arXiv:2301.03071v1 [math.DG] 8 Jan 2023

严格 Walker 三维流形中基于 Darboux标架的等宽曲线

Ameth Ndiaye*达喀尔大学数学系，FASTEF，UCAD，达喀尔，塞内加尔。

摘要

本文研究给定严格 Walker 三维流形中基于 Darboux标架的等宽曲线的微分几何性质。所研究的曲线位于 Walker 三维流形中的一个类时曲面上。

数学主题分类：53B25；53C40。关键词：Darboux标架，曲率，挠率，定宽曲线，Walker 三维流形。

1 引言

等宽曲线的研究最早由欧拉于1778年提出。随后，Solow [11]对等宽曲线进行了研究。Kose、Magden 和 Yilmaz 在 [9, 10] 中研究了欧几里得空间 $\mathbb{E}^3$ 和 $\mathbb{E}^4$中的平面等宽曲线。Fujiwara [7] 为空间曲线定义了定宽，并提出了一个问题：是否存在定宽空间曲线。此外，Blaschke [3] 定义了球面上的等宽曲线。在 [2], 中，Altunkaya 等人定义了闵可夫斯基四维空间中的定宽零曲线，并得到了这些曲线的一个刻画。Altunkaya 等人还在 [1] 中研究了曲面上相对于 Darboux标架的定宽曲线，并给出了这些曲线的一些刻画。

受上述论文启发，我们研究严格 Walker 三维流形中相对于 Darboux标架的等宽曲线的几何性质。严格 Walker 三维流形是一种具有平行零向量场的洛伦兹三维流形。众所周知，沃克度量是构造有趣的不定度量的有力工具；这些不定度量展现了正定度量所不具备的各种几何性质。有关 Walker 三维流形的更多细节，请参见 [5, 6, 8]。

2 预备知识

沃克 n 流形是一种伪黎曼流形，它具有一个由零平行 r 平面构成的场，其中 $r \leq \frac{n}{2}$。A. G. Walker（ [4]）研究了度量的典范形式。

* 电子邮箱：ameth1.ndiaye@ucad.edu.sn（A. Ndiaye）

Walker 为平行平面场推导出了适配坐标。因此，具有坐标（x， y， z）的三维沃克流形（M， g_f^ϵ）的度量可表示为

$$g_f^\epsilon = dx \circ dz + \epsilon dy^2 + f(x,y,z)dz^2 \tag{1}$$

其矩阵形式为

$$g_f^\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix} \quad \text{with inverse} \quad (g_f^\epsilon)^{-1} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中， $f(x,y,z)$ 是某个函数， $\epsilon = \pm 1$，因此 $D = \text{Span}\partial_x$ 为平行退化线场。注意，当 $\epsilon = 1$ 且 $\epsilon = -1$ 时，Walker 流形的符号差分别为 (2, 1) 和 (1, 2)，因此这两种情况下都是洛伦兹的。在本研究中，我们取 $\epsilon = 1$。

经过直接计算可得，任意度量 (1) 的列维-奇维塔联络为：

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x}\partial z &= \frac{1}{2}f_x\partial_x, \quad \nabla_{\partial_y}\partial z = \frac{1}{2}f_y\partial_x, \\ \nabla_{\partial_z}\partial z &= \frac{1}{2}(ff_x + f_z)\partial_x + \frac{1}{2}f_y\partial_y - \frac{1}{2}f_x\partial_z \end{aligned} \tag{2}$$

其中， ∂_x、 ∂_y 和 ∂_z 分别是坐标向量场 $\frac{\partial}{\partial_x}$、 $\frac{\partial}{\partial_y}$ 和 $\frac{\partial}{\partial_z}$。因此，若 (M, g_f^ϵ) 是严格沃克流形，即 $f(x,y,z) = f(y,z)$，则相应的列维-奇维塔联络满足

$$\nabla_{\partial_y}\partial z = \frac{1}{2}f_y\partial_x, \quad \nabla_{\partial_z}\partial z = \frac{1}{2}f_z\partial_x - \frac{1}{2}f_y\partial_y. \tag{3}$$

注意，零平行向量场的存在（即 $f = f(y,z)$）简化了度量 g_f^ϵ 的克里斯托费尔符号和曲率张量的非零分量，如下所示：

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \frac{1}{2}f_y, \ \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}f_z, \ \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}f_y \tag{4}$$

现在设 u和 v是 M中的两个向量。用 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$表示 $\mathbb{R}^3$中的典范标架。关于度量 g_f^ϵ，(M, g_f^ϵ)中 u和 v的向量积是一个向量，记作 $u \times v$，定义于 M 中，其定义为

$$g_f^\epsilon(u \times v, w) = \det(u, v, w) \tag{5}$$

对于所有向量 $w \in M$，其中 $\det(u,v,w)$ 是与 $\mathbb{R}^3$ 的典范基相关联的行列式函数。若 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 且 $v = (v_1, v_2, v_3)$，则利用 (5) 可得：

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \right) \vec{i} - \epsilon \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{k} \tag{6}$$

3 沃克三维流形中的达布方程

设 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (M, g_f^\epsilon)$ 是一条以弧长 s 为参数的曲线。α 的 Frenet标架是沿着 α 的向量 T、N 和 B，其中 T 是切向量，N 是主法向量，B 是副法向量。它们满足弗雷内公式

$$\begin{cases} \nabla_T T(s) &= \epsilon_2 \kappa(s) N(s) \\ \nabla_T N(s) &= -\epsilon_1 \kappa T(s) - \epsilon_3 \tau B(s) \\ \nabla_T B(s) &= \epsilon_2 \tau(s) N(s) \end{cases} \tag{7}$$

其中，κ和τ分别是曲线α的曲率和挠率，且$\epsilon_1 = g_f(T;\ T)$；$\epsilon_2 = g_f(N;\ N)$以及$\epsilon_3 = g_f(B, B)$。

