围绕 $A+B=C$ 的大量变通处理

Bennede Weger 数学与计算机科学系 埃因
霍温理工大学b.m.m.d.weger@tue.nl

arXiv:2301.03050v1 [math.NT] 8 Jan 2023

版本 1.0，2023年1月10日

摘要

本文报告了在 $\mathbb{Q}$ 上寻找具有较大 Tama-gawa 乘积的椭圆曲线的实验。主要思路是在与良好的 abc-三元组相关的曲线中进行搜索。

1 引言

设 E 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线，其导子为 $N=N(E)$，Tamagawa 乘积（也称“修正因子”）为 $\tau=\tau(E)$。在我 1998 年的论文 [dW2] 中，我证明了一个关于 τ 的（条件性）上界，该上界用 N 表示，即

引理 1（de Weger，1998）*Szpiro*猜想意味着，对于所有椭圆曲线

$$\tau \ll N^{\epsilon}.$$

这是以下说法的简写：对每个 $\epsilon>0$，都存在一个绝对常数 C_ϵ，使得对于 $\mathbb{Q}$ 上的所有椭圆曲线，$\tau<C_\epsilon N^{\epsilon}$ 都成立。事实上，我证明了一个稍强的结果，即（假设 Szpiro猜想成立）存在一个绝对常数 C，使得 $\tau<N^{C/\text{双对数}\,N}$，但那篇论文中并不需要这个结果。实际上，我希望 τ 较小，因为目标是找到 Tate–Shafarevich群异常大的曲线，而 Birch–Swinnerton-Dyer猜想表明，此时 τ 较小会有所帮助。

最近，这个小小的辅助引理引起了包括 Hector Pasten 在内的研究者的关注，他们将其与 abc 猜想联系起来，见 [P1], [P3]。在他的论文 [P2]中，Pasten 通过以下猜想改进了引理 1。

猜想 2（Pasten，2020年）对于所有椭圆曲线

$$\tau \ll N^{\left(\frac{7}{3}\log 3+\epsilon\right)/\log\log N}.$$

注意，$\frac{7}{3}\log 3=2.563\ldots$，并且我从 [P2、猜想 1 中省略了项 $+O_\epsilon(1)$1],，因为它似乎是多余的。Pasten 指出，常数 $\frac{7}{3}\log 3$ 可能不是最优的，但也认为有「一些证据」支持它。无论如何，较大的 τ 很少见，因为众所周知[GOT] 平均值为 1.8193 ...。

这使我将椭圆曲线的 *Tamagawa* 质量 定义为

$$q_\tau=\frac{\log\tau\log\log N}{\log N}.$$

这是 th 本札记旨在报告首次搜索具有异常高 Tamagawa 质量的椭圆 c

曲线的实验结果 q_τ，以及搜索 Tamagawa 乘积本身异常大的椭圆曲线的结果 τ。这里使用的方法仅限于摘取容易获得的成果，希望本札记能激发他人寻找更好的方法并取得更好的结果。所有找到的曲线及其表格可在线查看 [dW3]。

2 LMFDB 和 Cremona 数据库中的曲线

LMFDB [LMFDB] 是一个带有 Web 界面的数据库，包含大量数据，例如椭圆曲线。特别是，它包含一个名为 ec_mwbsd[1], 的数据集，收录了与 3824372 条曲线的 Birch–Swinnerton-Dyer猜想相关的数据，其中包括每条曲线的导子和 Tamagawa 乘积等信息。因此，这里是一个很好的起点。不过，该数据库的 Web 界面并不适合直接检查其中所有曲线的 Tamagawa 质量。我发现，将底层数据库分成两部分下载最为方便。

所有导子不超过 500000 的 3064705 条曲线的完整数据，可直接从 John Cremona 的数据库 [C]下载。我下载了这些数据，并得到了以下结果（见下方图 1 中的绿色点）。

- 10795 条曲线满足 $q_\tau > 1.5$,
- 135 条曲线满足 $q_\tau > 2$,
- 具有最大 $q_\tau = 2.30681$ 的曲线是 $y^2 + xy = x^3 - 1054050116x - 12046088636400$，其 $N = 39270 = 2\,3\,5\,7\,11\,17$ 和 $\tau = 31104 = 2^7\,3^5$,
- 具有最大 $\tau = 87040 = 2^{10}\,5\,17$ 的曲线是 $y^2 + xy = x^3 - 4456595642213x - 1538486355950810000$，其 $N = 364650 = 2\,3\,5^2\,11\,13\,17$ 和 $q_\tau = 2.26473$。
- 完整表格输出_cremona_qua.txt、输出_cremona_tam.txt 位于 [dW3]。

