限制性三体问题中无降阶法的闭式摄动理论及长期运动区域

Mattia Rossi 和 Christos Efthymiopoulos帕多瓦大学数学系 “Tullio Levi-Civita” Via Trieste, 63 - 35121 帕多瓦，意大利 mrossi@math.unipd.it, cefthym@math.unipd.it

2023年1月10日

arXiv:2301.03070v1 [math-ph] 8 Jan 2023

摘要

我们提出了一种用于限制性三体问题（R3BP）摄动理论计算的闭式方案（即不对轨道偏心率进行展开），适用于无质量粒子的轨道位于主摄动体轨道之外的情形。我们从质心系（经雅可比约化）的哈密顿量的多极展开出发，利用李级数对德洛内变量进行一系列规范化，从而得到一个不使用降阶法的长期哈密顿量模型。为此，我们引入了一种类似于 [1] 中针对位于主摄动体轨道内侧的试验粒子轨道所提出的记账方法，但在此适用于外部轨道的情形。我们以数值例子展示该方法在平面圆型和空间椭圆限制性三体问题中的表现，所用参数适用于太阳—木星系统。特别是，我们展示了该方法在远离平均运动共振时，对轨道根数变化的复现精度。作为该方法的基本成果，我们表明，以级数余项的大小为判据，可以获得准确的半解析估计，确定在轨道根数空间中长期哈密顿量模型的有效边界；该模型是在消除粒子的快自由度后得到的，能够有效近似真实动力学。

关键词： 天体力学 – 航天动力学 – 限制性三体问题 – 闭式 – 无降阶法 – 长期运动

1 引言

与常见的（拉普拉斯－拉格朗日）理论不同，闭式摄动理论 [11] 为受摄开普勒问题中的级数计算提供了一个框架，无需对天体轨道偏心率进行幂级数展开。这主要是出于构建适用于偏心率足够大的轨道的长期模型的需要，例如太阳系中许多小行星的轨道，或太阳系外行星系统中行星的轨道。

通常按轨道偏心率展开的级数方法，其效率受到限制，这是因为按偏心率幂次对开普勒方程进行反演时，级数仅在所谓的拉普拉斯极限 $e_L \approx 0.66274$ [6]以内收敛。一般而言，这种收敛性在达到该值之前很久就会变慢（在许多应用中约为 $e \sim 0.3 - 0.4$ ）。为解决这一问题，闭式摄动理论旨在以“闭式”形式求解同调方程，并据此在每个摄动步骤中计算李生成函数（例如参见 [3,

5]）。这一过程远非无代价：当同调方程的核包含开普勒项以外的附加项时，就会出现一个主要障碍。最常见的此类附加项（[11]）是离心项 $-\nu H$，其中 ν 是在与主摄动体共同旋转的参考系中的角频率，而 H 是德劳内作用量，其数值等于粒子沿旋转轴方向的角动量。对于行星的轨道运行体，ν等于行星的自转频率；对于行星多极势中的所有非轴对称项（带谐项），都会出现这一问题。而在限制性三体问题中，ν 表示主摄动体的平均运动（例如太阳—木星系统中的木星），在粒子的哈密顿量中引入摄动函数的多极展开后，也会以类似方式出现这一问题。

为克服上述问题，Deprit、Palaciań及其合作者在相关著作中提出了一种称为降阶算法的算法 [2, 4, 7, 13, 15]。简言之，给定一个拟可积哈密顿量 $H = H_0 + \varepsilon H_1$，其中 ε 是一个小参数，假设 $H_0 = H_0' + H_0''$，并且在相空间的某个区域内，H_0' 对 H_0 的哈密顿流的贡献占主导地位，相较于 H_0'' 项。在通常的摄动理论中，我们试图通过一系列由生成函数$\chi^{(r)}$, $r = 1$、2、.....s所定义的正则变换，部分规范化摄动项 H_1 ；这些生成函数满足如下形式的同调方程 $\{H_0, \chi^{(r)}\} + h_1^{(r)} = 0$，其中 $\{\cdot,\cdot\}$表示两个正则变量函数之间的泊松括号，$h_1^{(r)}$ 是哈密顿量中待规范化的一项。而在降阶技术中，我们改用方程$\{H_0', \chi^{(r)}\} + h_1^{(r)} = 0$，即仅将主导函数 H_0'置于同调方程的核中。这种选择主要是出于算法便利性的考虑。例如，将 H_0' 视为开普勒项（当 ν 较小时），便可得到一个能够以闭式求解的同调方程（当 ν 较大时，我们则改设 $H_0' = -\nu H$ ）。然而，$\chi^{(r)}$ 与被排除在核之外的部分 H_0''所形成的所有泊松括号，都会产生需要“降阶”的项，也就是说，这些项将在后续步骤中再进行规范化。正如 [14], 中详细解释的那样，在达到某一点后，该方案便会产生发散的项序列，因此只能执行有限次降阶（另见 [13]）。这意味着该过程必然会在若干步骤后停止，留下一个有限但可能相当小的余项。

降阶法尤其适用于具有强层级结构问题的极限情形：当可积部分 H_0 依赖于一个包含 n 个频率$\omega = (\omega_1, \ldots\ldots, \omega_n)$ 的频率向量时，其中某个频率（比如 ω_i）对于某个 i满足 $1 \le i \le n$，其绝对值显著大于其余频率。具体而言，哈密顿量中可通过规范化而“降阶”的谐波项 $\cos(k \cdot \varphi)$ 应满足 $|k_i\omega_i| \gg |k_j\omega_j|$、$j = 1, \ldots\ldots, n$、$j \neq i$，对每个整数 k_i, $k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 均成立（同时假设非共振条件 $k \cdot \omega \neq 0$、$k = (k_1, \ldots\ldots, k_n)$）。例如，正如 [14] 中所解释的，在 $n = 2$ 且 $\omega_2 \gg \omega_1$的简单情形下，经过 N 次降阶后得到的生成函数 $\chi^{(N)}$ 包含一些项，其系数按公比为 $k_1\omega_1/k_2\omega_2$的几何级数增长。因此，降阶法仅适用于上述公比小于 1 的项。当 $\omega_2 \gg \omega_1$时，这包括哈密顿扰动中大多数低傅里叶阶数的谐波项；但当两个频率大小相近时，则仅包括少数几项。因此，按其构造，降阶法在后一种非层级情形下的适用范围有限。

文献中讨论过降阶技术的若干变体，用于处理受摄开普勒问题；在这类问题中，引力势源于一个扩展天体，并以球谐函数展开（例如 [7, 10]）。为处理非层级情形，[7], 讨论了一种与本文方法相似的技术，用于对地球人造卫星情形下的带谐项进行平均。至于限制性三体问题，Cavallari 和 Efthymiopoulos [1] 讨论了一种无需降阶的算法，用于消除粒子哈密顿量中的短周期项；该算法适用于粒子的轨道（例如小行星）完全位于主摄动体（例如木星）轨道内部的情形。据我们所知，尚无无需降阶的算法

在文献中提出过用于处理粒子轨道位于主摄动体轨道之外这一情形的算法。本文的主要目标是提出这样一种算法，讨论它与以往提出的算法之间的一些重要差异，并考察其适用范围。

限制性三体问题（R3BP）描述的是一个质量可忽略的天体 $\mathcal{P}$ 在两个大质量天体 $\mathcal{P}_0$ （主天体或中心天体）和 $\mathcal{P}_1$ （次天体或主摄动体）的引力场中运动的情形。这两个大质量天体以 r_1 （t）运动：在更一般的版本（椭圆限制性三体问题，ER3BP）中为椭圆运动，在圆形限制性三体问题（CR3BP）中则为圆周运动。下文分析的出发点是该模型的哈密顿量，它经雅可比坐标约化后得到（R， P）。[1]。将时间表示为次天体的平近点角 $M_1 = n_1 t$，其中 n_1 是次天体的平均运动，并将 M_1 与一个虚拟作用变量 J_1 作正则共轭变换后，可将哈密顿量表示为

$$\mathcal{H}(R, M_1, P, J_1) = \frac{\|P\|^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_0}{\|R + \mu r_1(M_1)\|} - \frac{\mathcal{G}m_1}{\|R - (1-\mu) r_1(M_1)\|} + n_1 J_1 \,, \tag{1}$$

其中 $\mathcal{G}$ 是引力常数，且

$$\mu = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \in (0, 1/2]$$

是质量参数;

$$r_1(M_1) = a_1 \left(\cos E_1(M_1) - e_1, \sqrt{1 - e_1^2} \sin E_1(M_1), 0 \right) \tag{2}$$

是 $\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1$ 绕其质心进行的椭圆运动，其偏心率为 e_1 ，半长轴为 a_1；系统偏近点角 $E_1 \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 与平近点角 $M_1 \in \mathbb{T}$ 之间的关系由开普勒方程给出，符合标准二体问题设定；（$R = (X,\ Y,\ Z)$ $P = (P_X,\ P_Y,\ P_Z)$ ） $\in T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{-\mu r_1, (1-\mu)\ r_1\})$ 是 $\mathcal{P}$ 的位置-动量对，相空间赋有标准辛形式$dP_X \wedge dX + dP_Y \wedge dY + dP_Z \wedge dZ + dJ_1 \wedge dM_1$。

因此，我们使用德洛内根数（ℓ， g， h， L， G， H），其定义如下:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mathcal{G}m_0 a}\,, & \ell &= M\,, \\ G &= L\sqrt{1-e^2}\,, & g &= \omega\,, \\ H &= G\cos\, i\,, & h &= \Omega\,, \end{aligned} \tag{3}$$

其中， a， e， i， M， Ω ω 分别表示粒子的半长轴、偏心率、倾角、平近点角、升交点经度和近地点幅角。

下面提出的方法有一个关键要素：与 [1], 类似，我们引入一个数值等于 1 的记账符号 σ ，其作用是组织微扰方案，从而依次对小量阶相近的项进行规范化，并将问题中的所有小量一并处理，即，

– 偏心率 e, e_1 （当 $e_1 \neq 0$ 时），– 质量比 μ，– 特定粒子轨迹的半长轴相对于均值 L_* 的波动 δL 。

[1]在限制性三体问题中，当 $\|R\| > \|r_1\|$ 时实施雅可比变换。

记账符号通过分别为原始哈密顿量中的所有项，以及每个正规化步骤后得到的哈密顿量中的所有项赋予幂次 σ^1 和 $\sigma^{\nu_1}, \sigma^{\nu}, \sigma^{\nu}$ 来发挥作用，其中 ν, ν_1 是下文定义的非零自然数。以此为基础，我们在第2节得出以下结果：我们证明，对于 $k_\mu,\ k_{\mathrm{mp}} \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 且 $k_\mu > 1$，将式 (1) 展开至 μ^{k_μ} 并将式 $(\|r_1\|/\|R\|)^{k_{\mathrm{mp}}}$ 结合起来后，可通过 $\nu(k_\mu-1)$ 次近恒等变换，与一个关于快角 $\ell,\ M_1$ 的正规形所得到的长期模型构成正则共轭。

$$\mathscr{H}(\ell,g,h,M_1,\delta L,G,H,J_1)=\mathscr{H}_0(g,h,\delta L,G,H,J_1)+\mathscr{R}(\ell,g,h,M_1,\delta L,G,H)\ , \tag{4}$$

with

$$\mathscr{H}_0=n_*\delta L+n_1J_1+\sum_{l=\nu}^{\nu k_\mu-1}\sum_{p\in\mathbb{Z}^2}c_{l,p}(\delta L,e,i;\mu,L_*,a_1,e_1)\cos(p_1g+p_2h)\sigma^l\ , \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{R}=\sum_{s\in\mathbb{Z}^4}d_{\nu k_\mu,s}(E_1,\delta L,e,i;\mu,L_*,a_1,e_1)\cos(s_1f+s_2g+s_3h+s_4E_1)\sigma^{\nu k_\mu}\\ +\mathcal{O}\left(\sigma^{\nu k_\mu+1};\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^{k_{\mathrm{mp}}+1}\right)\ .\end{aligned} \tag{6}$$

上述所有表达式中均隐含了真近点角的依赖关系 $f=f(\ell,\ \delta L,\ G)$、$e=e(\delta L,\ G)$ 和 $i=i(G,\ H)$；$c_{l,\ p}$，$d_{\nu k_\mu,\ s}$ 为实系数。一个关键问题是如何选取正整数 $\nu=\nu(e_*,\ \mu)\ge 1$、$\nu_1=\nu_1(e_*,\ e_1)\ge 1$。如下文所述，这些用于调节记账方案的整数，是基于选定的参考值 $e_*\in(0,\ 1)$ 进行适当调整的：

$$\nu=\left\lceil\frac{\log_{10}\mu}{\log_{10}e_*}\right\rceil\ ,\qquad \nu_1=\left\lceil\frac{\log_{10}e_1}{\log_{10}e_*}\right\rceil\ , \tag{7}$$

其中 $\lceil\cdot\rceil$ 为向上取整函数。导出式 (4) 的正规化方案是局部的：鉴于半长轴在（世俗）正规形的流作用下保持不变，我们引入分解 $L=L_*+\delta L$，其中 $L_*=\sqrt{\mathcal{G}m_0a_*}\gg\delta L$，$n_*=\sqrt{\mathcal{G}m_0}a_*^{-3/2}$是半长轴 a_* 的目标参考值，并按 δL 的幂次展开哈密顿量，从而使 δL 成为与粒子的平近点角正则共轭的新作用变量。

由上述内容可知，正规化算法给出一系列李生成函数$\chi^{(j)}_{\nu+j-1}=\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j-1})$、$j=1,\ \ldots\ldots,\ \nu(k_\mu-1)$，由此得到李正则变换，使哈密顿量中所有依赖角 f 和 E_1 的项都能递归地规范化。当频率 n_*（半长轴 a_*处粒子的平均运动）和 n_1 远离平均运动共振时，可以定义这些规范化变换（见注3）。此外，这些生成函数是以下形式的同调方程的解：

$$\{\mathscr{Z}_0,\chi^{(j)}_{\nu+j-1}\}+\mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1,\nu+j-1}=\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j-1})\ , \tag{8}$$

其中，$\mathscr{Z}_0=n_*\delta L+n_1J_1$ 和 $\mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1,\ \nu+j-1}\sim\sigma^{\nu+j-1}$ 汇集了 $\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j-1})$ 中至少依赖两个近点角之一的三角单项式。要为 (8) 得到闭式解，关键恰恰在于恰当选择方程右侧保留的 $\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j-1})$ 余项。换言之，我们并不寻求精确消去项$\mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1,\ \nu+j-1}$，而只要求近似消去，从而留下一个在记账阶数上更高阶的余项，因此有可能在后续步骤中将其进一步减小。

如第3节所述，通过上述方法对余项行为进行分析，一个重要结果是估计最优正规化步骤数 j_{opt}：在此步骤数下，余项在记账参数中的阶数为 $\nu + j_{opt} - 1$，其中 $j_{opt} \leq \nu(k_\mu - 1)$。$j_{opt}$ 的值定义为使误差界 $\mathscr{E}(j)(a_*, e_*) = \sum_{\nu+j \leq l \leq \nu k_\mu, s} |d_l^{(j)}{}_{,s}| \geq \|\mathscr{R}_{\nu+j}^{(j)}\|_\infty = \sup |\mathscr{R}_{\nu+j}^{(j)}|$ 达到最小的值，其中 $\mathscr{R}_{\nu+j}^{(j)} = \mathcal{O}(\sigma^{\nu+j})$ 和 $d_l^{(j)}{}_s$ 如式 (6) 所示，但经过了 j 次正规化步骤。与摄动理论中的常见情况一样，j_{opt} 的值取决于所选参考值（a_*, e_*）。利用本方法，可以得到半平面 $a > a_1$ 中最优余项大小关于 (a_*, e_*) 的分布图。基于这些信息，我们计算出极限轨迹，该轨迹连接了 (a_*, e_*) 平面中的所有点；在这些点处，随着正规化步骤数增加，正规形计算不再带来改进，即 $j_{opt} = 1$。与利用快速李雅普诺夫指标（FLI） [9], 得到的数值稳定性图相比，可以看到，半解析方法找到的极限轨迹基本上与数值（快速李雅普诺夫指标图）极限重合；在该极限处，与某个外部平均运动共振相关的哈密顿量中，没有任何谐波项会影响动力学。因此，极限轨迹下方的 (a_*, e_*) 平面子区域内的所有运动在长期意义上都是稳定的，即不会受到短周期共振效应所导致的不稳定性的影响。基于此，我们将该轨迹确定为长期运动区域的边界，并证实，通过正规形进行半解析计算所得结果，与通过全数值快速李雅普诺夫指标（FLI）稳定性图，以启发式方式定义同一边界所得结果精确一致。

本文结构如下。第2节逐步介绍推导出 (5) 和 (6) 的算法，并补充说明在所有闭式计算中使用的开普勒轨道根数泊松代数公式。第3节通过数值研究考察该方法对太阳—木星系统中一颗小行星的精度：先研究空间椭圆限制性三体问题，再研究平面圆形限制性三体问题；后一种情况下，计算所需时间较短，因此可以在 $(a_*,\ e_*)$ 平面上的一个网格中指定最优正规化阶数，从而半解析地确定长期运动区域的边界。第4节总结本研究的基本结论，并对未来工作提出一些相关意见。

2 最外层限制性三体问题的闭式方法

2.1 摄动的多极展开

参见第 1 节，令 $\mathcal{H}$ 按照（中的形式以质心笛卡尔坐标给出， 1):

$$\mathcal{H} = \frac{\|P\|^2}{2} + n_1 J_1 - \mathcal{G} m_0 \mathcal{R} \,, \tag{9}$$