从满足(1)的局部坐标(x, y, z)出发，容易验证

$$e_1 = \partial_y,\ \ e_2 = \frac{2-f}{2\sqrt{2}}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_z,\ \ e_3 = \frac{2+f}{2\sqrt{2}}\partial_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_z$$

它们是(M, g_f^ϵ)上的局部伪正交标架场，其中 $g_f^\epsilon(e_1, e_1) = \epsilon$, $g_f^\epsilon(e_2, e_2) = 1$ 且$g_f^\epsilon(e_3, e_3) = -1$。因此，度量 g_f^ϵ的符号差为$(1, \epsilon, -1)$。若选择 $\epsilon = 1$，则伪正交标架由两个类空向量和一个类时向量构成；若选择$\epsilon = -1$，则伪正交标架由一个类空向量和两个类时向量构成。两种情况下得到的都是洛伦兹流形。本文假设$\epsilon = 1$

现在，假设曲线 α位于 M中的类时曲面 S上。设 U为 S的单位法向量，则 Darboux 标架由 $\{T, Y, U\}$给出，其中 T是曲线 $\alpha(s)$的切向量，并且 $Y = U \times T$。

情形 1：设 α 为类时曲线。则切向量 T 为类时（$\epsilon_1 = -1$），法向量 N和副法向量 B 为类空，即（$\epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$）。

由于 S为类时，单位法向量 U 为类空，因此 Y也为类空。Walker Frenet 标架与 Darboux 标架之间的通常变换形式如下:

$$Y = \cos\theta N + \sin\theta B \tag{8}$$

$$U = -\sin\theta N + \cos\theta B, \tag{9}$$

其中 θ 是向量 Y与向量 N之间的夹角。

沿曲线 alpha 对 Y求导，得到

$$\nabla_T Y = \cos\theta \nabla_T N - \theta' \sin\theta N + \sin\theta \nabla_T B + \theta' \cos\theta B.$$

利用式 (2.7) 中的 Frenet 方程，得到

$$\nabla_T Y = \cos\theta(\kappa T - \epsilon_3 \tau B) - \theta' \sin\theta N + \sin\theta(\epsilon_2 \tau N) + \theta' \cos\theta B.$$

现在我们假 设主法向量与副法向量同号。那么我们得到

$$\nabla_T Y = \kappa \cos\theta T + (\theta' - \tau) U \tag{10}$$

同样的计算可得

$$\nabla_T U = -\kappa \sin\theta T - (\theta' - \tau) Y. \tag{11}$$

于是，沃克 Darboux 方程表示为

$$\begin{cases} \nabla_T T = \kappa_g Y + \kappa_n U \\ \nabla_T Y = \kappa_g T + \tau_g U \\ \nabla_T U = \kappa_n T - \tau_g Y, \end{cases} \tag{12}$$

其中， κ_g、 κ_n 和 τ_g 分别是S上 $\alpha(s)$的测地曲率、法曲率和测地挠率。此外，由(12)可得

$$g_f^\epsilon\left(\nabla_T Y, U\right) = \tau_g = \theta' - \tau, \tag{13}$$
$$g_f^\epsilon\left(\nabla_T T, Y\right) = \kappa_g = \kappa\cos\theta, \tag{14}$$
$$g_f^\epsilon\left(\nabla_T T, U\right) = \kappa_n = -\kappa\sin\theta. \tag{15}$$

情形 2：设 α 为类空曲线。则切向量 T 为类空（$\epsilon_1 = 1$），法向量 N 为类空（$\epsilon_2 = 1$），副法向量 B 为类时（$\epsilon_3 = -1$）；或者法向量 N为类时（$\epsilon_2 = -1$），副法向量 B 为类空（$\epsilon_3 = 1$）。因此，我们有以下两种子情形:

i)： $\epsilon_2 = 1$ 和 $\epsilon_3 = -1$。
此时，Walker Frenet 标架与 Darboux 标架之间的通常变换形式为

$$Y = \cosh\theta N + \sinh\theta B \tag{16}$$
$$U = \sinh\theta N + \cosh\theta B, \tag{17}$$

其中， θ 是向量 Y与向量 N之间的角。
由于 $\nabla_T T = \kappa N$，我们有

$$\nabla_T T = -\kappa\sinh\theta Y + \kappa\cosh\theta U. \tag{18}$$

沿曲线 alpha 对 Y求导，可得

$$\nabla_T Y = -\kappa\sinh\theta T + (\theta' + \tau)U \tag{19}$$

同样的计算可得

$$\nabla_T U = -\kappa\cosh\theta T + (\theta' + \tau)Y. \tag{20}$$

于是，Walker Darboux 方程可表示为

$$\begin{cases} \nabla_T T = -\kappa_g Y + \kappa_n U \\ \nabla_T Y = -\kappa_g T + \tau_g U \\ \nabla_T U = -\kappa_n T + \tau_g Y, \end{cases} \tag{21}$$

