arXiv:2301.03058v1 [math.AG] 8 Jan 2023

格罗莫夫椭圆性与次椭圆性

Shulim Kaliman 和 Mikhail Zaidenberg

Abstract. 我们证明了代数范畴中格罗莫夫椭圆性与次椭圆性的等价性。

Contents

引言1 0.1. 椭圆性与次椭圆性 1 0.2. 椭圆簇的例子 3 0.3. 椭圆性与有理性 3 1. 喷射的复合与延拓 3 1.1. 喷射的复合 4 1.2. 延拓引理 5 1.3. 主定理的证明 6 参考文献 6

Introduction

0.1. 椭圆性与次椭圆性。我们在特征零的代数闭域 $\mathbb{K}$ 上工作；$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ 表示 $\mathbb{K}$ 上的仿射 n 空间。本文中的所有簇和向量丛都是代数的；簇总是既约且不可约的。姑且不拘泥于用语，本文中的喷射和（次）椭圆性分别指代数喷射和代数（次）椭圆性。

椭圆性的概念最初是在解析和代数两种背景下引入的，见[Gro89，第 0.5 节和第 3.5.A 节]。在局部化引理中（见 [Gro89，第 3.5.B 节]），格罗莫夫实际上考察了椭圆性的局部版本。次椭圆性（在[Gro89第 3 节中已有所体现5]）是在[For02]中引入的；参见 [For17，第 5 节1] 和 [For20]，了解相关历史。回顾这些概念。

光滑代数簇 X 上的秩为 r 的喷射是一个三元组（E、p、s），由一个秩为 r 的向量丛 $p\colon E \to X$ 以及一个

日期：2023年1月6日。

态射 $s\colon E \to X$ 满足 $s|_Z = p|_Z$，其中 $Z \subseteq E$ 表示 p的零截面。如果限制映射 $s|_{E_x}\colon E_x \to X$ 到纤维 $E_x = p^{-1}(x)$在向量空间 E_x的原点 $0_x = Z \cap E_x$ 处占优，则称该喷射在 $x \in X$ 处占优。若簇 X 存在一个在每个点 $x \in X$处都占优的喷射（E、p、s），则称该簇为椭圆簇。

点 $x \in X$ 处取值于 X 的局部喷射 (E, p, s) 由一个向量丛 $p\colon E \to U$（定义在 x 的一个邻域 U 上）和一个态射$s\colon E \to X$ 组成，使得 $s|_{Z_U} = p|_{Z_U}$，其中 Z_U 表示 $p\colon E \to U$的零截面。若对于任意 $x \in X$，在 x 的一个邻域内都存在一个在 x处占优的局部喷射，则称 X是局部椭圆的。若簇X 存在一族定义在整个 X 上的喷射 (E_i, p_i, s_i)，且在每一点 $x \in X$处都占优，即，

$$T_x X = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}s_i(T_{0_{i,x}} E_{i,x}) \quad \forall x \in X.$$

因此，椭圆簇既是局部椭圆的，也是次椭圆的。在本文中，我们将证明反向蕴含也成立。

定理 0.1. 对于光滑代数簇 X，以下条件等价：

- X 是椭圆的；
- X 是次椭圆的；
- X 是局部椭圆的。

定理 0.1 回答了 [For17第 230]页的一个问题。对于线性代数群的齐性空间，前两个性质的等价性广为人知，参见[For20，命题 6。7]然而，尚不清楚这种等价性在解析范畴中是否也成立；另见 [Kus20]。

比较定理 0.1与 [LT17，定理 1] 以及 [For20，推论 6，6]可得以下结果，术语参见[LT17] 和 [For20] 。

推论 0.2. 对于光滑代数流形 X，以下条件等价：

(a) X 是椭圆的；(b) X 是局部椭圆的；(c) X 是次椭圆的；(d) X 满足格罗莫夫的条件 aEll_1；(e) X 满足代数同伦 Runge 原理。

参见 [For20，第 6 节。2]关于 (d) 和 (e) 与代数情形下的逼近、插值及 Oka-Grauert h原理之间的关系。

作为另一条直接推论，我们提及 [Kus22的如下版本，即推论 1。5]，另见 [For20，推论 6。26]。

推论 0.3. 光滑（次）椭圆簇的万有覆叠是椭圆代数簇。

0.2. 椭圆簇的例子。回顾一下，维数为 ≥ 2 的簇 X 若满足：每个光滑点 $x \in X$ 都有 $\mathbb{G}_a$ 作用在 X 上的一维轨道经过，且这些轨道的速度向量张成切空间 $T_x X$，则称其为柔性簇，见 [AFKKZ13]。已知每个光滑柔性簇都是椭圆簇，见 [Gro89, 0.5.B] 和 [For17, 命题 5.6.22(C)]；另见 [AFKKZ13, 附录]。柔性簇的例子不胜枚举；例如见 [AFKKZ13] 以及综述文章 [CPPZ21] 和 [Arz22]。