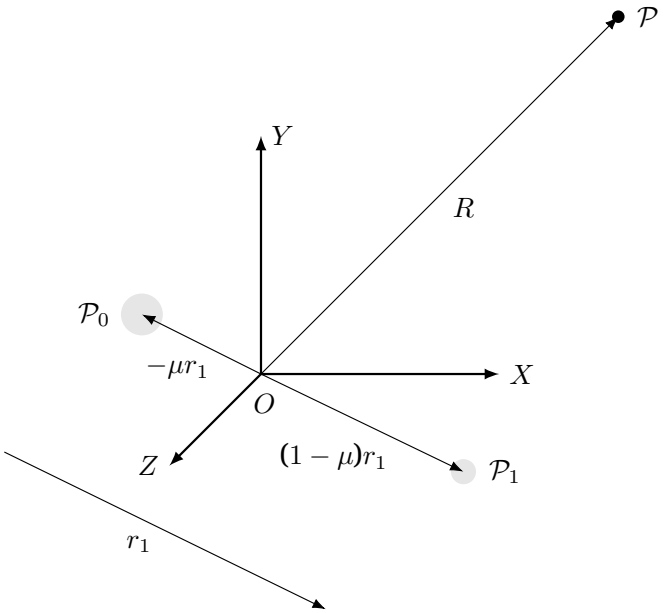

图 1： 质心坐标系（或等价地，雅可比变量）中的限制性三体问题表示，其中 $\|R\| > \|r_1\|$。

假设 $\|r_1\| / \|R\| < 1$，我们将函数 $\mathcal{R}(R,\ M_1)$ 按比值 $\|r_1\| / \|R\| < 1$ 的幂进行多极展开：

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{1}{\|R+\mu r_1\|} + \frac{\mu}{1-\mu}\frac{1}{\|R+(1-\mu)r_1\|} \\ &= \frac{1}{\|R\|}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\left(\frac{2\mu r_1\cdot R}{\|R\|^2}+\mu^2\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^2\right)^l\right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{1-\mu}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-1/2}{l}\left(-\frac{2(1-\mu)r_1\cdot R}{\|R\|^2}+(1-\mu)^2\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^2\right)^l\right) \\ &= \frac{1}{1-\mu}\frac{1}{\|R\|} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^2\right)\ .\end{aligned} \tag{10}$$

其中，对于 $\beta \in \mathbb{R}$

$$\binom{\beta}{l} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-l+1)}{l!}$$

表示广义二项式系数（当 $l = 0$ 时等于 1）。

注 1。 对于方程（10）中的 $l = 1$，方程右端两个求和项中的偶极项系数 $(r_1 \cdot R) / \|R\|^3$ 恰好相互抵消。因此，摄动函数中不出现偶极项。这是选择雅可比坐标的结果。

2.2 哈密顿量的标准形式

对 $\mu < 1$ 的幂进行额外的级数展开，可得到标准的近可积形式

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu\mathcal{H}_1\ , \tag{11}$$

其中开普勒部分为

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\|P\|^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_0}{\|R\|} + n_1 J_1 \tag{12}$$

且摄动函数变为

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mathcal{G}m_0}{\|R\|}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\mu^l + \sum_{l=1}^{\infty}\mu^{l-1}\binom{-1/2}{l}\left(\frac{2r_1\cdot R}{\|R\|^2} + \mu\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^2\right)^l \right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty}(1-\mu)^{l-1}\binom{-1/2}{l}\left(-\frac{2r_1\cdot R}{\|R\|^2} + (1-\mu)\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^2\right)^l\right). \tag{13}$$

现在，将以下关系代入（11），转而使用德劳内作用角变量（3）：

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\mathcal{G}m_0}{2a} + n_1 J_1\ , \tag{14}$$

$$\|R\| = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}\ , \tag{15}$$

$$r_1\cdot R = a_1\|R\|\Big((\cos\ E_1 - e_1)\,(\cos\ h\cos(g+f)\ - \sin\ h\sin(g+f)\cos\ i)$$
$$+\sqrt{1-e_1^2}\sin E_1\,(\sin h\cos(g+f) + \cos h\sin(g+f)\cos i)\Big) \tag{16}$$

以及向量 r_1 的公式（2）。得到

$$\mathcal{H} = -\frac{\mathcal{G}m_0}{2a} + n_1 J_1 + \mu\mathcal{H}_1(f,g,h,E_1,a,e,i;\mu,a_1,e_1)\ . \tag{17}$$

注2. 公式（13）中只需要范数 $\|r_1\|^2 = r_1\cdot r_1$ 的平方，而范数 $\|R\|$ 仅出现在上述公式的分母中，且其幂次不低于二次。因此，分别依赖于 f 和 E_1 的公式（15）和（2），使摄动函数可表示为一系列三角多项式之和，这些三角多项式依赖于形如 $\cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1)$ 的谐波项。这是闭式方法的关键要素，即使用角 f 和 E_1，而非平近点角 M，M_1；在整个微扰方案中，无需对开普勒方程进行级数反演。

为了避免降阶法，下面讨论的方法在局部范围内有效：我们构造一个长期哈密顿量模型，使其适用于粒子的半长轴在 $a = a_* + \delta a(t)$ 范围内变化，即在某个参考值 a_* 附近变化一个小量 δL。根据标准长期摄动理论，远离平均运动共振时，我们有估计 $\delta a = \mathcal{O}(\mu)$。形式上，引入新的正则变量 δL，定义为

$$L = L_* + \delta L = \sqrt{\mathcal{G}m_0 a_*} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{G}m_0}{a_*}}\delta a + \mathcal{O}(\delta a^2)\ . \tag{18}$$

并将哈密顿量按量 δL 在 L_* 附近展开，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\frac{\mathcal{G}^2 m_0^2}{2L_*^2}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-2}{l}\left(\frac{\delta L}{L_*}\right)^l + n_1 J_1 + \mu\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left.\frac{\partial^l\mathcal{H}_1}{\partial L^l}\right|_{L=L_*}\delta L^l \\ &= n_*\delta L + n_1 J_1 + \mu\left(\mathcal{H}_1|_{\delta L=0,\ \mu=0} + \left.\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial\delta L}\right|_{\delta L=0,\ \mu=0}\delta L\right) + \mathcal{O}(\mu^2,\delta L^2)\ ,\end{aligned} \tag{19}$$

其中，展开中省略了常数项 $-\mathcal{G}^2 m_0^2/(2L_*^2)$。常数 $n_* = \mathcal{G}^2 m_0^2/L_*^3$ 等于半长轴 a_* 处开普勒轨道上粒子的平均运动。

注3. 参考值 a_* 的选择决定了正规化过程中出现的除数类型。本文仅讨论“非共振”情形，即频率 n_* 和 n_1 满足非公度条件。例如，为了远离任何共振，我们可以要求 n_* 和 n_1 满足丢番图条件

$$|k_* n_* + k_1 n_1| > \frac{\gamma}{|k|^\tau}\,, \quad \forall k = (k_*, k_1) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\} \tag{20}$$

其中 $|k| = |k_*| + |k_1|$ 以及某些合适的 $\gamma > 0$、 $\tau > 1$。
不过，下面介绍的算法可以很容易地扩展到平均运动共振的情形。我们将细节留待未来工作，仅指出在共振情形下，我们有估计 $\delta L = \mathcal{O}(\mu^{1/2})$，而不是 $\mathcal{O}(\mu)$。然而，接近平均运动共振对本文级数的影响，表现为级数余项的增大，这是由级数中的小除数（非零）造成的（例如，下面第3节讨论的图 7 中即可见到这一现象）。

2.3 泊松结构与记账

2.3.1 泊松括号公式

闭式摄动理论的所有步骤都涉及以下形式的可微函数之间的泊松括号： $F(\ell, g, h, M_1, \delta L, G, H, J_1) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^4 \times D)$，其中 $D \subset \mathbb{R}^4$ 是一个开集；这些函数对变量 ℓ、 M_1、 G 和 H 的依赖关系通过函数 $f(\ell, \delta L, G)$、 $E_1(M_1, e(\delta L, G))$、 $e(\delta L, G)$、 $\iota_c(G, H) = \cos i(G, H)$、 $\iota_s(G, H) = \sin i(G, H)$、 $\eta(\delta L, G) = \sqrt{1 - e(\delta L, G)^2}$、 $\|r_1\|(M_1) = a_1(1 - e_1 \cos E_1(M_1))$ 以及 $\phi_1(M_1) = E_1(M_1, e(\delta L, G)) - M_1$ 以隐式形式给出。上述形式的两个函数 F_1、 F_2 之间的泊松括号可通过以下公式计算：

$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\} = &\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}\ell}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}\delta L} + \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}G} + \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}H} + \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}M_1}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}J_1} \\ &- \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}\delta L}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}\ell} - \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}G}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}g} - \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}H} - \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}J_1}\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}M_1}\end{aligned} \tag{21}$$

应用于函数 F_1， F_2 的闭式版本。函数 F 的闭式版本定义如下：

$$F = F(f, g, h, E_1, \delta L, e, \eta, \iota_c, \iota_s, J_1)\,. \tag{22}$$

函数 F 对正则变量的导数（如式 (21) 所示）通过链式法则公式计算

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \ell}\,, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}g} = \frac{\partial F}{\partial g}\,, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}h} = \frac{\partial F}{\partial h}\,, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}M_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial E_1} + \frac{\partial F}{\partial \|r_1\|}\frac{\mathrm{d}\|r_1\|}{\mathrm{d}E_1} + \frac{\partial F}{\partial \phi_1}\right)\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}M_1} - \frac{\partial F}{\partial \phi_1}\,, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\delta L} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \delta L} + \frac{\partial F}{\partial \delta L} + \frac{\partial F}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \delta L} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \delta L} , \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}G} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial \iota_c}\frac{\partial \iota_c}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial \iota_s}\frac{\partial \iota_s}{\partial G} , \tag{28}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}H} = \frac{\partial F}{\partial \iota_c}\frac{\partial \iota_c}{\partial H} + \frac{\partial F}{\partial \iota_s}\frac{\partial \iota_s}{\partial H} , \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}J_1} = \frac{\partial F}{\partial J_1} , \tag{30}$$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{(1+e\cos f)^2}{\eta^3} , \tag{31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left\|r_1\right\|}{\mathrm{d}E_1} = a_1 e_1 \sin E_1 , \tag{32}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}M_1} = \frac{a_1}{\|r_1\|} , \tag{33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \delta L} = \frac{1}{L}\left(\frac{2\sin f}{e} + \frac{\sin(2f)}{2}\right) = \frac{1}{L_*}\left(\frac{2\sin f}{e} + \frac{\sin(2f)}{2}\right)\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{34}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \delta L} = \frac{\eta^2}{eL} = \frac{\eta^2}{eL_*}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{35}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \delta L} = -\frac{\eta}{L} = -\frac{\eta}{L_*}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial G} &= -\frac{1}{\eta L}\left(\frac{2\sin f}{e} + \frac{\sin(2f)}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{\eta L_*}\left(\frac{2\sin f}{e} + \frac{\sin(2f)}{2}\right)\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) ,\end{aligned} \tag{37}$$

$$\frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{\eta}{eL} = -\frac{\eta}{eL_*}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{38}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial G} = \frac{1}{L} = \frac{1}{L_*}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{39}$$

$$\frac{\partial \iota_c}{\partial G} = -\frac{\iota_c}{\eta L} = -\frac{\iota_c}{\eta L_*}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{40}$$

$$\frac{\partial \iota_s}{\partial G} = -\frac{1-\iota_s^2}{\eta L \iota_s} = -\frac{1-\iota_s^2}{\eta L_* \iota_s}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{41}$$

$$\frac{\partial \iota_c}{\partial H} = \frac{1}{\eta L} = \frac{1}{\eta L_*}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) , \tag{42}$$

$$\frac{\partial \iota_s}{\partial H} = -\frac{\iota_c}{\eta L \iota_s} = -\frac{\iota_c}{\eta L_* \iota_s}\left(1 - \frac{\delta L}{L_*}\right) + \mathcal{O}(\delta L^2) . \tag{43}$$

上述公式的推导概要见附录 A。当 $e \in (0,\ 1)$、$i \in (0,\ \pi)$ 时，这些公式严格成立。然而，由于发生了若干抵消，即使在 $e = 0$或 $i = 0$ 时，贯穿各个微扰步骤的泊松括号公式也不会出现奇异行为。

2.3.2 记账：哈密顿量

我们在级数中引入一个记账符号 σ (关于记账技术的介绍，见 [5])，其数值为 $\sigma = 1$，作用是根据“小量阶”对级数中的各种项进行分组。因此，具有公因子 $\sigma^l, l \in \mathbb{Z}$ 的一组项表示被视为“第 l 小量阶”的项。

由于我们的级数中有多个小量，我们引入一种记账方案，以便同时处理所有小量，同时保持级数的闭式特征。为此，我们在初始哈密顿量中进行以下替换，称为“记账规则”：

- 记账规则1： $e \rightsquigarrow \sigma^1 e = \sigma e$ （不适用于$\eta = \sqrt{1-e^2}$中的量 e^2），
- 记账规则2： $\eta \rightsquigarrow \sigma^0 \eta = \eta$,
- 记账规则3： $\mu \rightsquigarrow \sigma^\nu \mu$，其中 ν 与式(7)中相同,
- 记账规则4： $e_1 \rightsquigarrow \sigma^{\nu_1} e_1$，其中 ν_1 与式(7)中相同（不适用于$\eta_1 := \sqrt{1-e_1^2}$中的量 e_1^2），
- 记账规则5： $\frac{1}{\eta^2} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)\sigma^2 + 1$,
- 记账规则6： $\eta_1 \rightsquigarrow (\eta_1 - 1)\,\sigma^{2\nu_1} + 1$,
- BK-规则 7： $\delta L^\lambda \rightsquigarrow \sigma^{l\nu} \delta L^\lambda$ 与 $l = \begin{cases} \lambda \\ \end{cases}$，如果 δL^λ 来自 $\mathcal{H}_1$，

$\lambda - 1$ δL^λ $\mathcal{H}_0$ ，如果来自， $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。

由于 $\sigma = 1$，上述替换仅在形式层面影响级数的结构，因此可以直接代入原始哈密顿量；一旦后续正规化步骤按记账符号的连续幂次 σ， σ^2等进行组织，这些替换便会在这些步骤中传递。上述记账规则1至7既有物理依据，也出于算法便利性的考虑。具体而言：

- 记账规则1表明，尽管使用了闭式公式，级数展开所依据的小量仍是试验粒子的偏心率。

- 记账规则3表明，级数项前的因子 μ 应视为与 e^ν阶的项具有相近的小量阶，其中 ν 由式（7）给出。类似地，记账规则4表明，含有因子 e_1 的某次幂的项，应视为与 e_1^ν 的同次幂项具有相近的小量阶。注意，偏心率 e是随时间变化的量，因此，要计算指数 ν， ν_1 对于所考察的任意轨迹，我们都需要使用一个参考值 e_*，以估计该轨迹在整个轨道演化过程中的总体偏心率水平。注意，根据标准长期摄动理论，当 e_* 接近平均偏心率时，有 $e(t) = e_* + \mathcal{O}(\mu)$（另请参见引言中的讨论）。最后请注意，在典型情形下，即 $e > \mu$ 且 $e \geq e_1$时，我们得到指数 ν， $\nu_1 \geq 1$ 。对于受某颗行星扰动、处于高偏心率轨道上的小天体（例如太阳系中的行星），这些不等式自然成立；这正是应用本文方法时最关注的情形（不过，对于不满足上述条件的情形，其处理方法请参见备注 4）。

- BK-规则 7 源于对远离平均运动共振的轨迹半长轴振荡所作的估计 $\delta L = \mathcal{O}(\delta a) = \mathcal{O}(\mu)$，正如前文所指出的

相反，在后一种情况下，通常有 $\delta L = \mathcal{O}(\delta a) = \mathcal{O}(\mu^{1/2})$，相应的规则也必须作相应调整）。对于 H_0 ，将记账阶数降低一级是出于算法便利性的考虑，也就是为了使 $n_*\delta L$ 保持在同调方程的核中。

- BK 规则 5 和 6 仅意味着一种单位分解，其目的在于将相应表达式（分别涉及 η 和 η_1 ）拆分为两部分，同时使微扰方案保持闭式；这两部分的阶分别为 $\mathcal{O}(1)$ 和 $\mathcal{O}(e^2)$，或 $\mathcal{O}(e_1^2)$。

2.3.3 记账：泊松结构

第 2.3.1 小节中的一些公式表明，需要通过式 (27)、(28) 中相应的偏导数对 e 求导，因此，在摄动理论的连续步骤中，经由泊松括号产生的一些项，其偏心率的幂次会降低。为考虑这一事实，与 [1]中的做法类似，我们在泊松代数的公式中引入记账符号 σ ，如下所示：首先，将对角 ℓ， g， h， M_1 的导数改写为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \ell}\frac{a_1(1-e_1\sigma^{\nu_1}\cos E_1)}{\|r_1\|} , \tag{44}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}g} = \frac{\partial F}{\partial g}\frac{a_1(1-e_1\sigma^{\nu_1}\cos E_1)}{\|r_1\|} , \tag{45}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}h} = \frac{\partial F}{\partial h}\frac{a_1(1-e_1\sigma^{\nu_1}\cos E_1)}{\|r_1\|} , \tag{46}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}M_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial E_1} + \frac{\partial F}{\partial \|r_1\|}\frac{\mathrm{d}\|r_1\|}{\mathrm{d}E_1} + \frac{\partial F}{\partial \phi_1}\sigma^{-\nu_1}\right)\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}M_1} - \frac{\partial F}{\partial \phi_1}\sigma^{-\nu_1} , \tag{47}$$

以及对作用量 δL， G 的导数改写为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\delta L} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \delta L} + \frac{\partial F}{\partial \delta L} + \frac{\partial F}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \delta L}\sigma^{-1} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \delta L} , \tag{48}$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}G} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial G}\sigma^{-1} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial \iota_c}\frac{\partial \iota_c}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial \iota_s}\frac{\partial \iota_s}{\partial G} . \tag{49}$$

注意，在（47）中用到了恒等式 $\phi_1 = e_1 \sin E_1$ （开普勒方程）。最后，我们修订公式（31）、（32）、（34）–（43），对所有涉及偏心率函数 η 的因子赋予记账规则，如下：