其中， κ_g、 κ_n 和 τ_g 分别是S上 $\alpha(s)$的测地曲率、法曲率和测地挠率。此外，由式（21）可得

$$g_f^\epsilon\left(\nabla_T Y, U\right) = \tau_g = \theta' + \tau, \tag{22}$$
$$g_f^\epsilon\left(\nabla_T T, Y\right) = \kappa_g = \kappa\sinh\theta, \tag{23}$$
$$g_f^\epsilon\left(\nabla_T T, U\right) = \kappa_n = \kappa\cosh\theta. \tag{24}$$

ii)： $\epsilon_2 = -1$ 和 $\epsilon_3 = 1$。
于是，Walker Frenet 标架与 Darboux 标架之间的通常变换形式为

$$Y = \sinh\theta N + \cosh\theta B \tag{25}$$

$$U = \cosh\theta N + \sinh\theta B, \tag{26}$$

其中， θ 是向量 Y与向量 N之间的角。
由于 $\nabla_T T = -\kappa N$，我们有

$$\nabla_T T = -\kappa\cosh\theta Y + \kappa\sinh\theta U. \tag{27}$$

对 Y关于 s 求导，得到

$$\nabla_T Y = -\kappa\cosh\theta T + (\theta' - \tau)U \tag{28}$$

对 Y关于 s alpha 求导，得到

$$\nabla_T U = -\kappa\sinh\theta T + (\theta' - \tau)Y. \tag{29}$$

于是，Walker Darboux 方程可表示为

$$\begin{cases} \nabla_T T = -\kappa_g Y + \kappa_n U \\ \nabla_T Y = -\kappa_g T + \tau_g U \\ \nabla_T U = -\kappa_n T + \tau_g Y, \end{cases} \tag{30}$$

其中， κ_g、 κ_n 和 τ_g 分别是 α在S上s的测地曲率、法曲率和测地挠率。此外，由（30）可得

$$g_f^\epsilon(\nabla_T Y, U) = \tau_g = \theta' - \tau, \tag{31}$$

$$g_f^\epsilon(\nabla_T T, Y) = \kappa_g = \kappa\cosh\theta, \tag{32}$$

$$g_f^\epsilon(\nabla_T T, U) = \kappa_n = \kappa\sinh\theta. \tag{33}$$

4 沃克流形中根据Darboux标架定义的定宽空间曲线

本节中，我们定义三维Walker流形中的定宽空间曲线。

定义4.1. 若三维Walker流形（M, g_f^ϵ）中的曲线 α： $I \to$（M, g_f^ϵ）满足以下条件，则称其为定宽曲线：存在一条曲线 β： $I \to M_f$，使得在曲线的对应点处， α 在 α（s）处的平行切向量与 β 在 β（$s^\star$）处的平行切向量 s； $s^\star \in I$ 方向相反，且距离 g_f^ϵ（$\beta - \alpha, \beta - \alpha$）为常数。在此情况下， （$\alpha$; β）称为定宽曲线对。

现在设 (α; β) 是一对等宽单位速曲线， s、 $s^\star$ 分别是 α 和 β 的弧长。

假设曲线 α 位于 M_f 中的一个类时曲面上，那么除了 Frenet标架 外，它还具有 Darboux标架。因此，我们可以写出以下方程:

$$\beta(s^\star) = \alpha(s) + m_1(s)T(s) + m_2(s)Y(s) + m_3(s)U(s); \tag{34}$$

其中 $m_i(i = 1, 2, 3)$ 是关于 s 的光滑函数。

4.1 α 为类时的情况。

对 s 求 (34) 的导数，并利用 (12)，可得

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{ds} &= \frac{d\beta}{ds^\star}\frac{ds^\star}{ds}\\ &= T^\star(s^\star)\frac{ds^\star}{ds} = (1+m_1'+m_2\kappa_g+m_3\kappa_n)T(s)\\ &\quad +(m_2'+m_1\kappa_g-m_3\tau_g)Y(s)\\ &\quad +(m_3'+m_2\tau_g+m_1\kappa_n)U(s),\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $T^\star$ 表示 β 的单位切向量。
由于 $T=-T^*$，由 (35) 中的方程可得

$$\begin{cases} m_1' &= -m_2\kappa_g-m_3\kappa_n-h(s)\\ m_2' &= -m_1\kappa_g+m_3\tau_g\\ m_3' &= -m_2\tau_g-m_1\kappa_n,\end{cases} \tag{36}$$

其中 $h(s)=\frac{ds^\star}{ds}+1$。我们假设 (α,β) 是一对定宽曲线。由于 α 是一条类时曲线，且向量 Y 和 U 是类空向量，因此有

$$\|\beta-\alpha\| = -m_1^2+m_2^2+m_3^2 = constant, \tag{37}$$

这意味着

$$-m_1\frac{dm_1}{ds}+m_2\frac{dm_2}{ds}+m_3\frac{dm_3}{ds}=0. \tag{38}$$

将 (36) 和 (38) 结合起来，可得

$$m_1h(s)=0. \tag{39}$$

若 α 和 β 是等宽曲线，则 $m_1=0$ 或 $h(s)=0$。若 $m_1\neq 0$（即 $h(s)=0$），则 $d=m_1T(s)+m_2Y(s)+m_3U(s)$ 成为常向量。因此，$\beta(s^*)$ 是沿常向量 d 对 α 的平移。此外，$h(s)=0$ 给出 $s^*=-s+c$，其中 c 为常数。现在，我们在

某些特殊情形下考察 $m_1\neq 0$ 或 $m_1=0$ 的等宽曲线 se.

4.1.1 情形（测地曲线）

设 α 是类时曲面上的非直线测地曲线。则 $\kappa_g=\kappa\cos\theta=0$。由于 $\kappa\neq 0$，可得 $\cos\theta=0$。因此，这意味着 $\kappa_n=-\kappa, \tau_g=-\tau$。由式（36），可得如下微分方程组

$$\begin{cases} m_1' &= m_3\kappa-h(s)\\ m_2' &= -m_3\tau\\ m_3' &= m_1\kappa+m_2\tau.\end{cases} \tag{40}$$

利用 (40)，我们得到以下微分方程。

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)''+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)'+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(m_1'+h)+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1-m_1'=0. \tag{41}$$

子情形 1： $m_1 \neq 0(h(s) = 0)$。
若将 $h(s) = 0$ 代入方程 (41)，则有。

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)'' + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)' + \left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 - 1\right]m_1' + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1 = 0. \tag{42}$$