请注意，Cremona 数据库包含所有导子不超过 500000 的曲线。

这使得 LMFDB ec_mwbsd 集合中还剩下 759667 条导子介于 500000 和 300000000 之间的曲线。Web 界面确实支持通过 https: //www.lmfdb.org/EllipticCurve/Q/?conductor=500000- 轻松下载数据，但其中不包含 Tamagawa 乘积，只能获取导子和 Weierstrass 系数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_6。不过，之后用 SageMath 计算 τ S [是轻而易举的，代码片段如下：

tau = 椭圆曲线([a1,a2,a3,a4,a6]).tamagawa_product()
这样做之后，我得到了以下结果。

- 没有曲线具有 $q_\tau > 1.5$,
- 发现的最大 q_τ 是 1。22859,
- 发现的最大 τ 是 576。

这个结果多少有些令人失望，可能是因为在导子介于 500000 和 300000000 之间的曲线中，只纳入了导子为素数或 7-光滑导子的曲线，而 τ 似乎只有在导子含有许多小素因子时才会变大。

[1] https://www.lmfdb.org/api/ec_mwbsd/

3 来自 abc-三元组的曲线

3.1 abc-三元组与 Frey-Hellegouarch 曲线

设 a、b、c 是满足 $a+b=c$、$a<b$，且 $\gcd(a,b)=1$ 的一组三个正整数。其根基 $r(a,b,c)$ 是 a、b 和 c 的所有不同素因子的乘积，即 $r(a,b,c)=\prod_{p\text{。素数 }p|abc} p$。

若三元组 a,b,c 满足 $c>r(a,b,c)$，则称其为 abc-三元组。abc 猜想指出 $c\ll r(a,b,c)^{1+\epsilon}$，由此引出了将 abc-三元组的质量定义为 $q(a,b,c)=\log c/\log r(a,b,c)$（因此，当且仅当 $q(a,b,c)>1$ 时，三元组~~才是 abc-~~三元组）。这种质量概念似乎最早出现在我的论文 [dW1] 中，尽管当时尚未使用这个名称。后来，人们还引入了优值 $m(a,b,c)=(q(a,b,c)-1)^2\log r(a,b,c)\log\log r(a,b,c)$，作为衡量 abc-三元组的一项有趣指标。Bart de Smit 的网站 [dS] 提供了大量关于高质量和高优值 abc-三元组的实验信息。在本文中，我将 $1.3<q(a,b,c)<1.4$ 的 abc-三元组称为中等质量三元组；此外，$q(a,b,c)>1.4$ 的 abc-三元组称为高质量三元组（如 [dW1] 中所用）；按照 [dS] 的用法，我也将 $m(a,b,c)>24$ 的 abc-三元组称为高优值三元组；如果已知的 abc-三元组中，没有一个同时具有更大的 c 和更大的 $q(a,b,c)$，则称其为未被击败。

对于一个 abc-三元组 a、b、c，考察它的 Frey-Hellegouarch 曲线是有意义的，该曲线由 $y^2=x(x-a)(x+b)$ 定义，因为它的导子除去一个有界的 2 的幂因子外等于 $r(a,b,c)$，因此，只有质量较高的 abc-三元组对应的椭圆曲线才具有异常小的导子。

椭圆曲线上的 Birch–Swinnerton-Dyer猜想指出

$$\Omega\tau|\mathrm{Sha}|=\frac{T^2}{R}\lim_{s\to 1}\frac{L(s)}{(s-1)^r},$$

其中，$\Omega=\omega$ 或 2ω 表示周期 ω，Sha 是 Tate–Shafarevich群，T 是挠群的阶，R 是调节子，$L(s)$ 是 L级数，而 r 是椭圆曲线的秩。人们相信该猜想对所有椭圆曲线都成立，但本文仅讨论 Frey-Hellegouarch 曲线。

