为

$$\phi_q^l(f) = \int_{\mathbb{S}^d} f(x)\overline{B_q^l(x)}d\nu(x).$$

超球傅里叶变换是欧几里得傅里叶变换的一种类比，其中欧几里得定义域、勒贝格测度和傅里叶基函数分别被 $\mathbb{S}^d$、ν 和B_q^l替代。我们还将函数 $\mathscr{B}_q^l(\cdot;u)$：$\mathbb{S}^d \to \mathbb{C}$ 定义为 $\mathscr{B}_q^l(x;u) = B_q^l(ux)$，其中$u \in SO(d+1)$。由于 $\mathscr{B}_q^l(\cdot;u)$ 属于 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$（[17]中的命题 4.7），且 $\{B_q^l : 1 \le q \le N(d,l)\}$ 是 $\mathfrak{B}^l(\mathbb{S}^d)$的正交归一基，因此有

$$B_q^l(ux) = \sum_{r=1}^{N(d,l)} \langle \mathscr{B}_q^l(\cdot;u), B_r^l\rangle_2 B_r^l(x). \tag{2.6}$$

最后，我们定义

$$\tilde{\phi}_{qr}^l(g) = \int_{SO(d+1)} g(u)D_{qr}^l(u)\,d\mu(u),$$

其中

$$D_{qr}^l(u) = \overline{\langle \mathscr{B}_q^l(\cdot;u), B_r^l\rangle_2} = \int_{\mathbb{S}^d} \overline{B_q^l(ux)}B_r^l(x)\,d\nu(x). \tag{2.7}$$

我们称 $\tilde{\phi}_{qr}^l(g)$ 为 (q,r)次旋转傅里叶变换的第 g 项，阶数为 l。关于 $\tilde{\phi}_{qr}^l(f_U)$ 和 $D_{qr}^l(u)$ 的一些实际示例见补充材料 S.1。接下来，以下卷积性质成立。

命题 1. 设 $f \in L^2((\mathbb{S}^d,\nu)\ \mathbb{C})$ 和 $g \in L^2((SO(d+1)\ \mu)\ \mathbb{C})$。那么，对所有 $l \in \mathbb{N}_0$和 $1 \le q \le N(d,l)$，均有 $\phi_q^l(g * f) = \sum_{r=1}^{N(d,l)} \tilde{\phi}_{qr}^l(g)\phi_r^l(f)$。

命题 1 是引理 2.1 的推广，[28] 其中考虑了$d = 2$的情形。现在，我们将命题 1 应用于我们的设定。令 f_U 为 U 关于 μ的密度。我们假设 f_U 平方可积。那么，可以证明，f_Z 关于 $Z = UX \in \mathbb{S}^d$的密度 ν存在，且由 $f_Z = f_U * f_X$给出。因此，根据命题 1，可得以下卷积性质：

$$\phi_q^l(f_Z) = \sum_{r=1}^{N(d,l)} \tilde{\phi}_{qr}^l(f_U)\phi_r^l(f_X). \tag{2.8}$$

将 $\phi^l(f)$ 定义为 $N(d,l)$ 向量，其中第 q 个元素等于 $\phi_q^l(f)$；将 $\tilde{\phi}^l(g)$ 定义为 $N(d,l)\times N(d,l)$ 矩阵，其中第 (q,r) 个元素等于 $\tilde{\phi}_{qr}^l(g)$，则 (2.8) 可写为 $\phi^l(f_Z) =$

$\tilde{\phi}^l(f_U)\phi^l(f_X)$。本文始终假设矩阵 $\tilde{\phi}^l(f_U)$ 可逆。于是，它可以改写为

$$\phi^l(f_X) = (\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\phi^l(f_Z). \tag{2.9}$$

在球面 $\mathbb{S}^1$ 或 $\mathbb{S}^2$ 上进行反卷积密度估计的文献中，通常假设 $\tilde{\phi}^l(f_U)$可逆（例如 [18], [28], [40], [41]）。事实上，许多常见的 U 分布，例如拉普拉斯分布、高斯分布和定义在 $SO(d+1)$上的冯·米塞斯-费希尔分布，都满足可逆性。下一节将给出更具体的例子。在球面 $\mathbb{S}^2$上进行反卷积密度估计的文献中，通常假设 f_U 已知，因此 $\tilde{\phi}^l(f_U)$也已知。在欧几里得测量误差问题的文献中，也经常采用后一假设的欧几里得版本（例如 [57], [19], [20], [21], [14], [3]）。本文也始终聚焦于 f_U 已知的情形，以便为这一新问题建立理论基础。这种情形本身就很有挑战性；过去面对新的问题时，也采用过从测量误差分布已知的情形入手的研究方法。若 f_U 未知，我们可以像 [18], [16], [34], [35] 和[12], 那样利用额外数据对其进行估计，也可以像 [4]那样，假设 f_U 服从某个参数分布，并在不使用额外数据的情况下估计其参数。

现在，我们引入 f_X 的反卷积估计量。由于 $\{B_q^l:\ l \in \mathbb{N}_0,\ 1 \le q \le N(d,\ l)\}$ 是 $L^2((\mathbb{S}^d,\ \nu)\ \mathbb{C})$ 的正交归一基，因此有

$$f_X = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{N(d,l)} \phi_q^l(f_X)B_q^l \tag{2.10}$$

在 L^2 意义下。式（2.10）中的级数称为 f_X的傅里叶-拉普拉斯级数。若 f_X满足某些光滑性条件，该级数将逐点收敛。下一节将介绍这些光滑性条件。由式（2.9）和（2.10），可得

$$f_X = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{N(d,l)} \left(\sum_{r=1}^{N(d,l)} (\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}\phi_r^l(f_Z)\right) B_q^l, \tag{2.11}$$

其中，$(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}$是 $(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}$ 的第 (q,r) 个元素。根据定义，$\phi_r^l(f_Z) = \overline{\mathrm{E}(B_r^l(Z))}$，因此在 (2.11) 中用样本均值 $n^{-1}\sum_{i=1}^n B_r^l(Z_i)$ 替代 $\phi_r^l(f_Z)$，即可得到 f_X 的估计量。然而，由于 $(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}$ 随着 $l \to \infty$ 趋于无穷大，包含无穷和 $\sum_{l=0}^{\infty}$ 的估计量会有较大的变异性。这种趋势类似于以下现象

在欧几里得测量误差问题中，欧几里得傅里叶变换的倒数在尾部趋于无穷大。为克服这一问题，我们对无穷和 $\sum_{l=0}^{\infty}$ 进行截断。具体而言，我们令 $0 < T_n < \infty$ 为一个随 $n \to \infty$ 趋于无穷大的截断水平。基于这一截断，我们定义

$$\hat{f}_X(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i)), \tag{2.12}$$

其中

$$K_{T_n}(x,z) = \sum_{l=0}^{[T_n]} \sum_{q=1}^{N(d,l)} \left(\sum_{r=1}^{N(d,l)} (\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}_{qr} \overline{B^l_r(z)} \right) B^l_q(x)$$

对于 $z \in \mathbb{S}^d$，$\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i))$ 是 $K_{T_n}(x, Z_i)$ 的实部。我们注意到，$\hat{} f_X$ 是在这一一般设定下的首个密度估计量。[18]和 [28] 分别针对 $d = 1$ 和 $d = 2$，引入了由 $n^{-1} \sum_{i=1}^{n} K_{T_n}(x, Z_i)$ 定义的类似密度估计量。然而，$K_{T_n}(x, Z_i)$ 不一定是实值的，而 f_X 是实值的。因此，在我们的密度估计量 f_X 中，自然应采用 $\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i))\hat{}$，而不是 $K_{T_n}(x, Z_i)$。取实部对于推导第3节中估计量的渐近分布以及第4节中关于 f_X 的渐近置信区间也是必要的。下面的命题表明，f_X 是一个合理的密度估计量，因为它的积分为 1。文献中尚未指出 $d = 2$ 和 $d \geq 4$ 具有这类性质。

命题2. $\int_{\mathbb{S}^d} K_{T_n}(x, z) d\nu(x) = 1$ 对所有 $z \in \mathbb{S}^d$ 均成立，因此 $\int_{\mathbb{S}^d} \mathrm{Re}(K_{T_n}(x, z)) d\nu(x) = 1$对所有 $z \in \mathbb{S}^d$ 均成立，且 $\int_{\mathbb{S}^d} \hat{} f_X(x) d\nu(x) = 1$。

现在，我们引入回归函数 m 的反卷积估计量。$m(x) = \mathrm{E}(Y|X = x)$ 的拟议估计量为

$$\hat{m}(x) = \hat{f}_X(x)^{-1} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i)) Y_i. \tag{2.13}$$

注意到，$\hat{} m$ 是 $d = 2$ 和 $d \geq 4$的第一个回归估计量。与对$\hat{} f_X(x)$的分析不同，对$\hat{} m(x)$的分析还需要对$\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i))|X_i)$满足一个额外性质，这是因为多出了项 Y_i。为此，我们定义

$$K^*_{T_n}(x, x^*) = \sum_{l=0}^{[T_n]} \sum_{q=1}^{N(d,l)} \overline{B^l_q(x^*)} B^l_q(x) \tag{2.14}$$

对于 $x^* \in \mathbb{S}^d$。鉴于（2.10）以及$\mathrm{E}(B_q^l(X)) = \overline{\phi_q^l(f_X)}$，可以使用 $K_{T_n}^*$ 来估计f_X，若真实值 $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ 已知。例如，可以用$f_X(x)$ 来估计

$$\hat{f}_X^*(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(K_{T_n}^*(x, X_i)),$$

或者简单地写作 $n^{-1}\sum_{i=1}^n K_{T_n}^*(x, X_i)$，其中后者是 [29] 针对无误差情形研究的估计量。还可以通过以下方式估计 $m(x)$:

$$\hat{m}^*(x) = \hat{f}_X^*(x)^{-1} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(K_{T_n}^*(x, X_i)) Y_i. \tag{2.15}$$

下面的命题表明，$\mathrm{E}(K_{T_n}(x, Z)|X)$ 等于 $K_{T_n}^*(x, X)$。文献中尚未研究过 $d = 2$ 和 $d \ge 4$ 的这类性质。

命题 3。 $\mathrm{E}(K_{T_n}(x, Z)|X) = K_{T_n}^*(x, X)$ 对所有 $x \in \mathbb{S}^d$ 均成立，因此 $\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z))|X) = \mathrm{Re}(K_{T_n}^*(x, X))$ 对所有 $x \in \mathbb{S}^d$ 均成立。

上述命题所具有的性质，我们称之为“超球面无偏评分”性质，它表明:

$$\mathrm{E}\big(\hat{m}(x)\hat{f}_X(x)\big|X_1, \ldots, X_n\big) = \mathrm{E}\big(\hat{m}^*(x)\hat{f}_X^*(x)\big|X_1 \ldots, X_n\big).$$

上述恒等式表明，K_{T_n} 消除了测量误差对 $\hat{m}(x)$ 分子偏差的影响。我们注意到，上述性质的欧几里得版本由 [57] 提出，并由 [21] 用于欧几里得测量误差问题。此类无偏评分性质对于存在测量误差时的回归分析非常重要。

3 渐近性质

3.1 测量误差分布的光滑性

我们的估计量的渐近性质取决于测量误差密度 f_U 的光滑性。在欧几里得测量误差问题的文献中，人们考虑了两种光滑性情形，即普通光滑情形和超光滑情形；例如，参见 [19], 。拉普拉斯分布是普通光滑分布的典型例子，而高斯分布是超光滑分布的典型例子。在 $\mathbb{S}^2$ 上的反卷积密度估计文献中，人们考虑了三种光滑性情形

，即普通光滑、超光滑和对数超光滑情形。我们将这三种情形推广到一般的 $\mathbb{S}^d$。为此，我们用 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示复矩阵的算子范数。对于一个 $N(d,\ l)\times N(d,\ l)$ 复矩阵 A，其定义为 $\|A\|_{\mathrm{op}}=\sup\{\|Av\|_{\mathbb{C}^{N(d,l)}}:\ v\in\mathbb{C}^{N(d,l)},\ \|v\|_{\mathbb{C}^{N(d,l)}}=1\}$，其中 $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{N(d,l)}}$ 是 $\mathbb{C}^{N(d,l)}$ 上的标准复范数。

(S1)（阶数为 $\beta\geq 0$ 的普通光滑情形）存在常数 $c_1,\ c_2>0$ 使得对所有 $l\in\mathbb{N}$，(i) $\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\leq c_1\cdot l^{\beta}$ 且 (ii) $\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\geq c_2\cdot l^{\beta}$。

(S2)（阶数为 $\beta>0$ 的超光滑情形）存在常数 $c_1,\ c_2,\ \gamma>0$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$，使得对所有 $l\in\mathbb{N}$，(i) $\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\leq c_1\cdot l^{\alpha}\cdot\exp(\gamma\cdot l^{\beta})$ 且 (ii) $\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\geq c_2\cdot l^{\alpha}\cdot\exp(\gamma\cdot l^{\beta})$。

(S3)（阶数为 $\beta>0$ 的对数超光滑情形）存在常数 $c_1,\ c_2,\ \gamma>0$ 和$\alpha,\ \xi_1,\ \xi_2\in\mathbb{R}$，使得对所有 $l\in\mathbb{N}$，(i) $\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\leq c_1\cdot l^{\alpha}\cdot\exp(\gamma\cdot l^{\beta}(\log\ l-\xi_1))$，且 (ii) $\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\geq c_2\cdot l^{\alpha}\cdot\exp(\gamma\cdot l^{\beta}(\log\ l-\xi_2))$。

我们注意到，情形（Sj）中关于 $j\in\{1,2,3\}$ 的条件（i）用于推导收敛速率，而条件（ii）用于验证渐近分布的一个高层次条件。文献中对 $SO(d+1)$上的分布已有广泛研究（例如 [43], [56], [50], [47], [7]）。我们给出若干满足上述情形的分布示例。普通光滑情形包括不存在测量误差的情况。在这种情况下，$P(U=I_{N(d,l)})=1$，从而得到 $\tilde{\phi}^l(f_U)=I_{N(d,l)}$，其中$I_{N(d,l)}$是 $N(d,l)\times N(d,l)$单位矩阵。因此，该情形属于阶数为 $\beta=0$的普通光滑情形。参数为$\lambda>0$、其 $\tilde{\phi}^l(f_U)$由 $(1+\lambda^2\cdot l(l+d-1))^{-1}I_{N(d,l)}$ 定义的 $SO(d+1)$上的拉普拉斯分布，是另一种普通光滑分布。当 $\beta=2$时，它满足（S1）。当 $d=1$时，其密度为 $f_U(u)=\pi(\exp(-\varphi_u/\lambda)/(1-\exp(-2\pi/\lambda))+\exp(\varphi_u/\lambda)/(\exp(2\pi/\lambda)-1))/\lambda$，其中 $\varphi_u\in[0,2\pi)$ 是与（2.4）中给出的 u 相对应的角度。当 $d=2$时，其密度为 $f_U(u)=\lambda^{-2}\pi\cos(a_\lambda(\pi-r_u))/(\cos(a_\lambda\pi)\sin(r_u/2))\cdot I(r_u>0)$，其中 $a_\lambda=\sqrt{1/4-\lambda^{-2}}\in\mathbb{C}$ 和$r_u=\arccos((迹(u)-1)/2)\in[0,\pi]$（[28]中的定理 3.5）。此外，参数为 $\theta\in(0,\pi]$ 和 $p>0$、密度为 $f_U(u)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\sin((2l+1)\theta/2)/((2l+1)\sin(\theta/2)))^p\sum_{q=-l}^{l}D_{qq}^l(u)$ 的 $SO(3)$上的罗森塔尔分布，其 $\tilde{\phi}^l(f_U)=(\sin((2l+1)\theta/2)/((2l+1)\sin(\theta/2)))^pI_{2l+1}$ ([40])，其中 $D_{qq}^l(u)$由（2.7）定义。因此，当 $\beta=p$时，它满足（S1）。