定理 4.2. 设 α 是位于 M 中一个类时曲面上的类时测地曲线，且 (α, β) 是一对定宽单位速曲线。若 m_1 是非零常数，则 α 是三维 Walker 流形 (M, g_f^{ϵ}) 中的一般螺线。此外，曲线 β 可表示为:

$$\beta(s^{\star}) = \alpha(s) + m_1 T(s) + m_2 Y(s) \tag{43}$$

其中 m_2 是实常数，且 $s^* = -s + c$。
证明. 若 m_1 是非零常数，则由 (42) 可得 $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$。因此， α 是一般螺线。此外，由 (40) 的第一和第二个方程分别可得 $m_3 = 0$ ，且 m_2 是实常数。

□

定理 4.3. 设 α 是位于 M中一个类时曲面上的类时测地曲线和一般螺线。设 (α, β) 是一对定宽单位速曲线。若 m_1 不为零，则曲线β 可表示为以下情形之一:

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + m_1 T(s) + \frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1 - m_1)Y(s) + \dot{m}_1 U(s) \tag{44}$$

其中

i) $m_1 = \frac{1}{\sqrt{c_0^2-1}}\left(a_1 \sin(\sqrt{c_0^2-1}z) - a_2 \cos(\sqrt{c_0^2-1}z)\right) + a_3, \quad c_0^2 - 1 > 0$

ii) $m_1 = \frac{a_1}{2}z^2 + a_2 z + a_3, \quad c_0^2 - 1 = 0$

iii) $m_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c_0^2}}\left(a_1 \sinh(\sqrt{1-c_0^2}z) + a_2 \cosh(\sqrt{1-c_0^2}z)\right) + a_3, \quad c_0^2 - 1 < 0$

其中 $z = \int \kappa ds$ 和 a_1、a_2、a_3 为实常数。

证明。设 α 是 Wlaker 3-流形中的类时测地曲线和一般螺线。则有 $\frac{\tau}{\kappa} = c_0 = constant$。由（42）可得

$$\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)'\right)' + \left(c_0^2 - 1\right)m_1' = 0. \tag{45}$$

通过均值将自变量 s 更改为 $z = \int \kappa ds$后，由（45）式可得

$$m_1' = \frac{dm_1}{ds} = \frac{dm_1}{dz}\frac{dz}{ds} = \dot{m}_1\kappa.$$

$$\dddot{m}_1 + (c_0^2 - 1)\dot{m}_1 = 0. \tag{46}$$

解此方程可得

$$m_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c_0^2-1}}\left(a_1\sin(\sqrt{c_0^2-1}z) - a_2\cos(\sqrt{c_0^2-1}z)\right) + a_3, \text{ if } c_0^2-1>0 \\ \frac{a_1}{2}z^2 + a_2 z + a_2, \text{ if } c_0^2-1=0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-c_0^2}}\left(a_1\sinh(\sqrt{1-c_0^2}z) + a_2\cosh(\sqrt{1-c_0^2}z)\right) + a_3, \text{ if } c_0^2-1<0. \end{cases}$$

由 (40) 可得 $m_3 = \dot{m}_1$ 和 $m_2 = \frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1 - m_1)$。 □

子情况 2: $m_1 = 0$。

若将 $m_1 = 0$ 代入方程 (40)，可得

$$\begin{cases} h(s) &= m_3\kappa \\ m_2' &= -m_3\tau \\ m_3' &= m_2\tau. \end{cases} \tag{47}$$

由于 $m_3 = \frac{h}{\kappa}, m_2 = \frac{1}{\tau}m_3' = \frac{1}{\tau}\left(\frac{h}{\kappa}\right)'$，可得

$$\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{h}{\kappa}\right)'\right]' + \left(\frac{h}{\kappa}\right)\tau = 0. \tag{48}$$

若令 $y = \frac{h}{\kappa}$，方程 (48) 变为

$$y'' - \frac{\tau'}{\tau}y' + \tau^2 y = 0. \tag{49}$$

为求解方程 (49)，令新变量 $\frac{dw}{ds} = \tau.$。然后

$$\begin{cases} y' = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{ds} = \dot{y}\tau \\ y'' = \frac{d^2y}{dw^2}\tau^2 + \frac{dy}{dw}\tau' \end{cases} \tag{50}$$

将方程（50）代入方程（49），可得

$$\frac{d^2y}{dw^2} + y = 0. \tag{51}$$

而（51）的解为 $y = b_1\cos w + b_2\sin w$。于是有

$$h(s) = \kappa\left[b_1\cos\left(\int\tau ds\right) + b_2\sin\left(\int\tau ds\right)\right] \tag{52}$$

$$m_2 = \frac{h}{\kappa} = b_1\cos\left(\int\tau ds\right) + b_2\sin\left(\int\tau ds\right) \tag{53}$$

$$m_3 = \frac{1}{\tau}\left(\frac{h}{\kappa}\right)' = -b_1\sin\left(\int\tau ds\right) + b_2\cos\left(\int\tau ds\right). \tag{54}$$

因此，我们给出如下定理

定理 4.4. 设 (α, β) 是 (M, g_f) 中的一对定宽曲线，其中 α 是位于 M 中的类时曲面上的类时测地曲线。若 $m_1 = 0$，则曲线 β 由下式给出

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \left[b_1\cos\left(\int\tau ds\right) + b_2\sin\left(\int\tau ds\right)\right]Y(s) + \left[-b_1\sin\left(\int\tau ds\right) + b_2\cos\left(\int\tau ds\right)\right]U(s).$$

4.1.2 情形（对于渐近线）

设 α 是类时曲面上的一条非直线渐近线。则 $\kappa_n = -\kappa \sin\theta = 0$。由于 $\kappa \neq 0$，我们得到 $\sin\ \theta = 0$。因此可推出 $\kappa_g = \kappa, \tau_g = -\tau$。由 (36)，可得以下微分方程组

$$\begin{cases} m_1' &= -m_2\kappa - h(s) \\ m_2' &= -m_1\kappa - m_3\tau \\ m_3' &= m_2\tau. \end{cases} \tag{55}$$