导子并未明确出现在 Birch 和 Swinnerton-Dyer 公式中，但它通过 Ω 产生影响，因为已知 $\Omega\ll\log^c\sqrt{c}$，这在质量较高的 abc-三元组情形下~~意味~~着 $\Omega\ll N^{-1/2+\epsilon}$。换言之，此时 Frey-Hellegouarch 曲线的周期异常小，而 Birch–Swinnerton-Dyer猜想则表明，这种情况必定会在某处得到补偿。我在上文采用的这种不太寻常的 Birch 和 Swinnerton-Dyer 公式呈现方式，暗示了我将从何处寻找这种补偿。

[dW2] 的主要思想是：如果能够证明，除了 Ω 之外，Tamagawa 乘积 τ 相对于导子也很小，那么就可以预期 Sha 群会很大；这一想法后来证明卓有成效，另见 [N], [DW], [B]。在这篇短文中，我将补充一个想法：尽管存在次多项式上界 $\tau\ll N^{C/\log\log N}$，但仍可能出现这种情况：较大的 τ 在补偿极小周期的过程中占据相当大的比重。换言之，我们或许也能在 Frey-Hellegouarch 曲线上看到较大的 Tamagawa 乘积，正如[dW2], 所述，其二次扭曲和同源曲线也是如此。

因此，这为本文余下部分确定了研究计划：通过考察与已知良好 abc-三元组对应的 Frey-Hellegouarch 曲线的二次扭曲同源的曲线，寻找具有较大 Tamagawa 乘积 τ和较高 Tamagawa 质量 q_τ的椭圆曲线。对于这些 abc-三元组，Bart de Smit 的网站 [dS] 是一个极佳的信息来源。