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 1 + \frac{2e\cos f}{\eta^3}\sigma + \left(\frac{1}{\eta^3} - 1 + \frac{e^2\cos^2 f}{\eta^3}\right)\sigma^2 , \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}\|r_1\|}{\mathrm{d}E_1} = a_1 e_1 \sigma^{\nu_1}\sin E_1 \tag{51}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \delta L} = \frac{1}{L_*}\left(\frac{2\sin f}{e}\sigma^{-1} + \frac{\sin(2f)}{2}\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{52}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \delta L} = \frac{1}{L_*}\left(\frac{1}{e}\sigma^{-1} + \frac{\eta^2-1}{e}\sigma\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{53}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \delta L} = -\frac{1}{L_*}\left(1 + (\eta-1)\sigma^2\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{54}$$

$$\frac{\partial f}{\partial G} = -\frac{1}{L_*}\left(\frac{2\sin f}{e}\sigma^{-1} + \frac{\sin(2f)}{2} + \frac{2\sin f}{e}\left(\frac{1}{\eta}-1\right)\sigma + \frac{\sin 2f}{2}\left(\frac{1}{\eta}-1\right)\sigma^2\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{55}$$

$$\frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{1}{L_*}\left(\frac{1}{e}\sigma^{-1} + \frac{\eta-1}{e}\sigma\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{56}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial G} = \frac{1}{L_*} + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{57}$$

$$\frac{\partial \iota_c}{\partial G} = -\frac{\iota_c}{L_*}\left(1 + \left(\frac{1}{\eta}-1\right)\sigma^2\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{58}$$

$$\frac{\partial \iota_s}{\partial G} = -\frac{1-\iota_s^2}{L_*\iota_s}\left(1 + \left(\frac{1}{\eta}-1\right)\sigma^2\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{59}$$

$$\frac{\partial \iota_c}{\partial H} = \frac{1}{L_*}\left(1 + \left(\frac{1}{\eta}-1\right)\sigma^2\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) , \tag{60}$$

$$\frac{\partial \iota_s}{\partial H} = -\frac{\iota_c}{L_*\iota_s}\left(1 + \left(\frac{1}{\eta}-1\right)\sigma^2\right) + \mathcal{O}(\delta L\sigma^{\nu}) . \tag{61}$$

备注 4. 小偏心率问题 在于，当 $0 < e_* \lesssim \mu < e_1$ 时，上述提出的记账规则并不适用，因为根据（7），指数 ν、ν_1 会小于 1。将这些指数简单地取整为 1，同时沿用上述相同的记账规则，并不能解决问题，因为在任意给定的规范化阶数r下，泊松代数公式中出现 σ^{-1}、$\sigma^{-\nu_1}$ 项会导致正规形余项中产生阶数低于 r 的项。尽管我们着重研究处理大偏心率轨道的方法（这类轨道不会出现该问题），下文仍将讨论主算法的一种变体，用于处理 $\nu = 1$ 情况下的轨迹，即 $e_* \lesssim \mu$ 时的轨迹。

2.4 迭代正规化算法

2.4.1 预备步骤：哈密顿量准备

实施 BK 规则 1 至 7 后，哈密顿量 (19) 恢复为以下形式:

$$\mathcal{H} = n_*\delta L + n_1 J_1 + \sum_{s\in\mathbb{Z}^4} q_s(\delta L, e, \eta, \iota_c, \iota_s; \mu, L_*, a_1, e_1, \eta_1)\cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1)\sigma_s \tag{62}$$

其中 $\sigma_s \in \{\sigma^{\nu}, \sigma^{\nu+1}, \ldots\}$，且根据达朗贝尔规则，只出现余弦项和实系数 q_s（所有角同时变号时保持不变）。令 $\mathscr{Z}_0 = n_*\delta L + n_1 J_1$，为了得到闭式正规化算法，将哈密顿量重新表示为以下形式会更方便:

$$\mathcal{H} = \mathscr{Z}_0 + (\mathcal{H} - \mathscr{Z}_0)\frac{a_1(1 - e_1\sigma^{\nu_1}\cos E_1)}{\|r_1\|} . \tag{63}$$

哈密顿量 (63) 可写成如下形式:

$$\mathcal{H} = \mathscr{H}^{(0)} = \mathscr{Z}_0 + \mathscr{R}_\nu^{(0)} \,, \tag{64}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_\nu^{(0)} &= \sum_{l\geq\nu} \mathscr{R}_{\nu,l}^{(0)} \\ &= \sum_{l\geq\nu} \frac{a_1}{\|r_1\|} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^2} q'_{l,p} \cos(p_1 g + p_2 h) + \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^4 \\ (s_1,s_4)\neq(0,0)}} q''_{l,s} \cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1) \right) \sigma^l \,; \end{aligned} \tag{65}$$

我们将其称为零阶规范化步骤（即原始哈密顿量）中的余项。项 $\mathscr{R}_{\nu\, l}^{(0)}$,包含记账阶为 σ^l 的项, 其中 $l \geq \nu$。

2.4.2 步骤 1： σ^ν 项的规范化

对于稍后将确定的合适生成函数 $\chi_\nu^{(1)}$，我们将李级数算子定义为

$$\begin{aligned} \exp\left(\mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}}\right) :\ \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^4 \times D) &\longrightarrow \mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^4 \times D) \\ \exp\left(\mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \mathcal{L}^n_{\chi_\nu^{(1)}} &= \mathbb{I} + \mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}} \circ \mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}} + \dots \end{aligned} \,, \tag{66}$$

其中 $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{T}^4 \times D)$ 表示相空间中的实解析函数集合，且

$$\mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}} \cdot = \{\cdot, \chi_\nu^{(1)}\} \tag{67}$$

是沿由 $\chi_\nu^{(1)}$ 生成的哈密顿向量场的时间导数（李导数）。将式 (66) 应用于式 (63)，得到变换后的哈密顿量

$$\mathscr{H}^{(1)} = \mathscr{Z}_0 + \mathscr{R}_\nu^{(0)} + \{\mathscr{Z}_0, \chi_\nu^{(1)}\} + \{\mathscr{R}_\nu^{(0)}, \chi_\nu^{(1)}\} + \frac{1}{2}\{\{\mathcal{H}, \chi_\nu^{(1)}\}, \chi_\nu^{(1)}\} + \dots \,, \tag{68}$$

其中，按照惯常的符号滥用，我们仍用 $\ell, g, h, M_1, \delta L, G, H, J_1$ 表示由逆变换给出的新正则变量

$$\exp\left(\mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}}\right)^{-1} = \exp\left(\mathcal{L}_{-\chi_\nu^{(1)}}\right) \,. \tag{69}$$

我们的目标是定义李生成函数 $\chi_\nu^{(1)}$，使得在实施变换（68）后， $\mathscr{H}^{(1)}$ 在 σ^ν 阶不含依赖于角 f 和 E_1 的项。所需的生成函数 $\chi_\nu^{(1)}$可通过以下步骤计算得出:

命题1。定义 $\chi_\nu^{(1)}$为

$$\begin{aligned} \chi_\nu^{(1)} = \frac{\phi_1}{n_1} \sigma^{\nu+\nu_1} \sum_{p\in\mathbb{Z}^2} q'_{\nu,p} \cos(p_1 g + p_2 h) \\ + \sigma^\nu \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^4 \\ (s_1,s_4)\neq(0,0)}} \frac{q''_{\nu,s}}{s_1 n_* + s_4 n_1} \sin(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1) \,. \end{aligned} \tag{70}$$

那么，有

$$\{\mathscr{Z}_0, \chi_\nu^{(1)}\} + \mathscr{R}_{\nu,\nu}^{(0)} = \mathscr{Z}_\nu^{(1)} + \mathcal{O}\left(\sigma^{\nu+1}\right) , \tag{71}$$

其中

$$\mathscr{Z}_\nu^{(1)} = \sigma^\nu \sum_p q'_{\nu,p} \cos(p_1 g + p_2 h) . \tag{72}$$

此外，根据公式（*68*）计算得到的函数 $\mathscr{H}^{(1)}$ 具有如下形式

$$\mathscr{H}^{(1)} = \mathscr{Z}_0 + \mathscr{Z}_\nu^{(1)} + \mathscr{R}^{(1)} , \tag{73}$$

其中余项 $\mathscr{R}^{(1)}$ 为 $\mathcal{O}\left(\sigma^{\nu+1}\right)$ $\forall \nu \geq 1$ ，与 ν_1 的取值无关。

证明。令

$$\chi_\nu^{(1)}(f, g, h, E_1, \phi_1, \delta L, e, \eta, \iota_c, \iota_s) = \sigma^\nu \left(\phi_1 \sigma^{\nu_1} \sum_{p \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}'_{\nu,p}(\delta L, e, \eta, \iota_c, \iota_s) \cos(p_1 g + p_2 h) \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z}^4 \\ (s_1, s_4) \neq (0,0)}} \hat{q}''_{\nu,s}(\delta L, e, \eta, \iota_c, \iota_s) \sin(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1) \right) ,$$

并回顾链式法则（44）、（47）和（50）、（51）、（33），可得

$$\{\mathscr{Z}_0, \chi_\nu^{(1)}\} + \mathscr{R}_{\nu,\nu}^{(0)} = -n_* \left(1 + \frac{2e\cos f}{\eta^3}\sigma + \left(\frac{1}{\eta^3} - 1 + \frac{e^2 \cos^2 f}{\eta^3} \right) \sigma^2 \right)$$
$$\frac{a_1(1 - e_1 \sigma^{\nu_1} \cos E_1)}{\|r_1\|} \sigma^\nu \sum_{(s_1, s_4) \neq (0,0)} s_1 \hat{q}''_{\nu,s} \cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1)$$
$$- n_1 \frac{a_1}{\|r_1\|} \sigma^\nu \left(\sum_{(s_1, s_4) \neq (0,0)} s_4 \hat{q}''_{\nu,s} \cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1) + \sum_p \hat{q}'_{\nu,p} \cos(p_1 g + p_2 h) \right)$$
$$+ n_1 \sigma^\nu \sum_p \hat{q}'_{\nu,p} \cos(p_1 g + p_2 h) + \sigma^\nu \frac{a_1}{\|r_1\|} \left(\sum_p q'_{\nu,p} \cos(p_1 g + p_2 h) \right.$$
$$\left. + \sum_{(s_1, s_4) \neq (0,0)} q''_{\nu,s} \cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1) \right) .$$

要求在阶数 σ^ν 上不存在依赖于 f、E_1 的三角项，便得到

$$\hat{q}''_{\nu,s} = \frac{q''_{\nu,s}}{s_1 n_* + s_4 n_1} , \quad s \in \mathbb{Z}^4 \colon (s_1, s_4) \neq (0,0) ,$$
$$\hat{q}'_{\nu,p} = \frac{q'_{\nu,p}}{n_1} , \quad p \in \mathbb{Z}^2 ,$$

这意味着公式（70）。因此，在 σ^ν 阶，我们立即得到公式

$$\mathscr{Z}_\nu^{(1)} = \sigma^\nu \sum_p q'_{\nu,p} \cos(p_1 g + p_2 h) .$$

现在考虑将（70）代入（68）后计算得到的函数 $\mathscr{H}^{(1)}$。函数 $\mathscr{H}^{(1)}$ 可以按照公式（73）分解。我们将证明，余项 $\mathscr{R}^{(1)}$ 不包含阶数低于 $\sigma^{\nu+1}$ 的项。为此，只需证明

$$\{\mathscr{R}_\nu^{(0)},\chi_\nu^{(1)}\}=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu})\,,\qquad \frac{1}{n!}\{\dots\{\{\mathcal{H},\underbrace{\chi_\nu^{(1)}\},\chi_\nu^{(1)}\},\dots,\chi_\nu^{(1)}}_{n\geq 2}\}=\mathcal{O}(\sigma^{n(\nu-1)+2})\,, \tag{74}$$

由于 $n(\nu-1)+2>\nu$，对所有 $n\geq 2,\nu\geq 1$ 均成立。

项 $\mathscr{R}_\nu^{(0)}$包含阶数等于或高于 σ^ν的项，而 $\chi_\nu^{(1)}$仅包含阶数为 σ^ν的项。因此，除泊松括号 $\{\mathscr{Z}_0,\chi_\nu^{(1)}\}$外（根据式 (71)，它只对长期项 $\mathscr{Z}_\nu^{(1)}$有贡献），式 (74) 中的第一个泊松括号包含阶数为 $\sigma^{2\nu}$ 或更高的前因子，而第二个包含阶数为 $\sigma^{n\nu}$ 或更高的前因子。然而，由于以下三类因子中的记账公式引入了负幂，这些括号中 σ 的指数可能会降低：

(i) 式 (48)、(49) 中关于偏心率的偏导数（带有 σ^{-1}），乘以相应的式 (53)、(56)（另一个 σ^{-1}），因此总计为 σ^{-2};

(ii) 在（48）、（49）中再次对涉及 f（权重为 σ^{-1}）的式（52）、（55）求导，因此得到一个前置因子σ^{-1};

(iii) 对式（47）中关于 ϕ_1 的偏导数（$\sigma^{-\nu_1}$，$\nu_1\geq 1$），因此前置因子的阶至少为 σ^{-1}。

关于（iii），ϕ_1 出现在 $\chi_\nu^{(1)}$的分子中，并伴有前置因子 $\sigma^{\nu+\nu_1}$（公式（70）），因此负幂 $\sigma^{-\nu_1}$ 被正幂 σ^{ν_1}抵消，这意味着余项的最低阶不依赖于 ν_1。

关于（i），我们首先注意到，$\chi_\nu^{(1)}$不显含 e，而只通过 η隐含依赖于它；在闭式语境下，η 被视为独立符号。这是因为 $\chi^{(1)}$ 源自对 $\mathscr{R}_\nu^{(0)}$的系数进行平衡，。后者一项包含前置因子 μ，而该因子已经是 $\mathcal{O}(\sigma^\nu)$，因此不可能再含有由 e的显式幂产生的任何因子。鉴于以上所述，令 $\partial\chi^{(1)}/\partial e=0$，我们发现，对于任意 $F\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^4\times D)$，与（i）相关的 $\{F,\chi_\nu^{(1)}\}$ 中的表达式可以提取因子，写为

$$\{F,\chi_\nu^{(1)}\}_{(\mathrm{i})}=-\frac{\partial F}{\partial e}\sigma^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\ell}\frac{\partial e}{\partial\delta L}\frac{\partial\chi_\nu^{(1)}}{\partial f}+\frac{\partial e}{\partial G}\frac{\partial\chi_\nu^{(1)}}{\partial g}\right)\,. \tag{75}$$

现在我们得到以下引理：

引理1。对于哈密顿量(63)中形如

$$q_s(\|r_1\|,\delta L,\eta,\iota_c,\iota_s;\mu,L_*,a_1,e_1,\eta_1)\cos(s_1f+s_2g+s_3h+s_4E_1)\sigma_s\,, \tag{76}$$

即显式地独立于 e 的项，我们有 $s_1=s_2$。

证明。这是达朗贝尔规则的推论。使用修正后的德洛内角元素

$$\begin{aligned}\tilde\lambda&=\ell+g+h\,,\\ \tilde p&=-g-h\,,\\ \tilde q&=-h\,,\end{aligned} \tag{77}$$

以及公式 $f=\ell+2e\sin\ell+\mathcal{O}(e^2)$，$e\eta(e)^{-2\lambda}=e+\lambda e^3+\mathcal{O}(e^5)$，$\lambda\in\mathbb{N}$，我们发现，将偏心率 e 展开后，(76) 应给出以下项

$$q_s\cos(s_1(\tilde\lambda+\tilde p)+s_2(\tilde q-\tilde p)-s_3\tilde q+s_4E_1)\sigma_s+\mathcal{O}(e)\,. \tag{78}$$

然而，根据达朗贝尔规则，对于一般形式的三角单项式

$$b_w(\|r_1\|,\delta L,\eta,\iota_c,\iota_s;\mu,L_*,a_1,e_1,\eta_1)e^l\sigma^l\cos(w_1\tilde{\lambda}+w_2\tilde{p}+w_3\tilde{q}+w_4E_1)\sigma_w\ ,\quad l\in\mathbb{N}\ , \tag{79}$$

在按偏心率 e,e_1 展开 $\mathcal{H}$ 后出现，因此我们必然有 $l-|w_2|$ 必须为非负偶数。由于对于哈密顿量中任何显式不依赖于 e 的闭式项，展开后在 e 中得到的最低阶项满足 $l=0$，我们必然有 $w_2=0$，即 $s_1=s_2$。

□

现在，根据 (70)，关系式 $s_1=s_2$ 意味着 $\partial\chi_\nu^{(1)}/\partial f=\partial\chi_\nu^{(1)}/\partial g$。因此，利用 (50)、(53) 和 (56)，式 (75) 可写为

$$\{F,\chi_\nu^{(1)}\}_{(\mathrm{i})}=-\frac{\partial F}{\partial e}\sigma^{-1}\frac{\partial\chi_\nu^{(1)}}{\partial f}\left(\frac{\sigma^{-1}}{L_*e}-\frac{\sigma^{-1}}{L_*e}+\mathcal{O}(\sigma^0)\right)=-\frac{\partial F}{\partial e}\sigma^{-1}\frac{\partial\chi_\nu^{(1)}}{\partial f}\mathcal{O}(\sigma^0)\ .$$

由此可知，对于任意函数 $F=\mathscr{R}_\nu^{(0)},\{\mathcal{H},\chi_\nu^{(1)}\},\{\{\mathcal{H},\chi_\nu^{(1)}\},\chi_\nu^{(1)}\},\ldots$，由 (68) 中第 (i) 类导数产生的项，每经一次泊松括号运算，σ 的指数只会降低一个因子 σ^{-1}，而不是 σ^{-2}。特别地，对于 $F=\mathscr{R}_\nu^{(0)},_\nu$（以及任何其他显式不依赖偏心率的闭式函数），式 (75) 恒等于零。

关于 (ii)，我们发现，对于任意 F_1，$F_2\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^4\times D)$，导数 $\partial f/\partial\delta L$ (式(52)) 仅通过以下组合参与泊松括号 $\{F_1,F_2\}$

$$\frac{\partial f}{\partial\ell}\frac{\partial f}{\partial\delta L}\left(\frac{\partial F_1}{\partial f}\frac{\partial F_2}{\partial f}-\frac{\partial F_1}{\partial f}\frac{\partial F_2}{\partial f}\right)=0\ . \tag{80}$$