利用（55），我们得到

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)'' + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)' + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(m_1'+h) + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1 - m_1' = 0. \tag{56}$$

子情形 1： $m_1 \neq 0(h(s) = 0)$。
若在方程（56）中取 $h(s) = 0$，则得到以下微分方程 n

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)'' + \left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)' - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)' + \left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 - 1\right]m_1' + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1 = 0. \tag{57}$$

定理4.5. 设 α 是位于 M 中一个类时曲面上的类时渐近线。设 (α, β) 是一对等宽单位速曲线。若 m_1 是非零常数，则 α 是三维 Walker 流形 (M, g_f^{ϵ}) 中的一般螺线。此外，曲线 β 可表示为:

$$\beta(s^\star) = \alpha(s) + m_1T(s) + m_3U(s) \tag{58}$$

其中 m_3 是一个实常数，且 $s^* = -s + c$。
证明。若 m_1 是非零常数，则由 (57) 得到 $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$。因此， α 是一般螺线。此外，由 (55) 的第一和第三个方程，分别得到 $m_2 = 0$ 和 m_3 是实常数。

□

定理4.6。设 α 是位于 M 中的类时曲面上的类时渐近线。设 (α, β) 是一对等宽单位速曲线。若 m_1 不为零，则曲线 β 可表示为以下几种情形之一:

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + m_1T(s) - \dot{m}_1Y(s) + \frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1 - m_1)U(s), \tag{59}$$

其中

i) $m_1 = \frac{1}{\sqrt{c_0^2-1}}\left(a_1\sin(\sqrt{c_0^2-1}z) - a_2\cos(\sqrt{c_0^2-1}z)\right) + a_3,\ c_0^2 - 1 > 0$

ii) $m_1 = \frac{a_1}{2}z^2 + a_2z + a_3,\ c_0^2 - 1 = 0$

iii) $m_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c_0^2}}\left(a_1\sinh(\sqrt{1-c_0^2}z) + a_2\cosh(\sqrt{1-c_0^2}z)\right) + a_3,\ c_0^2 - 1 < 0$

其中 $z = \int \kappa ds$、 a_1、 a_2、 a_3 为常数。

证明。定理（4.6）的证明与定理（4.3）的证明类似。 □

子情况 2： $m_1 = 0$。
若在（55）中取 $m_1 = 0$，则得到以下微分方程组

$$\begin{cases} h(s) &= -m_2\kappa \\ m_2' &= -m_3\tau \\ m_3' &= m_2\tau. \end{cases} \tag{60}$$

接下来给出以下定理。

定理 4.7. 设 $(\alpha;\ \beta)$ 是 (M, g_f) 中的一对定宽曲线，其中 α 是位于 M 中某个类时曲面上的类时渐近曲线。若 $m_1 = 0$，则曲线 β 由下式给出

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \left[-b_1\cos\left(\int \tau ds\right) - b_2\sin\left(\int \tau ds\right)\right] Y(s) + \left[-b_1\sin\left(\int \tau ds\right) + b_2\cos\left(\int \tau ds\right)\right] U(s).$$

证明。定理（4.7）的证明与定理（4.4）的证明类似。 □

4.1.3 情况（主线）

假设 α 是一条非平面类时主线。那么我们有 $\tau_g = 0$。由此可得 $\tau = \theta'$。利用 (36)，得到如下微分方程组

$$\begin{cases} m_1' &= m_3\kappa\sin\theta - m_2\kappa\cos\theta - h(s) \\ m_2' &= -m_1\kappa\cos\theta \\ m_3' &= m_1\kappa\sin\theta. \end{cases} \tag{61}$$

通过将自变量 s 换为 $\theta = \int \tau ds$，我们得到

$$\begin{cases} \dot{m}_1 &= \phi(m_3\sin\theta - m_2\cos\theta) - g(\theta) \\ \dot{m}_2 &= -m_1\phi\cos\theta \\ \dot{m}_3 &= m_1\phi\sin\theta. \end{cases} \tag{62}$$

其中 $g(\theta) = (-\frac{ds}{d\theta} - \frac{ds^*}{d\theta})$ 且 $\phi = \frac{\kappa}{\tau}$。这里，我们用“.”表示关于 θ 的导数。由 (62) 中的方程可得

$$\dddot{m}_1 + \ddot{g} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}(\dot{m}_1 + g)\right) - \frac{d}{d\theta}(\phi^2 m_1) + (\dot{m}_1 + g)$$
$$-\dot{\phi}\left(-\sin\theta\int m_1\phi\cos\theta d\theta + \cos\theta\int m_1\phi\sin\theta d\theta\right) = 0. \tag{63}$$

子情形 1： $m_1 \neq 0 (h(s) = 0)$。
在这种情况下，我们给出以下定理：

定理 4.8. 设 (α, β) 是 $(M, g_f\epsilon)$ 中的一对等宽曲线。设 α 是一条非平面类时主线和一般螺线，则 β 可由以下情形之一给出：

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + m_1 T(s) - c\int m_1\cos\theta d\theta Y(s) + c\int m_1\sin\theta d\theta U(s), \tag{64}$$

其中

i) $m_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\left(a_1\sin(\sqrt{1-c^2}\theta) - a_2\cos(\sqrt{1-c^2}\theta)\right) + a_3,\quad 1-c^2 > 0$

ii) $m_1 = \frac{a_1}{2}\theta^2 + a_2\theta + a_3,\quad c^2 - 1 = 0$

iii) $m_1 = \frac{1}{\sqrt{c^2-1}}\left(a_1\sinh(\sqrt{c^2-1}\theta) + a_2\cosh(\sqrt{c^2-1}\theta)\right) + a_3,\quad 1-c^2 < 0$