超光滑分布的一个例子是参数为 $\lambda > 0$、其 $\tilde{\phi}^l(f_U)$由 $\exp(-\lambda^2 \cdot l(l+d-1)/2) I_{N(d,l)}$定义的 $SO(d+1)$上的高斯分布。当 $\beta = 2$时，$\alpha = 0$且 $\gamma = \lambda^2/2$时，它满足（S2）。当 $d = 1$时，其密度为 $f_U(u) = \sqrt{2\pi}/\lambda \cdot \sum_{s\in\mathbb{Z}} \exp(-(\varphi_u + 2\pi s)^2/(2\lambda^2))$。当 $d = 2$时，其密度为 $f_U(u) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp(-\lambda^2 \cdot l(l+1)/2) \sum_{q=-l}^{l} D_{qq}^l(u)$。

现在，我们考虑对数超光滑情形。利用 [39] 中的定理 3，或利用 [42], 中第 5.3 节的结果，可以证明，集中参数为 $\lambda > 0$、平均方向为 $A \in SO(d+1)$ 的 $SO(d+1)$ 上的冯·米塞斯-费希尔分布是对数超光滑的。其密度为 $f_U(u) = c(\lambda, A)^{-1} \exp(\lambda \cdot 迹(A^{-1}u))$，其中 $c(\lambda, A)$ 是归一化常数。当 $d = 1$时，它满足 (S3)，其中 $\beta = 1$、$\alpha = 0$、$\gamma = 1$、$\xi_1 = 1 + \log \lambda$ 和 $\xi_2 = 1 + \log(2\lambda)$。当 $d = 2$时，它满足 (S3)，其中 $\beta = 1$、$\alpha = 4$、$\gamma = 1$、$\xi_1 = 1 + \log \lambda$ 和 $\xi_2 = 1 + \log(3\lambda)$。

3.2 收敛速率

本节讨论密度估计量 L^2 的一致性及误差率$\hat{} f_X$，该估计量定义于（2.12）；我们还讨论 L^2 回归估计量的误差率 $\hat{} m$，该估计量定义于（2.13）。为陈述所需条件，我们将 s次连续可微实值函数空间记为 $\mathbb{S}^d$，记作 $C^s(\mathbb{S}^d)$。

(A1) 对于某个 $k \in \mathbb{N}$，满足 $k > d/4$，(i) $f_X \in C^{2k}(\mathbb{S}^d)$ 且 (ii) $m \in C^{2k}(\mathbb{S}^d)$。

(A2) (i) f_X 在 $\mathbb{S}^d$ 上有正下界，且 (ii) $E(Y^2|X = \cdot)$ 在 $\mathbb{S}^d$上有界。

条件 (A1) 是关于 f_X 和 m的光滑性条件。在 (A1)-(i) 下，式（2.10）中的级数由定理 2 的结论可知一致绝对收敛至 f_X，见 [37]。一致绝对收敛意味着绝对收敛是一致的。条件 (A2) 是非参数估计中的标准正则性条件。我们还考虑平滑参数 T_n的以下发散速度：

(T1)（在 (S1) 的情况下）$n^{-1/2}T_n^{\beta+d} = o(1)$。(T2)（在 (S2) 的情况下）$n^{-1/2}T_n^{\alpha+d}\exp(\gamma \cdot T_n^{\beta}) = o(1)$。(T3)（在 (S3) 的情况下）$n^{-1/2}T_n^{\alpha+d}\exp(\gamma \cdot T_n^{\beta}(\log T_n - \xi_1)) = o(1)$。

现在，我们可以陈述渐近性质了。我们首先介绍密度估计量 $\hat{} f_X$ 的一致一致性。这对于获得 $\hat{}m$ 的 L^2 误差率是必要的，而且本身也很重要。

命题 4. 假设（2.10）中的傅里叶-拉普拉斯级数一致收敛于f_X。那么，在条件 *(S1)-(i)+<style id='13'>(T1)*、*(S2)-(i)+<style id='16'>(T2)* 和 *(S3)-(i)+<style id='19'>(T3)* 中任一条件成立时，均有

$$\sup_{x\in\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)| = o_p(1).$$

注意，在 (A1)-(i) 条件下，（2.10）中的级数一致收敛于 f_X，因为一致绝对收敛蕴含一致收敛。另一个较弱的充分条件是：对于某个 $s \geq 0$，$f_X \in C^{s,\kappa}(\mathbb{S}^d)$ 且 $\kappa \in (0,1]$ 满足 $s + \kappa > (d+1)/2 - 1$，其中 $C^{s,\kappa}(\mathbb{S}^d)$ 是实值函数空间，其 s 阶偏导数关于指数为 κ 的 H¨older 连续（见 [1] 中的定理2.36）。现在，我们给出 f_X 和 m 的 $\hat{}$ 收敛速率。

定理1. 假设条件 *(A1)-(i)* 成立。则，

(a) 在 *(S1)-(i)* 和 *(T1)* 条件下，有

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 d\nu(x) = O_p(T_n^{-4k} + n^{-1}T_n^{2\beta+d}).$$

在附加条件 *(A1)- (ii)* 和 *(A2)* 下，$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{}m(x) - m(x)|^2 d\nu(x)$ 具有相同的收敛速度。

(b) 在 *(S2)-(i)* 和 *(T2)* 条件下，有

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 d\nu(x) = O_p(T_n^{-4k} + n^{-1}T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma\cdot T_n^{\beta})).$$

在附加条件 *(A1)- (ii)* 和 *(A2)* 下，$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{}m(x) - m(x)|^2 d\nu(x)$ 具有相同的收敛速度。

(c) 在 *(S3)-(i)* 和 *(T3)* 条件下，有

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 d\nu(x) = O_p(T_n^{-4k} + n^{-1}T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma\cdot T_n^{\beta}(\log T_n - \xi_1))).$$

在附加条件 *(A1)-(ii)* 和 *(A2)* 下，$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{}m(x) - m(x)|^2 d\nu(x)$ 也具有相同的收敛速率。

我们注意到，上述 L^2 误差速率随着 $n \to \infty$ 而趋于零。速率中的 T_n^{-4k} 项源于估计量的偏差部分，而每个速率中的其余项则源于对方差有贡献的随机部分。通过为 $T_n \to \infty$ 选取合适的速度，我们可以优化每个 L^2误差速率。具体而言，我们考虑以下速度：

(T1′)（在 (S1) 的情形下） $T_n \asymp n^{1/(4k+2\beta+d)}$。

(T2′)（在 (S2) 的情形下） $T_n = K \cdot (\log n)^{1/\beta}$，适用于 $0 < K < (2\gamma)^{-1/\beta}$。

(T3′) （在 (S3) 的情形下） $T_n = K \cdot (\log\ n/\log\log\ n)^{1/\beta}$，适用于 $0 < K < (2\gamma/\beta)^{-1/\quad\beta}$.

速度 (T1′) 是最优的，因为它平衡了渐近偏差 T_n^{-4k}和渐近方差 $n^{-1}T_n^{2\beta+d}$。然而，在超光滑性和对数超光滑性的情形下，不存在能使相应渐近偏差与方差大小相当的速度。这是因为 T_n 也分别出现在指数 $\exp(2\gamma \cdot T_n^{\beta})$ 和 $\exp(2\gamma \cdot T_n^{\beta}(\log\ T_n - \xi_1))$ 中。(T2′) 和 (T3′) 中给出的 T_n 取值带有特定的常数因子 K，并需满足相应约束。K 的上界实际上是阈值：超过这些阈值后，$n^{-1}T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma \cdot T_n^{\beta})$ 和 $n^{-1}T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma \cdot T_n^{\beta}(\log\ T_n - \xi_1))$ 分别发散至无穷大；而当 K 小于这些阈值时，它们则由 T_n^{-4k} 控制。我们注意到，在欧几里得超光滑情形下，带宽也受到类似约束；例如，参见 [19]，中的定理1，以及 [21]，中的定理1和注 1。

推论1。 假设条件 *(A1)-(i)* 成立。则，

(a) 在 *(S1)-(i)* 和 *(T1′)* 条件下，有

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 d\nu(x) = O_p(n^{-4k/(4k+2\beta+d)}).$$

在附加条件 *(A1)- (ii)* 和 *(A2)* 下，$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{}m(x) - m(x)|^2 d\nu(x)$ 也具有相同的收敛速率。

(b) 在 *(S2)-(i)* 和 *(T2′)* 条件下，有

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 d\nu(x) = O_p((\log n)^{-4k/\beta}).$$

在附加条件 *(A1)- (ii)* 和 *(A2)* 下，$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{}m(x) - m(x)|^2 d\nu(x)$ 也具有相同的速率。

(c) 在 *(S3)-(i)* 和 *(T3′)* 条件下，有

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 d\nu(x) = O_p((\log n/\log\log n)^{-4k/\beta}).$$

在附加条件 *(A1)-(ii)* 和 *(A2)* 下，$\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{m}(x) - m(x)|^2 d\nu(x)$ 的收敛速率相同。

推论 1 中 (a) 的收敛速率随着维数 d 增大而变慢，这是众所周知的维数灾难现象所致。然而，推论 1 中 (b) 和 (c) 的收敛速率与 d 无关，因为这些速率由渐近偏差 T_n^{-4k}主导，而该偏差与 d无关。我们注意到， [19] 和 [21] 在欧几里得超光滑情形下的欧几里得测量误差问题中，也得到了类似的对数型误差收敛速率。

3.3 渐近分布

本节讨论密度估计量和回归估计量的渐近分布。近期， [32] 推导了其在紧致连通李群上的反卷积估计量的一些渐近分布。我们注意到， $\mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{S}^3$ 是这类李群。然而，据我们所知，在测量误差问题的文献中，尚未有人推导出 $\mathbb{S}^d$ 在$d = 2$ 和 $d \geq 4$ 条件下的渐近分布。

$\hat{}$ 我们首先推导 f_X 的渐近分布。在陈述结果之前，我们先介绍一个高层次条件。在以下高层次条件中，对于两个正数列 a_n 和 b_n， $a_n \gtrsim b_n$ 意味着存在一个常数 $c > 0$，使得对所有 n 都有 $a_n \geq c \cdot b_n$。我们还以显然的方式定义 $a_n \lesssim b_n$。

(B1)（在 (S1) 的情形下）存在一个常数 $0 \leq q \leq d$，使得对于每个 $x \in \mathbb{S}^d$，E((Re($K_{T_n}$$(x, Z)$))^2) $\gtrsim T_n^{2\beta+q}$。

(B2)（在 (S2) 的情形下）存在一个常数 $0 \leq q \leq d$，使得对于每个 $x \in \mathbb{S}^d$ 和 $0 < \eta < 1$, E((Re($K_{T_n}(x, Z)$))^2) $\gtrsim T_n^{2\alpha+q}$exp$(2\gamma(\eta \cdot T_n)^\beta)$。

(B3)（在 (S3) 的情况下）存在常数 $0 \leq q \leq d$ 和 $\zeta \in \mathbb{R}$，使得对每个$x \in \mathbb{S}^d$和 $0 < \eta < 1$, E((Re($K_{T_n}(x,\ Z)$))^2) $\gtrsim T_n^{2\alpha+q}$exp$(2\gamma(\eta \cdot T_n)^\beta$(log $T_n - \zeta$))。

条件 (B1)-(B3) 中 $\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,\ Z))^2\big)$ 的下界，源于 $\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,\ Z)))^2)$ 的上界，其量级为

$$T_n^{2\beta+d},\quad T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma\cdot T_n^{\beta})\quad \text{or}\quad T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma\cdot T_n^{\beta}(\log T_n-\zeta))$$

取决于光滑性情形。验证含有 $q=d$ 的 (B1)-(B3) 对于构造关于 f_X 和 m的渐近置信区间尤为重要。下一节中，我们将针对 $d\in\{1,2\}$ 和各种 f_U 对其进行验证。在 (B1)-(B3) 中设定取值范围 $0\le q\le d$，以增强灵活性。我们还提供了更灵活的选择方式，可以选择 T_n，而不必局限于 (T1′)-(T3′) 中的特定值。以下灵活的速率涵盖了 (T1′)-(T3′) 中的速率。

(T1″) $T_n\asymp n^p$，对于某个 $0<p<1/(2d-q)$，其中 q 是 (B1 中的常数).

(T2″) $T_n\lesssim(\log n)^{1/\beta}$，其中 β 属于 (S2)。

(T3″) $T_n\lesssim(\log\ n/\log\log\ n)^{1/\beta}$，其中 β 属于 (S3)。

定理 2。 假设 *(2.10)* 中的傅里叶-拉普拉斯级数逐点收敛于 f_X。那么，在条件 *(S1)-(i)*+*(T1″)*+*(B1)*、*(S2)-(i)*+*(T2″)*+*(B2)* 和 *(S3)-(i)*+*(T3″)*+*(B3)* 中任一条件下，对所有 $x\in\mathbb{S}^d$，结论成立

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\hat f_X(x)-f_X(x)-\big(\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))-f_X(x)\big)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

我们注意到，定理2 中关于傅里叶-拉普拉斯级数的条件弱于命题 4中的相应条件。现在，我们研究$\hat{}m$ 在普通光滑情形下的渐近分布。推导其在超光滑和对数超光滑情形下的渐近分布存在技术难题。问题在于

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))\cdot(\hat f_X(x)-f_X(x))}{\sqrt{\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)}}=o_p(1)\tag{3.1}$$

在超光滑和对数超光滑情形下不成立。（3.1）是证明中的重要部分；更多详情请参见定理1证明之后紧接着的注释3 。对于$\hat{}m$ 在普通光滑情形下的渐近分布，我们增加一个条件。

(B4) $\mathrm{E}(|Y|^{2+\delta}|X=\cdot)$ 在 $\mathbb{S}^d$ 上有界，其中某个 $\delta>0$ 成立，并且 $\mathrm{E}(\epsilon^2|X=\cdot)$ 在 $\mathbb{S}^d$ 上有正的下界。

条件 (B4) 是非参数回归中的标准正则性条件。对于普通光滑情形，我们还考虑了 T_n 上一个新的灵活范围。以下基于 (S1) 中的常数 β 和 (A1) 中的常数 k 给出的范围涵盖了 (T1′) 中的速度。

(T1‴) $T_n \asymp n^p$ 对于某个 $1/(2\beta+d+8k) \le p < 1/(2\beta+2d)$。

注意，(T1‴) 中 p 的取值范围是有效的，因为 (A1) 中的 k 满足 $k > d/4$。该范围内的上界 $1/(2\beta+2d)$ 是使 T_n 满足 (T1) 所必需的。为陈述下一个定理，我们将与 $\mathbb{S}^d$ 相关的拉普拉斯-贝尔特拉米算子记为 $\Delta_{\mathbb{S}^d}$（作用于 $\mathbb{S}^d$ 上二次连续可微函数的二阶微分算子），并将 $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ 复合 s 次记为 $\Delta^s_{\mathbb{S}^d}$。注意，若函数 $f: \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{S}^d$ 上 $2s$ 次连续可微，则函数 $\Delta^s_{\mathbb{S}^d}(f): \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ 有定义，且在 $\mathbb{S}^d$ 上连续。

定理 3。 假设条件 *(S1)-(i)*、*(A1)*、*(A2)-(i)*、带有 $q = d$ 的 *(B1)*、*(B4)* 和 *(T1‴)* 均成立，且 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(f_X)$ 与 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(m \cdot f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数在 $\mathbb{S}^d$ 上绝对收敛。则对所有 $x \in \mathbb{S}^d$，有：

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\hat{m}(x) - m(x) - \mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y - m(x)))/f_X(x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y - m(x)))}/f_X(x)} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

定理 3 也适用于一般的 q（在 (B1) 中），即使 (A1) 和 (T1‴) 的形式更复杂；不过，为简洁起见，我们只陈述带有 $q = d$ 的情形。关于定理 3中绝对收敛的条件，我们回顾一下：若函数 $f: \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ 具有 $2s$ 阶连续可微性（其中 $s > d/4$），则其傅里叶-拉普拉斯级数绝对收敛。然而，对于某些 d，存在弱得多的充分条件。例如，定义在 $\mathbb{S}^1$ 上的函数的傅里叶-拉普拉斯级数绝对收敛，只要该函数是 Hölder 连续的且指数大于 1/2，或者该函数有界变差且是正指数的 Hölder 连续函数；参见 ¨。¨ [36]。

4 渐近置信区间

在本节中，我们验证某些情形下的高层次条件 (B1)-(B3)，并为 $q = d$ 提供两类渐近置信区间，适用于 f_X 和 m。一类基于定理 2 和 3给出的渐近正态性，另一类则基于经验