另一方面，导数 $\partial f/\partial G$ (式(55)) 通过以下组合参与同一个泊松括号

$$\frac{\partial f}{\partial G}\left(\frac{\partial F_1}{\partial g}\frac{\partial F_2}{\partial f}-\frac{\partial F_1}{\partial f}\frac{\partial F_2}{\partial g}\right) \tag{81}$$

根据引理1，该式对于 $F_1=\mathscr{R}_\nu^{(0)},_\nu$（或 $\mathcal{H}$ 中任何其他不显含 e 的项 $\mathcal{O}(\sigma^{\nu+1})$）以及 $F_2=\chi_\nu^{(1)}$，也等于零。

总之，回到 (74)，并将上述所有推导考虑在内，我们得到以下表达式

$$\{\mathscr{R}_\nu^{(0)},\chi_\nu^{(1)}\}=\{\mathscr{R}_{\nu,\nu}^{(0)},\chi_\nu^{(1)}\}+\left\{\sum_{l\geq\nu+1}\mathscr{R}_{\nu,l}^{(0)},\chi_\nu^{(1)}\right\}=\mathcal{O}(\sigma^{\nu+\nu})+\mathcal{O}(\sigma^{\nu+1+\nu-1})=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu})$$

类似地，

$$\frac{1}{2}\{\{\mathcal{H},\chi_\nu^{(1)}\},\chi_\nu^{(1)}\}=\frac{1}{2}\{\{\mathscr{Z}_0,\chi_\nu^{(1)}\},\chi_\nu^{(1)}\}+\frac{1}{2}\{\{\mathscr{R}_\nu^{(0)},\chi_\nu^{(1)}\},\chi_\nu^{(1)}\}$$
$$=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu})+\mathcal{O}(\sigma^{3\nu-1})=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu})\ ,$$

因为 $\{\mathscr{Z}_0,\chi_\nu^{(1)}\}$ 满足引理1。因此我们有 $\{\mathscr{Z}_0,\chi_\nu^{(1)}\}=\mathscr{Z}_{(\nu}{}^1{}_{-\mathscr{R}_\nu^{(0)}),\ \nu}+\mathcal{O}(\sigma^{\nu+1})$，其中 $\mathscr{Z}_{(1)\nu}$ 与 f，g，e 无关。通过归纳法

$$\frac{1}{n!}\{\ldots\{\{\mathscr{Z}_0+\mathscr{R}_\nu^{(0)},\underbrace{\chi_\nu^{(1)}\},\chi_\nu^{(1)}\},\ldots,\chi_\nu^{(1)}}_{n\geq3}\}=\mathcal{O}(\sigma^{\min\{n\nu-(n-2),(n+1)\nu-(n-1)\}})=\mathcal{O}(\sigma^{n(\nu-1)+2})$$

由此完成命题的证明。 □

根据命题1，计算式（68）中的所有泊松括号，在适当的位置代入 $\phi_1 = e_1 \sin E_1$，并将所有缺少因子 $1/\|r_1\|$ 的项乘以因子 $a_1(1-\sigma^{\nu_1} e_1 \cos(E_1))/\|r_1\|$（等于 1），余项 $\mathscr{R}^{(1)}_{\nu+1}$ 恢复为标准形式

$$\mathscr{R}^{(1)}_{\nu+1} = \sum_{l\geq\nu+1} \mathscr{R}^{(1)}_{\nu+1,l} = \sum_{l\geq\nu+1}\sum_{\lambda\geq 1} \frac{a_1}{\|r_1\|^\lambda} \sum_{s\in\mathbb{Z}^4} d^{(1)}_{l,\lambda,s} \cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1)\sigma^l \,, \tag{82}$$

其中系数 $d^{(1)}_{l\,\lambda\,,,s}$ 满足以下关系

$$d^{(1)}_{l,\lambda,s} = d^{(1)}_{l,\lambda,s}(\delta L, e, \eta, \iota_c, \iota_s, ; \mu, L_*, a_1, e_1, \eta_1) = \begin{cases} d'^{(1)}_{l,\lambda,p} \,, & s_1 = s_4 = 0,\ (s_2, s_3) = p \,, \\ d''^{(1)}_{l,\lambda,s} \,, & (s_1, s_4) \neq (0,0) \,, \end{cases} \in \mathbb{R} \,.$$

这些代数运算完成了第一步规范化。

2.4.3 循环：对 $\sigma^{\nu+j-1}$-项进行规范化

第一步中采用的过程可以迭代重复，以依次规范化阶数为 $\sigma^{\nu+j-1}$ 的项，每次留下一个 $\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j})$ 余项，其中 $\nu, j > 1$。正如备注 4 中所预见的，下面描述的迭代过程在 $\nu = 1$ 的情况下会于第 $j = 2$ 步失效，因此需要进行调整（再多迭代一次），详见下文小节 2.4.4。

根据下一个命题，j 次规范化步骤如下进行。

命题 2。设 $\nu \geq 2$, $\nu_1 \geq 1$。设第 j 次规范化步骤之前的哈密顿量具有如下形式：

$$\mathscr{H}^{(j-1)} = \mathscr{Z}_0 + \sum_{l=1}^{j-1} \mathscr{Z}^{(l)}_{\nu+l-1} + \mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1} \tag{83}$$

其中

$$\mathscr{Z}^{(l)}_{\nu+l-1} = \sigma^{\nu+l-1} \sum_{\lambda\geq 1}\sum_{p\in\mathbb{Z}^2} \zeta^{(l)}_{\nu+l-1,\lambda,p} \cos(p_1 g + p_2 h) \,. \tag{84}$$

$$\mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1} = \sum_{l\geq\nu+j-1} \mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1,l} = \sum_{l\geq\nu+j-1}\sum_{\lambda\geq 1} \frac{a_1}{\|r_1\|^\lambda} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^2} d'^{(j-1)}_{l,\lambda,p} \cos(p_1 g + p_2 h) \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^4 \\ (s_1,s_4)\neq(0,0)}} d''^{(j-1)}_{l,\lambda,s} \cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1 \right) \sigma^l \,, \tag{85}$$

对于前面步骤中确定的某些实系数 $\zeta^{(l)}_{\nu+l-1,\lambda,p}$, $d'^{(j-1)}_{l\,\lambda\,,,p}$，$d''^{(j-1)}_{l\,\lambda\,s\,,,}$，其中

$$\zeta^{(1)}_{\nu,\lambda,p} = \begin{cases} q'_{\nu,p} \,, & \lambda = 1 \\ 0 \,, & \lambda > 1 \end{cases}$$

由 (72)。

将第 j 步李生成函数 $\chi^{(j)}_{\nu+j-1}$ 定义为

$$\chi^{(j)}_{\nu+j-1} = \frac{\phi_1}{n_1}\sigma^{\nu+j-1+\nu_1}\sum_{\lambda\geq 1}\sum_{\psi=1}^{\lambda}\frac{1}{a_1^{\psi-1}\left\|r_1\right\|^{\lambda-\psi}}\sum_{p\in\mathbb{Z}^2} d'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}\cos(p_1 g + p_2 h)$$
$$+\sigma^{\nu+j-1}\sum_{\lambda\geq 1}\frac{1}{\left\|r_1\right\|^{\lambda-1}}\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^4\\(s_1,s_4)\neq(0,0)}}\frac{d''^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,s}}{s_1 n_* + s_4 n_1}\sin(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1)\,. \quad (86)$$

那么，由李变换 $\mathscr{H}^{(j)} = \exp\left(\mathcal{L}_{\chi^{(j)}_{\nu+j-1}}\right)\mathscr{H}^{(j-1)}$ 产生的哈密顿量 $\mathscr{H}^{(j)}$ 具有如下形式

$$\mathscr{H}^{(j)} = \exp\left(\mathcal{L}_{\chi^{(j)}_{\nu+j-1}}\right)\mathscr{H}^{(j-1)} = \mathscr{Z}_0 + \sum_{l=1}^{j}\mathscr{Z}^{(l)}_{\nu+l-1} + \mathscr{R}^{(j)}_{\nu+j}\,, \quad (87)$$

其中

$$\mathscr{Z}^{(j)}_{\nu+j-1} = \sigma^{\nu+j-1}\sum_{\lambda\geq 1}\sum_{p\in\mathbb{Z}^2}\zeta^{(j)}_{\nu+j-1,\lambda,p}\cos(p_1 g + p_2 h) \quad (88)$$

with

$$\zeta^{(j)}_{\nu+j-1,\lambda,p} = \frac{1}{a_1^{\lambda-1}}d'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}\,, \quad (89)$$

and

$$\mathscr{R}^{(j)}_{\nu+j} = \sum_{l\geq\nu+j}\mathscr{R}^{(j)}_{\nu+j,l} = \sum_{l\geq\nu+j}\sum_{\lambda\geq 1}\frac{a_1}{\left\|r_1\right\|^{\lambda}}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}^2} d'^{(j)}_{l,\lambda,p}\cos(p_1 g + p_2 h)\right.$$
$$\left.+\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^4\\(s_1,s_4)\neq(0,0)}} d''^{(j)}_{l,\lambda,s}\cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1\right)\sigma^{l}\,, \quad (90)$$

其中实系数 $d'^{(j)}_{l\,\lambda\,,,p}$, $d''^{(j)}_{l\,\lambda\,,,s}$ 由已知系数 $\zeta^{(l)}_{\nu+l-1^{\prime},\lambda,p}(l=1,\ldots,j-1)$, $d'^{(j-1)}_{l\,\lambda\quad,,p}$, $d''^{(j-1)}_{l\,\lambda\,s\quad,,}$ 计算得到。

证明。 我们重复命题1的策略，这次寻找一个依赖于 $\|r_1\|$ 的生成哈密顿量:

$$\chi^{(j)}_{\nu+j-1}(f,g,h,E_1,\phi_1,\left\|r_1\right\|,\delta L,e,\eta,\iota_c,\iota_s)$$
$$=\sigma^{\nu+j-1}\left(\phi_1\sigma^{\nu_1}\sum_{\lambda\geq 1}\sum_{p\in\mathbb{Z}^2}\hat{d}'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}(\left\|r_1\right\|,\delta L,e,\eta,\iota_c,\iota_s)\cos(p_1 g + p_2 h)\right.$$
$$\left.+\sum_{\lambda\geq 1}\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^4\\(s_1,s_4)\neq(0,0)}}\hat{d}''^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,s}\sin(s_1+s_2 g + s_3 h + s_4 E_1)\right)\,.$$

要求 $\{\mathscr{Z}_0,\chi^{(j)}_{\nu+j-1}\}+\mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1,\ \nu+j-1}$ 在快角中为 $\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j})$，我们得到

$$-n_*\tilde{d}''^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,s}s_1-n_1\tilde{d}''^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,s}s_4+\frac{1}{\|r_1\|^{\lambda-1}}d''^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,s}=0\ ,$$
$$-n_1\frac{a_1}{\|r_1\|}\tilde{d}'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}+n_1\tilde{d}'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}+\frac{a_1}{\|r_1\|^{\lambda}}d'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}=\frac{1}{a_1^{\lambda-1}}d'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}\ ,$$

也就是说，对于 $\lambda\geq 1$,

$$\tilde{d}''^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,s}=\frac{1}{\|r_1\|^{\lambda-1}}\frac{d''^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,s}}{s_1n_*+s_4n_1}\ ,\quad s\in\mathbb{Z}^4\colon (s_1,s_4)\neq(0,0)\ ,$$
$$\tilde{d}'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}=\frac{1}{a_1^{\lambda-1}}\frac{d'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}}{n_1}\sum_{\psi=0}^{\lambda-1}\left(\frac{a_1}{\|r_1\|}\right)^{\psi}=\frac{d'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}}{n_1}\sum_{\psi=1}^{\lambda}\frac{1}{a_1^{\psi-1}\|r_1\|^{\lambda-\psi}}\ ,\quad p\in\mathbb{Z}^2\ ,$$

这证明了式（86），并得到正规形中的新累积附加项

$$\mathscr{Z}^{(j)}_{\nu+j-1}=\sigma^{\nu+j-1}\sum_{\lambda\geq 1}\frac{1}{a_1^{\lambda-1}}\sum_p d'^{(j-1)}_{\nu+j-1,\lambda,p}\cos(p_1g+p_2h)\ .$$

这证明了式（89）。接下来需要证明表达式（90）为 $\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j})$。证明采用归纳法：对于 $j=2$，我们得到

$$\mathscr{H}^{(2)}=\mathscr{Z}_0+\mathscr{Z}^{(1)}_{\nu}+\mathscr{Z}^{(2)}_{\nu+1}+\mathcal{O}(\sigma^{\nu+2})+\sum_{l\geq\nu+2}\mathscr{R}^{(1)}_{\nu+1,l}+\{\mathscr{Z}^{(1)}_{\nu},\chi^{(2)}_{\nu+1}\}$$
$$+\{\mathscr{R}^{(1)}_{\nu+1},\chi^{(2)}_{\nu+1}\}+\ldots+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}\{\ldots\{\{\mathscr{H}^{(1)},\underbrace{\chi^{(2)}_{\nu+1}\},\chi^{(2)}_{\nu+1}\},\ldots,\chi^{(2)}_{\nu+1}}_{n}\}\ .\quad(91)$$

与命题1类似，形式为 $\{F,\chi^{(2)}_{\nu+1}\}$ 的泊松括号中的记账指数可能通过形式为（i）的导数降低。不过，这次后者只能通过以下组合出现在泊松括号中

$$\sigma^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\ell}\frac{\partial e}{\partial\delta L}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial\chi^{(2)}_{\nu+1}}{\partial e}-\frac{\partial F}{\partial e}\frac{\partial\chi^{(2)}_{\nu+1}}{\partial f}\right)+\frac{\partial e}{\partial G}\left(\frac{\partial F}{\partial g}\frac{\partial\chi^{(2)}_{\nu+1}}{\partial e}-\frac{\partial F}{\partial e}\frac{\partial\chi^{(j)}_{\nu+1}}{\partial g}\right)\right)\ ;\qquad(92)$$

因此我们可以推断

$$\{\mathscr{Z}^{(1)}_{\nu},\chi^{(2)}_{\nu+1}\}=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu+1})\ ,\quad\{\mathscr{R}^{(1)}_{\nu+1},\chi^{(2)}_{\nu+1}\}=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu})\ ,$$

$$\frac{1}{n!}\{\ldots\{\{\mathscr{H}^{(1)},\underbrace{\chi^{(2)}_{\nu+1}\},\chi^{(2)}_{\nu+1}\},\ldots,\chi^{(2)}_{\nu+1}}_{n\geq 2}\}$$
$$=\mathcal{O}(\sigma^{\min\{n(\nu+1)-2(n-1),\,n(\nu+1)+\nu-2(n-1),\,(n+1)(\nu+1)-2n\}})=\mathcal{O}(\sigma^{n(\nu-1)+2})$$

因为当 $F=F_1=\mathscr{Z}_{(1)\nu}$ 时，(80)、(81) 和 (92) 均为零。现在，对于所有 $\nu\geq 2$、$n(\nu-1)+2>\nu+1$、$n\geq 2$，因此，该命题对 $j=2$ 有效。对于 $j\geq 3$，我们有

$$\mathscr{H}^{(j)}=\mathscr{Z}_0+\mathscr{Z}^{(1)}_{\nu}+\ldots+\mathscr{Z}^{(j-1)}_{\nu+j-2}+\mathscr{Z}^{(j)}_{\nu+j-1}+\mathcal{O}(\sigma^{\nu+j})+\sum_{l\geq\nu+j}\mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1,l}$$
$$+\{\mathscr{Z}^{(1)}_{\nu}+\ldots+\mathscr{Z}^{(j-1)}_{\nu+j-2},\chi^{(j)}_{\nu+j-1}\}+\{\mathscr{R}^{(j-1)}_{\nu+j-1},\chi^{(j)}_{\nu+j-1}\}+\ldots$$
$$+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}\{\ldots\{\{\mathscr{H}^{(j-1)},\underbrace{\chi^{(j)}_{\nu+j-1}\},\chi^{(j)}_{\nu+j-1}\},\ldots,\chi^{(j)}_{\nu+j-1}}_{n}\}\ ,\quad(93)$$

类似地

$$\{\mathscr{Z}_{\nu}^{(1)},\chi_{\nu+j-1}^{(j)}\}=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu+j-1})\ ,\quad \{\mathscr{Z}_{\nu+j-2}^{(j-1)},\chi_{\nu+j-1}^{(j)}\}=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu+2j-5})\ ,$$
$$\{\mathscr{R}_{\nu+j-1}^{(j-1)},\chi_{\nu+j-1}^{(j)}\}=\mathcal{O}(\sigma^{2\nu+2j-4})\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\{\dots\{\{\mathscr{H}^{(j-1)},\underbrace{\chi_{\nu+j-1}^{(j)}\},\chi_{\nu+j-1}^{(j)}\},\dots,\chi_{\nu+j-1}^{(j)}\}}_{n\geq 2}\\ =\mathcal{O}(\sigma^{\min\{n(\nu+j-1)-2(n-1),\,n(\nu+j-1)+\nu-2(n-1),\,n(\nu+j-1)+\nu+j-2-2n,\,(n+1)(\nu+j-1)-2n\}})\\ =\mathcal{O}(\sigma^{n(\nu+j-3)+2})\ .\end{aligned}$$

然而，由于 $\nu>1, n\geq 2$，我们很容易得到 $n(\nu+j-3)+2>\nu+j-1$，由此证明得以完成。

□

2.4.4 $\nu=1$ 的情形

考察 $\nu=1$ 时，可以发现 (91) 通过 $\{\mathscr{R}_2^{(1)},\chi_2^{(2)}\}$ 和 $\{\dots\{\{\mathscr{Z}_0+\mathscr{R}_2^{(1)},\chi_2^{(2)}\},\chi_2^{(2)}\},\dots,\chi_2^{(2)}\}$ 产生同阶的 σ^2 未归一化项，也就是说，所得余项为 $\mathscr{R}_2^{(2)}$，因此命题 2 中的方案无法直接应用于 $j=1$ 之后。尽管如此，值得注意的是，如果我们设法消除这些伪项，例如再进行一次归一化 II，使新的结果恢复为 $\mathscr{R}^{(\mathrm{II})}=\mathscr{R}_3^{(\mathrm{II})}$，那么从第 2 次迭代改为从第 II 次迭代重新开始递归后，算法 (87) 就能适用于 $j\geq 3$。这正是我们接下来要证明的结论，以完成对此情形的讨论。