闭子集 Y 余维数 ≥ 2 在光滑柔性拟仿射簇 X 维数 ≥ 2 中的补集仍然是柔性的，见[FKZ16，定理 1。1]。特别是，$X \setminus Y$ 是椭圆的。

回忆一下，代数簇 X 维数为 n 属于类$\mathcal{A}_0$，如果它可以由有限个 $\mathbb{A}^n$副本覆盖。若它是 $\mathcal{A}$ 类 $\mathcal{A}_0$中某个簇里余维数至少为 2 的闭子簇的补集，则它属于类 $\mathcal{A}$。任何[For17类的簇都是次椭圆的，参见命题 6.4。5]。由定理0.1 可知，它是椭圆的。

例如，格拉斯曼流形 $X = \mathbb{G}(k,\ n)$（由 k维子空间构成）属于类 $\mathbb{A}^n$。 $\mathcal{A}_0$因此，对于任意余维数为 $X \setminus Y$ 的闭子集 $Y \subseteq X$，≥ 2参见 [For17，推论 5.6.18(D)]。这回答了 [同上]中的一个问题。

此外，沿光滑闭子簇作爆破后，类 $\mathcal{A}$ 中的簇是次椭圆的。光滑的局部稳定柔性簇也具有同样的性质，参见[LT17]，[KKT18] 和 [For17，定理 6.4。8]。由定理0.1 可知，所有这些簇都是椭圆的。进一步的潜在例子另见 [Gro89，第 3.4(F) 节]。

0.3. 椭圆性与有理性。 根据定义，任何光滑（次）椭圆簇都被某个仿射空间支配，因此是单有理且有理连通的。不过请注意，也有一些柔性、因而具有椭圆性的光滑仿射簇并非稳定有理，参见[Pop11，例 1。22]。格罗莫夫在 [Gro89] 中提出，任意有理射影簇是否都是椭圆的。同样的问题也可以针对单有理射影簇提出，参见 [BKK13]。

1. Composing and extending sprays

在本节中 X 表示一个光滑代数簇。我们将在此为定理0.1的证明。

1.1. 喷射的复合。给定的两个喷射 (E_1, p_1, s_1) 和 (E_2, p_2, s_2) 在 X 上的复合 $(E_1 * E_2, p_1 * p_2, s_1 * s_2)$ 定义如下：[1]

$$E_1 * E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \,|\, e_1 \in p^{-1}(X),\ \ s_1(e_1) = p_2(e_2)\} = s_1^*(E_2),$$
$$p_1 * p_2(e_1, e_2) = p_1(e_1), \qquad s_1 * s_2(e_1, e_2) = s_2(e_2),$$

参见 [Gro89，1.3.B]。此外，还可以考虑迭代复合

$$(E, p, s) = (E_1 * \ldots * E_m,\ \ p_1 * \ldots * p_m,\ \ s_1 * \ldots * s_m)$$

一列定义在 X 上的 m 喷射（E_i, p_i, s_i），参见 [同上] 或 [For17，定义 6.3.5]。显然，$p\colon\ E \to X$ 是一个纤维丛，其一般纤维同构于一个作为簇来看待的仿射空间 $\mathbb{A}^N$。一般而言，$p\colon\ E \to X$ 不具有向量丛结构。不过，它具有一个自然截面 $\sigma\colon\ X \to E$（其作用类似于零截面），使得 $s|_{\sigma(X)} = p|_{\sigma(X)}$，参见 [For17，定义 6.3.5]。

若 $p_i\colon\ E_i \to X$ 对所有 i 都是平凡向量丛，则复合（E，p，s）是定义在 X 上的一个喷射，其向量丛 $p\colon\ E \to X$ 是平凡向量丛，参见[For17，引理 6.3。1]此外，我们还有以下事实。

命题 1.1. 考虑喷射 (E_1, p_1, s_1) 和 (E_2, p_2, s_2) 在 X 上的复合 $(E, p, s) = (E_1 * E_2, p_1 * p_2, s_1 * s_2)$。如果 (E_2, p_2, s_2) 的秩为 1，那么 (E, p, s) 是 X 上的喷射。

证明。根据前文，只需证明 $p\colon\ E \to X$ 是一个向量丛。沿投影 $p_1\colon\ E_1 \to X$ 的拉回给出一个同构 $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Pic}(E_1)$，见 [Mag75，定理 5]。因此，线丛 $s_1^*(E_2) \to E_1$ 同构于线丛 $p_1^*(L_1)$，其中线丛为 $L_1 \to X$。