似然。对于第一类，我们将定理 2 分子中的偏差 $\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))\big)-f_X(x)$ 和定理 3 分子中的偏差 $\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}\big(K_{T_n}(x,Z)\big)\big(Y-m(x)\big)\big)/f_X(x)$ 估计为零。这是自然的选择，因为将 $f_X(x)$ $=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))$ 代入 $\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))\big)$ 和 $f_X(x)$，会分别得到 $\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))\big)-f_X(x)$ 的零估计；而将 $0=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\big(K_{T_n}(x,Z_i)\big)\big(Y_i-\hat{}m(x)\big)$ 代入 $\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}\big(K_{T_n}(x,Z)\big)\big(Y-m(x)\big)\big)$，则会得到 $\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}\big(K_{T_n}(x,Z)\big)\big(Y-m(x)\big)\big)/f_X(x)$ 的零估计。

为了证明在构造第一类渐近置信区间时将偏差估计为零是合理的，必须验证方差大于偏差的平方。在 f_X 的情形下，这意味着需要证明

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\mathrm{E}\big(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))\big)-f_X(x)}{\sqrt{\mathrm{E}\big(\big(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))\big)^2\big)}}=o(1) \tag{4.1}$$

因为$\mathrm{E}\big(\big(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))\big)^2\big)$ 决定了$\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))$的大小；参见定理4的证明。为验证（4.1），我们需要分母的精确下界。通过验证满足 $q=d$ 的 (B1)-(B3) 即可做到。

4.1 (B1)-(B3) 的验证

本节将验证，对于 $q=d$，$\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)$ 达到 (B1)-(B3) 中给出的下界。在欧几里得非参数统计中，求得此类量下界的一种常见方法是通过泰勒展开找到渐近主导项。然而，由于我们的问题不存在合适的泰勒展开，因此验证 (B1)-(B3) 并非易事，不仅要考虑最大的 $q=d$，还要考虑最小的 $q=0$。

我们首先证明，当 $q=d$ 时，$\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,\ Z)|^2)$ 达到 (B1)-(B3) 中的下界，然后考察 $\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,\ Z))^2)$ 的下界。为此，我们需要一个附加条件。令 $\sigma_{\min}((\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1})$ 表示 $(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}$ 的最小奇异值。

(C) 存在正常数 c，使得对所有 $l\in\mathbb{N}_0$，$\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\le c\,\sigma_{\min}((\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1})$。

容易验证，对于 $\mathbb{S}^1$ 上任意 f_U，条件（C）都以 $c=1$ 成立。对于满足 $\tilde{\phi}^l(f_U)$ $=s_l\cdot I_{N(d,l)}$ 的任意 f_U，它也以 $c=1$ 成立，其中某个 $0\neq s_l\in\mathbb{R}$。例如

$d \geq 2$ 的这类分布包括拉普拉斯分布、罗森塔尔分布、高斯分布，以及我们在 (S1)-(S3) 后面立即介绍的无误差分布。

引理 1. 假设条件 *(A2)-(i)* 和 *(C)* 成立。那么，对于每个 $j \in \{1,2,3\}$，在 *(Sj)-(ii)* 下，$\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2)$ 在 $q = d$ 时达到 *(Bj)* 给出的下界。

引理 1 给出了 $\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2)$ 的下界。然而，由于

$$\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2) = \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2) + \mathrm{E}((\mathrm{Im}(K_{T_n}(x,Z)))^2) \geq \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))^2)),$$

其中 $\mathrm{Im}(K_{T_n}(x,Z))$ 是 $K_{T_n}(x,Z)$ 的虚部。引理 1 并未给出 $\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))^2))$ 的下界。这带来了另一个困难。我们最初尝试通过证明 $\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2) \geq \mathrm{E}((\mathrm{Im}(K_{T_n}(x,Z)))^2)$ 始终成立来解决这一问题，但由于计算困难而未能成功。相反，我们设法证明了

$$\int_{\mathbb{S}^d} \mathrm{Re}(K_{T_n}(x,z))^2 d\nu(z) \geq \int_{\mathbb{S}^d} \mathrm{Im}(K_{T_n}(x,z))^2 d\nu(z) \tag{4.2}$$

在某些情形下成立。由于 $\int_{\mathbb{S}^d} |K_{T_n}(x,z)|^2 d\nu(z)$ 也达到了与 $\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2)$ 相同的下界（如引理 1 的证明所示），证明 (4.2) 即可得出 $\int_{\mathbb{S}^d} \mathrm{Re}(K_{T_n}(x,z))^2 d\nu(z)$ 也达到相同的下界。结合假设 $\inf_{z\in\mathbb{S}^d} f_Z(z) > 0$，即可得到 $\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)$ 的所需下界。我们注意到，关于密度 f_Z of Z 的后一假设可由 (A2)-(i) 推出。(4.2) 成立的情形如下：

(G1) $d = 1$.

(G2) $d = 2$ 和 $\tilde{\phi}^l(f_U) = s_l \cdot I_{N(d,l)}$，对某个 $0 \neq s_l \in \mathbb{R}$ 以及所有 $l \in \mathbb{N}_0$.

对于（4.2），在（G1）-（G2）的情形下进行验证，需要基于球谐函数理论开展复杂计算。我们注意到，（G1）-（G2）在实际应用中是最重要的情形，涵盖圆形数据和球面数据。满足（G2）的 U 分布包括但不限于 SO（3）上的拉普拉斯、罗森塔尔、高斯和无误差分布。我们还注意到，（G1）-（G2）满足条件（C）。因此，在条件（A2）-（i）下，对于（G1）-（G2）的情形，$q = d$ 成立。

引理 2。 假设条件（*A2*）-（*i*）以及（*G1*）或（*G2*）之一成立。那么，对于每个 $j \in \{1,2,3\}$，在（*Sj*）-（*ii*）下，（*Bj*）以 $q = d$ 成立。

尽管由于计算困难，我们仅针对上述情形验证了 (B1)-(B3) 与 $q = d$，但我们坚信这些条件对一般的 $\mathbb{S}^d$ 和 f_U 也成立。验证时，可以采用特殊计算技术，或使用一种无需直接计算的其他方法，但目前我们尚不了解这类方法。我们将此留作一个开放问题。

4.2 基于渐近正态性的置信区间

本节基于定理 2和 3，在条件 (B1) 和 $q = d$下，为普通光滑情形构造渐近置信区间。我们仅讨论普通光滑情形，因为在超光滑和对数超光滑情形下，(4.1) 不满足 T_n 在 (T2′) 和 (T3′) 中的收敛速度；相关讨论见补充材料中的注 1 。即使在欧几里得测量误差问题中，由于欧几里得超光滑情形存在诸多技术困难，研究欧几里得普通光滑情形也比研究欧几里得超光滑情形更为常见。

为了构造渐近置信区间，我们需要估计定理 2–3 中未知的偏差和方差。偏差为 $\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))) - f_X(x)$ 和 $\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y - m(x)))/f_X(x)$，方差为 $s_1^2(x)$ 和 $s_2^2(x)$，其中

$$
\begin{aligned}
s_1(x) &= \big(\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))\big)^{1/2}, \\
s_2(x) &= \big(\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y - m(x)))\big)^{1/2}/f_X(x).
\end{aligned}
$$

我们将偏差估计为零，正如第4节开头所示。对于

方差，我们使用以下自然估计量：

$$\begin{aligned}\hat{s}_1^2(x) =& n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i)))^2-(\hat{f}_X(x))^2,\\ \hat{s}_2^2(x) =& \hat{f}_X^{-2}(x)\cdot\Bigg(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\hat{m}(x)))^2\\ &-\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\hat{m}(x))\right)^2\Bigg)\\ =& \hat{f}_X^{-2}(x)\cdot n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\hat{m}(x)))^2.\end{aligned}$$

定理 4。 假设条件 *(S1)-(i)*、*(A1)-(i)*、*(T1′)* 和 *(B1)* 满足 $q=d$，并且 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数在 $\mathbb{S}^d$ 上绝对收敛。那么，对所有 $x\in\mathbb{S}^d$，

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\hat{f}_X(x)-f_X(x)}{\hat{s}_1(x)}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

*He*度，一个针对 $f_X(x)$ 的 $\times 100\%$ 渐近置信区间为$(1-\alpha)$ 给出 y

$$\left(\hat{f}_X(x)-z_{\alpha/2}\frac{\hat{s}_1(x)}{\sqrt{n}},\hat{f}_X(x)+z_{\alpha/2}\frac{\hat{s}_1(x)}{\sqrt{n}}\right).$$

定理 5。 假设条件 *(S1)-(i)*、*(A1)*、*(A2)-(i)*、*(T1′)*、*(B4)* 和 *(B1)* 满足 $q=d$，并且 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(f_X)$ 及 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(m\cdot f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数在 $\mathbb{S}^d$ 上绝对收敛。那么，对所有 $x\in\mathbb{S}^d$，

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\hat{m}(x)-m(x)}{\hat{s}_2(x)}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

*Hen*度，一个针对 $m(x)$ 的 $\times 100\%$ 渐近置信区间为$(1-\alpha)$ 给出 y

$$\left(\hat{m}(x)-z_{\alpha/2}\frac{\hat{s}_2(x)}{\sqrt{n}},\hat{m}(x)+z_{\alpha/2}\frac{\hat{s}_2(x)}{\sqrt{n}}\right).$$

4.3 基于经验似然的置信区间

基于经验似然构造的渐近置信区域称为经验似然置信区域，是基于渐近正态性构造的置信区域的有用替代方案。经验似然置信区域的优点在于，其形状由数据决定、在变换下保持不变，而且通常无需估计

方差。关于经验似然方法的介绍，参见 [48]。关于经验似然方法的广泛综述和一般理论，分别见 [9] 和 [30],。为构造针对 f_X 和 m的经验似然置信区域，我们定义$F_{f_X}(Z_i,\theta;\ x)\ =\ \mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))\ -\theta$和 $F_m(Z_i,Y_i,\theta;\ x)\ =\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\theta)$，其中 $\theta\in\mathbb{R}$和 $x\in\mathbb{S}^d$。我们还定义了在 x 处相应的经验似然比函数：

$$\mathrm{EL}_{f_X}(\theta;x)=\max\left\{\prod_{i=1}^n(nw_i):w_i>0,\sum_{i=1}^n w_i=1,\sum_{i=1}^n w_iF_{f_X}(Z_i,\theta;x)=0\right\},$$
$$\mathrm{EL}_m(\theta;x)=\max\left\{\prod_{i=1}^n(nw_i):w_i>0,\sum_{i=1}^n w_i=1,\sum_{i=1}^n w_iF_m(Z_i,Y_i,\theta;x)=0\right\}.$$

这里，我们将空集的最大值定义为零。然后，对于某些正常数 c_{f_X} 和 c_m，分别定义相应的经验似然置信区域：$\{\theta\in\mathbb{R}:\mathrm{EL}_{fx}(\theta;\ x)\ \geq\ c_{f_X}\}$和 $\{\theta\in\mathbb{R}:\mathrm{EL}_m(\theta;x)\ \geq\ c_m\}$。为确定这些常数，我们给出经验似然比函数的渐近分布。为此，我们采用以下条件。

(E1) $P(\mathrm{EL}_{fx}(f_X(x);\ x)\ >0)\ \to 1$对每个 $x\in\mathbb{S}^d$均成立。

(E2) $P(\mathrm{EL}_m(m(x);\ x)\ >0)\ \to 1$对每个 $x\in\mathbb{S}^d$均成立。

条件 (E1)–(E2) 是经验似然技术中的基本条件。我们注意到，只要至少存在两个数据点 Z_i 和 Z_j，使得 $F_{f_X}(Z_i,f_X(x);\ x)\ >0$且 $F_{f_X}(Z_j,f_X(x);\ x)\ <0$，$\mathrm{EL}_{fx}(f_X(x);\ x)\ >0$就成立；只要至少存在两个数据点 (Z_i,Y_i) 和 (Z_j,Y_j)，使得 $F_m(Z_i,Y_i,m(x);x)\ >0$ 且 $F_m(Z_j,Y_j,m(x);x)\ <0$，$\mathrm{EL}_m(m(x);\ x)\ >0$ 就成立。我们也仅讨论普通光滑情形，因为其中存在类似的技术困难。下文中，$\chi^2_\alpha(1)$ 表示自由度为 1 的卡方分布 $\chi^2(1)$ 的 $(1-\alpha)$ 分位数。

定理 6. 假设条件 *(S1)-(i)*、*(A1)-(i)*、*(T1′)*、*(E1)* 和 *(B1)* 在 $q=d$ 下成立，且 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数在 $\mathbb{S}^d$ 上绝对收敛。那么，对于所有 $x\in\mathbb{S}^d$，

$$-2\log\mathrm{EL}_{f_X}(f_X(x);x)\xrightarrow{d}\chi^2(1).$$

因此，$1-\alpha$（$1-\alpha$）$\times 100\%$ f_X的渐近置信区域为 $\{\theta\in\mathbb{R}:-2$对数经验似然f_X（θ；x）$\leq\chi^2_\alpha$（1）$\}=\{\theta\in\mathbb{R}:$经验似然$f_X$（$\theta$；$x$）$\geq\exp$（$-\chi^2_\alpha$（1）/2）$\}$。

定理 7。 假设条件 *(S1)-(i)*、*(A1)*、*(A2)-(i)*、*(T1′)*、*(B4)*、*(E2)* 和 *(B1)* 连同 $q = d$ 均成立，并且 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数以及 $\Delta^k_{\mathbb{S}^d}(m \cdot f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数在 $\mathbb{S}^d$ 上绝对收敛。那么，对于所有 $x \in \mathbb{S}^d$，均有

$$-2\log \mathrm{EL}_m(m(x); x) \xrightarrow{d} \chi^2(1).$$

因此，$m(x)$ 的 $\times\ 100\%$ 渐近置信区域可表示为 $\{\theta \in \mathbb{R} : -2\log \mathrm{EL}_m(\theta;\, x) \le \chi^2_\alpha(1)\} = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathrm{EL}_m(\theta; x) \ge \exp(-\chi^2_\alpha(1)/2)\}$。

我们注意到，定理 6 和定理 7 中的渐近置信区域实际上是区间。这是因为对于 $0 < t < 1$，$t\theta_1 + (1-t)\theta_2$ 属于渐近置信区域的条件是 θ_1 和 θ_2 属于这些区域。然而，它们不一定关于 $f_X(x)$ 或 $m(x)$ 对称。为了计算渐近置信区域，我们需要计算 $\mathrm{EL}_{f_X}(\theta;\, x)$ 和 $\mathrm{EL}_m(\theta;\, x)$。拉格朗日乘子法得出，唯一的最大化权重 w_i 分别为 $\mathrm{EL}_{f_X}(\theta;\, x)$ 和 $\mathrm{EL}_m(\theta;\, x)$ 对应的 $1/(n(1 + \lambda_{f_X} F_{f_X}(Z_i, \theta;\, x)))$ 和 $1/(n(1 + \lambda_m F_m(Z_i, Y_i, \theta;\, x)))$，其中 $\lambda_{f_X} \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda_m \in \mathbb{R}$ 是以下方程的解

$$\sum_{i=1}^n \frac{F_{f_X}(Z_i, \theta; x)}{1 + \lambda_{f_X} F_{f_X}(Z_i, \theta; x)} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n \frac{F_m(Z_i, Y_i, \theta; x)}{1 + \lambda_m F_m(Z_i, Y_i, \theta; x)} = 0.$$

5 有限样本性能

5.1 模拟研究

本节展示两项模拟研究的结果。由于这一问题在实践中十分重要，也是我们关注的重点，我们对 $\mathbb{S}^2$ 存在测量误差的情形进行了回归分析。在第一项模拟研究中，我们考察了回归估计量$\hat{m}$的估计性能。由于目前没有专门针对这一问题设计的其他方法，我们将$\hat{m}$ 与针对无误差情形设计的回归估计量进行了比较。具体而言，我们采用了按（2.15）定义的朴素回归估计量$\hat{m}^{\text{naive}}$，其中（2.15）中的 X_i 被 Z_i替换，以考察使用K_{T_n} 而非$K^*_{T_n}$的影响。我们回顾一下，$K^*_{T_n}$ 是由[29] 针对无误差情形提出的。在第二项模拟研究中，我们比较了定理5 和7中为 m 构造的两类渐近置信区间，即基于渐近正态性（AN）的置信区间和基于经验似然（EL）的置信区间