将 (91) 写作 $\mathscr{H}^{(2)}=\mathscr{Z}_0+\mathscr{Z}_1^{(1)}+\mathscr{Z}_2^{(2)}+\mathscr{R}_2^{(2)}$。引入基于命题 2、针对 $\mathscr{R}_2^{(2)}$ 的额外第二次归一化 II，其生成函数为 $\chi_2^{(\mathrm{II})}$。于是得到以下结果。

命题 3. 对于 $\nu=1$ 以及任意 $\nu_1\geq 1$,

$$\mathscr{H}^{(II)}=\exp\left(\mathcal{L}_{\chi_2^{(II)}}\right)\mathscr{H}^{(2)}=\mathscr{Z}_0+\mathscr{Z}_1^{(1)}+\mathscr{Z}_2^{(2)}+\mathscr{Z}_2^{(II)}+\mathscr{R}_3^{(II)}\ . \tag{94}$$

此外，命题 *2* 中由(87)–(90) 组成的循环在任意 $j\geq 4$ 下，经如下修改后仍然成立

$$\mathscr{H}^{(3)}=\exp\left(\mathcal{L}_{\chi_3^{(3)}}\right)\mathscr{H}^{(II)}=\mathscr{Z}_0+\mathscr{Z}_1^{(1)}+\mathscr{Z}_2^{(2)}+\mathscr{Z}_2^{(II)}+\mathscr{Z}_3^{(3)}+\mathscr{R}_4^{(3)}\ , \tag{95}$$

$$\mathscr{H}^{(j)}=\exp\left(\mathcal{L}_{\chi_j^{(j)}}\right)\mathscr{H}^{(j-1)}=\mathscr{Z}_0+\sum_{l=1}^{j}\mathscr{Z}_l^{(l)}+\mathscr{Z}_2^{(II)}+\mathscr{R}_{j+1}^{(j)}\ . \tag{96}$$

证明。 我们先对引理1作必要的推广。

引理 2. 给定 $F_1, F_2\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathbb{T}\times D)$ 满足引理*1*性质的、形式为(76)的三角单项式，或等价地，以正弦表示的三角单项式，那么对 F_1 应用关于 F_2 的李级数变换时，同类型的附加项也保持该性质。

证明。 由于 $\exp(\mathcal{L}_{F_2})F_1$ 涉及计算显式地独立于 e 的函数的泊松括号，因此 (92) 中以 F_1,F_2 替代 $F,\chi_{\nu+1}^{(2)}$ 后恒等于零；同样，(81) 也为零，因为根据假设 $\partial F_1/\partial f=\partial F_1/\partial g,\ \partial F_2/\partial f=\partial F_2/\partial g$。因此，括号 $\{F_1,F_2\}$

李级数中的项要么完全不引入任何偏心率依赖，要么仅通过 (50) 乘以 $\cos f$ 或 $\cos^2 f$ 在分子中引入偏心率依赖；因此，其导数包含余弦项（正弦）的乘积，其系数独立于 e，例如

$$\mathscr{G}_1(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1)\mathscr{G}_2(u_1 f + u_2 g + u_3 h + u_4 E_1)\,, \quad \mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2 = \cos, \sin\,.$$

现在这些论元要么相加，要么相减，因此显然满足相关性质。通过对进一步嵌套的括号进行级联推理，我们即可得出结论。

□

备注 5。结合公式 (80)、(81)、(92)（将 $\chi^{(2)}_{\nu+1}$ 替换为一般可微函数）直接应用引理可知，所遇到的任意变换后的哈密顿量 $\mathscr{H}^{(j)}$及相应的生成函数 $\chi^{(j)}_{\nu+j-1}$ 在 $e = 0$ 处都是正则的，符合达朗贝尔规则，即它们绝不依赖于 e的负次幂。此外，每当 $\{\cdot,\cdot\}$ 的两个项之一不依赖于 e时，根据命题1证明中的第 (i) 项，只要结果非零，其阶数就会降低 σ^{-1}，而不是 σ^{-2}。

我们考虑步骤II:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{(\mathrm{II})} = \mathscr{Z}_0 + \mathscr{Z}_1^{(1)} + \mathscr{Z}_2^{(2)} + \mathscr{Z}_2^{(\mathrm{II})} + \mathcal{O}(\sigma^3) + \sum_{l\geq 3}\mathscr{R}_{2,l}^{(2)} + \{\mathscr{Z}_1^{(1)}, \chi_2^{(\mathrm{II})}\} + \{\mathscr{Z}_2^{(2)}, \chi_2^{(\mathrm{II})}\} \\ + \{\mathscr{R}_2^{(2)}, \chi_2^{(\mathrm{II})}\} + \ldots + \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}\{\ldots\{\{\mathscr{H}^{(2)}, \underbrace{\chi_2^{(\mathrm{II})}\}, \chi_2^{(\mathrm{II})}\}, \ldots, \chi_2^{(\mathrm{II})}}_{n}\}\,. \quad (97)\end{aligned}$$

对各项贡献的分析得出以下推论，由此可得 (94)。

- $\{\mathscr{Z}_{(1)\,1}\,,\ \chi_{(\mathrm{II})\,2}\ \} = \mathcal{O}(\sigma^3)$，因为 $\mathscr{Z}_{(1)\,1}$不依赖于 $f,\ g,\ e$。
- $\{\mathscr{Z}_{(2)\,2}\,,\ \chi_{(\mathrm{II})\,2}\ \} = \mathcal{O}(\sigma^4)$，因为 $\mathscr{Z}_{(2)}$ 和 $\chi_{(\mathrm{II})\,2}$ 满足引理 2。事实上，根据记账规则，$\mathscr{R}_{(1)\,2,\ 2}$ 对 e 的依赖至多是线性的，因此按构造，它确实满足 $\chi_{(2)\,2}$。此时我们证明，由 $\mathscr{R}_{(1)\,2,\ 2}$（或等价地，由 $\chi_{(2)\,2}$）产生的偏心率相关项满足 $d'_{(1)\,2,\ \lambda,\ p} = 0$。

  引理3。 $\mathscr{R}^{(1)}_{2\,2}$，中的每个三角单项式都显式依赖于 e，并且也至少依赖于两个快异常角 f、E_1 中的一个；具体而言，(82) 中的相应系数为 $d^{(1)}_{2\,\lambda,\ ,\ s} = d''^{(1)}_{2\,\lambda\,s,\ ,}$、$(s_1$、$s_4)$ $\neq (0,\ 0)$。

  证明。 根据命题1、引理1和引理 2、代换 $\phi_1 = e_1 \sin E_1$ 以及第 2.3.1 小节和第2.3.3小节列出的公式，我们从 (68) 中提取出 σ^2 阶余项；并且不妨假设 $\nu_1 = 1$，以便也将 (71) 中依赖于 $e_1 \cos E_1$ 的项纳入考虑:

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{(1)}_{2,2} = \mathscr{R}^{(0)}_{1,2} + \frac{a_1}{\|r_1\|}\Bigg(n_*\left(e_1\cos E_1 - \frac{2e\cos f}{\eta^3}\right)\sigma\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial f} + \frac{\partial\mathscr{R}^{(0)}_{1,1}}{\partial f}\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial\delta L} \\ - \frac{\partial\mathscr{R}^{(0)}_{1,1}}{\partial\delta L}\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial f} - \frac{1}{L_*}\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial\iota_c}\left(\iota_c\frac{\partial\mathscr{R}^{(0)}_{1,1}}{\partial f} - \frac{\partial\mathscr{R}^{(0)}_{1,1}}{\partial h}\right) \\ + \frac{1}{L_*}\frac{\partial\mathscr{R}^{(0)}_{1,1}}{\partial\iota_c}\left(\iota_c\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial f} - \frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial h}\right) - \frac{2\sin f}{L_* e}\sigma^{-1}\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial f}\left(\frac{\partial\mathscr{R}^{(0)}_{1,2}}{\partial g} - \frac{\partial\mathscr{R}^{(0)}_{1,2}}{\partial f}\right)\Bigg) \\ - \frac{a_1}{2}\left\{\frac{1}{\|r_1\|}\left(n_*\left(1 + \frac{2e\cos f}{\eta^3}\sigma\right)\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial f} + n_1\frac{\partial\chi_1^{(1)}}{\partial E_1}\right), \chi_1^{(1)}\right\}_2\,,\end{aligned}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}_2$ 表示在运算后仅保留 σ^2 量（根据引理 2 和备注 5，为证明命题1而进行的归纳推导给出了更粗略的界，不会产生其他 σ^2 阶项）。将 (70) 和 (65) 代入 $l=1$，2，并考虑引理1，化简后，涉及 e 的贡献为

$$\mathscr{R}^{(0)}_{1,2_e} - \frac{a_1 e n_*}{\eta^3 \left\|r_1\right\|}\sigma^2 \sum_{(s_1,s_4)\neq(0,0)} \frac{s_1 q''_{1,s}}{s_1 n_* + s_4 n_1}(\cos((1-s_1)f - s_1 g - s_3 h - s_4 E_1) + \cos((1+s_1)f + s_1 g + s_3 h + s_4 E_1)) \,, \quad (98)$$

其中

$$\mathscr{R}^{(0)}_{1,2_e} = \frac{a_1}{\left\|r_1\right\|}\sigma^2 \sum_{s\in\mathbb{Z}^4} q_{2,s}\cos(s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1) \,, \quad q_{2,s} = e\bar{q}_{2,s} \,. \quad (99)$$

现在我们运用达朗贝尔规则来说明，只有所关注的谐波项才能存在。按照引理1中的相同论证，令我们使用修正的德洛内角（77）来表示式（99）的余弦输入，这同样适用于 $\mathcal{P}_1$ 与相应轨道根数（3）（下标“1”）之间的关系：

$$s_1\tilde{\lambda} + (s_1-s_2)\tilde{p} + (s_2-s_3)\tilde{q} + s_4\tilde{\lambda}_1 + (s_4-s_5)\tilde{p}_1 + (s_5-s_6)\tilde{q}_1 \,, \quad s_l \in \mathbb{Z} \,,$$

其中 $\tilde{p}_1 = \tilde{q}_1 = 0$。为消除在 $e=0$ 处的表观奇异性，必须有 $1-|s_1+s_2|\geq 0$ 且为偶数，因此 $s_2 = s_1 \pm 1$。然后，由于 $\mathscr{R}^{(0)}_{1,\,2_e}$ 根据记账设定与 e_1 无关，我们同样必须得到 $s_4 = s_5$。另一方面，关于在 $i_1=0$ 处的正则性，由于缺少 i_1，我们必须得出 $0-|s_5-s_6|\in 2\mathbb{N}$，即 $s_5 = s_6$。此时，我们援引绕 Z 轴旋转的不变性，该不变性规定

$$s_1 - s_1 + s_2 - s_2 + s_3 + s_4 - s_4 + s_5 - s_5 + s_6 = s_3 + s_6 = 0 \,,$$

综上可得 $s_3 = -s_4$。最后，对于倾角，我们必须确保 $l-|s_2-s_3|\in 2\mathbb{N}$，其中 l 也为偶数，且同样不涉及 i_1，因此 $s_2 = s_3 \pm 2n$，$n\leq l/2$ 为自然数。综合以上结果，我们得到

$$s_1 f + s_2 g + s_3 h + s_4 E_1 \implies s_1 f + (s_1\pm 1)g + (s_1 \mp 2n \pm 1)h + (\pm 2n \mp 1 - s_1)E_1 \,,$$

它始终至少取决于 f、E_1 中的一个，因为系数 s_1、$\pm 2n \mp 1 - s_1$ 不会同时为零。

通过相同的推理，并考虑到达朗贝尔规则在 $\exp\left(\mathcal{L}_{\chi_1^{(1)}}\right)$ 下保持不变，将$s_1 \mapsto 1 \pm s_1$代入 (98) 的其余部分后，我们也能得到相同的结论；事实上，我们发现

$$(1\pm s_1) + (1 \pm s_1 \pm 1)g + (1 \pm s_1 \mp 2n \pm 1)h + (\pm 2n \mp 1 - 1 \mp s_1)E_1 \,,$$

且 $1\pm s_1 = 0$、$\pm 2n \mp 1 - 1 \mp s_1 = 0$ 无解。 □

鉴于二阶正规形源自 $\mathscr{R}^{(1)}_{2\,2}$,中明确不依赖快角的部分，可知它不含 e。最后，$\mathscr{R}^{(2)}_{2\,2}$,也不含 e，因为它由 $\{\mathscr{R}^{(1)}_{2,2}, \chi_2^{(2)}\}$ 和 $\{\ldots\{\{\mathscr{Z}_0 + \mathscr{R}^{(1)}_{2,2}, \chi_2^{(2)}\}, \chi_2^{(2)}\}, \ldots, \chi_2^{(2)}\}$ 中的项生成，并依据命题1的计算 (i) 进行处理（备注 5）。同样，根据构造，$\chi_2^{(\mathrm{II})}$ 也如此。

- $\{\mathscr{R}_2^{(2)}, \chi_2^{(\mathrm{II})}\} = \mathcal{O}(\sigma^4)$ by Remark 5.
- $\dfrac{1}{n!}\{\ldots\{\{\mathscr{H}^{(2)}, \underbrace{\chi_2^{(\mathrm{II})}\}, \chi_2^{(\mathrm{II})}\}, \ldots, \chi_2^{(\mathrm{II})}}_{n\geq 2}\} = \mathcal{O}(\sigma^4)$ consequently.

最后，我们只需检查下一步是否会产生一个 $\mathcal{O}(\sigma^4)$ 摄动，这样便可根据命题 2 证明末尾由 (93) 得出的 σ 界限，重新开始针对 $j \geq 4$ 的规范化循环。重复通常的论证后，不难看出，唯一值得研究的括号是 $\{\mathscr{Z}_{(\mathrm{II})\,2}, \chi_3^{(3)}\}$；然而，它是 $\mathcal{O}(\sigma^4)$，因为 $\mathscr{Z}_{(\mathrm{II})\,2}$由不依赖于 e 的 $\mathscr{R}_{2\,2}^{(2)}$，构成。

□

注 6。 根据上述论证，不难看出，对于 $l = \nu$，即使 (70) 和 (65) 中的 $p_2 \equiv 0$，因此，对于所有 $p \neq (0,\ 0)_p = 0$，q'_ν。

作为示例，附录 B 中给出了一个详细演示，展示本节所述的正规化过程如何应用于一个仅包含摄动函数少数几项的简单模型。

3 数值测试

3.1 规范化算法的计算机代数实现 m

例如，使用计算机代数系统（CAS）实现上述正规化过程时，需要对初始哈密顿模型 (11) 进行有限截断。为此，将摄动函数 (13) 乘以 μ 后可重新整理为

$$\mu\mathcal{H}_1 = -\frac{\mathcal{G}m_0\mu}{\|R\|}\sum_{\kappa_1=0}^{\infty}\sum_{\substack{\kappa_2=0\\ \kappa_2\neq 1}}^{\infty}\sum_{\kappa_3=0}^{\infty}\tilde{h}_{\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3}\mu^{\kappa_1}\left(\frac{2r_1\cdot R}{\|R\|^2}\right)^{\kappa_2}\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^{2\kappa_3}, \tag{100}$$

其中 $\tilde{h}_{\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3}$ 为由 (13) 的系数导出的实系数。通过公式定义两个独立的截断阶数，可方便地对 (100) 进行截断：分别针对 μ 的幂（截断阶数 k_μ）和 $\|r_1\|/\|R\|$ 的幂（多极截断阶数 k_{mp}）。

$$\mathcal{H}_1^{\leq k_\mu, k_{\mathrm{mp}}} = -\frac{\mathcal{G}m_0\mu}{\|R\|}\sum_{\kappa_1=0}^{k_\mu-1}\sum_{\kappa_2=0,\kappa\neq 1}^{k_{\mathrm{mp}}}\sum_{\kappa_3=0}^{\lfloor k_{\mathrm{mp}}/2\rfloor}\tilde{h}_{\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3}\mu^{\kappa_1}\left(\frac{2r_1\cdot R}{\|R\|^2}\right)^{\kappa_2}\left(\frac{\|r_1\|}{\|R\|}\right)^{2\kappa_3}, \tag{101}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 为取整函数。以截断哈密顿量 $\mathcal{H}^{\leq k_\mu,\ k_{\mathrm{mp}}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}^{\leq k_\mu,\ 1}{}^{\ k_{\mathrm{mp}}}$ 为基础，我们随后得到一系列长期模型 $\mathscr{Z}_{(j)}$，$j = 1$，2，……，其中 j 表示通过以下公式计算的正规化步骤：

$$\mathscr{Z}^{(j)} = \mathscr{Z}_0 + \sum_{l=1}^{j}\mathscr{Z}_{\nu+l-1}^{(l)}\,. \tag{102}$$

具体而言，我们实现了计算机代数系统算法的以下步骤：

(i) 对于给定的 μ，选取 k_μ, k_{mp} 的值，按照 (100) 对哈密顿量进行相应展开，并计算截断模型 $\mathcal{H}^{\leq k_\mu, k_{\mathrm{mp}}}$；

(ii) 选取 a_* 和 e_* 的参考值；(iii) 根据所选的 a_*，转换为变量 $(f, g, h, E_1, \delta L, e, \eta, \iota_c, \iota_s, J_1)$ 和参数 L_*, e_1, a_1, η_1；

(iv) 计算 ν 和 ν_1 （式（7））；

(v) 按照第2.3.2小节中的规则设置适当的记账权重，并相应地将 δL 中的哈密顿量展开至 $\sigma^{\nu k_\mu}$；(vi) 去掉常数，执行恒等变换（63），舍弃高于 νk_μ 的记账阶数，并引入 n_*；(vii) 若 $\nu > 1$，则通过截断至最大记账阶 $N_{\rm bk} = \nu k_\mu$的李级数运算（66），计算生成函数（70）以及第一规范化哈密顿量$\mathscr{H}^{(1)}$；若 $\nu = 1$，则通过第2.4.4小节的流程计算 $\mathscr{H}^{(1)}$ （始终截断至记账阶 $N_{\rm bk}$）；