先来看一张概览结果的图。

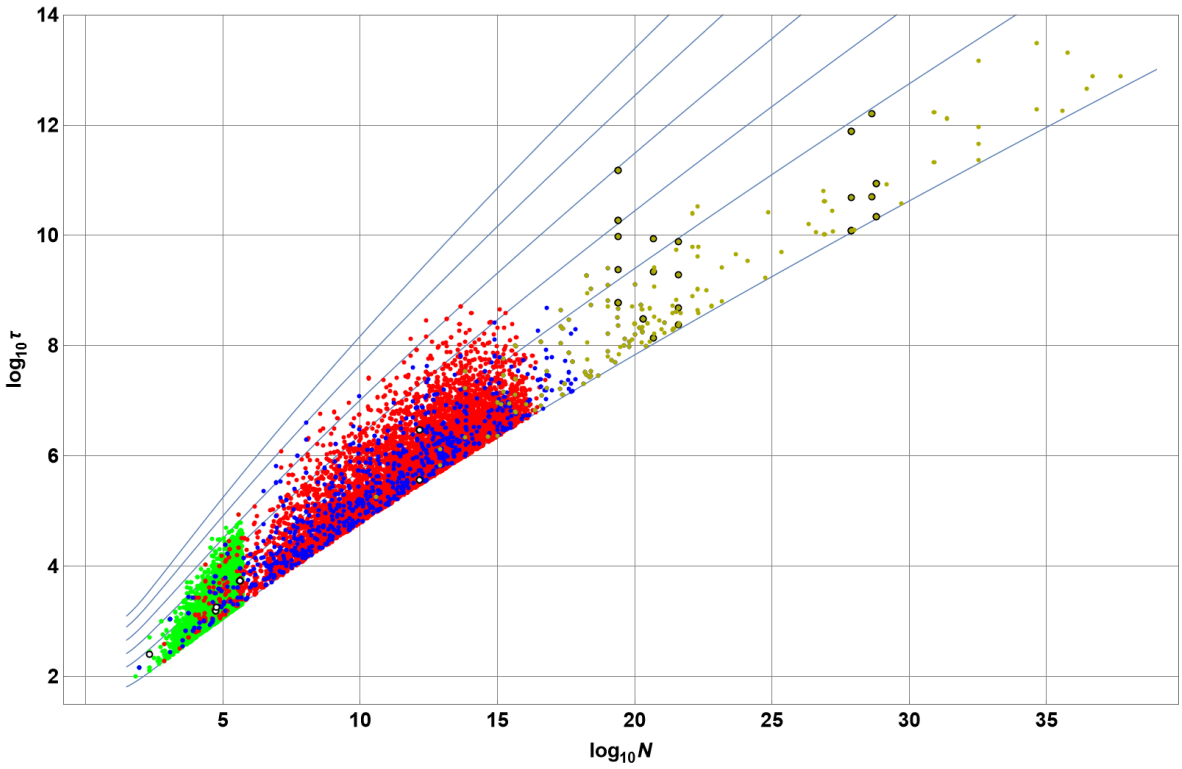

图 1：具有较大 Tamagawa 乘积 τ 和 Tamagawa 质量 $q_\tau > 1.5$的椭圆曲线。图例：曲线：$q_\tau = \frac{7}{3}\log 3 = 2.563\ldots, 2.4, 2.2, 2, 1.8, 1.5$；绿点：来自 Cremona 和 LMFDB 数据库的曲线；黄点：来自高优值 abc-三元组的曲线；红点：来自中等质量 abc-三元组的曲线；蓝点：来自高质量 abc-三元组的曲线；黑圈：来自“三元组中的三元组”的曲线。

3.2 来自高质量 abc-三元组的曲线

目前已知有 241 个高质量 abc-三元组，[dS]对此作了很好的展示。对于每个三元组，我取了扭曲的 Frey-Hellegouarch 曲线 $dy^2 = x(x-a)(x+b)$，其中 $d = \pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6$，以及一些同源曲线，并用 SageMath [S] 按如下方式计算：

E = 椭圆曲线([0, d*(b-a), 0, -d^2*a*b, 0])

[对 E.torsion_subgroup()]中的每个 te，计算 E.isogeny(E(te)).codomain()，然后使用 SageMath 的 E.conductor() 和 E.tamagawa_product() 计算导子和 Tamagawa 乘积（每条曲线的计算耗时超过 1 分钟时即中止）。结果如下，以蓝点的形式显示在图 1 中。

- 841 曲线有 $q_\tau > 1.5$,
- 28 曲线有 $q_\tau > 2$,
- 具有最大 $q_\tau = 2.39875$ 的曲线是

$y^2 + xy = x^3 - 2713479277841926834110x - 536747624193931924647882153159 00$，其 $N = 105872910 = 2\,3\,5\,11\,13\,23\,29\,37$ 和 $\tau = 3981312 = 2^{14}\,3^5$ 与 Frey-Hellegouarch 曲线同源，并由 -1 扭曲，对应于满足$a = 22771715409 = 3^{16}\,23^2$, $b = 348972425216 = 2^{13}\,29^2\,37^3$,$c = 371744140625 = 5^9\,11^4\,13$,$q(a,b,c) = 1.44181$, $m(a,b,c) = 10.5196$ 的 abc- 三元组 ,

- 具有最大 $\tau = 152202903552 = 2^{28}\,3^4\,7$ 的曲线是

$y^2 + xy = x^3 - 24329361683800519138764302913129559446969148246654933 0x -$ 46189598313302475345413359036293931548705009829803079259456070575837049845007100 ,

其中 $q_\tau = 2.18988$ 和 $N = 25180873035975641490 = 2\,3\,5\,11\,17\,19\,23\,37\,43\,61\,127\,173\,4817$, 与 Frey-Hellegouarch 曲线同源，并由 -1 扭曲，适用于带有 $a = 44790692380548068359375 = 5^9\,17^2\,23^4\,37^2\,43\,4817$, $b = 34173001833284648695700365 29 = 3^{14}\,11^8\,61^2\,173^4$, $c = 34173449740208454176383959 04 = 2^{52}\,19^6\,127^2$,$q(a,b,c) = 1.41918$, $m(a,b,c) = 29.8237$ 的 abc-三元组；也适用于带有$a = 146767394485224241 = 23^8\,37^4$ $b = 13669290314405085785446416384 = 2^{28}\,3^7\,11^4\,19^3\,61\,127\,173^2$ $c = 13669290314551853179931640625 = 5^{18}\,17^4\,43^2\,4817^2q(a,b,c) = 1.45022$, $m(a,b,c) = 34.4028$ 的 abc-三元组，并由 -1 扭曲；第 3.6 节解释了这种特殊情况。

•完整表格输出_高_质量_qua.txt，输出_高_质量_tam.txt 位于[dW3]。

3.3 来自中等质量 abc-三元组的曲线

目前已知有 1947 个中等质量 abc-三元组。它们是从下面两个大型三元组表中提取的：triples_below_1018_revised（所有低于 10^{18}的 14482065 abc-三元组）和 big_triples（另外还有介于 10^{18} 和 2^{63}之间的 9345651 abc-三元组）。对于这些中等质量 abc-三元组，我完全重复了对高质量 abc-三元组所做的操作。由此得到以下结果，并以红点的形式显示在图 1 中。