证明。若 $h(s) = 0$ 则 $g(\theta) = 0$，由（63）可得

$$\dddot{m}_1 - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\ddot{m}_1\right) - \frac{d}{d\theta}(\phi^2 m_1) + \dot{m}_1 - \dot{\phi}\left(-\sin\theta\int m_1\phi\cos\theta d\theta + \cos\theta\int m_1\phi\sin\theta d\theta\right) = 0. \quad (65)$$

若 α 是螺旋曲线，则 $\phi = \frac{\kappa}{\tau} = c = constant$。由 (65) 得

$$\dddot{m}_1 + (1-c^2)\dot{m}_1 = 0. \quad (66)$$

因此，解为

$$m_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\left(a_1\sin(\sqrt{1-c^2}\theta) - a_2\cos(\sqrt{1-c^2}\theta)\right) + a_3, \text{ if } 1-c^2 > 0 \\ \frac{a_1}{2}\theta^2 + a_2\theta + a_3, \quad \text{if} \quad 1-c^2 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c^2-1}}\left(a_1\sinh(\sqrt{c^2-1}\theta) + a_2\cosh(\sqrt{c^2-1}\theta)\right) + a_3, \text{ if } 1-c^2 < 0, \end{cases}$$

其中 $\theta = \int \tau d\theta$。

□

子情况 2： $m_1 = 0$。

对于 $m_1 = 0$ 的情形，有如下定理：

定理 4.9. 设 (α, β) 是 $(M, g_f\epsilon)$ 中的一对等宽曲线。设 α 是一条非平面类时主线。若 $m_1 = 0$，则 α 是一般螺线。曲线 β 表示为

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + c_2 Y(s) + c_3 U(s), \quad (67)$$

其中 c_2 和 c_3 为常数。

证明。由 (63) 可得

$$\ddot{g} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}g\right) + g = 0. \quad (68)$$

另一方面，由 (61) 可得 $m_2 = c_2 = constant \neq 0$、 $m_3 = c_3 = constant \neq 0$，而由 (62) 可得

$$g = \phi(-c_2\cos\theta + c_3\sin\theta). \quad (69)$$

将 (68) 和 (69) 一并考虑，可得

$$\dot{\phi}(c_2\sin\theta + c_3\cos\theta) = 0. \quad (70)$$

于是有 $\phi = 0$ 或 c_2 正弦 $\theta + c_3$ 余弦 $\theta = 0$。如果 c_2 正弦 $\theta + c_3$ 余弦 $\theta = 0$，那么我们有 θ 是一个常数。因此， α 变成一条平面曲线。这是一个矛盾。因此， $\phi = 0$。进而得到 $\phi = \frac{\kappa}{\tau}$ 是一个常数。因此， α 是一般螺线。 □

4.2 α 为类空且 $\epsilon_2 = 1$ 和 $\epsilon_3 = -1$的情形。

这里我们假设曲线 α 是类空的，并且位于 M_f中的类时曲面上。对(34)关于 s 求导，并利用(21)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{ds} &= \frac{d\beta}{ds^\star}\frac{ds^\star}{ds} \\ &= T^\star\frac{ds^\star}{ds} = (1 + m_1' - m_2\kappa_g - m_3\kappa_n)T \\ &\quad +(m_2' - m_1\kappa_g + m_3\tau_g)Y \\ &\quad +(m_3' + m_2\tau_g + m_1\kappa_n)U, \end{aligned} \tag{71}$$

其中， $T^\star$ 表示 β的切向量。
由于 $T = -T^*$，由方程(35)可得

$$\begin{cases} m_1' &= m_2\kappa_g + m_3\kappa_n - h(s) \\ m_2' &= m_1\kappa_g - m_3\tau_g \\ m_3' &= -m_2\tau_g - m_1\kappa_n, \end{cases} \tag{72}$$

其中 $h(s) = \frac{ds^*}{ds} + 1$。
由于 α 为类空且 $\epsilon_2 = 1$ 和$\epsilon_3 = -1$，那么，若假设(α, β)为定宽曲线对，则有

$$\|\beta - \alpha\| = m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 = constant, \tag{73}$$

这意味着

$$m_1\frac{dm_1}{ds} + m_2\frac{dm_2}{ds} - m_3\frac{dm_3}{ds} = 0. \tag{74}$$

将（72）和（74）结合，可得

$$m_1(2m_1' + h(s)) = 0. \tag{75}$$

若 α 和 β 是等宽曲线，则 $m_1 = 0$ 或 $2m_1' - h(s) = 0$。
现在我们研究 α 为测地曲线或主线曲线的情形，因为 $\kappa_n \neq 0$。

4.2.1 情形（测地曲线）

设 α 是类时曲面上的非直线测地曲线，则 $\kappa_g = \kappa \sinh\theta = 0$。由于 $\kappa \neq 0$，可得 $\sinh\theta = 0$。因此可知 $\kappa_n = \kappa$， $\tau_g = \tau$。由（72）可得以下微分方程组

$$\begin{cases} m_1' &= m_3\kappa - h(s) \\ m_2' &= -m_3\tau \\ m_3' &= -m_1\kappa - m_2\tau. \end{cases} \tag{76}$$

由（76）可得

$$\begin{cases} m_3 &= \frac{1}{\kappa}(m_1' + h) \\ m_2' &= -\frac{\tau}{\kappa}(m_1' + h) \\ m_2 &= -\frac{1}{\tau}\left((\frac{1}{\kappa}(m_1' + h))' + m_1\kappa\right). \end{cases} \tag{77}$$

对（76）的第三个方程关于 s 求导，并利用（77）的第一个、第二个和第三个方程，可得以下方程:

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)''+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)'-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(m_1'+h)-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1+m_1'=0. \tag{78}$$

子情形 1： $m_1\neq 0$($h(s)=-2m_1'$)。
方程 (78) 变为

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)''+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)'-\left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2+1\right]m_1'+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1=0. \tag{79}$$

定理 4.10. 设 α 为一条测地曲线。设 ($\alpha;\beta$) 是一对定宽单位速曲线，其中 α 为类空（$\epsilon_2=1,\epsilon_3=-1$），且位于 M_f 中的类时曲面上。若 m_1 为非零常数，则 $m_3=0$，且 α 是三维 Walker 流形（M,g_f^{ϵ}）中的一般螺线。此外，曲线 β 给出如下:

$$\beta(s^\star)=\alpha(s)+m_1T+cY \tag{80}$$

其中 c 为实常数，且 $s^*=-s+c$。
证明. 若 m_1 为非零常数，则由 (79) 可得 $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'=0$。因此， α 是一般螺线。此外，由 (76) 的第二个和第三个方程可得 $m_3=0$，因为 $h=0$ 和 m_2 是实常数。

□

定理 4.11. 设 α 为一条测地曲线。设 (α,β) 为一对定宽单位速曲线，其中 α 为类空曲线 ($\epsilon_2=1,\epsilon_3=-1$)，且位于类时曲面 M_f上。若 m_1 不为零，则曲线 β 可表示为以下情形之一:

$$\beta(s^*)=\alpha(s)+m_1T+\frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1-m_1)Y+\dot{m}_1U, \tag{81}$$

其中 $m_1=\frac{1}{\sqrt{1+c_0^2}}\left(a_1e^{\sqrt{1+c_0^2}\theta}-a_2e^{-\sqrt{1+c_0^2}\theta}\right)$、$m_3=-\dot{m}_1$ 和 $m_2=\frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1-m_1)$。

证明. 设 α 是 Wlaker 3-流形中的一般螺线。则有 $\frac{\tau}{\kappa}=c_0=constant$。由 (79) 式可得

$$\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)'\right)'-\left(c_0^2+1\right)m_1'=0. \tag{82}$$

通过将自变量 s 替换为 $z=\int\kappa ds$，我们得到

$$m_1'=\frac{dm_1}{ds}=\frac{dm_1}{dz}\frac{dz}{ds}=\dot{m}_1\kappa.$$

由（82）可得

$$\dddot{m}_1-(c_0^2+1)\dot{m}_1=0. \tag{83}$$

解这个方程可得

$$m_1=\frac{1}{\sqrt{1+c_0^2}}\left(a_1e^{\sqrt{1+c_0^2}\theta}-a_2e^{-\sqrt{1+c_0^2}\theta}\right). \tag{84}$$

由（77）可得 $m_3=-\dot{m}_1$ 和 $m_2=\frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1-m_1)$。 □

子情况 2： $m_1 = 0$。

定理 4.12. 设 (α, β) 是 $(M, g_f\epsilon)$ 中的一对等宽曲线。设 α 是一条测地类空曲线 $(\epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1)$，且位于 M_f 上的类时曲面中。若 $m_1 = 0$，则曲线 β 可表示为

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + cY, \tag{85}$$

其中 c 是一个实常数。

证明. 若 $m_1' = 0$，则 $h = 0$，由 (76) 得 $m_3 = 0$ 和 $m_2 = constant$。 □

4.2.2 情形（主线）

若 α 是主线，则 $\tau_g = 0$ 且 $\tau = -\theta'$。由 (72)

$$\begin{cases} m_1' &= m_2\kappa\sinh\theta + m_3\kappa\cosh\theta - h(s) \\ m_2' &= m_1\kappa\sinh\theta \\ m_3' &= -m_1\kappa\cosh\theta, \end{cases} \tag{86}$$

通过将自变量 s 替换为 $\theta = \int \tau ds$，我们得到

$$\begin{cases} \dot{m}_1 &= m_3\frac{\kappa}{\tau}\cosh\theta + m_2\frac{\kappa}{\tau}\sinh\theta - \frac{h(s)}{\tau(s)} \\ \dot{m}_2 &= m_1\frac{\kappa}{\tau}\sinh\theta \\ \dot{m}_3 &= -m_1\frac{\kappa}{\tau}\cosh\theta. \end{cases} \tag{87}$$

记为 $\frac{h_{(s)}}{\tau(s)} = g(\theta)$ 和 $\frac{\kappa}{\tau} = \phi$，则有

$$\begin{cases} \dot{m}_1 &= \phi(m_3\cosh\theta + m_2\sinh\theta) - g(\theta) \\ \dot{m}_2 &= m_1\phi\sinh\theta \\ \dot{m}_3 &= -m_1\phi\cosh\theta. \end{cases} \tag{88}$$

由 (88) 中的方程可得

$$\begin{cases} \frac{1}{\phi}(\dot{m}_1 + g) &= m_3\cosh\theta + m_2\sinh\theta \\ \dot{m}_2\sinh\theta + \dot{m}_3\cosh\theta &= -m_1\phi \\ \dot{m}_2\cosh\theta &= -m_3\sinh\theta. \end{cases} \tag{89}$$

对 (88) 中的第一个方程求导，得

$$\ddot{m}_1 + \ddot{g} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}(\dot{m}_1 + g)\right) + \frac{d}{d\theta}(\phi^2 m_1) - (\dot{m}_1 + g)$$
$$-\dot{\phi}\left(\cosh\theta\int m_1\phi\sinh\theta d\theta - \sinh\theta\int m_1\phi\cosh\theta d\theta\right) = 0. \tag{90}$$