。我们回顾一下，这些都是目前针对该问题可用的置信区间。

在两项模拟研究中，我们生成了 X，其服从定义在 $\mathbb{S}^2$上的冯·米塞斯-费希尔分布，浓度参数为 0.1，平均方向为 $(1,1,1)^\top/\sqrt{3}$。至于U 在 $SO(3)$上的分布，对于普通光滑情形（S1），我们采用拉普拉斯分布，其中 $\lambda = 0.5$；对于超光滑情形（S2），采用高斯分布，其中 $\lambda = 0.5$；对于对数超光滑情形（S3），采用冯·米塞斯-费希尔分布，其中 $\lambda = 2$ 且 $A = I_3$。定义在 $SO(3)$ 上的拉普拉斯、高斯和冯·米塞斯-费希尔分布的定义见第 3.1节。我们根据模型生成了 Y

$$Y = (\cos\varphi_X + \sin\varphi_X)\sin\theta_X + \cos\theta_X + \epsilon,$$

其中 $\varphi_X \in [0, 2\pi)$ 和 $\theta_X \in [0, \pi)$ 是满足以下条件的角度

$$X = (\cos\varphi_X \sin\theta_X, \sin\varphi_X \sin\theta_X, \cos\theta_X)^\top,$$

且 ϵ 是均值为零、标准差为 0.5 的正态随机变量。我们通过 5 折交叉验证选择了T_n，并重复生成 $\{(Y_i,\ U_iX_i)\colon\ 1 \le i \le n\}$，其中$n = 250$，且对于 $R = 200$，取 500 次。

在第一个模拟研究中，我们比较了如下定义的积分平方偏差（ISB）、积分方差（IV）和积分均方误差（IMSE）：

$$\begin{aligned} \mathrm{ISB} &= \int_{\mathbb{S}^2} \left(R^{-1} \sum_{r=1}^{R} \tilde{m}^{(r)}(x) - m(x) \right)^2 d\nu(x), \\ \mathrm{IV} &= R^{-1} \sum_{r=1}^{R} \int_{\mathbb{S}^2} \left(R^{-1} \sum_{s=1}^{R} \tilde{m}^{(s)}(x) - \tilde{m}^{(r)}(x) \right)^2 d\nu(x), \\ \mathrm{IMSE} &= \mathrm{ISB} + \mathrm{IV} = R^{-1} \sum_{r=1}^{R} \int_{\mathbb{S}^2} (\tilde{m}^{(r)}(x) - m(x))^2 d\nu(x), \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中，$\tilde{m}^{(r)}(x)$是从针对$1 \le r \le R$的第 r次重复所获得的样本中计算出的$\hat{m}(x)$或$\hat{m}^{\mathrm{naive}}(x)$。在第二项模拟研究中，对于每个 $x \in \mathcal{G}$ 和$\alpha \in \{0.05, 0.1\}$，我们计算了 R 置信区间的覆盖率 $C_{1-\alpha}(x)$和平均长度 $L_{1-\alpha}(x)$，其置信水平为（$1-\alpha$）$\times 100\%$。其中，$\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{S}^2$的稠密网格。随后，我们比较了$|\mathcal{G}|^{-1}\sum_{x\in\mathcal{G}} C_{1-\alpha}(x)$和$|\mathcal{G}|^{-1}\sum_{x\in\mathcal{G}} L_{1-\alpha}(x)$，其中 $|\mathcal{G}|$ 表示 $\mathcal{G}$的基数。

表1： 基于 $R = 200$ 个蒙特卡罗样本，在各情景（S1）-（S3）下$\hat{}m$ 的积分平方偏差（ISB）、积分方差（IV）和积分均方误差（IMSE）。

		(S1)		(S2)		(S3)	
n	准则	$\hat{m}$	$\hat{m}^{\text{朴素}}$	$\hat{m}$	$\hat{m}^{\text{朴素}}$	$\hat{m}$	$\hat{m}^{\text{朴素}}$
250	ISB	0.04	1.40	0.04	0.61	0.07	0.95
	IV	1.08	0.32	0.54	0.31	0.67	0.30
	IMSE	1.12	1.72	0.58	0.92	0.74	1.25
500	ISB	0.04	1.39	0.04	0.61	0.06	0.94
	IV	0.39	0.15	0.27	0.16	0.34	0.17
	IMSE	0.43	1.54	0.31	0.77	0.39	1.11

表2： 基于 $R = 200$ 个蒙特卡罗样本，在情景（S1）下， m 的（$1 - \alpha$） $\times$ 100%置信区间的平均覆盖率 $|\mathcal{G}|^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} C_{1-\alpha}(x)$ （Cov）和平均长度 $|\mathcal{G}|^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} L_{1-\alpha}(x)$ （Len）。

		Cov		Len	
$(1-\alpha)$	n	AN	EL	AN	EL
0.9	250	0.87	0.86	0.77	0.84
	500	0.90	0.89	0.55	0.57
0.95	250	0.91	0.91	0.92	1.01
	500	0.95	0.94	0.66	0.69

表1 展示了第一项模拟研究的结果。积分均方误差值表明， $\hat{}m$ 的表现优于$\hat{}m^{\text{naive}}$。尤其是， $\hat{}m$ 的积分平方偏差值始终远小于$\hat{}m^{\text{naive}}$的相应值，这可由$\hat{}m$具有无偏评分性质来解释，正如命题3所示。尽管这两种估计量的误差都会随着

随着样本量增加，$\hat{m}$的下降速度远快于$\hat{m}^{\text{naive}}$。这表明我们的回归估计量是合理的估计量。表2展示了第二项模拟研究的结果。结果表明，随着样本量增加，两种方法通常都能获得更高的覆盖率和更短的置信区间。这表明两种方法都是合理的。表中还显示，基于AN的区间比基于EL的区间具有更高的覆盖率和更短的长度。这说明基于AN的方法可能是比基于EL的方法更好的选择。不过，后者也是一个不错的替代方法。

5.2 真实数据分析

我们分析了 R 包 'rotasym' 中的"sunspots births"数据集（[25]）。该数据集在 [24] 中用于检验太阳黑子的旋转对称性。太阳黑子是太阳上的暂时性现象，表现为比周围区域更暗的斑点。由于太阳磁场通量阻碍了对流，太阳黑子区域的温度比周围区域低。太阳黑子是研究太阳活动的重要来源，其数量和位置会影响地球的长期气候、电信网络、飞机导航系统和航天器等。因此，研究太阳黑子的分布十分重要。

太阳黑子通常成群出现。数据集"太阳黑子出生数据"包含$n = 51,303$组于1872年至2018年间测得的新生太阳黑子群。每组观测数据包含该组太阳黑子的平均经度和纬度。然而，太阳黑子通常只持续数小时至数天，并会在太阳表面移动。此外，太阳黑子的大小在其生命周期内不断变化，已知其直径范围为16公里至160,000公里。由于这些因素，加上测量设备的技术局限，准确测量太阳黑子的出生位置并不容易。事实上，众所周知，太阳黑子面积的观测值可能含有测量误差（例如 [2]）。因此，我们可以假设观测到的平均经度和纬度含有测量误差。不过，鉴于测量误差的程度可能不太高，我们采用 $SO(3)$ 中的拉普拉斯分布作为测量误差分布，并根据式（2.12）定义的反卷积密度估计量，估计太阳黑子出生位置的密度。我们取了四个值：0、$\sqrt{0.05}$、$\sqrt{0.1}$ 和 $\sqrt{0.15}$ 作为分布参

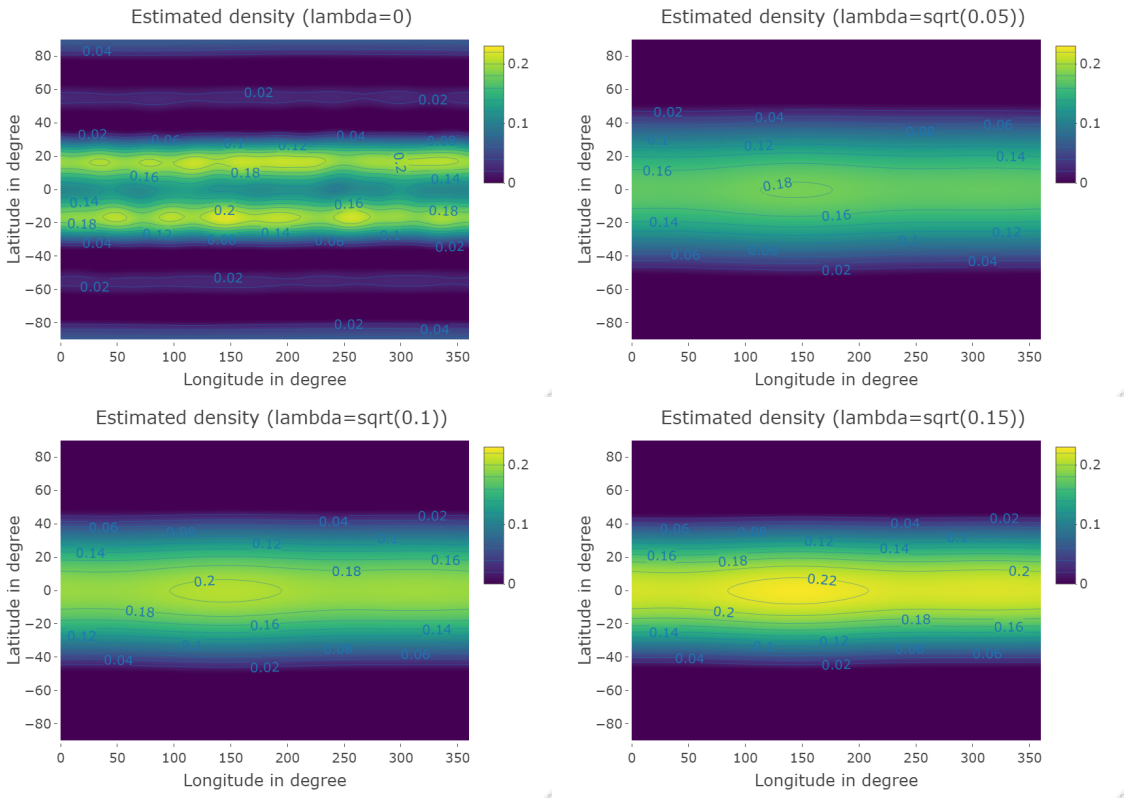

图1：基于所提方法并采用 λ =0、$\sqrt{0.05}$、$\sqrt{0.1}$ 和 $\sqrt{0.15}$得到的估计密度等高线图。所有图的色标均相同。

数 λ，以考察参数的选择如何影响所得的密度估计。我们注意到，$\lambda = 0$ 对应于未考虑测量误差的朴素密度估计量。我们选取使经典最小二乘交叉验证准则（[53], [6]）达到最小值的平滑参数 T_n。这种比较方案曾用于 [18] 含污染的 $\mathbb{S}^1$值数据。在本数据分析中，我们还纳入了定理 4 和 6中研究的区间估计。我们注意到，在实数集 $\mathbb{S}^2$ 上的反卷积密度估计相关文献中，尚未研究实数集 $\mathbb{S}^2$上密度的渐近分布和渐近置信区间。

估计密度的等高线图见图1。图中显 λ 示，随着其增加，估计密度的质量向太阳赤道移动。众所周知，太阳在赤道处的自转速度最快，并且随着纬度向北或向南增加而减小。由于太阳黑子被认为是快速自转导致太阳磁场扭曲的结果，因此，当纬度趋近于零时，真实密度可能具有更大的质量。分布也自然地

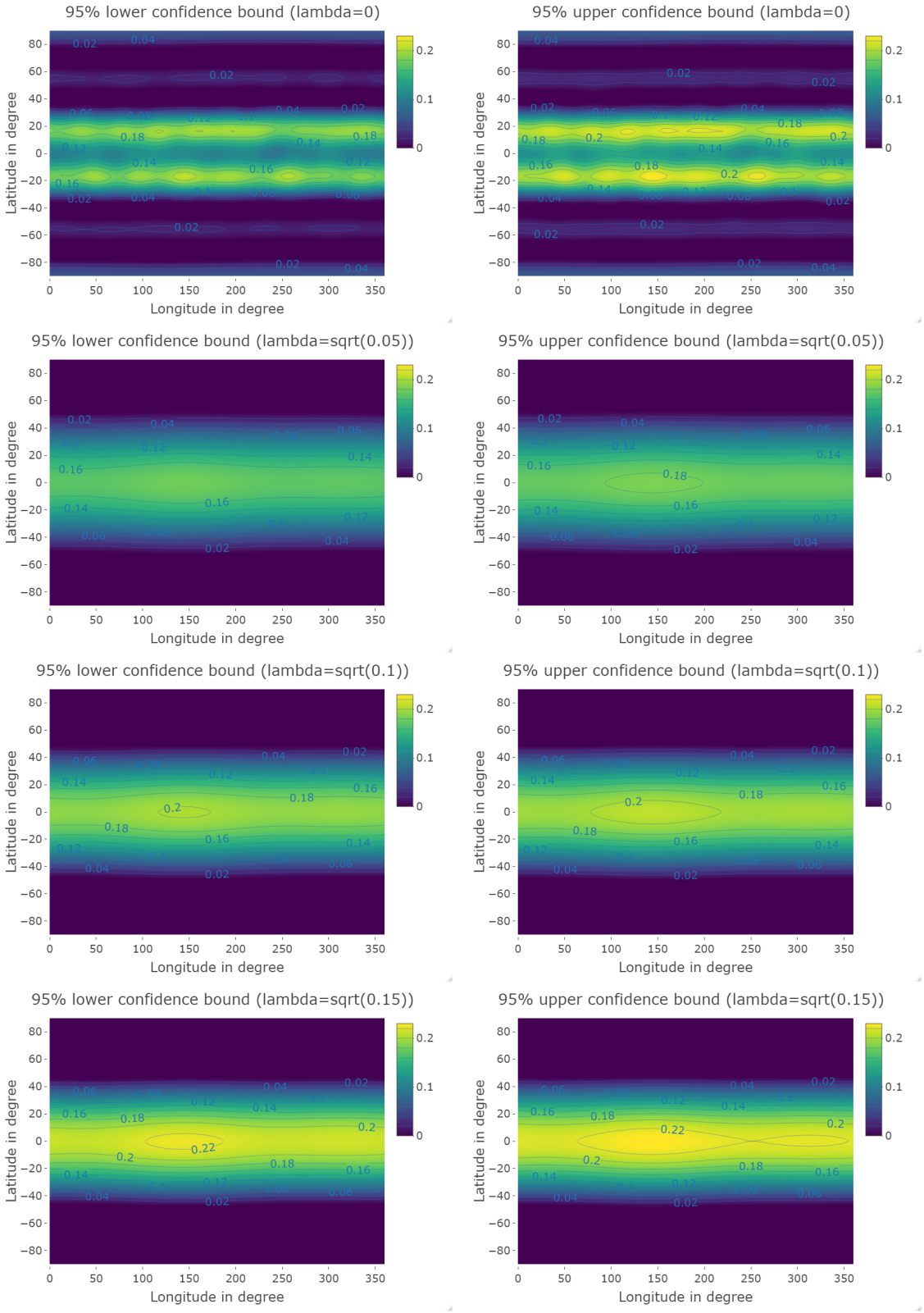

图2：基于渐近正态性得到的真实密度95%点置信区间的等高线图，分别对应 $\lambda = 0$、$\sqrt{0.05}$、$\sqrt{0.1}$ 和 $\sqrt{0.15}$。所有图的色标均相同。

太阳黑子的分布关于赤道对称，密度水平也因同样的原因呈水平状。这些都证明了针对 $\lambda > 0$ 的估计密度是有效的。

图2 展示了基于渐近正态性得到的真实密度95%逐点置信区间的等高线图。由于样本量较大，基于经验似然技术得到的相应等高线图与之几乎完全相同，因此未予展示。图2右侧的置信上界总体上比图1中的估计密度峰值更宽，而左侧的置信下界则呈现相反趋势。此外，每个置信区间的长度都很短，因此信息量很大。我们认为，这些结果为太阳黑子的分析提供了有用信息。