(viii) 通过第2.4.3小节的流程计算逐次正规化 $\mathscr{H}^{(j)}$，截断至记账阶 $N_{\rm bk}$，直至最大正规化阶数 $\nu + j_{max} - 1 < N_{\rm bk}$，$j_{max} \le \nu\,(k_\mu - 1)$；由此可获得截断哈密顿模型，其中包含有限个正规形项，以及由截断余项提供的有限个项。

在上述算法的计算机代数系统实现中，我们使用数值系数，将所有常数替换为相应的数值。如下文所示，可以开展多种类型的数值测试，以检验该方法的精度和整体性能。

3.2 日–木星椭圆限制性三体问题中的数值示例：半解析轨道传播

以下所有数值测试均针对日–木星系统（$\mu = 9.5364 \cdot 10^{-4}$）。我们采用基于地球轨道的单位，因此 $\mathcal{G}m_0 = 4\pi^2$天文单位^3/y^2, $a_1 = 5.2044$天文单位，木星周期为 $T_1 = 11.86$ y。木星平均运动为 $n_1 = 2\pi/T_1$，偏心率为 $e_1 = 0.0489$，这些参数在椭圆限制性三体问题模型的所有计算中均保持不变。

在以下所有测试中，粒子的轨道由初始条件 $a(0)$ $e(0)$ $i(0)$确定，并辅以 $f(0) = g(0) = h(0) = 0$。

我们通过比较两种不同方法得到的轨道根数 $a(t)$ $e(t)$ $i(t)$ $g(t)$ $h(t)$ 的短周期振荡，对椭圆限制性三体问题框架下正规化方法的效率进行初步检验。

直接笛卡尔传播：将初始条件 $z(0) := (a(0)\ e(0)\ i(0)\ f(0)\ g(0)\ h(0))$ 映射为笛卡尔正则位置和共轭动量的初始条件 $(X(0)\ Y(0)\ Z(0)\ P_X(0)\ P_Y(0)\ P_Z(0))$。使用完整哈密顿量 (1) 的哈密顿方程（同时设定 $J_1(0) = 0,\ M_1(0) = 0$），得到数值演化 $(X(t)\ Y(t)\ Z(t),\ P_X(t)\ P_Y(t)\ P_Z(t))$，并可将其转换为轨道根数演化

$$z(t) = (a(t), e(t), i(t), f(t), g(t), h(t))\ .$$

半解析传播：按照上一小节所述实现正规化算法后，初始瞬时轨道根数状态向量 $z(0)$ 被转换为

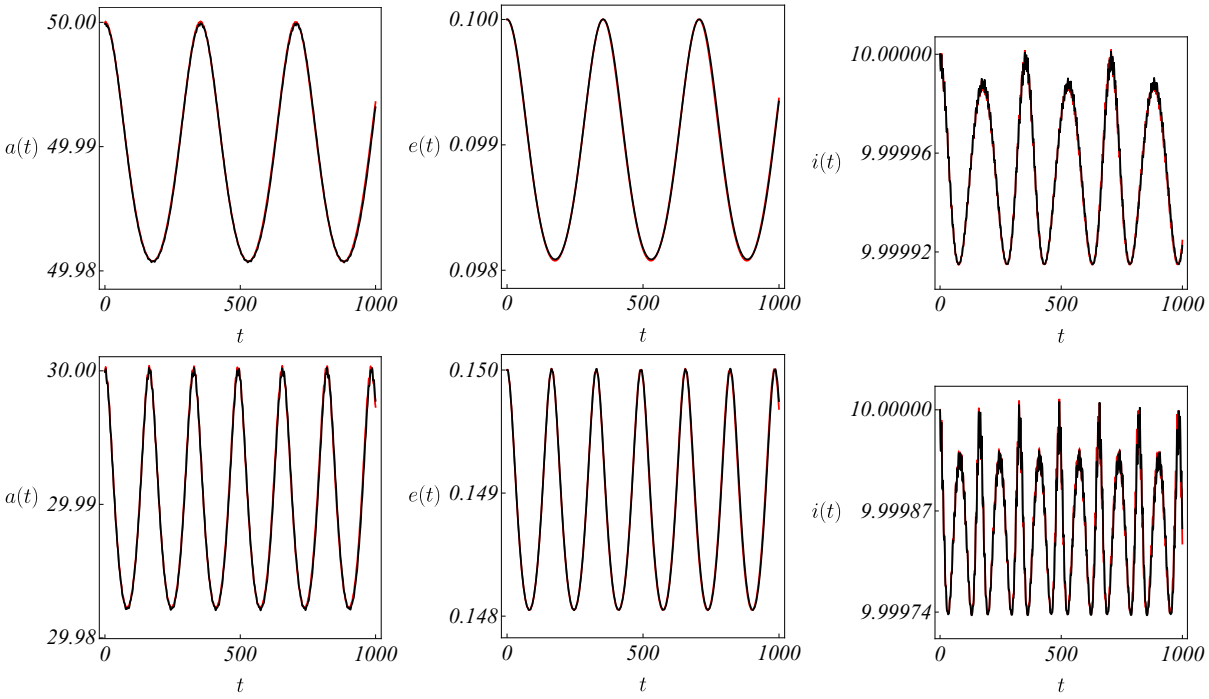

图 2： 第一个和第二个示例（椭圆限制性三体问题）。数据： $a_* = 50$天文单位， $e_* = 0.1$ （$\nu = 3$）， $i(0) = 10°$、$k_\mu = k_{\rm mp} = 2$ （上方图）； $a_* = 30$天文单位， $e_* = 0.15$ （$\nu = 4$）， $i(0) = 10°$、$k_\mu = k_{\rm mp} = 2$ （下方图）。黑色曲线表示半解析时间变化（我们的方法），红色曲线表示笛卡尔级数。

相应的“平均根数”状态向量 $\xi^{(j)}(z(0))$ 的初始条件，即经过 j 近恒等正规化变换后，与原有变量共轭的新正则变量所对应的根数向量。通过截断至记账阶 $N_{\rm bk}$ 的李级数组合公式计算该向量：

$$\xi^{(j)}(z) = \left(\exp\left(\mathcal{L}_{-\chi_\nu^{(1)}}\right) \circ \exp\left(\mathcal{L}_{-\chi_{\nu+1}^{(2)}}\right) \circ \ldots \circ \exp\left(\mathcal{L}_{-\chi_{\nu+j-1}^{(j)}}\right) z \right)^{\le N_{\rm bk}} , \tag{103}$$

使用式（69）求逆级数。随后，我们通过对长期运动方程进行数值积分，得到平均根数向量$\xi^{(j)}(t)$的演化

$$\dot{\xi}^{(j)} = \mathbb{J}\nabla \mathscr{Z}^{(j)}(\xi^{(j)}) \tag{104}$$

（$\mathbb{J}$ 标准辛单位矩阵）。利用截断的李级数组合公式，可以将其反变换，从而得到密切根数向量 $z(t)$ 的演化

$$z(\xi^{(j)}) = \left(\exp\left(\mathcal{L}_{\chi_{\nu+j-1}^{(j)}}\right) \circ \exp\left(\mathcal{L}_{\chi_{\nu+j-2}^{(j-1)}}\right) \circ \ldots \circ \exp\left(\mathcal{L}_{\chi_\nu^{(1)}}\right) \xi^{(j)} \right)^{\le N_{\rm bk}} . \tag{105}$$

请注意，直接变换和逆变换（式（103）和（105））以及哈密顿长期方程（104）均可利用第 2.3 小节的泊松代数规则以闭式形式计算。随后，我们将通过公式得到的根数向量 $z(t)$演化称为半解析演化

$$z(t) = z(\xi^{(j)}(t)) . \tag{106}$$

图 2 展示了在“简单”情形下笛卡尔传播与轨道要素半解析传播的比较：粒子的初始条件为 $a(0) = 50$ 天文单位（左上

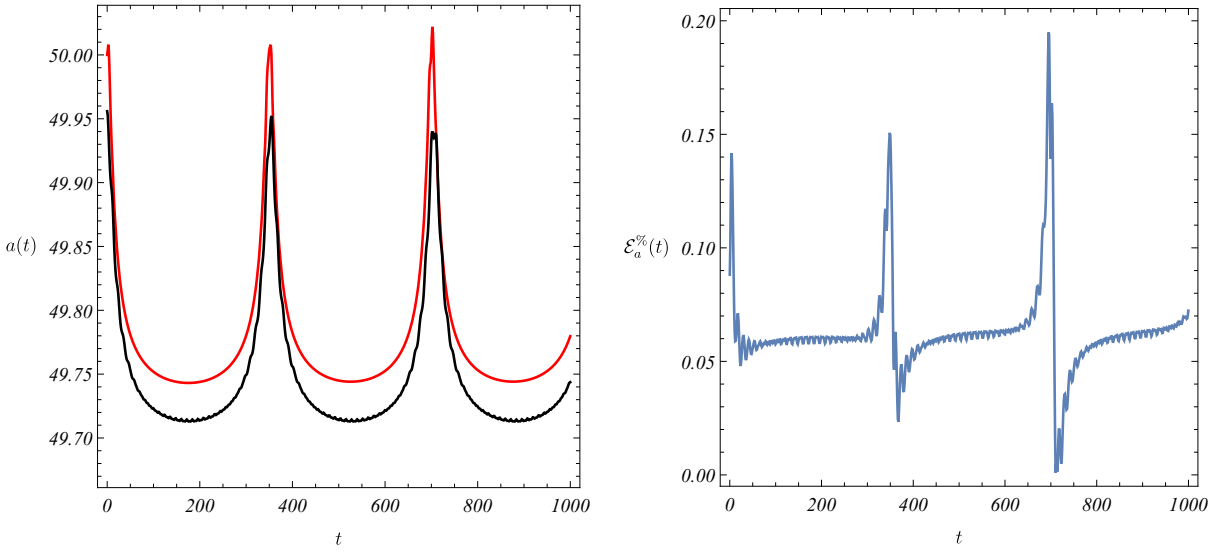

图 3： 第三个示例（椭圆限制性三体问题）。数据： $a_* = 50$天文单位， $e_* = 0.7$ （$\nu = 20$），$i(0) = 20°$, $k_\mu = 2$,$k_{\rm mp} = 3$。左图中，黑色曲线表示半长轴的半解析时间变化（我们的方法），红色曲线则表示通过传播笛卡尔运动方程得到的结果。右图显示了对应的百分比相对误差的演变$\mathcal{E}_a^{\%}$。

图）或 $a(0) = 30$ 天文单位（左下图），偏心率 $e(0)$ =0.1 或 $e(0) = 0.15$ 分别较低（中间各图），倾角为 $i(0) = 10°$ （右侧各图）。在这些情况下，距离比 $\|r_1\| / \|R\|$ 较小（约为 0.1-0.2），这意味着采用四极展开（$k_{\rm mp} = 2$）即可将哈密顿扰动 $\mathcal{H}_1$的表示相对误差控制在约 0.1%。扩展到更高阶多极项很直接，但由于哈密顿量中的项数显著增加，计算成本也会大幅上升。另一方面，即使对哈密顿量进行低阶截断，我们仍能准确地半解析表示全部三个“类作用量”轨道要素（半长轴、偏心率和倾角）中的 $\mathcal{O}(\mu)$ 短周期振荡。特别值得注意的是，保持 $a(0) = 50$ 天文单位不变，但将偏心率改为 $e(0) = 0.7$，即超过拉普拉斯值，会得到一条近心点位于 $\|R_p\| = 15$ 天文单位的轨道，其距离比为 $\|r_1\| / \|R\| \approx 0.3$（图 3）。此时，需要采用八极截断（$k_{\rm mp} = 3$），才能使哈密顿模型的近似相对误差达到 0.1%。不过，如图 3 所示，即使在接近轨道近心点通过时，轨道的半解析传播仍能跟踪全数值结果，误差不超过 0.2%。

在上述例子中，计算长期哈密顿量时采用的最大正规化步骤数分别设为 $j_{max} = 3$、$j_{max} = 4$ 和 $j_{max} = 4$，这在所有情况下都对应着最佳匹配。正如下一小节将要讨论的，要估计轨迹半解析传播中可能的最小误差，首先需要计算参考值（a_*、e_*）对应的最优规范化次数 j_{opt} （或等价地，最优正规化阶数 $\nu + j_{opt} - 1$），并将其视为预设固定多极截断阶数模型下的函数。由于 ER3BP 和 CR3BP 中出现相同的除数，我们通过数值例子验证，误差分析在两种情况下得到的结果基本相同。然而，在 CR3BP 中计算最优规范化更为容易，因为在计算机代数系统中计算正规形所产生的项数要少得多。因此，我们现在转而关注后一项计算。

3.3 太阳-木星平面圆形限制性三体问题中的数值例子：最优余项的阶数与大小

3.3.1 轨迹传播：最优余项

在平面圆形限制性三体问题中，计算成本显著降低。这尤其归因于以下几点：

- 对 M_1 的依赖变得显式（$M_1 = E_1$ 在 (2) 中），而 $a_1 = \|r_1\|$。因此，$\phi_1 = 0$。

- 摄动函数中不会出现涉及（h, H）的项，因此 ι_c, ι_s 被舍弃；
- 不会出现需要按指数 ν_1 进行记账的项，因此只定义 ν，如式 (7) 所示；

- $d'_{(j)\,l,\lambda,p} = 0$ 对于每个 j, l, λ, p，在式 (90)、(86) 中，因此在式 (88) 中也有 $p_1 = p_2 \equiv 0$。这是因为表达式 (16) 化简为

$$r_1 \cdot R = \|r_1\| \, \|R\| \cos(f + g - M_1) \,, \tag{107}$$

  根据达朗贝尔规则，它始终取决于差值 $g - M_1$。这意味着，与椭圆限制性三体问题不同，作用量 G（以及相应的偏心率 e）是长期哈密顿量的积分；

- 因此，在 $\nu = 1$ 情况下，第一步规范化过程中任何泊松括号都不会出现记账阶低于或等于该阶的项。因此，命题 3 是多余的。

鉴于上述结果，在平面圆形限制性三体问题中，我们能够在平面 (a_*, e_*) 的网格点上进行正规形计算，并将正规化阶数提高到足够高，使第2节算法计算出的级数的渐近特性得以显现。为此，我们通过范数上界估算经过 j 次正规化步骤后的级数余项大小

$$\mathscr{E}^{(j)} = \sum_{l=\nu+j}^{\nu k_\mu} \sum_{s\in\mathbb{Z}^3} |d_{l,s}^{(j)}| \geq \left\| \mathscr{R}_{\nu+j}^{(j)} \right\|_\infty \,, \quad j = 1, \ldots, \nu(k_\mu - 1) \,, \tag{108}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示上确界范数。将 $\mathscr{E}^{(j)}$ 随正规化步骤数j 作图，便可估算任一步骤产生的误差（余项大小）。图4给出了此类计算的一个示例。值得注意的是，存在一个最优正规化步骤数 ($j = j_{opt} = 6$)，此时余项大小估计值 $\mathscr{E}^{(j)}$ 达到全局最小值。

尽管系统地研究最优正规化步骤数 j_{opt} 对参数 (a_*、e_*) 的依赖关系超出了我们目前的研究范围，但图 5 和图 6 有助于我们对这个问题有所了解。最相关的观察是，曲线 $\mathscr{E}^{(j)}$（相对于 j）的变化取决于具有参考值 (a_*、e_*) 的轨迹与“层级”状态有多接近。我们采用半长轴之比 a_1/a_*，或近心距离之比 $\|r_1\| / \|R_p\| = a_1(1 - e_1)/(a_*(1 - e_*)) = a_1/(a_*(1 - e_*))$，作为轨道层级特征的度量。图 5（$a_* = 30$天文单位，$e_* = 0.5$）所示的近心距离比$\|r_1\| / \|R_p\| \approx 0.3$ 小于图 4（$\|r_1\| / \|R_p\| \approx 0.4$）示例中的对应值。我们观察到，前一种情况下的最优正规化步骤数满足 $j_{opt} = 10$，也就是说，大于后一种情况。相反，图 6 展示了一个远离层级极限的轨道示例，其满足估计式 $\|r_1\| / \|R_p\| \approx 0.7$。在这种情况下，较高阶的多极展开