- 6342 曲线具有 $q_\tau > 1.5$,
- 172 曲线具有 $q_\tau > 2$,
- 最大 $q_\tau = 2.39177$ 的曲线是

$y^2 + xy = x^3 - 986143769212695065x - 37692804575631274846575 2775$，其 $N = 13232310 = 2\,3\,5\,7\,13\,37\,131$ 和 $\tau = 1228800 = 2^{14}\,3\,5^2$，与 Frey-Hellegouarch 曲线同源；该曲线经过 -1扭曲，对应于满足 $a = 658489 = 13\,37^3$、$b = 6879707136 = 2^{20}\,3^8$、$c = 6880365625 = 5^5\,7^5\,131$、$q(a,b,c) = 1.38137$、 $m(a,b,c) = 6.67124$的 abc-三元组,

- 最大 $\tau = 509607936 = 2^{21}\,3^5$ 的（同源）曲线是

$y^2+xy=x^3-13290632950903796089218578404113705-$
589748175639869043839018535079512741047463438442023，以及
$y^2+xy=x^3-13300785823649058521269530800913705-$
588802020491225519147911238670522467018762520682023，两者均具有 $q_\tau=2.19900$ 和 $N=44947841915130=2\,3\,5\,7\,11\,17\,19\,23\,59\,103\,431$，与经过 -1 扭曲的 Frey-Hellegouarch 曲线同源，对应于满足$a=40675641638471=7^3\,17^9$，$b=798697622664921529=11^3\,19^3\,23\,59^2\,103^3$，$c=798738298306560000=2^{20}\,3^8\,5^4\,431^2$，$q(a,b,c)=1.31127$，$m(a,b,c)=10.5021$的 abc-三元组。

- 完整表格输出_中等_质量_qua.txt，输出_中等_质量_tam.txt 位于 [dW3]。

3.4 来自高优值 abc-三元组的曲线

在 [dS] 上有 202 个高优值 abc-三元组。对于几乎所有三元组，我都成功地按照上述相同流程处理了高质量和中等质量的 abc-三元组。由此得到了以下结果，并以黄色圆点显示在图 1 中。

- 190 曲线具有 $q_\tau>1.5$，
- 172 曲线具有 $q_\tau>2$，
- 来自高质量 abc-三元组的曲线中，具有最大 $q_\tau=2.18988$ 的曲线与具有最大 τ 的曲线相同，

- 最大 $\tau=30644423884800=2^{25}\,3^4\,5^2\,11\,41$ 的曲线为
$y^2+xy+y=x^3-x^2-6215744827129040691676237873320975620033195476097298925782\backslash$
$8244466699697282657032057086 2x-5964690030130337213799773148403012416346828\backslash$
$0237789284970994254311306494753746869776095054625199343391902064488625755369\backslash$
77569403651，其 $q_\tau=1.70510$ 和 $N=43081596887429422193675039055866970=2\,3_2\,5\,7\,11\,17\,19\,29\,43\,73\,83\,97\,103\,151\,577\,751\,3167\,1230379$，同源于 Frey-Hellegouarch 曲线，并由 -3 扭曲，对应于满足 $a=69560656360644214800610167758192 3=73^3\,97^2\,103^4\,577\,751\,3167\,1230379$、$b=57576591665034362126590541368210176398589952=2^{45}\,17\,19^{10}\,29^4\,43^5\,151$、$c=57576591665729968690196983516216278076171875=3^{11}\,5^{33}\,7^9\,11^2\,83^3$、$q(a,b,c)=1.28114$、$m(a,b,c)=27.1356$ 的 abc-三元组。

- 完整表格输出_高_优值_qua.txt，输出_高_优值_tam.txt 位于 [dW3]。

3.5 来自未被击败 abc-三元组的曲线

最后，在 [dS]，上有 160 个未被击败的 abc-三元组，它们不一定与我在上文类别中找到的曲线不同。由于这些 abc-三元组很快就会变得大得惊人，我只能处理其中 c 值最小的 30 个；这没有产生任何上文其他类别中尚未找到的例子。完整表格见 [dW3] 上的 output_unbeaten_qua.txt 和 output_unbeaten_tam.txt。