致谢

Jeong Min Jeon 的研究得到了韩国政府（MSIP）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：2020R1A6A3A03037314）以及欧洲研究委员会项目（2016—2021年，地平线2020/ERC资助协议编号：694409）的支持。Ingrid Van Keilegom 的研究得到了欧洲研究委员会项目（2016—2021年，地平线2020/ERC资助协议编号：694409）的支持。

参考文献

[1] Atkinson, K. 和 Han, W. (2012)。球谐函数与单位球面上的逼近：导论。施普林格出版社，柏林-海德堡。

[2] Baranyi, T., Gyori, L., Ludm´any, A.andCoffey, H. E.(2001).太阳黑子面积数据库的比较。《皇家天文学会月报》, **323**, 223-230.[3] Belomestny, D. and Goldenshluger, A. (2021). 在测量误差分布满足一般假设的情况下进行密度反卷积,《统计年鉴》, **49**, 615- 649.[4] Bertrand, A., Van Keilegom, I. and Legrand, C. (2019). 灵活的参数方法

在没有辅助数据的情况下估计经典测量误差方差。《生物统计学》,**75**, 297-307.[5] Boente, G., Gonz´alez-Manteiga, W. and Rodr´ıguez, D. (2009). 方向数据的拟合优度检验。《斯堪的纳维亚统计学杂志》, **41**, 259-275.[6] Bowman, A. W. (1984). 一种用于密度估计平滑的替代性交叉验证方法。*Biometrika*, **72**, 353-360.[7] Chakraborty, R. and Vemuri, B. C. (2019). 斯蒂费尔流形上的统计学：理论与应用。《统计年鉴》, **47**, 415-438.[8] Chang, T. (1989). 存在变量误差时的球面回归。《统计年鉴》, **17**, 293-306.[9] Chen, S. X. and Van Keilegom, I. (2009). 回归经验似然方法综述。*Test*, **18**, 415-447.[10] Chirikjian, G. S. (2012). 随机模型、信息论与李群，第*2*卷. Birkh¨auser Basel.[11] Cuesta-Albertos, J. A., Cuevas, A. and Fraiman, R. (2009). 关于方向数据和成分数据的基于投影的检验。《统计与计算》, **19**, 367-380.[12] Dattner, I., Reiß, M. and Trabs, M. (2016). 未知误差分布下反卷积中的自适应分位数估计。《伯努利》, **22**, 143-192.[13] Delaigle, A. (2014). 存在变量误差时的非参数核方法：估计量的构造与计算，以及如何避免常见错误。《澳大利亚与新西兰统计学杂志》, **56**, 105-124.[14] Delaigle, A., Fan, J. and Carroll, R. J. (2009). 针对变量误差问题的设计自适应局部多项式估计量。美国统计学会杂志, **104**, 348-359.[15] Delaigle, A., Hall, P. and Jamshidi, F. (2015). 非参数变量误差回归中的置信带。英国皇家统计学会杂志：*B*辑（统计方法论）, **21**, 169-184.

[16] Delaigle, A., Hall, P. 和 Meister, A.（2008）。关于重复测量下的反卷积。《统计年鉴》，**36**，665-685。[17] Efthimiou, C. 和 Frye, C.（2014）。*p*维球谐函数。世界科学出版有限公司。[18] Efromovich, S.（1997）。超光滑测量误差情况下的密度估计。《美国统计学会杂志》，**92**，526-535。[19] Fan, J.（1991a）。关于非参数反卷积问题的最优收敛速率。《统计年鉴》，**19**，1257-1272。[20]Fan, J.（1991b）。反卷积核密度估计量的渐近正态性。《*Sankhya*》，**53**，97-110。[21] Fan, J. 和 Truong, Y. K.（1993）。存在变量误差时的非参数回归。《统计年鉴》，**21**，1900-1925。[22] Gao, F., Huang, X.-Y., Jacobs, N. A. 和 Wang, H.（2015）。风速和风向观测的同化：真实观测实验的结果。*Tellus A*：动力气象与海洋学，**67**，27132。[23] Garc´ıa-Portugu´es, E., Crujeiras, R. M. 和 Gonz´alez-Manteiga, W.（2013）。方向-线性数据的核密度估计。《多元分析杂志》，**121**，152-175。[24] Garc´ıa-Portugu´es, E., Paindaveine, D. 和 Verdebout, T.（2020）。关于针对旋转对称性、对抗新型超球面分布的最优检验。《美国统计学会杂志》，**115**，1873-1887。[25] Garc´ıa-Portugu´es, E., Paindaveine, D. 和 Verdebout, T.（2021）。rotasym：超球面上的旋转对称性检验。R 包，版本 1.1.0。[26] Garc´ıa-Portugu´es, E., Van Keilegom, I., Crujeiras, R. M. 和 Gonz´alez-Manteiga, W.（2016）。线性-方向回归中的参数模型检验。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，**43**，1178-1191。

[27] Hall, P., Watson, G. S. 和 Cabrera, J.（1987）。球面数据的核密度估计。*Biometrika*，**74**，751-762。[28] Healy, D. M., Hendriks, H. 和 Kim, P. T.（1998）。球面反卷积。《多元分析杂志》，**67**，1-22。[29] Hendriks, H.（1990）。利用傅里叶展开估计黎曼流形上的概率密度。《统计年鉴》，**18**，832-849。[30] Hjort, N. L., McKeague, I. W. 和 Van Keilegom, I.（2009）。拓展经验似然的应用范围。《统计年鉴》，**37**，1079-1111。[31] Huckemann, S., Kim, P. T., Koo, J.-Y. 和 Munk, A.（2010）。双曲平面上的莫比乌斯反卷积及其在阻抗密度估计中的应用。《统计年鉴》，**38**，2465-2498。[32] Jeon, J. M., Park, B. U. 和 Van Keilegom, I.（2021）。针对非欧几里得响应变量和预测变量的加性回归。《统计年鉴》，**49**，2611-2641。[33] Jeon, J. M., Park, B. U. 和 Van Keilegom, I.（2022）。存在测量误差时李群上的非参数回归。《统计年鉴》（修订中）。[34] Johannes, J.（2009）。测量误差分布未知时的反卷积。《统计年鉴》，**37**，2301-2323。[35] Johannes, J. 和 Schwarz, M.（2013）。在误差分布未知时通过模型选择进行自适应圆周反卷积。《伯努利》，**19**，1576-1611。[36] Katznelson, Y.（2004）。调和分析导论。剑桥大学出版社。[37] Kalf, H.（1995）。关于任意维数下函数按球谐函数展开。比利时数学会通报，**2**，361-380。[38] Kim, P. T.（1998）。SO(N)上的反卷积密度估计。《统计年鉴》，**26**，1083-1102。

[39] Kim, P. T. (2000). 关于矩阵冯·米塞斯-费希尔分布的特征函数及其在 SO(N) 去卷积中的应用。载于：*Gin´e, E., Mason, D. M., Wellner, J. A.*（编）《高维概率 *II*》。概率进展，第 *47* 卷，Birkh¨auser，波士顿，MA。[40] Kim, P. T. 和 Koo, J.-Y. (2002). 最优球面反卷积。《多元分析杂志》，**80**，21-42。[41] Kim, P. T.、Koo, J.-Y. 和 Park, H. J. (2004). 超光滑误差分布下的精确极小极大性与球面反卷积。《多元分析杂志》，**90**，384-392。[42] Kim, P. T. 和 Richards, D. St. P. (2001). 紧李群上的反卷积密度估计。当代数学，**287**，155-171。[43] Le´on, C. A., Mass´e, J.-C. 和 Rivest, L.-P. (2006). 随机旋转的统计模型。《多元分析杂志》，**97**，412-430。[44] Luo, Z. M., Kim, P. T., Kim, T. Y. 和 Koo, J.-Y. (2011). 欧几里得运动群 SE(3) 上的反卷积。反问题，**27**，035014。[45] Marron, J. S. 和 Alonso, A. M. (2014). 对象导向数据分析综述。*Biometical Journal*，**5**，732-753。[46]Meister, A. (2009). 非参数统计中的去卷积问题。Springer-Verlag，柏林、海德堡。[47] Nadarajah, S. J. 和 Zhang, Y. (2017). Wrapped：用于圆形数据的 R 包。*PLoSONE*，**12**，e0188512。[48] Owen, A. (2001). 经验似然。Chapman and Hall/CRC，伦敦。[49] Pewsey, A. 和 Garc´ıa-Portugu´es, E. (2021). 方向统计学的最新进展。*Test*，即将刊出。[50] Qui, Y., Nordman, D. J. 和 Vardeman, S. B. (2014). 包裹三元正态分布及三维旋转的贝叶斯推断。中华统计学志，**24**，897-917。

[51] Rivest, L. P. (1989). 集中型 Fisher-von Mises 分布的球面回归。《统计年鉴》，**17**，307-317。[52] Rosenthal, M., Wu, W. U., Klassen, E. 和 Srivastava, A. (2014). 使用射影线性变换的球面回归模型。《美国统计学会杂志》，**109**，1615-1624。[53] Rudemo, M. (1982). 直方图和核密度估计量的经验选择。斯堪的纳维亚统计学杂志，**9**，65-78。[54] Sakurai, J. J. 和 Napolitano, J. (2017). 《现代量子力学》。剑桥大学出版社。

[55] Scealy, J. L. 和 Welsh, A. H.（2011）。利用定义在超球面上的分布对成分数据进行回归。《皇家统计学会杂志：*B*辑（统计方法学）》，**73**，351-375。

[56] Sei, T.、Shibata, H.、Takemura, A.、Ohara, K. 和 Takayama, N.（2013）。旋转群上 Fisher 分布的性质与应用。《多元分析杂志》，**116**，440-445。[57] Stefanski, L. A. 和 Carroll, R. J.（1990）。反卷积核密度估计量。*Statis-tics*，**21**，169-184。[58] Terras, A.（2013）。《对称空间上的调和分析》——欧几里得空间、球面与庞加莱 ´上半平面。Springer-Verlag New York。

Jeong Min Jeon 和 Ingrid Van Keilegom 关于“存在测量误差时的 $\mathbb{S}^d$密度估计和回归分析”的补充材料

在补充材料中，我们给出若干示例，展示如何对任意 f_U 实现 $D^l_{qr}(u)$ 和 $\tilde{\phi}^l_{qr}(f_U)$。我们还提供所有技术性证明。在补充材料中，我们用 $B^l(x)$ 表示一个 $N(d,\ l)$-向量，其第 q 个元素等于 $B^l_q(x)$。我们还令$\|\cdot\|_2$表示 $L^2((\mathbb{S}^d,\ \nu)\ \mathbb{C})$ 的 L^2-范数，并用 (const。) 表示一个通用的正常数。

S.1 任意 f_U 下 $D^l_{qr}(u)$ 和 $\tilde{\phi}^l_{qr}(f_U)$ 的实现

1. ($d=1$) 众所周知，每个 $u \in SO(2)$ 都可以写成

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_u & -\sin\varphi_u \\ \sin\varphi_u & \cos\varphi_u \end{pmatrix}$$

对于某个 $\varphi_u \in [0, 2\pi)$ 并且 $\int_{SO(2)} g(u)d\mu(u) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} g(u)d\varphi_u$ 对于 $g:\ SO(2) \to \mathbb{R}$。利用这些结果以及例 B^l_q 1-1 中给出的，我们可以证明

$$D^l_{11}(u) = \cos(l\varphi_u), \quad D^l_{12}(u) = -\sin(l\varphi_u),$$
$$D^l_{21}(u) = \sin(l\varphi_u), \quad D^l_{22}(u) = \cos(l\varphi_u).$$

由此可得 $\tilde{\phi}^l_{qr}(f_U) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f_U(u)D^l_{qr}(u)\ d\varphi_u$。

2. ($d=2$) 我们注意到，每个 $u \in SO(3)$ 都可以写成 $R(\varphi_u)S(\theta_u)R(\psi_u)$ 的形式，其中 $\varphi_u, \psi_u \in [0, 2\pi)$ 和 $\theta_u \in [0, \pi)$ 为某些欧拉角，

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

对于 $\vartheta \in [0, 2\pi)$ （Chirikjian（2012）中的第12.9章）。对于 B^l_q 在例 1-2 中定义的，且对于 $1 \le q,\ r \le 2l+1$，有

$$D^l_{qr}(u) = e^{-\sqrt{-1}\cdot(q-l-1)\varphi_u} \cdot d^l_{qr}(\theta_u) \cdot e^{-\sqrt{-1}\cdot(r-l-1)\psi_u},$$

其中， d^l_{qr}（θ_u）的定义见（2.2）（Chirikjian（2012）中的第12.9章）。据此，我们有

$$\tilde{\phi}^l_{qr}(f_U) = (8\pi^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_U(u) D^l_{qr}(u) \sin\theta_u \, d\varphi_u \, d\theta_u \, d\psi_u;$$

关于相对于归一化 Haar 测度在 $SO(3)$ 上进行积分的表示，请参见 Chirikjian（2012）第 12.1 章。

S.2 命题 1 的证明

该命题由下式得出

$$\begin{aligned}
\phi^l_q(g * f) &= \int_{SO(d+1)} g(u) \int_{\mathbb{S}^d} f(u^{-1}x) \overline{B^l_q(x)} \, d\nu(x) \, d\mu(u) \\
&= \int_{SO(d+1)} g(u) \int_{\mathbb{S}^d} f(x) \overline{B^l_q(ux)} \, d\nu(x) \, d\mu(u) \\
&= \int_{SO(d+1)} g(u) \int_{\mathbb{S}^d} f(x) \sum_{r=1}^{N(d,l)} D^l_{qr}(u) \overline{B^l_r(x)} \, d\nu(x) \, d\mu(u) \\
&= \sum_{r=1}^{N(d,l)} \int_{SO(d+1)} g(u) D^l_{qr}(u) \, d\mu(u) \int_{\mathbb{S}^d} f(x) \overline{B^l_r(x)} \, d\nu(x) \\
&= \sum_{r=1}^{N(d,l)} \tilde{\phi}^l_{qr}(g) \phi^l_r(f),
\end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了 ν 的旋转不变性以及$\det(u) = 1$，第三个等式则用到了（2.6）。

S.3 命题 2 的证明

我们首先证明，对于 $l > 0$， $\int_{\mathbb{S}^d} B^l_q(x) d\nu(x) = 0$。由于 $\{B^l_q : l \in \mathbb{N}_0, \ 1 \le q \le N(d, \ l)\}$ 构成 $L^2((\mathbb{S}^d, \ \nu) \ \mathbb{C})$ 的正交归一基，且 $B^0_1 \equiv (\nu(\mathbb{S}^d))^{-1/2}$，因此我们有

$$\int_{\mathbb{S}^d} B^l_q(x) d\nu(x) = (\nu(\mathbb{S}^d))^{1/2} \int_{\mathbb{S}^d} B^l_q(x) B^0_1(x) d\nu(x) = 0$$

对于 $l>0$。因此，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} K_{T_n}(x,z)d\nu(x) =& \sum_{l=0}^{[T_n]}\sum_{q=1}^{N(d,l)}\sum_{r=1}^{N(d,l)} (\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}_{qr}\,\overline{B^l_r(z)}\int_{\mathbb{S}^d} B^l_q(x)d\nu(x)\\ =&(\tilde{\phi}^0(f_U))^{-1}_{11}\,\overline{B^0_1(z)}\int_{\mathbb{S}^d} B^0_1(x)d\nu(x)\\ =&1,\end{aligned}$$

其中，最后一个等号是由事实 $\tilde{\phi}^0(f_U)=1$ 得出的。证明至此完成。

S.4 命题3的证明

只需证明

$$\mathrm{E}\left(\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}_{qr}\overline{B^l_r(Z)}\middle| X\right)=\overline{B^l_q(X)}.$$

注意到

$$\overline{B^l_r(Z)}=\overline{B^l_r(UX)}=\sum_{s=1}^{N(d,l)} D^l_{rs}(U)\overline{B^l_s(X)},$$