选取 $\{U_i\}$ of X 的一个仿射开覆盖，使其同时平凡化 $p_1\colon\ E_1 \to X$ 和 $L_1 \to X$，并考虑柱体 $Y_i := p_1^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{A}^r$ 和 $p_1^*(L|_{U_i}) \simeq U_i \times \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^1$。在这些平凡化下，复合 $p_1^*(L_1|_{U_i}) \to U_i$ 与标准投影 $\mathrm{pr}_1\colon\ U_i \times \mathbb{A}^{r+1} \to U_i$ 一致。$U_i \cap U_j$ 上 $p_1^*(L_1|_{U_i}) \to U_i$ 与 $p_1^*(L_1|_{U_j}) \to U_j$ 之间的过渡函数 $\varphi_{i,\,j}$ 具有如下形式

$$\varphi_{i,j}\colon (x, v, t) \mapsto (x, f_{i,j}(x, v), g_{i,j}(x, v)t), \quad (x, v, t) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^1$$

where

$$f_{i,j} \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}(U_i \cap U_j)) \quad \text{and} \quad g_{i,j} \in \mathcal{O}^*(Y_i \cap Y_j) = p_1^*(\mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)),$$

也就是说，函数 $g_{i,j}(x, v) = g_{i,j}(x)$ 不依赖于 $v \in \mathbb{A}^r$。最后 $\varphi_{i,j} \in \mathrm{GL}(r+1, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$，这证明了 $p = p_1 * p_2\colon\ E \to X$ 是一个向量丛。□

[1]略去符号上的区别，我们不区分向量丛与其全空间。

推论 1.2。 X 上的秩 1 喷射 (L_i, q_i, s_i) 的复合 (E, p, s) 是一个秩为 r 、定义在 X 上的喷射。如果族 (L_i, q_i, s_i) 是支配的，那么喷射 (E, p, s) 也具有这一性质。

证明。 第一个断言可由命题 1.1立即得出；参见 [For17，引理 6.3。6]第二个断言参见。 □

1.2. 延拓引理。 下面的引理及其证明基本上仿照格罗莫夫的局部化引理及其证明，参见 [Gro89, 3.5.B]。

引理 1.3。设 $U \subseteq X$ 是一个稠密开子集，且 (E, p, s) 是 U 上的一个局部喷射，其值取自 X，并在点 $x \in U$处支配。则存在一个 X 上的喷射 $(E, \tilde{p}, \tilde{s})$，在 x处支配。

证明。缩小 U 后，我们可以假设

- $U = X \setminus \mathrm{supp}(D)$，其中 D 是 X上的一个约化有效除子，并且
- $p\colon\ E = U \times \mathbb{A}^r \to U$是 U上的平凡向量丛。

我们将 $p\colon\ E \to U$扩展为 X上的平凡向量丛 $p'\colon\ E' = X \times \mathbb{A}^r \to X$。令 $\tilde{p}\colon\ E = E' \otimes \mathcal{O}_X(-nD) \to X$，其中 $n \in \mathbb{N}$。因此， E是线丛 $\mathcal{O}_X(-nD)$的 r 个副本的直和。我们有

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-nD), \mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(nD)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)).$$

取一个截面 $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$，使得 $\mathrm{div}(\sigma) = D$。那么， σ^n 定义了一个线丛同态 $\mathcal{O}_X(-nD) \to \mathcal{O}_X$，它在 X 上为恒等映射，在 $\tilde{p}^{-1}(\mathrm{supp}(D))$上消失到 n阶，并且在 U上限制为同构。这些同态的直和给出一个向量丛同态 $\psi\colon\ E \to E'$，它在 X 上为恒等映射，并具有类似性质。将 s 扩展为有理映射 $s'\colon\ E' \dashrightarrow X$。那么，对于所有 $n \gg 1$，复合映射 $\tilde{s} = s' \circ \psi\colon\ E \to X$都是一个态射，使得 $s|_{\tilde{Z}} = \tilde{p}|_{\tilde{Z}}$，其中 Z 是 $\tilde{p}\colon\ E \to X$的零截面。在 X 上的所得喷射$(E, \tilde{p}, \tilde{s})$显然在 x处占优。□

下面的推论显然成立。它隐含在 [Gro89,3.5.B]，另见 [Gro89,3.5.B′] 和 [For17, Proposition6.4.2] 中局部化引理的证明里。