3.6 由三元组构造三元组的曲线

有一个巧妙的方法，可以从质量较差的三元组构造出质量更好（但愿如此）的新 abc-三元组，前提是某种奇迹发生。设 a,b,c 是一个质量尚可的 abc-三元组，并记 $d=a+c$, $e=b+c$。接着考察导出的三元组 a,c,d 和 b,c,e，并期待奇迹发生：其中一个的质量也尚可，甚至可能达到质量 >1，从而再次成为一个 abc-三元组。在这种情况下，我会展示如何得到质量可能优于 $q(a,b,c)$ 的新三元组。

注意，$a<b<c<d<e$，并观察到

$$\left\{\begin{array}{l} c+a=d \\ c-a=b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} d+b=2c \\ d-b=2a \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} c+b=e \\ c-b=a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e+a=2c \\ e-a=2b \end{array}\right. .$$

现在令

$$\begin{array}{lcll} (A_1,B_1,C_1) & = & (a^2,bd,c^2), & \\ (A_2,B_2,C_2) & = & (b^2,4ac,d^2) & (\text{if } b \text{ is even, divide by 4; if } b^2>4ac, \text{ swap}), \\ (A_3,B_3,C_3) & = & (b^2,ae,c^2) & (\text{if } b^2>ae, \text{ swap}), \\ (A_4,B_4,C_4) & = & (a^2,4bc,e^2) & (\text{if } a \text{ is even, divide by 4}). \end{array}$$

显然，这四个新三元组都满足 $A_i+B_i=C_i$，且 $\gcd(A_i,B_i)=1$ 和 $A_i<B_i$；要判断它们是否为 abc-三元组，只需检查其质量。与 abc-三元组 a,b,c 相比，质量函数的分子几乎翻了一倍，即从至多 $\log\ e<\log c+\log 2$ 增至至少 $\log\frac{1}{4}c^2\ =\ 2\log\ c-2\log 2$。然而，分母也会增大，但增幅很可能小于 2 倍，因为它从类似 $r(a,b,c)$ 的三项根基增长为类似 $r(a,b,c,d)$ 的四项根基。在理想情况下，若 $r(a)\approx r(b)\approx r(c)\approx r(d)\approx r(e)$，分母的增长因子为 $\approx 4/3$。因此，在这种理想情况下，质量会提高 $\approx \dfrac{2}{4/3}=\dfrac{3}{2}$ 倍。实际情况都不可能完美，但我会举出一些例子，说明这个想法确实有效，能产生高质量或高优值的 abc-三元组，进而构造出具有高 Tamagawa 质量的 Frey-Hellegouarch 曲线。

注意到 $a+e=2c$ 和 $b+d=2c$，因此由 $a,2b,e$ 计算 A_1,B_1,C_1，与由 a,b,c 计算 A_4,B_4,C_4 得到相同结果；而由 $2a,b,d$ 计算 A_2,B_2,C_2，与由 a,b,c 计算 A_3,B_3,C_3 得到相同结果。

用三元组构造三元组的想法并不新鲜，J.P. van der Horst 的硕士论文 [vdH] 中就有相关内容。

我对在 [dS] 上找到的所有 abc-三元组都尝试了这种方法。这得到了 13 个质量高于 1.4 或优值高于 24 的例子。它们在图 1 中以黑色圆圈标出。不用说，它们都已出现在这些表格中，因此没有发现关于 Tamagawa 质量的新有趣曲线，尽管较大的例子显然会带来较大的 τ 和 q_τ。不过，我发现了三个值得关注的情形。

第一个来自 $a=10=2\,5$, $b=2187=3^7$, $c=2197=13^3$，具有 $q(a,b,c)=1.28975$；对于 $e=4384=2^5\,137$，这会产生质量还算不错的 $q(b,c,e)=0.90396$，随后生成两个高质量的 abc-三元组：

$A_3=43840=2^6\,5\,137$, $B_3=4782969=3^{14}$, $C_3=4826809=13^6$，其中
$q(A_3,B_3,C_3)=1.41370$，以及$A_4=25=5^2$, $B_4=4804839=3^7\,13^3$,
$C_4=4804864=2^8\,137^2$，其中 $q(A_4,B_4,C_4)=1.41328$。