其中，最后一个等号由（2.9）得出。我们还注意到

$$\mathrm{E}\left(\sum_{s=1}^{N(d,l)} D^l_{rs}(U)\overline{B^l_s(X)}\middle| X\right)=\sum_{s=1}^{N(d,l)}\mathrm{E}(D^l_{rs}(U))\overline{B^l_s(X)}=\sum_{s=1}^{N(d,l)}\tilde{\phi}^l_{rs}(f_U)\overline{B^l_s(X)},$$

wh其中，第一个等号由假设 $U\perp X$ 得出。因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}_{qr}\overline{B^l_r(Z)}\middle| X\right)=&\sum_{s=1}^{N(d,l)}\overline{B^l_s(X)}\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}_{qr}\tilde{\phi}^l_{rs}(f_U)\\ =&\sum_{s=1}^{N(d,l)}\overline{B^l_s(X)}(I_{N(d,l)})_{qs}\\ =&\overline{B^l_q(X)},\end{aligned}$$

这就是所需的结果。

S.5 命题的证明4

我们定义 $\tilde{f}_X(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n K_{T_n}(x, Z_i)$。注意，$\hat{f}_X(x) = \mathrm{Re}(\tilde{f}_X(x))$，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\tilde{f}_X(x)) &= \sum_{l=0}^{[T_n]}\sum_{q=1}^{N(d,l)} B_q^l(x)\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}\phi_r^l(f_Z)\\ &= \sum_{l=0}^{[T_n]}\sum_{q=1}^{N(d,l)}\phi_q^l(f_X)B_q^l(x),\end{aligned}$$

其中第二个等式由（2.6）得出。因此，

$$\sup_{x\in\mathbb{S}^d}|f_X(x) - \mathrm{E}(\tilde{f}_X(x))| = \sup_{x\in\mathbb{S}^d}\left|\sum_{l>T_n}\sum_{q=1}^{N(d,l)}\phi_q^l(f_X)B_q^l(x)\right| = o(1),$$

其中，最后一个等式是根据 f_X 的傅里叶-拉普拉斯级数一致收敛这一假设得出的。此外，

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{S}^d}|\tilde{f}_X(x) - \mathrm{E}(\tilde{f}_X(x))|\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{S}^d}\sum_{l=0}^{[T_n]}\left|\sum_{q=1}^{N(d,l)}B_q^l(x)\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n\overline{B_r^l(Z_i)} - \phi_r^l(f_Z)\right)\right|\\ &= \sup_{x\in\mathbb{S}^d}\sum_{l=0}^{[T_n]}\left|B^l(x)^\top(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n\overline{B^l(Z_i)} - \phi^l(f_Z)\right)\right|\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{S}^d}\sum_{l=0}^{[T_n]}\|B^l(x)\|\cdot\left\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n\overline{B^l(Z_i)} - \phi^l(f_Z)\right)\right\|\\ &\le \sup_{x\in\mathbb{S}^d}\sum_{l=0}^{[T_n]}\|B^l(x)\|\cdot\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\left\|n^{-1}\sum_{i=1}^n\overline{B^l(Z_i)} - \phi^l(f_Z)\right\|\\ &= \sum_{l=0}^{[T_n]}\sqrt{\frac{N(d,l)}{\nu(\mathbb{S}^d)}}\cdot\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\left\|n^{-1}\sum_{i=1}^n\overline{B^l(Z_i)} - \phi^l(f_Z)\right\|,\end{aligned}$$

其中我们有 最后一个等式用到了 $\|B^l(x)\|^2 \equiv N(d,\ l)/\nu(\mathbb{S}^d)$ 这一事实。因此 e,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\sup_{x\in\mathbb{S}^d}|\tilde{f}_X(x)-\mathrm{E}(\tilde{f}_X(x))|\right)\\
\leq&\sum_{l=0}^{[T_n]}\sqrt{\frac{N(d,l)}{\nu(\mathbb{S}^d)}}\cdot\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\left(\sum_{r=1}^{N(d,l)}\mathrm{E}\left(\left|n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\overline{B_r^l(Z_i)}-\phi_r^l(f_Z)\right|^2\right)\right)^{1/2}\\
\leq&n^{-1/2}\sum_{l=0}^{[T_n]}\sqrt{\frac{N(d,l)}{\nu(\mathbb{S}^d)}}\cdot\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\left(\sum_{r=1}^{N(d,l)}\mathrm{E}(|B_r^l(Z)|^2)\right)^{1/2}\\
=&(\nu(\mathbb{S}^d))^{-1}n^{-1/2}\sum_{l=0}^{[T_n]}N(d,l)\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}.
\end{aligned}
$$

现在，假设情形 (S1)-(i) 成立。于是,

$$
\sum_{l=0}^{[T_n]}N(d,l)\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\leq 1+c_1\sum_{l=1}^{[T_n]}N(d,l)l^{\beta}\leq(\mathrm{const.})T_n^{\beta+d}
$$

由于 $N(d,\ l)=O(l^{d-1})$，当 $l\to\infty$ 时成立。根据 (T1) 的选择，有

$$
\sup_{x\in\mathbb{S}^d}|\tilde{f}_X(x)-f_X(x)|=\sup_{x\in\mathbb{S}^d}|\hat{f}_X(x)+\sqrt{-1}\cdot\mathrm{Im}(\tilde{f}_X(x))-f_X(x)|=o_p(1).
$$

ˆ ˜由于 $\sup_{x\in\mathbb{S}^d}|f_X(x)-f_X(x)|\leq\sup_{x\in\mathbb{S}^d}|f_X(x)-f_X(x)|$，所需结果便得证。现在，假设情形 (S2)-(i) 成立。于是,

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{[T_n]}N(d,l)\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}&\leq 1+c_1\sum_{l=1}^{[T_n]}N(d,l)l^{\alpha}\exp(\gamma\cdot l^{\beta})\\
&\leq(\mathrm{const.})T_n^{\alpha+d}\exp(\gamma\cdot T_n^{\beta}).
\end{aligned}
$$

根据 (T2) 的选择，情形 (S2)-(i) 的结果也可类似得出。最后，假设情形 (S3)-(i) 成立。于是,

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{[T_n]}N(d,l)\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}&\leq 1+c_1\sum_{l=1}^{[T_n]}N(d,l)l^{\alpha}\exp(\gamma l^{\beta}(\log l-\xi_1))\\
&\leq(\mathrm{const.})T_n^{\alpha+d}\exp(\gamma T_n^{\beta}(\log T_n-\xi_1)).
\end{aligned}
$$

再次根据选择 (T3)，(S3)-(i) 情形的结果也可类似地得出。至此，证明完成。

S.6 定理 1 的证明

~我们先证明密度估计的情形。回顾在命题 f_X 的证明中给出的 4 的定义。注意到

$$\mathrm{E}\left(\|\tilde{f}_X - f_X\|_2^2\right) = \mathrm{E}\left(\|\tilde{f}_X - \mathrm{E}(\tilde{f}_X)\|_2^2\right) + \|f_X - \mathrm{E}(\tilde{f}_X)\|_2^2.$$

我们首先求出 $\|f_X - \mathrm{E}(\tilde{f}_X)\|_2^2$ 的收敛速率。注意到

$$\begin{aligned}
&\|f_X - \mathrm{E}(\hat{f}_X)\|_2^2 \\
&= \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} |\phi_q^l(f_X)|^2 \\
&= \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} \lambda_l^{-2k} |(-1)^k \lambda_l^k \phi_q^l(f_X)|^2 \\
&= (T_n(T_n+d-1))^{-2k} \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} (T_n(T_n+d-1))^{2k} \lambda_l^{-2k} |\phi_q^l(\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X))|^2 \\
&\le (T_n(T_n+d-1))^{-2k} \|\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)\|_2^2,
\end{aligned} \tag{S.1}$$

其中，$-\lambda_l = -l(l+d-1)$ 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ 在 $C^2(\mathbb{S}^d)$ 上的特征值，而 $\Delta_{\mathbb{S}^d}^k$ 是将 $\Delta_{\mathbb{S}^d}$ 复合 k 次所得。由于 $\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)$ 是$\mathbb{S}^d$上的连续函数，因此有 $\|\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)\|_2^2 < \infty$。由此可得

$$\|f_X - \mathrm{E}(\tilde{f}_X)\|_2^2 = O(T_n^{-4k}).$$

现在，我们求 $\mathrm{E}\left(\|\tilde{f}_X - \mathrm{E}(\tilde{f}_X)\|_2^2\right) = \int_{\mathbb{S}^d} \mathrm{Var}\left(\tilde{f}_X(x)\right) f_X(x) d\nu(x)$ 的收敛速率。注意到

$$\mathrm{Var}\left(\tilde{f}_X(x)\right) = n^{-1}\mathrm{Var}\left(K_{T_n}(x,Z)\right) \le n^{-1}\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2).$$

由于 f_X 是有界，因此只需求出 $\int_{\mathbb{S}^d} \mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2) d\nu(x)$ 的速率。它等

als

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\int_{\mathbb{S}^d} |K_{T_n}(x,Z)|^2 d\nu(x)\right) &= \sum_{l=0}^{[T_n]} \mathrm{E}\left(\sum_{q=1}^{N(d,l)} \left| \sum_{r=1}^{N(d,l)} (\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1} \overline{B_r^l(Z)} \right|^2 \right) \\
&\le \sum_{l=0}^{[T_n]} \left\| (\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1} \right\|_{\mathrm{op}}^2 \mathrm{E}\left(\|B^l(Z)\|^2\right) \\
&= (\nu(\mathbb{S}^d))^{-1} \sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \left\| (\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1} \right\|_{\mathrm{op}}^2,
\end{aligned}$$

其中 t 第一个等式由 $\{B_q^l$ 的正交归一性得出： $1 \le q \le N(d,\ l)\}$.

在 (a) 的情况下,

$$\sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \left\| (\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1} \right\|_{\mathrm{op}}^2 \le 1 + c_1^2 \sum_{l=1}^{[T_n]} N(d,l) l^{2\beta} \le (\text{const.}) T_n^{2\beta+d}.$$

因此，我们得到

$$\mathrm{E}\left(\|\tilde{f}_X - f_X\|_2^2 \right) = O(T_n^{-4k} + n^{-1} T_n^{2\beta+d}).$$

这意味着

$$\|\hat{f}_X - f_X\|_2^2 \le \|\tilde{f}_X - f_X\|_2^2 = O_p(T_n^{-4k} + n^{-1} T_n^{2\beta+d}).$$

在 (b) 的情况下，注意到

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \left\| (\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1} \right\|_{\mathrm{op}}^2 \le & 1 + c_1^2 \sum_{l=1}^{[T_n]} N(d,l) l^{2\alpha} \exp(2\gamma \cdot T_n^\beta) \\ \le & (\text{const.}) T_n^{2\alpha+d} \exp(2\gamma \cdot T_n^\beta). \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\mathrm{E}\left(\|\tilde{f}_X - f_X\|_2^2 \right) = O(T_n^{-4k} + n^{-1} T_n^{2\alpha+d} \exp(2\gamma \cdot T_n^\beta)).$$

这意味着

$$\|\hat{f}_X - f_X\|_2^2 \le \|\tilde{f}_X - f_X\|_2^2 = O_p(T_n^{-4k} + n^{-1} T_n^{2\alpha+d} \exp(2\gamma \cdot T_n^\beta)).$$

对于 (c) 的情形，类似的论证可得

$$\|\hat{f}_X - f_X\|_2^2 = O_p(T_n^{-4k} + n^{-1} T_n^{2\alpha+d} \exp(2\gamma \cdot T_n^\beta (\log T_n - \xi_1))).$$

至此，密度估计情形的证明完成。

现在我们转向回归估计的情形。记作

$$\widetilde{m \cdot f_X}(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=0}^{[T_n]} \sum_{q=1}^{N(d,l)} B_q^l(x) \sum_{r=1}^{N(d,l)} (\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1} \overline{B_r^l(Z_i)} \right) Y_i,$$

$$F(x) = m(x) f_X(x) - \mathrm{E}(\widetilde{m \cdot f_X}(x)).$$

我们注意到 $\mathrm{E}\left(\|\widetilde{m\cdot f_X}-m\cdot f_X\|_2^2\right)=\mathrm{E}\left(\|\widetilde{m\cdot f_X}-\mathrm{E}(\widetilde{m\cdot f_X})\|_2^2\right)+\|F\|_2^2$。我们首先近似 $\|F\|_2^2$。我们注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}\overline{B_r^l(Z)}Y\right)&=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}\overline{B_r^l(Z)}Y\middle|X\right)\right)\\&=\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(\sum_{r=1}^{N(d,l)}(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1}\overline{B_r^l(Z)}\middle|X\right)m(X)\right)\\&=\mathrm{E}(m(X)\overline{B_q^l(X)})\\&=\phi_q^l(m\cdot f_X),\end{aligned}\tag{S.2}$$

其中第二个等号由基本假设 $U\perp(X,\ \epsilon)$得出，第三个等号则由命题3的证明得出。由（S.2），我们有

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{m\cdot f_X}(x)\right)=\sum_{l=0}^{[T_n]}\sum_{q=1}^{N(d,l)}\phi_q^l(m\cdot f_X)B_q^l(x).$$

由于这是 $m\cdot f_X$在 x处的傅里叶-拉普拉斯级数的部分和，并且 $m\cdot f_X$具有 $2k$阶连续可微性，仿照（S.1）的论证可得

$$\|F\|_2^2=O(T_n^{-4k}).\tag{S.3}$$

现在我们来近似

$$\mathrm{E}\left(\|\widetilde{m\cdot f_X}-\mathrm{E}(\widetilde{m\cdot f_X})\|_2^2\right)=\int_{\mathbb{S}^d}\mathrm{Var}\left(\widetilde{m\cdot f_X}(x)\right)f_X(x)d\nu(x).$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\widetilde{m\cdot f_X}(x)\right)=&n^{-1}\mathrm{Var}\left(K_{T_n}(x,Z)Y\right)\\\leq&n^{-1}\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)Y|^2)\\\leq&n^{-1}\mathrm{E}(\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2|X)\mathrm{E}(Y^2|X))\\\leq&(\text{const.})n^{-1}\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2),\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由假设 $U\perp(X,\epsilon)$ 得出，最后一个不等式则由 $\mathrm{E}(Y^2|X=\cdot)$ 的有界性得出。由于 f_X 有界，只需确定 $\int_{\mathbb{S}^d}\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2)d\nu(x)$ 的收敛速率。定理第一部分的证明针对每种光滑性情形分别给出了该速率。

因此，在 (a) 的情形下，我们有

$$\mathrm{E}\left(\|\widehat{m \cdot f_X} - m \cdot f_X\|_2^2\right) = O(T_n^{-4k} + n^{-1}T_n^{2\beta+d}).$$

这意味着

$$\|\widehat{m \cdot f_X} - m \cdot f_X\|_2^2 \le \|\widetilde{m \cdot f_X} - m \cdot f_X\|_2^2 = O_p(T_n^{-4k} + n^{-1}T_n^{2\beta+d}),$$

其中 $m \cdot f_X := \mathrm{Re}(m \cdot f_X)$。我们注意到

$$\begin{aligned}\inf_{x\in\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x)| &\ge \inf_{x\in\mathbb{S}^d} (f_X(x) - |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|) \\ &\ge \inf_{x\in\mathbb{S}^d} f_X(x) - \sup_{x\in\mathbb{S}^d} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|.\end{aligned}$$

根据命题 4 以及假设 下确界$_{x\in\mathbb{S}^d} f_X(x) > 0$ 可知，存在一个ˆ常数 $c > 0$ 使得 下确界 $_{x\in\mathbb{S}^d} |f_X(x)| \ge c$ 以趋于 1 的概率成立。由于

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^d} |\hat{m}(x) - m(x)|^2 d\nu(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \left| \frac{\widehat{m \cdot f_X}(x)}{\hat{f}_X(x)} - \frac{m(x) f_X(x)}{f_X(x)} \right|^2 d\nu(x) \\ &\le 2 \int_{\mathbb{S}^d} \frac{|\widehat{m \cdot f_X}(x) - m(x) f_X(x)|^2}{|\hat{f}_X(x)|^2} + \frac{(m(x))^2 |\hat{f}_X(x) - f_X(x)|^2}{|\hat{f}_X(x)|^2} d\nu(x) \\ &\le (\text{const.})(\|\widehat{m \cdot f_X} - m \cdot f_X\|_2^2 + \|\hat{f}_X - f_X\|_2^2)\end{aligned}$$