推论 1.4. 若 X 是局部椭圆的，则它是次椭圆的。

接下来我们推导出以下有用事实。

引理 1.5. 任意次椭圆光滑簇 X 都存在一个由秩 1 喷射组成的支配族。

证明。设 (E_i, p_i, s_i) 是 X 上的支配喷流族。对于一点 $x \in X$，我们可以找到一个邻域 U，使得 $p_i|_U\colon\ E_i|_U \to U$

是一个秩为（假设为 r_i）的平凡丛。选取一个分解 $E_i|_U = \bigoplus_{j=1}^{r_i} L_{i,j}$，其中 $p_{i,j} = p_i|_{L_{i,j}} : L_{i,j} \to U$ 是平凡线丛。令 $s_{i,j} = s|_{L_{i,j}} : L_{i,j} \to X$，得到 U 上的局部秩 1 喷流族 $(L_{i,j}, p_{i,j}, s_{i,j})_{j=1,\dots,r_i}$。容易看出，此族在 x 处是支配的。缩小 U，并按照引理 1.3 的证明中的相同方法进行，我们将后一个族扩展为整个 X 上的秩 1~喷流族 $(L_{i,j}, \tilde{p}_{i,j}, \tilde{s}_{i,j})_{j=1,\dots,r_i}$，且该族在 x 处仍然是支配的~。这样，我们便能构造一个族 $(L_{i,j}, \tilde{p}_{i,j}, \tilde{s}_{i,j})_{i,j}$，它在 X的每一点处都是支配的。□

1.3. 主定理的证明。 鉴于推论1.4 以下命题完成了引言中定理 0.1 的证明。

命题 1.6。设 X 是一个光滑代数簇。如果 X 是次椭圆的，那么它就是椭圆的。

证明。 根据推论 1.2 只需在 X上构造一个由秩 1 喷射组成的支配族。然而，引理 1.5 给出了这样一个族。□

References

[Arz22] I. Arzhantsev, 《代数簇的自同构与无限传递性》, arXiv:2212.13616 (2022).[AFKKZ13]I. V. Arzhantsev、H. Flenner、S. Kaliman、F. Kutzschebauch 和 M. Zaidenberg, 《柔性簇与自同构群》, Duke Math. J. 162:4 (2013), 767–823.[BKK13] F. Bogomolov、I. Karzhemanov 和 K. Kuyumzhiyan, 《单有理性与无限传递模型的存在性》。载于：双有理几何、有理曲线与算术，第 77–92 页。Springer, 2013.[CPPZ21] I. Cheltsov、J. Park、Yu. Prokhorov 和 M. Zaidenberg, 《Fano 簇中的柱体》。EMS Surv. Math. Sci. 8, 39–105 (2021).[FKZ16] H. Flenner、S. Kaliman 和 M. Zaidenberg, 《柔性簇的 Gromov-Winkelmann 型定理》。J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18:11 (2016), 2483–2510.[For02] F. Forstneric, 《次椭圆浸没截面的 Oka 原理》。Math. Z. 241:3 (2002), 527–551.[For17] F. Forstneric, 《Stein 流形与全纯映射：复分析中的同伦原理》。第二版。Springer 出版社，柏林—海德堡，2017.[For20] F. Forstneric, 《Oka 流形的最新进展》。arXiv:2006.07888 (2020).[Gro89] M. Gromov, 《椭圆丛全纯截面的 Oka 原理》, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 851–897. MR1001851. DOI10.2307/1990897.[KKT18] S. Kaliman、F. Kutzschebauch 和 T. T. Truong, 《关于次椭圆流形》。Israel J. Math. 228:1 (2018), 229–247.[Kus20] Y. Kusakabe, 《可数集的 Oka 补集与非椭圆 Oka 流形》。Proc. Amer. Math. Soc. 148:3 (2020), 1233–1238.

[Kus22]Y. Kusakabe, 《关于次椭圆簇的基本群》。arXiv:2212.07085 (2022).[LT17] F. L´arusson 和 T. T. Truong, 《仿射空间爆破的代数次椭圆性与支配性》。Documenta Mathematica 22 (2017), 151–163.[Mag75] A. Magid, 《纤维化的皮卡序列》。Proc. Amer. Maths. Soc. 53:1 (1975), 37–40.[Pop11] V. L. Popov, 《关于代数簇的 Makar-Limanov 不变量、德克森不变量与有限自同构群》。载于：仿射代数几何，第 289–311 页。CRM会议录讲义 54, Amer. Math. Soc., 普罗维登斯，罗得岛，2011. Zbl 1242.14044, MR 2768646.

University of Miami, Department of Mathematics, Coral Gables, FL33124, USA电子邮箱地址：kaliman@math.miami.edu

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, IF, 38000 Grenoble, France电子邮箱地址：mikhail.zaidenberg@univ-grenoble-alpes.fr