第二个是一个类似的案例，来自 $a = 383102329 = 23^4\,37^2$, $b = 58457678566023 = 3_7\,11_4\,61\,173_2$, $c = 58458061668352 = 2^{26}\,19^3\,127$，其中 $q(a,b,c) = 1.13257$，对于 $e = 116915740234375 = 5^9\,7^2\,43\,4817$，这会得到一个还算不错的质量 $q(b,c,e) = 0.854092$，随后产生两个高质量且高价值的 abc-三元组：

$A_3 = 447906923805480683593 75 = 5^9\,17^2\,23^4\,37^2\,43\,4817$,
$B_3 = 34173001833284648695700365 29 = 3^{14}\,11^8\,61^2\,173^4$,
$C_3 = 34173449740208454176383959 04 = 2^{52}\,19^6\,127^2$,
其中 $q(A_3,\ B_3,\ C_3) = 1.41918$, $m(A_3,\ B_3,\ C_3) = 29.8237$，以及

$A_4 = 146767394485224241 = 23^8\,37^4$,
$B_4 = 13669290314405085785446416384 = 2^{28}\,3^7\,11^4\,19^3\,61\,127\,173^2$,
$C_4 = 13669290314551853179931640625 = 5^{18}\,17^4\,43^2\,4817^2$,
与 $q(A_4,B_4,C_4) = 1.45022$, $m(A_4,B_4,C_4) = 34.4028$。
上文已经出现过这两个 abc-三元组：在由高质量 abc-三元组得到的曲线中，它们对应最大的 Tamagawa 乘积；而在由高优值 abc-三元组得到的曲线中，它们对应最大的 Tamagawa 质量。

第三个例子又是类似的情况，来自 $a = 158810997195450625 = 5^4\,53^2\,67^6$,
$b = 4025783917396764928 = 2^8\,23^2\,61^6\,577$, $c = 4184594914592215553 = 17^6\,311\,823^3$，其中 $q(a,b,c) = 1.08916$；对于 $d = 4343405911787666178 = 2\,3^4\,7\,13\,109^4\,2087219$，这会得到质量不算太差的 $q(a,c,d) = 0.847863$，进而产生两个高优值 abc-三元组：

$A_1 = 252209328302134262792 47196812890625 = 5^8\,53^4\,67^{12}$,
$B_1 = 17485613666400818352222466948402205184 = 2^9\,3^4\,7\,13\,23^2\,61^6\,109^4\,577\,20872194$,
$C_1 = 17510834599231031778501714145215095809 = 17^{12}\,311^2\,823^6$，其中 $m(A_1,B_1,C_1) = 30.0604$；以及 $A_2 = 66455969124540129183970649096857 0625 = 5^4\,17^6\,53^2\,67^6\,311\,823^3$,
$B_2 = 40517340373926106552753870900227 11296 = 2^{14}\,23^4\,61^{12}\,577^2$,
$C_2 = 47162937286380119471150935809912 81921 = 3^8\,7^2\,13^2\,109^8\,20872194^2$，其中 $m(A_2,B_2,C_2) = 26.5098$。

完整表格 output_三元组_from_三元组_qua.txt, output_三元组_from_三元组_tam.txt 位于[dW 上]。

4 讨论

数据库	# 曲线	# abc-三元组	#曲线 最大 q_τ 含 $q_\tau > 1.5$	最大 q_τ	最大 τ
Cremona	3064705		10795	2.30681	87040
LMFDB	759667		0	1.22859	576
高质量		241	841	2.39875	152202903552
中等质量		1947	6342	2.39177	509607936
高价值		202	190	2.18988	30644423884800
未被击败		160	24	2.18988	20615843020800
由三元组构成的三元组		13	42	2.18988	1594506608640
全部合在一起			17760	2.39875	30644423884800

表1：来自不同来源的曲线数据概览。关于 [dW]的完整数据。

我的结果摘要请见表1和图 1。请注意，并非所有集合都必然互不相交。

首先可以得出一个结论：对于优质的 abc-三元组，Frey-Hellegouarch 曲线是获得高质量 Tamagawa 乘积的良好来源。寻找较大的 τ 可能并不难，只需考察坏素数数量较多的曲线；这里找到的 $\tau \approx 3 \times 10^{13}$ 具有最大的 τ，就是一个很好的例子，它有 18 个坏素数。但寻找 Tamagawa 质量较高的曲线则是另一回事。