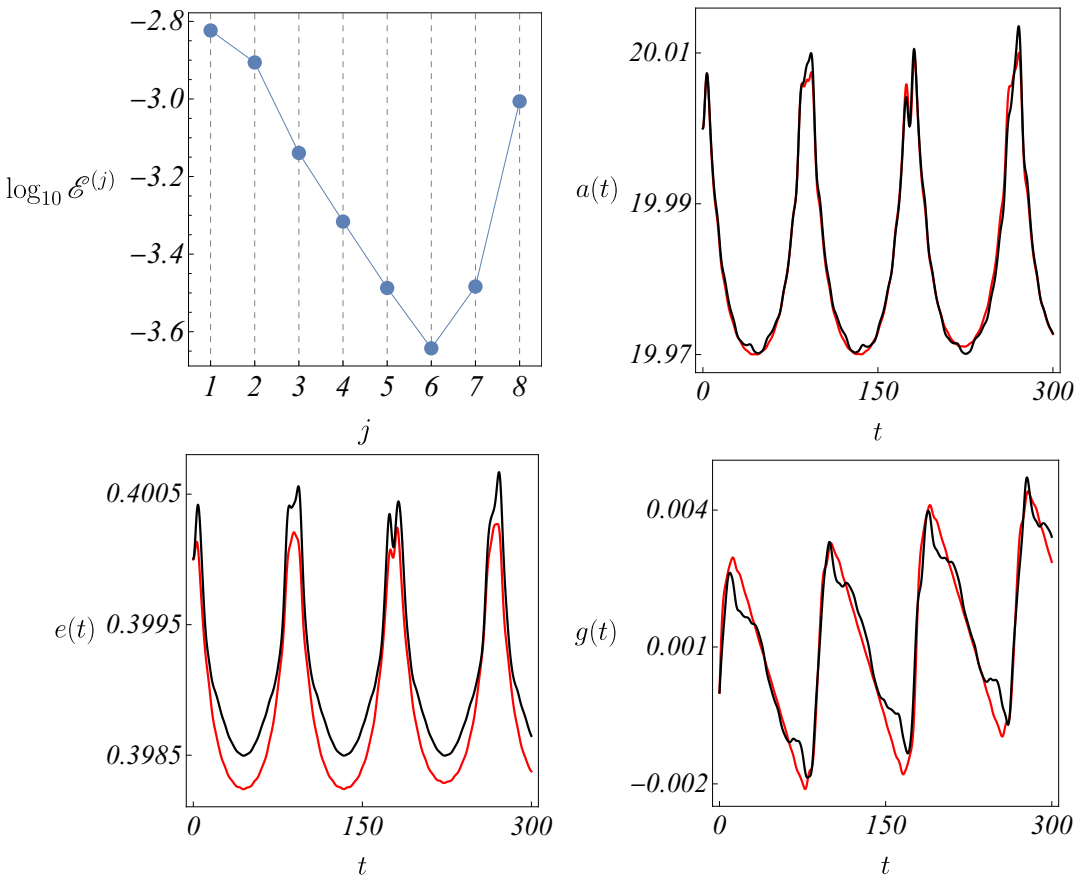

图4： 第四个示例（平面圆形限制性三体问题）。数据：$a_* = 20$天文单位，$e_* = 0.4$（$\nu = 8$），$k_\mu = 2$，$k_{\rm mp} = 3$。估计值 $\mathscr{E}^{(j)}$ 以半对数尺度显示在左上图中。右上图和下方各图分别展示了密切轨道根数 $a\,(t)$、$e\,(t)$、$g\,(t)$ 的半解析（黑色）演化与完全数值（红色）演化的直接比较。半解析曲线是在 $j = j_{opt} = 6$ 时得到的，此时 $\mathscr{E}^{(j)}$ 最小。

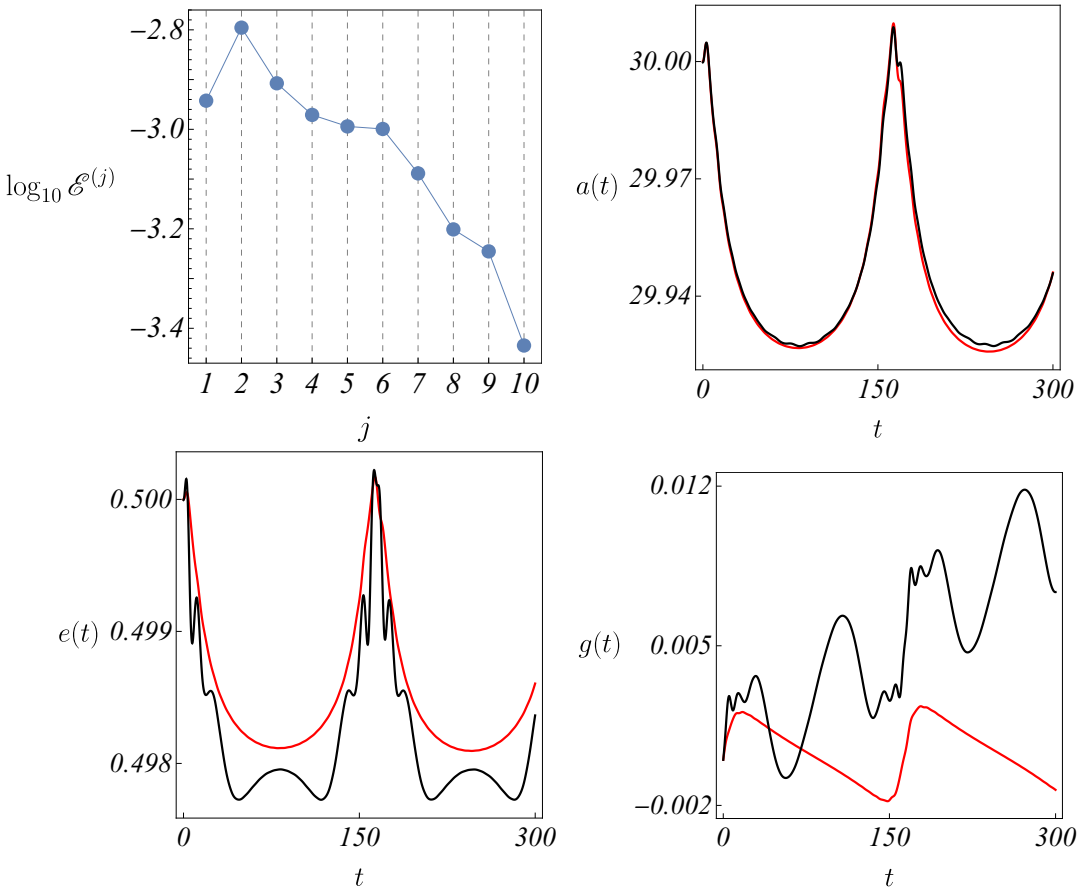

图5： 第五个示例（平面圆形限制性三体问题）： $a_* = 30$天文单位， $e_* = 0.5$ （$\nu = 10$），$k_\mu = 2$， $k_{\rm mp} = 3$。绘图类型和颜色约定与图4相同。半解析曲线针对$j = j_{opt} = 10$获得。

要为这条轨道获得精确的截断哈密顿模型，需要满足（$k_{\rm mp} = 5$）。不过，我们注意到，正规化过程表现良好，余项随 j 增大而减小，直至达到停止点，即 $j = 6 = \nu$（$k_\mu - 1$）。数值结果表明，随着我们逐步接近条件 $\|r_1\| / \|R\| = 1$，这一表现会逐渐变差；超过该条件后，哈密顿量的多极展开将不再收敛。

3.3.2 长期运动区域的半解析确定

前两个小节所示的结果，涉及在不同多极截断阶数下处理的若干轨道个例，以及对正规化步骤数的不同选择；每次都在计算限制下，力求得到最佳近似的长期模型。本小节旨在研究闭式正规化中余项的行为：问题的所有截断阶数均采用统一选择，但计算改为在平面（a_*， e_*）中参考值的精细网格（100×20）上进行。为此，我们设定 $k_\mu = 2$ （质量参数的二阶），并固定 $k_{\rm mp} = 3$（八极近似）。受计算限制而作出的后一选择，使初始模型相对于完整哈密顿量的误差仅在 $a_* > 2a_1$ 时才达到约 1%。然而，出于下文将解释的原因，在八极近似框架内进行计算，对于后续所讨论的问题而言，在 $1.5a_1 < a_* < 2a_1$ 范围内也很有意义；若要处理更小的 a_*，则需要考虑高阶多极项。

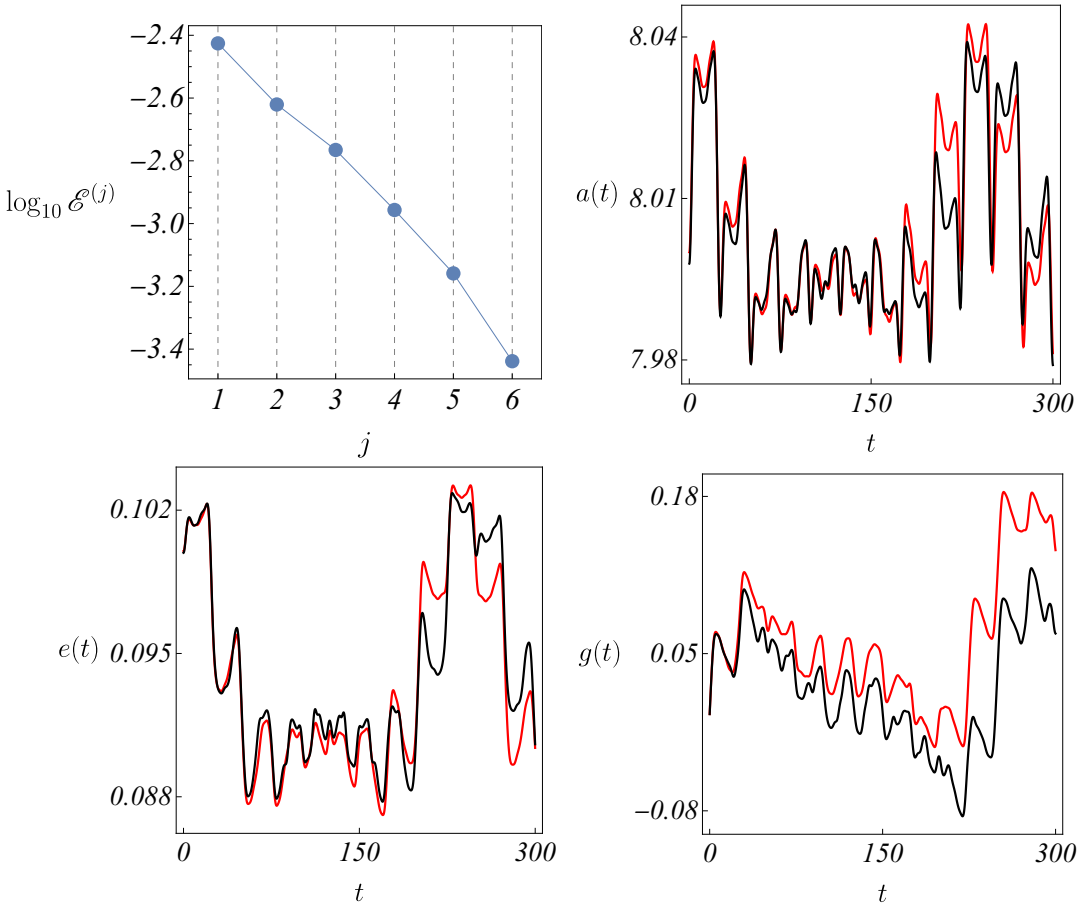

图6： 第六个例子（平面圆形限制性三体问题）：$a_* = 8$、$e_* = 0.1$（$\nu = 3$）、$k_\mu = 3$、$k_{\mathrm{mp}} = 5$。绘图类型和颜色约定与图 4 中相同。半解析曲线针对$j = j_{opt} = 6$获得。

上述计算的结果汇总于图 7：左图以对数颜色刻度显示余项大小，该大小通过按式（108）计算的 $\mathscr{E}^{(n)}(a_*, e_*)$ 的值估算，对应于平面 (a_*, e_*) 上的各个点；正规化步骤数设为 $n = \min\{\nu(k_\mu - 1) \quad 7\} = \min\{\nu, 7\}$。最大值 $n = 7$ 同样受计算限制约束，这意味着 n 随 e_* 变化，最大约为 $e_* = 0.37$。

图 7 中的相关信息由黑色曲线给出，该曲线对应于等值线 $\mathscr{E}^{(n)}(a_*, e_*) = 10^{-2}$。由于在原始哈密顿量中，我们有估计式$\mathscr{E}^{(0)}(a, e) := \mathcal{H}^{\leq k_\mu, 1}_{k_{\mathrm{mp}}} = \mathcal{O}(10^{-2})$，因此黑色曲线给出了划分平面 (a_*, e_*) 为两个区域的极限边界的粗略估计：在黑色曲线下方的区域中，通过迭代归一化逐步消除快角，会得到一个长期模型，其余项随正规化步骤数量 j 减小，至少直到 $j = n$。

通过与数值稳定性图进行比较，可以对由等值线 $\mathscr{E}^{(n)}(a_*, e_*) = 10^{-2}$ 近似得到的边界作出物理解释；例如，图 7 右图就是这样得到的。对于 (a, e) 网格中的每条轨迹，图中以颜色表示快速李雅普诺夫指标（FLI，综述见 [9] ），该指标是在完整哈密顿模型的运动方程与变分运动方程同时积分 50 个木星周期后得到的。因此，深蓝色表示最规则的轨道，浅黄色则表示最混沌的轨道，具体由 FLI 值判定。在 FLI图谱上还叠加了三条曲线：

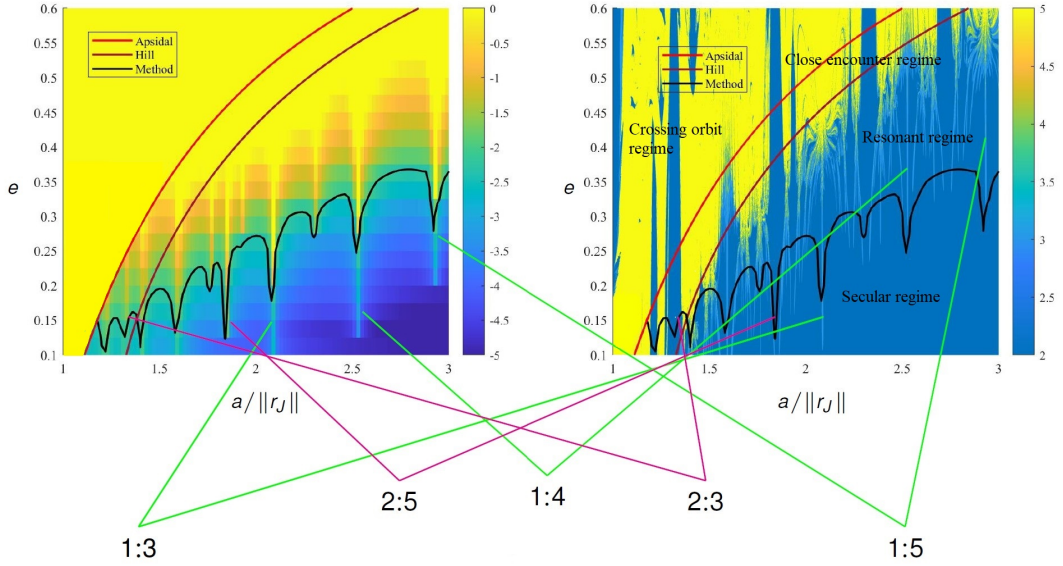

图 7： 左图：在 $100 \times 20(a, e)$ 网格上计算 $\log_{10}(\mathscr{E}_{(n)})$、 $n = \min\{\nu, 7\}$, $k_{\mathrm{mp}} = 3$。对于每个 $e = e_*$, n ，均执行不同的规范化，然后针对每个 $a = a_*$进行评估。右图：对以 $50T_1$为积分时间的初始数据，在 300×900 (a, e) 网格上绘制短周期快速李雅普诺夫指标图。如图所示，三条曲线分别表示：粒子轨迹的近心点等于木星轨道半径的轨迹线 $\|r_1\| = \|r_J\|$ （红色）、希尔稳定性判据（棕色）和 $\mathscr{E}^{(n)} = 1\%$ 等值线（黑色）。每两条相邻的上述曲线所围成的区域，均标注了相应的运动状态。图下方列出了主要的平均运动共振。

(i) “近日点穿越曲线”（红色）给出了满足条件$a(1 - e) = \|r_J\| = a_J$ （圆形情形）的点的轨迹，也就是说，这些点对应于试验粒子的轨道近心点与木星轨道半径相等的位置；

(ii) 希尔极限 [12] (棕色)基于关系式 $C_{\mathrm{Jac}}(a, e) = C_{\mathrm{Jac}}(\mathscr{L}_1)$，其中 C_{Jac}是粒子雅可比常数关于轨道根数的函数，而 $C_{\mathrm{Jac}}(\mathscr{L}_1)$ 是其在拉格朗日点 $\mathscr{L}_1$处的值；

(iii) 等值线 $\mathscr{E}_{(n)}(a, e) = 10^{-2}$ (黑色，与图 7 左图相同)。

在上述三条曲线中，近日点穿越曲线在 R3BP 中类似于所谓的角动量亏损判据（AMD， [8]）；在完整行星三体问题中，该判据用于区分不会发生近日点穿越的系统。如 FLI 图谱数据所示，希尔曲线在区分强混沌区域（黄色）与规则或弱混沌轨道区域（各种深浅的蓝色）方面，总体上给出了更好的近似。这是预料之中的，因为希尔曲线区分了木星引力效应至少暂时占主导的轨道与不占主导的轨道。不过，通过 FLI 图谱，我们注意到曲线（ii）和（iii）之间存在一个广阔区域；在此区域内，轨迹虽不会遭遇近距离遭遇，却会受到与该问题的平均运动共振相关的共振多重态所产生的长期动力学效应影响（图中标出了其中最重要的共振多重态）。请注意，在八极近似下，哈密顿量包含谐波项，其中包括快角的所有组合，形式为 $\cos(s_1 f + s_2(g - M_1))$，且

$$(s_1, s_2) = (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (7, 3),$$

$$(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),$$
$$(1,-1),(2,-1),(3,-1),(1,-2),(1,-3),$$

因此包含了与 $a > 1.5a_J$ 的图 7 FLI 图谱中检测到的平均运动共振相关的所有谐波。通过闭式正规化（方程 (70) 和 (86)），我们便会在级数中得到小除数；当半长轴 a_* 取任意使某个共振组合 $s_1 n_* - s_2 n_J$, $n_J = n_1$ 接近零的值时，都会出现这种情况。所有这些情形都会在曲线（iii）上形成向下延伸的阿诺德舌状尖峰，标志着基于非共振 正规形构造的轨道近似失效。另一方面，我们观察到，对于任意 a_* 值，都存在一个偏心率阈值 $e_{*,\ s}$；当 $e_* < e_{*,\ s}$ 时，在 FLI 图谱中看不到与平均运动共振相关的谐波所产生的明显影响。这意味着，通过消去问题中涉及快角的所有谐波而构造的长期模型，能够以良好精度描述该区域内的动力学，因此该区域称为长期运动区域。从物理角度而言，长期运动区域对应的初始条件下，木星的引力摄动仅以“拉普拉斯”意义上的方式产生影响，即相当于质量沿与木星轨道重合的圆环分布。曲线（iii）由此给出了该区域的边界；正如 FLI 图谱所显示的，这一边界与希尔区域的边界明显不同。

因此，可以通过识别四种运动区域（在快速李雅普诺夫指标图中指定）来概括整体情况：

- “轨道交叉区”（曲线 (i) 以上）；
- “近距离遭遇区”（曲线 (i) 与 (ii) 之间）；
- “共振区”（曲线 (ii) 与 (iii) 之间）；
- “长期运动区”（曲线 (iii) 以下）。