以趋于 1 的概率成立，情形 (a) 的结果随即得到。情形 (b) 和 (c) 可类似于情形 (a) 得出。证明完毕。

S.7 定理 2 的证明

我们注意到

$$\hat{f}_X(x) - f_X(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i)) - f_X(x)).$$

我们将 $W_{ni}(x) = n^{-1}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i)) - f_X(x))$ 记作，并证明

$$\frac{\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) - \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{S.4}$$

为此，我们检验李雅普诺夫条件

$$\frac{\mathrm{E}(|W_{n1}(x)-\mathrm{E}(W_{n1}(x))|^{2+\varsigma})}{n^{\varsigma/2}(\mathrm{Var}(W_{n1}(x)))^{1+\varsigma/2}}\to 0 \tag{S.5}$$

对某个常数成立 $\varsigma>0$。特别地，对于 (S2)-(i) 和 (S3)-(i) 的情形，我们任取 $\varsigma>0$。对于 (S1)-(i) 的情形，我们取 $\varsigma>0$，使其满足 $p<\varsigma/((2d-q)\varsigma+2(d-q))$。这样的 ς 存在，因为 $\varsigma/((2d-q)\varsigma+2(d-q))\to 1/(2d-q)$ 当 $\varsigma\to\infty$ 时。(S.5) 等价于

$$\frac{\mathrm{E}(|V_n(x)-\mathrm{E}(V_n(x))|^{2+\varsigma})}{n^{\varsigma/2}(\mathrm{Var}(V_n(x)))^{1+\varsigma/2}}\to 0, \tag{S.6}$$

其中 $V_n(x)=\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))-f_X(x)$。由于 (S.6) 中的分子有界于

$$(\text{const.})\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\varsigma}),$$

只需证明

$$\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\varsigma})}{n^{\varsigma/2}(\mathrm{Var}(V_n(x)))^{1+\varsigma/2}}\to 0. \tag{S.7}$$

此外，由于

$$\begin{aligned}|\mathrm{E}(V_n(x))|&\le\left|\sum_{l>T_n}\sum_{q=1}^{N(d,l)}\phi_q^l(f_X)B_q^l(x)\right|=o(1),\\ \mathrm{E}((V_n(x))^2)&=\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)-f_X^2(x)+o(1),\\ \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)&\to\infty,\end{aligned} \tag{S.8}$$

只需证明

$$\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\varsigma})}{n^{\varsigma/2}(\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2))^{1+\varsigma/2}}\to 0. \tag{S.9}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^{2+\varsigma})&=\int_{\mathbb{S}^d}|K_{T_n}(x,z)|^{2+\varsigma}f_Z(z)d\nu(z)\\ &\le\sup_{x\in\mathbb{S}^d}f_X(x)\int_{\mathbb{S}^d}|K_{T_n}(x,z)|^{2+\varsigma}d\nu(z),\end{aligned} \tag{S.10}$$

其中不等式 质量可由以下事实推出：$\sup_{z\in\mathbb{S}^d}f_Z(z)\le\sup_{x\in\mathbb{S}^d}f_X(x)$。我们注意到 at

$$\begin{aligned}|K_{T_n}(x,z)|^{\varsigma}&\le\left(\sum_{l=0}^{[T_n]}\|B^l(x)\|\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|B^l(z)\|\right)^{\varsigma}\\ &=\left((\nu(\mathbb{S}^d))^{-1}\sum_{l=0}^{[T_n]}N(d,l)\|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\right)^{\varsigma}.\end{aligned} \tag{S.11}$$

我们还注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^d} |K_{T_n}(x,z)|^2 d\nu(z) &= \sum_{l=0}^{[T_n]} \sum_{r=1}^{N(d,l)} \left| \sum_{q=1}^{N(d,l)} B_q^l(x)(\tilde{\phi}^l(f_U))_{qr}^{-1} \right|^2 \\ &\le \sum_{l=0}^{[T_n]} \|B^l(x)\|^2 \|((\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1})^\top\|_{\mathrm{op}}^2 \\ &= (\nu(\mathbb{S}^d))^{-1} \sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2,\end{aligned} \tag{S.12}$$

其中第一个等式由 $\{B_q^l$的正交归一性得出：$1 \le q \le N(d,\ l)\}$。结合（S.10）、（S.11）和（S.12），可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^{2+\varsigma}) \\ &\le \begin{cases} (\text{const.}) T_n^{(2+\varsigma)\beta+(1+\varsigma)d}, & \text{if (S1)-(i) holds} \\ (\text{const.}) T_n^{(2+\varsigma)\alpha+(1+\varsigma)d} \exp((2+\varsigma)\gamma \cdot T_n^\beta), & \text{if (S2)-(i) holds} \\ (\text{const.}) T_n^{(2+\varsigma)\alpha+(1+\varsigma)d} \exp((2+\varsigma)\gamma \cdot T_n^\beta(\log T_n - \xi_1)), & \text{if (S3)-(i) holds.} \end{cases}\end{aligned} \tag{S.13}$$

由于 $\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\varsigma}) \le \mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^{2+\varsigma})$，$\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\varsigma})$ 达到（S.13）中给出的相同上界。在（B2）和（B3）的情形下取 η 充分接近 1，并应用（B1）—（B3），即可得到（S.9）。因此，我们有（S.4）。至此，证明完成。

S.8 定理3 的证明及若干评注

注意到

$$\begin{aligned}\hat{m}(x) - m(x) &= \frac{1}{\hat{f}_X(x)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i - m(x)) \\ &= \frac{1}{f_X(x)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i - m(x)) \left(1 + \frac{f_X(x) - \hat{f}_X(x)}{\hat{f}_X(x)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) + \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) \cdot \frac{f_X(x) - \hat{f}_X(x)}{\hat{f}_X(x)},\end{aligned}$$

其中 $W_{ni}(x) = (f_X(x))^{-1} n^{-1}$实数集$(K_{T_n}(x,\ Z_i))(Y_i - m(x))$。因此，

$$\begin{aligned}&\frac{\hat{m}(x) - m(x) - \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) - \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}} + \frac{\sum_{i=1}^n W_{ni}(x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}} \cdot \frac{f_X(x) - \hat{f}_X(x)}{\hat{f}_X(x)}.\end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) - \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x))}} \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{S.14}$$

and

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x))}} \cdot \frac{f_X(x) - \hat{f}_X(x)}{\hat{f}_X(x)} = o_p(1). \tag{S.15}$$

对于（S.14），我们检验李雅普诺夫条件

$$\frac{\mathrm{E}(|W_{n1}(x) - \mathrm{E}(W_{n1}(x))|^{2+\delta})}{n^{\delta/2}(\mathrm{Var}(W_{n1}(x)))^{1+\delta/2}} \to 0$$

对 δ，在 **(B4)** 中成立。这等价于验证

$$\frac{\mathrm{E}(|V_n(x) - \mathrm{E}(V_n(x))|^{2+\delta})}{n^{\delta/2}(\mathrm{Var}(V_n(x)))^{1+\delta/2}} \to 0, \tag{S.16}$$

其中 $V_n(x) = \mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y - m(x))$。由于（S.16）中的分子有界于(const.)$\mathrm{E}(|V_n(x)|^{2+\delta})$，因此只需证明

$$\frac{\mathrm{E}(|V_n(x)|^{2+\delta})}{n^{\delta/2}(\mathrm{Var}(V_n(x)))^{1+\delta/2}} \to 0.$$

此外，由于

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|V_n(x)|^{2+\delta}) &\le (\text{const.})\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\delta}), \\
\mathrm{E}((V_n(x))^2) &\ge (\text{const.})\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2) \to \infty, \\
\mathrm{E}(V_n(x)) &= \mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(m(X) - m(x))) = o(1),
\end{aligned}$$

只需证明

$$\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\delta})}{n^{\delta/2}(\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2))^{1+\delta/2}} \to 0.$$

但是，这与（S.9）的证明相同。

对于（S.15），注意到

$$
\begin{aligned}
&|f_X(x) - \mathrm{E}(\hat{f}_X(x))| \\
&\leq \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} |\phi_q^l(f_X) B_q^l(x)| \\
&= \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} \lambda_l^{-k} |(-1)^k \lambda_l^k \phi^l(f_X) B_q^l(x)| \\
&\leq (T_n(T_n - d + 1))^{-k} \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} \lambda_l^{-k} (T_n(T_n - d + 1))^k |\phi^l(\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)) B_q^l(x)| \\
&\leq (T_n(T_n - d + 1))^{-k} \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} |\phi^l(\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)) B_q^l(x)| \\
&= o(T_n^{-2k}),
\end{aligned} \tag{S.17}
$$

其中，最后一个等式源于 $\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数绝对收敛。此外，有

$$
\mathrm{E}(\hat{f}_X(x)) - \hat{f}_X(x) = O_p(n^{-1/2} \cdot T_n^{\beta+d})
$$

如命题 4 的证明中所述。结合（S.17）可得

$$
f_X(x) - \hat{f}_X(x) = o(T_n^{-2k}) + O_p(n^{-1/2} \cdot T_n^{\beta+d}) = o_p(1). \tag{S.18}
$$

因此，只需证明

$$
\frac{\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n W_{ni}(x))}} \cdot (f_X(x) - \hat{f}_X(x)) = o_p(1) \tag{S.19}
$$

由（S.14）以及以下事实可知 $(\hat{f}_X(x))^{-1} = O_p(1)$。注意到

$$
\begin{aligned}
& f_X(x) \cdot \left| \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) \right) \right| \\
=& |\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z))(Y - m(x)))| \\
\leq& |m(x)| \cdot \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} |\phi_q^l(f_X) B_q^l(x)| + \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} |\phi_q^l(m \cdot f_X) B_q^l(x)| \\
\leq& (T_n(T_n - d + 1))^{-k} \Bigg(|m(x)| \cdot \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} |\phi^l(\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)) B_q^l(x)| \\
& + \sum_{l>T_n} \sum_{q=1}^{N(d,l)} |\phi^l(\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(m \cdot f_X)) B_q^l(x)| \Bigg) \\
=& o(T_n^{-2k}),
\end{aligned}
\tag{S.20}
$$

其中，最后一个等号由 $\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(f_X)$ 和 $\Delta_{\mathbb{S}^d}^k(m \cdot f_X)$ 的傅里叶-拉普拉斯级数绝对收敛得出。我们还注意到

$$
\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) \right) \geq (\text{const.}) n^{-1} \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2) \geq (\text{const.}) n^{-1} T_n^{2\beta+q}. \tag{S.21}
$$

因此，S.19) 在

$$
n^{1/2} T_n^{-(\beta+q/2)} T_n^{-4k} = O(1) \quad \text{and} \quad T_n^{d-q/2} T_n^{-2k} = O(1). \tag{S.22}
$$

（S.22）处的第一个结论由（T1‴）得出。（S.22）处的第二个结论由（A1）-(i) 和（A1）-(ii)以及 $k > (2d - q)/4$得出。证明完毕。

注 1. 我们详细说明为何不涵盖超光滑情形和对数超光滑情形。在（*S2*）*-(i)* *+(B2)* 条件下，我们得到速率 $o(T_n^{-2k}) + O_p(n^{-1/2} T_n^{\alpha+d} \exp(\gamma \cdot T_n^{\beta}))$，它取代了（*S.18*）处第一个等式右端的表达式；下界为$(\text{const.}) n^{-1} T_n^{2\alpha+q} \exp(2\gamma(\eta \cdot T_n)^{\beta})$，它取代了（*S.21*）处最后一个不等式右端的表达式。因此，我们需要

$$
n^{-1/2} T_n^{\alpha+d} \exp(\gamma \cdot T_n^{\beta}) = o(1) \tag{S.23}
$$

对于（*S.18*）中的最后一个等式，并且需要

$$
n^{1/2} T_n^{-(\alpha+q/2)} \exp(-\gamma(\eta \cdot T_n)^{\beta}) \cdot T_n^{-2k} \cdot (T_n^{-2k} + n^{-1/2} T_n^{\alpha+d} \exp(\gamma \cdot T_n^{\beta})) = O(1) \tag{S.24}
$$

对于（*S.19*），对于（*S.23*），我们需要 T_n 满足对数型速度；然而（*S.24*）对于 T_n 不存在任何对数型速度。对数超光滑情形也有类似问题。

S.9 引理1 的证明

利用条件（C）以及 $\inf_{z\in\mathbb{S}^d} f_Z(z) \geq \inf_{x\in\mathbb{S}^d} f_X(x)$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2) &\geq \int_{\mathbb{S}^d} |K_{T_n}(x,z)|^2 d\nu(z) \cdot \inf_{x\in\mathbb{S}^d} f_X(x) \\
&= \sum_{l=0}^{[T_n]} \|((\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1})^\top B^l(x)\|^2 \cdot \inf_{x\in\mathbb{S}^d} f_X(x) \\
&\geq (\text{const.}) \sum_{l=0}^{[T_n]} \|B^l(x)\|^2 (\sigma_{\min}((\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}))^2 \\
&\geq (\text{const.}) \sum_{l=0}^{[T_n]} \|B^l(x)\|^2 \|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2 \\
&\geq (\text{const.}) \sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \|(\tilde{\phi}^l(f_U))^{-1}\|_{\mathrm{op}}^2.
\end{aligned}$$

因此，对于每个 $0<\eta<1$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2) \\
&\geq \begin{cases}
(\text{const.}) \sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \cdot l^{2\beta}, & \text{if (S1)-(ii) holds} \\
(\text{const.}) \sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \cdot l^{2\alpha} \cdot \exp(2\gamma \cdot l^\beta), & \text{if (S2)-(ii) holds} \\
(\text{const.}) \sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) \cdot l^{2\alpha} \cdot \exp(2\gamma \cdot l^\beta (\log l - \xi_2)), & \text{if (S3)-(ii) holds}
\end{cases} \\
&\geq \begin{cases}
(\text{const.})(\eta\cdot T_n)^{2\beta} (\sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) - \sum_{l=0}^{[\eta\cdot T_n]+1} N(d,l)), & \text{if (S1)-(ii) holds} \\
(\text{const.})(\eta\cdot T_n)^{2\alpha} (\sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) - \sum_{l=0}^{[\eta\cdot T_n]+1} N(d,l)) & \\
\qquad \cdot \exp(2\gamma \cdot (\eta\cdot T_n)^\beta), & \text{if (S2)-(ii) holds} \\
(\text{const.})(\eta\cdot T_n)^{2\alpha} (\sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) - \sum_{l=0}^{[\eta\cdot T_n]+1} N(d,l)) & \\
\qquad \cdot \exp(2\gamma \cdot (\eta\cdot T_n)^\beta (\log(\eta\cdot T_n) - \xi_2)), & \text{if (S3)-(ii) holds.}
\end{cases}
\end{aligned}$$

现在我们证明

$$T_n^{-d} \left(\sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,l) - \sum_{l=0}^{[\eta\cdot T_n]+1} N(d,l) \right) \to (\text{const.}). \tag{S.25}$$

我们注意到

$$N(d,l) = \left(2 + \frac{d-1}{l}\right) \frac{1}{(d-1)!} \frac{\Gamma(l+d-1)}{\Gamma(l)}.$$

根据 Tricomi 和 Erdelyi（1951），已知

$$\frac{\Gamma(l+d-1)}{\Gamma(l)} = l^{d-1}\left(1+\frac{(d-1)(d-2)}{2l}+O(l^{-2})\right).$$

因此，根据Faulhaber公式，我们有

$$\sum_{l=0}^{[T_n]}\frac{\Gamma(l+d-1)}{\Gamma(l)} = \frac{1}{d}[T_n]^d + o([T_n]^d).$$

经过简单代数运算可得 $T_n^{-d}\sum_{l=0}^{[T_n]} N(d,\ l) \to 2/(d!)$ 从而（S.25）成立。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(|K_{T_n}(x,Z)|^2) \\
&\geq \begin{cases}
(\text{const.})T_n^{2\beta+d}, & \text{if (S1)-(ii) holds} \\
(\text{const.})T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma\cdot(\eta\cdot T_n)^\beta), & \text{if (S2)-(ii) holds} \\
(\text{const.})T_n^{2\alpha+d}\exp(2\gamma\cdot(\eta\cdot T_n)^\beta(\log T_n+\log\eta-\xi_2)), & \text{if (S3)-(ii) holds.}
\end{cases}
\end{aligned} \tag{S.26}$$