可以用下面这个简单的不等式来表述上文引用的 Pasten 猜想 2：

$$\limsup_{E/\mathbb{Q}} q_\tau \leq \frac{7}{3} \log 3.$$

Pasten 已经指出，这个猜想可能还有改进空间；而迄今为止，我的实验似乎并不十分支持“ 7 3 log 3 是真正的常数”这一猜想。显然，我也对 lim sup q_τ 的下界感兴趣。我的实验并未对此提供$E/\mathbb{Q}$

太多启示。我认为至少可以猜想 lim sup $q_\tau > 0$，至于进一步阐述并提出论证，就留给其他人了$E/\mathbb{Q}$

猜想值，或者至少是 lim sup q_τ 的正下界。的确，Frey-$E/\mathbb{Q}$

Hellegouarch 曲线在相当一部分坏素数处呈现分裂乘法约化，因此这些素数处的局部 Tamagawa 数等于判别式 16$(abc)^2$ 中相应素数的指数，进而导致较大的 τ；这让人有理由相信 Pasten 的分析方向正确。

我也把这个问题留给其他人去研究：那些旨在寻找 Sha 群较大值的论文所用的方法，尤其是 [N], [DW] 和 [B], （出于显而易见的原因，如今都转而关注较小的 τ），能否也用于在导子不太大的情况下寻找较大的 τ。

我为这个小项目编写的代码实在简单得令人难为情，因此不想为它搭建在线代码仓库。上文提到了其中一些最重要的代码片段；其余内容都是简单的数据处理。

参考资料

[B] David Broadhurst, 《良好 abc 三元组产生的大 Tate-Shafarevich 群阶》abc , arxiv:2111.07794v1 [数论], https://arxiv.org/pdf/2111.07794.pdf, 2021年11月15日。[C] John Cremona, 《有界导数的所有椭圆曲线的 Cremona 数据库》 $\mathbb{Q}$ 《allbsd 文件夹》, https://github.com/JohnCremona/ecdata/tree/master/ allbsd, [在线；访问于12月 2022]。[DW] Andrzej Dabrowski 和 Mariusz Wodzicki, 《解析阶较大的 Tate-Shafarevich 群的椭圆曲线》, Progress in Mathematics **269** [2009], 407–421。[GOT] Michael Griffin、Ken Ono、Wei-Lun Tsai, 《椭圆曲线的 Tamagawa 乘积》$\mathbb{Q}$, Quarterly Journal of Mathematics（牛津）72, 第 4 [2021], 1517期—1543。

[vdH] Johannes Petrus van der Horst, 《利用椭圆曲线寻找 ABC 三元组》，理学硕士论文，莱顿大学，2010年，https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/vanderhorstmaster.pdf[LMFDB] LMFDB协作组, 《L函数与模形式数据库》，http: //www.lmfdb.org, 2022, [在线；访问于12月 2022]。[N] Abderrahmane Nitaj, 《Frey-Hellegouarch 曲线的不变量与较大的 Tate-Shafarevich 群》，《算术学报》 **93** [2000], 303–327。[P1] Hector Pasten, 《志村曲线与 abc猜想》，arxiv:1705.09251v4[数论], https://arxiv.org/abs/1705.09251，2018年7月5日。[P2] Hector Pasten, 《关于 Tamagawa 乘积大小的评论》，Contemp. Math.**766** [2021], 《前沿几何：代数簇的对称性与模空间》，277–282。[P3] Hector Pasten, 《数论几何中的算术导数》，《加拿大数学通报》 **65** [2022], 906–923。[S] SageMath，Sage数学软件系统（9.2版），Sage 开发者，2020年，https://www.sagemath.org/。[dS] Bart de Smit，ABC 三元组，https://www.math.leidenuniv.nl/~desmit/abc/，[在线；访问于12月 2022]。[dW1] B.M.M. de Weger, 《使用格基约化算法求解指数丢番图方程》，J. Number Th. **26** [1987], 325–367。[dW2] Benjamin M.M. de Weger, 《$A + B = C$ 与较大的 Sha 群》，Quart. J. Math. **49** [1988],105–128。[dW3] Benne de Weger, 《“A + B = C 周围的大量变通处理”一文的表格》，https: //deweger.net/tamagawa，2023年。