4 结论

总之，本文提出了一种闭式方法，用于推导余项较小（尽管其存在有限下界）的长期哈密顿模型（正规形），适用于粒子轨迹位于主摄动体轨迹之外的限制性三体问题。此外，借助这一方法，我们定义了一个新的启发式界限，用以区分限制性三体问题中运动性质属于“长期”的情形（即不受短周期效应影响）与其他运动。具体而言：

1. 第2节阐述了该方法的形式理论，该方法高度依赖于记账参数的使用，以同时处理问题中的所有小量；这些小量不仅出现在哈密顿量和李生成函数中，也出现在涉及问题德洛内正则变量的泊松代数的所有公式的闭式形式中。随后，通过命题1、2和3对该方法的一致性进行了严格证明，并给出了实现闭式正规化算法单次迭代步骤的显式公式。

2. 第3节给出了该算法在空间椭圆型以及平面圆形限制性三体问题中的实现和精度的数值例子，并通过数值分析考察了该方法的收敛性质。文中讨论了选择不同截断阶数（按质量参数 μ 的幂次或按多极展开）的影响，以及

圆形情形下正规化过程的若干简化。数值例子证实了该级数本质上具有渐近特性，并表明存在最优正规化步骤数；超过该步骤数后，余项大小将达到可能的最小值。

3. 上述方法的一个关键之处在于，可以利用余项大小随正规化步骤数变化的规律，清晰地区分两个截然不同的区域；纯数值方法（FLI图谱）也识别出了这两个区域。其中一个称为**长期运动区域**，在该区域内，哈密顿量中与问题的快角（近点角）共振组合相关的谐波项，不会对轨道产生任何在FLI图谱上可见的动力学效应。从半解析视角来看，这意味着采用第2节提出的非共振构造时，直至最优正规化步骤都不会出现（近）共振除数。因此，最终正规形中仅保留与近日点运动和交点线运动相关的角。我们通过数值结果展示，如何利用正规形余项大小的信息，以半解析方式确定太阳—木星系统中长期运动区域的边界。最后，我们证明，该边界与由希尔稳定性或近日点穿越判据定义的区域边界明显不同。

附录

泊松括号中间导数的计算

通过适当结合定义 (3)、极坐标关系 (15)（包括涉及偏近点角 E 的另一种表达式），计算导数 (31)–(43)

$$\|R\| = a(1 - e\cos E)\,, \tag{109}$$

$\|r_1\|$，由式 (2)（类似于式 (109)）以及开普勒方程得到

$$\ell = E - e\sin E\,, \qquad M_1 = E_1 - e_1\sin E_1\,, \tag{110}$$

以及三角恒等式

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}\,, \qquad \sin f = \frac{\eta\sin E}{1 - e\cos E}\,. \tag{111}$$

对 ℓ 求全导数，可由式 (109) 和 (15) 得到式 (31)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\|R\| \overset{(109)}{=} \frac{\partial\|R\|}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \ell} = \frac{ae\sin E}{1 - e\cos E} \overset{(15)}{=} \frac{\partial\|R\|}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{a\eta^2 e\sin f}{(1 + e\cos f)^2}\frac{\partial f}{\partial \ell}\,,$$

由于 a, e 不依赖于 ℓ，其中 $\partial E/\partial\ell$ 是利用反函数的导数从式 (110) 的第一个关系推导出的（确保了 $\partial\ell/\partial E \neq 0$）。因此得到式 (111) 的结果。
对 (110) 中第二个式子的 $\mathrm{d}M_1/\mathrm{d}E_1 \neq 0$ 分别再进行一次普通求导和逆求导，即可直接得到方程 (32)、(33)：

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}M_1} = \frac{1}{1 - e_1\cos E_1} = \frac{a_1}{\|r_1\|}\,.$$

现在由 (3) 求解 e 并进行偏微分，即可立即得到方程 (35) 和 (38)，进而得到方程 (36)、(39)：

$$\frac{\partial\eta}{\partial\delta L}=-\frac{e}{\eta}\frac{\partial e}{\partial\delta L}=-\frac{\eta}{L}\,,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial G}=-\frac{e}{\eta}\frac{\partial e}{\partial G}=\frac{1}{L}\,.$$

真近点角关于作用量的导数稍微复杂一些。利用（111），

$$-\sin f\frac{\partial f}{\partial\delta L}=\frac{\partial}{\partial\delta L}\cos f=\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}\right)\frac{\partial e}{\partial\delta L}+\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}\right)\frac{\partial E}{\partial\delta L}\,,$$

经化简可得

$$\frac{\partial f}{\partial\delta L}=\frac{\sin f}{eL}+\frac{1+e\cos f}{\eta}\frac{\partial E}{\partial\delta L}\,;$$

最后，利用相应的开普勒方程（110）以及相互独立性 ℓ，δL 通过共轭关系，我们明确得到 $\partial E/\partial\delta L$

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta L}(E-e\sin E)=\frac{\partial E}{\partial\delta L}-\frac{\partial e}{\partial\delta L}\sin E-e\cos E\frac{\partial E}{\partial\delta L}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial E}{\partial\delta L}=\frac{\eta\sin f}{eL}\,,$$

从而得到方程（34）。

$\partial f/\partial G$ 的关系也完全以相同的方式得到，因此可得

$$\frac{\partial f}{\partial G}=-\frac{\sin f}{\eta eL}+\frac{1+e\cos f}{\eta}\frac{\partial E}{\partial G}\,,\qquad\frac{\partial E}{\partial G}=-\frac{\sin f}{eL}\,,$$

即方程（37）。

最后，涉及 $\iota_c=\cos i$ 的导数 (40)、(42) 可再次通过对 (3) 分别关于 G 和 H 求偏导轻易得到；而对于包含 $\iota_s=\sin i$ 的导数，例如可以利用恒等式 $\sin^2 i+\cos^2 i=1$:

$$0=2\sin i\frac{\partial\iota_s}{\partial G}+2\cos i\frac{\partial\iota_c}{\partial G}$$

由此可得方程 (41)，其中给定 $\sin i\neq 0$；同理，对变量 H 重复相同的论证即可得到方程 (43)。

B 一个 μ2 四极展开的规范化示例

考虑以下玩具模型哈密顿量，其中有 $k_\mu=k_{\mathrm{mp}}=\nu=2$、$\nu_1=1$，并遵循 §2.4.1 中引入的约定：

$$\mathscr{H}^{(0)}=\mathscr{Z}_0+\mathscr{R}^{(0)}_{2,2}+\mathscr{R}^{(0)}_{2,3}+\mathscr{R}^{(0)}_{2,4}\,,$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{2,2}^{(0)} = \sigma^2\Bigg(&- \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c^2\cos\left(2\left(E_1-f-g-h\right)\right)}{16L_*^6\left\|r_1\right\|} \\ &- \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c^2\cos\left(2\left(E_1+f+g-h\right)\right)}{16L_*^6\left\|r_1\right\|} - \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c\cos\left(2\left(E_1-f-g-h\right)\right)}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} \\ &+ \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c\cos\left(2\left(E_1+f+g-h\right)\right)}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} + \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c^2\cos\left(2\left(E_1-h\right)\right)}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} \\ &+ \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c^2\cos(2(f+g))}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} - \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c^2}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} - \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\cos\left(2\left(E_1-f-g-h\right)\right)}{16L_*^6\left\|r_1\right\|} \\ &- \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\cos\left(2\left(E_1+f+g-h\right)\right)}{16L_*^6\left\|r_1\right\|} - \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\cos\left(2\left(E_1-h\right)\right)}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} \\ &- \frac{3a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4\cos(2(f+g))}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} + \frac{a_1^3\mathcal{G}^4\mu m_0^4}{8L_*^6\left\|r_1\right\|} - \frac{3a_1\delta L^2\mathcal{G}^2m_0^2}{2L_*^4\left\|r_1\right\|} - \frac{a_1\mathcal{G}^2\mu m_0^2}{L_*^2\left\|r_1\right\|}\Bigg).\end{aligned}$$

方法的第一步 $j=1$ 正是旨在通过求解 (71) 来规范化 $\mathscr{R}^{(0)}_{2\,2}$. 其解为

$$\begin{aligned}\chi_2^{(1)} = \sigma^3\Bigg(&\frac{3\mathcal{G}^4\mu a_1^2\iota_c^2\phi_1 n_*^2 m_0^4}{8n_1L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{\mathcal{G}^4\mu a_1^2\phi_1 n_*^2 m_0^4}{8n_1L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &- \frac{3\mathcal{G}^4\mu a_1^2 n_1\iota_c^2\phi_1 m_0^4}{8L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} + \frac{\mathcal{G}^4\mu a_1^2 n_1\phi_1 m_0^4}{8L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} + \frac{\mathcal{G}^2\mu\phi_1 n_*^2 m_0^2}{n_1L_*^2\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &+ \frac{3\mathcal{G}^2\delta L^2\phi_1 n_*^2 m_0^2}{2n_1L_*^4\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{\mathcal{G}^2\mu n_1\phi_1 m_0^2}{L_*^2\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{3\mathcal{G}^2\delta L^2 n_1\phi_1 m_0^2}{2L_*^4\left(n_1^2-n_*^2\right)}\Bigg)\\ &+\sigma^2\Bigg(-\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(E_1-h\right)\right)a_1^2\iota_c^2 n_*^2 m_0^4}{16n_1L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(E_1-h\right)\right)a_1^2 n_*^2 m_0^4}{16n_1L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &+\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin(2(f+g))a_1^2 n_* m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(-f-g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_* m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &+\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(f+g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_* m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin(2(f+g))a_1^2\iota_c^2 n_* m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &-\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(-f-g-h+E_1\right)\right)a_1^2\iota_c^2 n_* m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(f+g-h+E_1\right)\right)a_1^2\iota_c^2 n_* m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &-\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(-f-g-h+E_1\right)\right)a_1^2\iota_c n_* m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(f+g-h+E_1\right)\right)a_1^2\iota_c n_* m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &+\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(E_1-h\right)\right)a_1^2 n_1\iota_c^2 m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(-f-g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_1\iota_c^2 m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &-\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(f+g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_1\iota_c^2 m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(E_1-h\right)\right)a_1^2 n_1 m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &-\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(-f-g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_1 m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(f+g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_1 m_0^4}{32L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &-\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(-f-g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_1\iota_c m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin\left(2\left(f+g-h+E_1\right)\right)a_1^2 n_1\iota_c m_0^4}{16L_*^6\left(n_1^2-n_*^2\right)}\\ &-\frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin(2(f+g))a_1^2 n_1^2 m_0^4}{16L_*^6 n_*\left(n_1^2-n_*^2\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\sin(2(f+g))a_1^2 n_1^2\iota_c^2 m_0^4}{16L_*^6 n_*\left(n_1^2-n_*^2\right)}\Bigg),\end{aligned}$$

从而得到新的截断哈密顿量

$$\mathscr{H}^{(1)} = \mathscr{Z}_0 + \mathscr{Z}_2^{(1)} + \mathscr{R}_{3,3}^{(1)} + \mathscr{R}_{3,4}^{(1)}\,,$$

with

$$\mathscr{Z}_2^{(1)} = \sigma^2\left(-\frac{3a_1^2\mathcal{G}^4\mu m_0^4\iota_c^2}{8L_*^6} + \frac{a_1^2\mathcal{G}^4\mu m_0^4}{8L_*^6} - \frac{3\delta L^2\mathcal{G}^2 m_0^2}{2L_*^4} - \frac{\mathcal{G}^2\mu m_0^2}{L_*^2}\right)$$

and

$$\mathscr{R}^{(1)}_{3,3} = \sigma^3\Bigg(- \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)}$$
$$- \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-3E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c^2 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)}$$
$$+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c^2 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)} - \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_c n_* m_0^4}{4\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)}$$
$$- \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_c n_* m_0^4}{4\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-3E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c n_* m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)}$$
$$+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c n_* m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)} - \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)}$$
$$- \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-3E_1\right)a_1^3 e_1 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)}$$
$$+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-E_1\right)a_1^3 e_1 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1-2n_*\right)} + \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)}$$
$$+ \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c^2 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)}$$
$$- \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+3E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c^2 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)} - \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_c n_* m_0^4}{4\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)}$$
$$- \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_c n_* m_0^4}{4\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c n_* m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)}$$
$$+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+3E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c n_* m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)} + \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)}$$
$$+ \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3 n_* m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+E_1\right)a_1^3 e_1 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)}$$
$$- \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+3E_1\right)a_1^3 e_1 n_* m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6\left(2n_1+2n_*\right)} - \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos(f)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6}$$
$$+ \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos(f+2g)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos(f+2g)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6}$$
$$+ \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos(3f+2g)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos(3f+2g)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6}$$
$$+ \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}$$
$$- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}$$
$$- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_c^2 m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}$$
$$- \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2h-3E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c^2 m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-3E_1\right)a_1^3 e_1\iota_c^2 m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-E_1\right)a_1^3e_1\iota_c^2m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2h-E_1\right)a_1^3e_1\iota_c^2m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-E_1\right)a_1^3e_1\iota_c^2m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{9\mathcal{G}^4\mu\cos\left(E_1\right)a_1^3e_1\iota_c^2m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+E_1\right)a_1^3e_1\iota_c^2m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+E_1\right)a_1^3e_1\iota_c^2m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+3E_1\right)a_1^3e_1\iota_c^2m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-3E_1\right)a_1^3e_1\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-E_1\right)a_1^3e_1\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+E_1\right)a_1^3e_1\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+3E_1\right)a_1^3e_1\iota_cm_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos(f)a_1^3m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos(f+2g)a_1^3m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos(f+2g)a_1^3m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos(3f+2g)a_1^3m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{3e\mathcal{G}^4\mu\cos(3f+2g)a_1^3m_0^4}{8\eta^3\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2h-2E_1\right)a_1^3m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g+2h-2E_1\right)a_1^3m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f-2h+2E_1\right)a_1^3m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&- \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{9e\mathcal{G}^4\mu\cos\left(3f+2g-2h+2E_1\right)a_1^3m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2h-3E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-3E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2h-E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{16\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+2h-E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g+E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{8\left\|r_1\right\|L_*^6} + \frac{15\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6}\\
&+ \frac{3\mathcal{G}^4\mu\cos\left(2f+2g-2h+3E_1\right)a_1^3e_1m_0^4}{32\left\|r_1\right\|L_*^6} - \frac{e\mathcal{G}^2\mu\cos(f)a_1m_0^2}{\left\|r_1\right\|L_*^2}\\
&+ \frac{\mathcal{G}^2\mu\cos\left(E_1\right)a_1e_1m_0^2}{\left\|r_1\right\|L_*^2} + \frac{3\mathcal{G}^2\delta L^2\cos\left(E_1\right)a_1e_1m_0^2}{2\left\|r_1\right\|L_*^4}\Bigg).
\end{aligned}
$$

接下来，我们继续进行第二次也是最后一次迭代 $j=2$，目标是 $\mathscr{R}_{3\,3}^{(1)}$，：

$$
\mathscr{H}^{(2)} = \mathscr{Z}_0 + \mathscr{Z}_2^{(1)} + \mathscr{Z}_3^{(2)} + \mathscr{R}_{4,4}^{(2)},
$$

其中为简洁起见省略了 $\chi_3^{(2)}$，并且

$$
\mathscr{Z}_3^{(2)} = 0
$$

正如预期的那样，它仅由包含快角的谐波组成.

致谢。C.E. 获得了 MIUR-PRIN 20178CJA2B“天体力学新前沿：理论与应用”项目的部分资助。

参考文献

[1] I. Cavallari 和 C. Efthymiopoulos。《受限三体问题中无需降阶法的闭式摄动理论》。载于：天体力学与动力天文学134.2（2022），第 1–36 页。[2] M. Ceccaroni、F. Biscani 和 J. Biggs。《高度非均匀引力场中小行星周围受摄冻结轨道的解析方法：初步研究》。载于：太阳系研究 48.1（2014），第 33–47 页。[3] A. Deprit。《依赖于小参数的正则变换》。载于：天体力学 1.1（1969），第 12–30 页。[4] A. Deprit、J. Palacián 和 E. Deprit。《降阶算法》。载于：天体力学与动力天文学 79.3（2001），第 157–182 页。[5] C. Efthymiopoulos。《正则摄动理论；哈密顿系统中的稳定性与扩散：在动力天文学中的应用》。载于：阿根廷天文学会研讨会系列。第 3 卷。2011 年，第 3–146 页。[6] S. R. Finch。《数学常数》。剑桥大学出版社，2003 年。[7] M. Lara、J. F. San-Juan 和 L. M. López-Ochoa。《平均化扇区效应：闭式降阶法与椭圆运动展开》。载于：工程数学问题2013（2013）。[8] J. Laskar 和 A. C. Petit。《角动量亏损稳定性与行星系统的分类》。载于：天文学与天体物理学 605（2017），A72。[9] E. Lega、M. Guzzo 和 C. Froeschlé。《快速李雅普诺夫指标（FLI）方法的理论与应用》。载于：混沌检测与可预测性。施普林格，2016 年，第 35–54 页。[10] B. Mahajan、S. R. Vadali 和 K. T. Alfriend。《带谐项受摄开普勒哈密顿量的精确德洛内正规化》。载于：天体力学与动力天文学 130.3（2018），第 1–25 页。[11] J. Palacián。《受摄开普勒系统的正规形》。载于：微分方程杂志 180.2（2002），第 471–519 页。[12] X. S. Ramos、J. A. Correa-Otto 和 C. Beaugé。《重新审视共振重叠与希尔稳定性判据》。载于：天体力学与动力天文学 123.4（2015），第 453–479 页。[13] M. Sansottera 和 M. Ceccaroni。《降阶算法的严格估计》。载于：天体力学与动力天文学 127.1（2017），第 1–18 页。[14] A. M. Segerman 和 S. L. Coffey。《扇区引力谐波的解析理论》。载于：天体力学与动力天文学 76.3（2000），第 139–156 页。[15] J. F. P. Subiela。《人造卫星理论：带谐项及其通过代数简化实现的降阶法》。博士论文。萨拉戈萨大学，1992 年。