证明完毕。

S.10 引理2的证明

我们首先考虑情形（G1）。在此情形下，对于所有 $x,\ z\in\mathbb{S}^1$，$K_{T_n}(x,\ z)$都是实值的，因为B_q^l 和 $\tilde{\phi}_{qr}^l$ 都是实值的。因此，结果成立。

现在，我们考虑情形（G2）。注意到

$$\begin{aligned}
K_{T_n}(x,z) &= \sum_{l=0}^{[T_n]} s_l^{-1}\sum_{q=1}^{2l+1} B_q^l(x)\overline{B_q^l(z)} \\
&= \sum_{l=0}^{[T_n]} s_l^{-1}\frac{2l+1}{4\pi}\sum_{q=1}^{2l+1}(\cos((q-l-1)\varphi_x)+\sqrt{-1}\sin((q-l-1)\varphi_x)) \\
&\qquad\cdot(\cos((q-l-1)\varphi_z)-\sqrt{-1}\sin((q-l-1)\varphi_z))d^l_{q(l+1)}(\theta_x)d^l_{q(l+1)}(\theta_z).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,z)) &= \sum_{l=0}^{[T_n]} s_l^{-1}\frac{2l+1}{4\pi}\sum_{q=1}^{2l+1}\cos((q-l-1)(\varphi_x-\varphi_z))d^l_{q(l+1)}(\theta_x)d^l_{q(l+1)}(\theta_z), \\
\mathrm{Im}(K_{T_n}(x,z)) &= \sum_{l=0}^{[T_n]} s_l^{-1}\frac{2l+1}{4\pi}\sum_{q=1}^{2l+1}\sin((q-l-1)(\varphi_x-\varphi_z))d^l_{q(l+1)}(\theta_x)d^l_{q(l+1)}(\theta_z).
\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^2} (\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,z)))^2 d\nu(z) \\
&= \sum_{l=0}^{[T_n]} \sum_{l'=0}^{[T_n]} s_l^{-1} s_{l'}^{-1} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{16\pi^2} \sum_{q=1}^{2l+1} \sum_{q'=1}^{2l'+1} d^l_{q(l+1)}(\theta_x) d^{l'}_{q'(l'+1)}(\theta_x) \\
&\qquad \cdot \int_0^{2\pi} \cos((q-l-1)(\varphi_x-\varphi_z)) \cos((q'-l'-1)(\varphi_x-\varphi_z)) d\varphi_z \\
&\qquad \cdot \int_0^{\pi} d^l_{q(l+1)}(\theta_z) d^{l'}_{q'(l'+1)}(\theta_z) \sin(\theta_z) d\theta_z, \\
&\int_{\mathbb{S}^2} (\mathrm{Im}(K_{T_n}(x,z)))^2 d\nu(z) \\
&= \sum_{l=0}^{[T_n]} \sum_{l'=0}^{[T_n]} s_l^{-1} s_{l'}^{-1} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{16\pi^2} \sum_{q=1}^{2l+1} \sum_{q'=1}^{2l'+1} d^l_{q(l+1)}(\theta_x) d^{l'}_{q'(l'+1)}(\theta_x) \\
&\qquad \cdot \int_0^{2\pi} \sin((q-l-1)(\varphi_x-\varphi_z)) \sin((q'-l'-1)(\varphi_x-\varphi_z)) d\varphi_z \\
&\qquad \cdot \int_0^{\pi} d^l_{q(l+1)}(\theta_z) d^{l'}_{q'(l'+1)}(\theta_z) \sin(\theta_z) d\theta_z.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos((q-l-1)(\varphi_x-\varphi_z)) \cos((q'-l'-1)(\varphi_x-\varphi_z)) d\varphi_z \\
&= \begin{cases} 2\pi, & \text{if } q-l-1 = q'-l'-1 = 0, \\ \pi, & \text{if } q-l-1 = q'-l'-1 \neq 0, \\ 0, & \text{else}, \end{cases} \\
&\int_0^{2\pi} \sin((q-l-1)(\varphi_x-\varphi_z)) \sin((q'-l'-1)(\varphi_x-\varphi_z)) d\varphi_z \\
&= \begin{cases} \pi, & \text{if } q-l-1 = q'-l'-1 \neq 0, \\ 0, & \text{else}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^2} (\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,z)))^2 d\nu(z) - \int_{\mathbb{S}^2} (\mathrm{Im}(K_{T_n}(x,z)))^2 d\nu(z) \\
&= \sum_{l=0}^{[T_n]} \sum_{l'=0}^{[T_n]} s_l^{-1} s_{l'}^{-1} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{8\pi} d^l_{(l+1)(l+1)}(\theta_x) d^{l'}_{(l'+1)(l'+1)}(\theta_x) \\
&\qquad \cdot \int_0^{\pi} d^l_{q(l+1)}(\theta_z) d^{l'}_{q'(l'+1)}(\theta_z) \sin(\theta_z) d\theta_z.
\end{aligned}
$$

根据 Pagaran 等人（2006）中的公式 (12)，可得

$$\int_0^{\pi} d^l_{(l+1)(l+1)}(\theta_z) d^{l'}_{(l'+1)(l'+1)}(\theta_z) \sin(\theta_z) d\theta_z = \frac{2}{2l+1} I(l = l').$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^2} (\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,z)))^2 d\nu(z) - \int_{\mathbb{S}^2} (\mathrm{Im}(K_{T_n}(x,z)))^2 d\nu(z) \\
&= \sum_{l=0}^{[T_n]} s_l^{-2} (d^l_{(l+1)(l+1)}(\theta_x))^2 \frac{2l+1}{4\pi} \geq 0.
\end{aligned}$$

将此与引理 1 的证明结合可得 $\int_{\mathbb{S}^2}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,z)))^2 d\nu(z)$ 达到式（S.26）给出的下界。然后，根据 $\inf_{z\in\mathbb{S}^d} f_Z(z) \geq \inf_{x\in\mathbb{S}^d} f_X(x)$这一事实以及条件 (A2)-(i)，我们得到所需结果。

S.11 定理 4的证明

我们证明这两个断言

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))) - f_X(x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}} = o(1) \tag{S.27}$$

and

$$\frac{\hat{s}_1(x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}} \xrightarrow{p} 1. \tag{S.28}$$

然后，结合式（S.27）、（S.28）和定理 2，即可得到所需结果。

对于断言（S.27），注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))) &= \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))))^2 \\
&= \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2) - f_X^2(x) + o(1), \\
\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2) &\to \infty.
\end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))) - f_X(x)}{\sqrt{\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)}} = o(1). \tag{S.29}$$

我们注意到

$$\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))) - f_X(x) = o(T_n^{-2k}),$$

根据（S.17）。因此，（S.29）由（S.17）和引理2可得，若 $\sqrt{n} \cdot T_n^{-(2k+\beta+d/2)} = O(1)$。但是，后者在取（T1′）时成立。因此，断言（S.27）得证。

对于断言（S.28），我们证明

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i)) \xrightarrow{p} \mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z))), \\ &\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i)))^2 \xrightarrow{p} \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2). \end{aligned} \tag{S.30}$$

对于（S.30）中的第一个结论，只需证明

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z_i))\right) = o(1).$$

这是因为

$$\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2) = O(T_n^{2\beta+d}) = O(n^{(2\beta+d)/(4k+2\beta+d)}) = o(n).$$

对于（S.30）中的第二个结论，我们应用 Chow and Teicher（1997）《第 10 章》中的推论 2。于是，只需证明

$$\mathrm{E}\left(\frac{(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2}{\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2)} \cdot I\left(\frac{(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2}{\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2)} \geq n\varepsilon\right)\right) \to 0 \tag{S.31}$$

对任意 $\varepsilon > 0$均成立。利用（S.31）和引理 2，可以证明（S.28）成立。因此，断言（S.28）得证。证明完毕。

S.12 定理5的证明

我们验证这两个断言

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z))(Y - m(x)))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z))(Y - m(x)))}} = o(1) \tag{S.32}$$

and

$$\frac{\hat{s}_2(x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z))(Y - m(x)))}} \xrightarrow{p} 1. \tag{S.33}$$

然后，结合（S.32）、（S.33）和定理 3，即可得到所需的结果。

如果我们证明S.32，则该结论成立：

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z))(Y - m(x)))}{\sqrt{\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x, Z)))^2)}} = o(1), \tag{S.34}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))\\
&=\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2)-(\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x))))^2\\
&\geq (\text{const.})\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)+o(1).
\end{aligned}$$

注意，(S.34) 可由 (S.20) 和引理 2 推出，条件是 $\sqrt{n}\cdot T_n^{-(2k+\beta+d/2)}=\mathcal{O}(1)$ 成立。不过，取 (T1′) 时，后者成立。因此，结论 (S.32) 得证。

若能证明以下结论，则结论 (S.33) 成立：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\hat{m}(x))\xrightarrow{p}\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x))),\\
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\hat{m}(x)))^2\xrightarrow{p}\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2).
\end{aligned}\tag{S.35}$$

对于 (S.35) 中的第一个等式，注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\hat{m}(x))\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x))+(m(x)-\hat{m}(x))\hat{f}_X(x)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x))+\left(m(x)-\frac{m(x)f_X(x)+o_p(1)}{f_X(x)+o_p(1)}\right)\hat{f}_X(x)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x))+o_p(1),
\end{aligned}$$

其中第二个等号的推导与命题 4 的证明类似。现在，由于

$$n^{-1}\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2)\leq(\text{const.})n^{-1}\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)=o(1),$$

第一个在（S.35）处的结论如下。对于第二个在（S.35）处的结论，我们注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-\hat{m}(x)))^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x)))^2+(m(x)-\hat{m}(x))^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i)))^2\\
&\quad+(m(x)-\hat{m}(x))\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i)))^2(Y_i-m(x))\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x)))^2+o_p(1).
\end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x)))^2 \xrightarrow{p} \mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2).$$

为此，我们应用 Chow and Teicher（1997）《第 10 章》中的推论 2。于是，只需证明

(S.36)
$$\mathrm{E}\left(\frac{(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2}{\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2)}\cdot I\left(\frac{(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2}{\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2)}\geq n\varepsilon\right)\right)\to 0$$

对任意 $\varepsilon>0$均成立。利用 (B4)、(S.36)、(S.9) 和引理 2，可以证明 (S.33) 成立。因此，结论 (S.33) 得证。证明至此完成。

S.13 定理6的证明

证明中，我们应用 Hjort 等人（2009）中的定理 2.1。为此，我们验证 Hjort 等人（2009）中的条件 (A0)–(A3)。注意，

$$\mathrm{EL}_{f_X}(\theta;x)=\max\left\{\prod_{i=1}^{n}(nw_i):w_i>0,\sum_{i=1}^{n}w_i=1,\sum_{i=1}^{n}w_iF^*_{f_X}(Z_i,\theta;x)=0\right\},$$

其中

$$F^*_{f_X}(Z_i,\theta;x)=\frac{n^{-1/2}F_{f_X}(Z_i,\theta;x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}}.$$

我们注意到，Hjort 等人（2009）中的 (A0) 可由条件 (E1) 直接推出。对于 Hjort 等人（2009）中的 (A1)，只需证明

(S.37)
$$\frac{n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))-f_X(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

由（S.4），可得

$$\frac{n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))-f_X(x))-n^{1/2}\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))-f_X(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

我们还有

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))-f_X(x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}}=o(1)$$

根据（S.27）。结合这两个结果可得（S.37）。对于 Hjort 等人（2009）中的 (A2)，只需证明

$$\frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))-f_X(x))^2}{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}\xrightarrow{p}1. \tag{S.38}$$

由于

$$\begin{aligned}
&n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))-f_X(x))^2\\
&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i)))^2-2n^{-1}f_X(x)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))+f_X^2(x),\\
&\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))\\
&=\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2)-(\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))))^2,
\end{aligned}$$

只需证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))&\to f_X(x),\\
n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))&\xrightarrow{p}\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))),\\
n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i)))^2&\xrightarrow{p}\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))^2).
\end{aligned} \tag{S.39}$$

式（S.39）中的第一个断言由（S.8）得出，而式（S.39）中的第二个和最后一个断言由（S.30）得出。因此，（S.38）成立。对于 Hjort 等人（2009）中的（A3），只需证明

$$\max_{1\le i\le n}|F^*_{f_X}(Z_i,f_X(x);x)|\xrightarrow{p}0. \tag{S.40}$$

注意，对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $\varsigma>0$,

$$\begin{aligned}
&P\left(n^{-1/2}\max_{1\le i\le n}|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))-f_X(x)|>\varepsilon\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z)))}\right)\\
&\le(\text{const.})\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))-f_X(x)|^{2+\varsigma})}{n^{\varsigma/2}(\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))))^{1+\varsigma/2}}\\
&\le(\text{const.})\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))|^{2+\varsigma})}{n^{\varsigma/2}(\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))))^{1+\varsigma/2}}\\
&\to 0,
\end{aligned}$$

其中，极限的推导与证明（S.7）中的方法类似。因此，（S.40）成立。现在，Hjort 等人（2009）的定理 2.1 给出了所需的结果。

S.14 定理 7 的证明

我们应用 Hjort 等人（2009）的定理 2.1 来证明该定理。注意到

$$\mathrm{EL}_m(\theta;x)=\max\left\{\prod_{i=1}^n(nw_i):w_i>0,\sum_{i=1}^n w_i=1,\sum_{i=1}^n w_iF_m^*(Z_i,Y_i,\theta;x)=0\right\},$$

其中

$$F_m^*(Z_i,Y_i,\theta;x)=\frac{n^{-1/2}F_m(Z_i,Y_i,\theta;x)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}}.$$

由于 Hjort 等人（2009）中的条件（A0）可由条件（E2）直接推出，因此只需证明

$$\begin{aligned}&\frac{n^{-1/2}\sum_{i=1}^n\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}}\xrightarrow{d}N(0,1),\\&\frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x)))^2}{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}\xrightarrow{p}1,\\&\max_{1\le i\le n}|F_m^*(Z_i,Y_i,m(x);x)|\xrightarrow{p}0\end{aligned}\tag{S.41}$$

即可验证 Hjort 等人（2009）中定理 2.1 的条件（A1）至（A3）。

对于（S.41）处的第一个断言，我们注意到

$$\frac{n^{-1/2}\sum_{i=1}^n\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x))-n^{1/2}\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

这可由定理 3 的证明得到。此外，还有

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\mathrm{E}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}}=o(1)$$

由（S.32）。结合这两个结果可得出（S.41）中的第一个断言。（S.41）中的第二个断言则由以下事实得出

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))=\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2)+o(1),\\&\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2)\to\infty,\\&n^{-1}\sum_{i=1}^n(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x)))^2\xrightarrow{p}\mathrm{E}((\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))^2).\end{aligned}$$

对于 t 式（S.41）中的第三个断言，我们注意到，对于任意的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$ 属于（B4）的 ，

$$\begin{aligned}&P\left(n^{-1/2}\max_{1\le i\le n}|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z_i))(Y_i-m(x))|>\varepsilon\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x)))}\right)\\&\le(\text{const.})\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x))|^{2+\delta})}{n^{\delta/2}(\mathrm{Var}(\mathrm{Re}(K_{T_n}(x,Z))(Y-m(x))))^{1+\delta/2}}\\&\to0,\end{aligned}$$

其中，极限的推导与定理 3的证明类似。现在，Hjort 等人（2009）的定理 2.1 给出了所需的结果。

补充材料参考文献

1. Chirikjian, G. S. (2012). 随机模型、信息论与李群，第 *2* 卷. Birkh¨auser Basel. 2. Chow, Y. S. and Teicher, H. (1997). 概率论：独立性、可交换性、鞅. Springer-Verlag New York. 3. Hjort, N. L., McKeague, I. W. and Van Keilegom, I. (2009). 拓展经验似然的适用范围。《统计年鉴》, **37**, 1079-1111. 4. Pagaran, J., Fritzsche, S. and Gaigalas, G. (2006). 角动量耦合的 Maple 程序。IX. Wigner D 函数与旋转矩阵，《计算机物理通讯》,**174**, 616-630. 5. Tricomi, F. G. and Erd´elyi, A. (1951). 伽马函数比值的渐近展开。《太平洋数学杂志》, **1**, 133-142.