子情形 1： $m_1 \neq 0 (m_1' = -\frac{h}{2})$。

如果 $m_1' = -\frac{h}{2}$，那么 $\dot{m}_1 = -\frac{g}{2}$。由（90）可得

$$-\dddot{m}_1 + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\dot{m}_1\right) + \frac{d}{d\theta}(\phi^2 m_1) + \dot{m}_1 - \dot{\phi}\left(\cosh\theta\int m_1\phi\sinh\theta d\theta - \sinh\theta\int m_1\phi\cosh\theta d\theta\right) = 0. \tag{91}$$

定理 4.13. 设 (α, β) 是 $(M, g_f\epsilon)$ 中的一对等宽曲线。设 α 为主线且为一般螺线，则 β 由下式给出

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + m_1 T + m_2 Y + m_3 U, \tag{92}$$

其中

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left(a_1 e^{\sqrt{1+c^2}\theta} - a_2 e^{-\sqrt{1+c^2}\theta} \right),$$

$m_2 = c\int m_1 \sinh\theta d\theta$ 和 $m_3 = -c\int m_1 \cosh\theta d\theta$。

证明。若 α 是螺旋曲线，则$\phi = \frac{\kappa}{\tau} = c = constant$。由 (91) 可得

$$\dddot{m}_1 - (1+c^2)\dot{m}_1 = 0. \tag{93}$$

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left(a_1 e^{\sqrt{1+c^2}\theta} - a_2 e^{-\sqrt{1+c^2}\theta} \right). \tag{94}$$

□

子情况 2： $m_1 = 0$。
由 (72) 中的方程可得 $m_2 = c_2 = constant \neq 0$, $m_3 = c_3 = constant \neq 0$。(72) 中的第一个方程给出

$$\tanh\theta = -\frac{c_2}{c_3}. \tag{95}$$

于是 θ 是一个常数，并且有 $\tau = 0$。

定理 4.14. 设（α， β）是（M， $g_f\epsilon$）中的一对等宽曲线。设 α 为主线。若 $m_1 = 0$，则 α 是平面曲线。曲线 β 表示为

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + c_2 Y + c_3 U, \tag{96}$$

其中 c_2 和 c_3 为常数。

4.3 情形： α 是类空的，且 $\epsilon_2 = -1$ 和 $\epsilon_3 = 1$。

设 α 为类空曲线， $\epsilon_2 = -1$ 和 $\epsilon_3 = 1$ 位于 M_f 中的类时曲面上。对（34）关于 s 求导，并利用（30），可得

$$\begin{cases} m_1' &= m_2\kappa_g + m_3\kappa_n - h(s) \\ m_2' &= m_1\kappa_g - m_3\tau_g \\ m_3' &= -m_2\tau_g - m_1\kappa_n, \end{cases} \tag{97}$$

其中 $h\ (s) = \frac{ds^*}{ds} + 1$。
由于 α 是类空的，且 $\epsilon_2 = -1$ 和 $\epsilon_3 = 1$，因此，若假设 (α, β) 是一对定宽曲线，则有

$$\|\beta - \alpha\| = m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 = constant, \tag{98}$$

这意味着

$$m_1\frac{dm_1}{ds}+m_2\frac{dm_2}{ds}-m_3\frac{dm_3}{ds}=0. \tag{99}$$

结合（97）和（99），可得

$$m_1h(s)=0. \tag{100}$$

如果 α 和 β 是等宽曲线，那么 $m_1=0$ 或 $h(s)=0$。如果 $m_1\neq 0$（即 $h(s)=0$），那么由于 $d'=0$，$d=m_1T+m_2Y+m_3U$ 变为常向量。因此，$\beta(s^*)$ 是沿常向量 d 对 α 的平移。此外，$h(s)=0$ 给出 $s^*=-s+c$，其中 c 为常数。

由于 $\kappa_g\neq 0$，这里我们研究某些特殊情形下 $m_1\neq 0$ 或 $m_1=0$ 的等宽曲线（渐近线或主线）。

4.3.1 情形（渐近线）

设 α 是类时曲面上的非直线渐近线。则 $\kappa_n=\kappa\sinh\theta=0$。由于 $\kappa\neq 0$，我们得到 $\cosh\theta=0$。因此可推出 $\kappa_g=\kappa$，$\tau_g=-\tau$。由（97）可得以下微分方程组

$$\begin{cases} m_1' &= m_2\kappa-h(s)\\ m_2' &= m_1\kappa+m_3\tau\\ m_3' &= -m_2\tau. \end{cases} \tag{101}$$

对（101）中的第二个方程关于 s 求导，并利用（101）中的第一个和第三个方程，可得

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)''+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}(m_1'+h)\right)'-\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(m_1'+h)+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1-m_1'=0. \tag{102}$$

子情形 1：$m_1\neq 0(h(s)=0)$。

方程（102）表示为

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)''+\left[\left(\frac{1}{\kappa}\right)'-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right]\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)'-\left[\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2+1\right]m_1'+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\frac{\kappa}{\tau}m_1=0. \tag{103}$$

定理 4.15. 设 α 为一条渐近曲线。设（α；β）为一对定宽单位速曲线，其中 α 为类空曲线（满足 $\epsilon_2=-1$ 和 $\epsilon_3=1$），且位于 M_f中的一个类时曲面内。若 m_1 为非零常数，则 $m_2=0$ 且 α 是三维 Walker 流形（M，g_f^{ϵ}）中的一条一般螺线。此外，曲线 β 表示为:

$$\beta(s^\star)=\alpha(s)+m_1T+m_3U \tag{104}$$

其中 m_3 为实常数，且 $s^*=-s+c$。

证明. 若 m_1为非零常数，则由（103）可得 $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'=0$。因此，$\alpha$是一般螺线。此外，由（101）的第一和第三个方程可得 $m_2=0$，且 m_3 为实常数。 □

定理 4.16. 设 α 为一条渐近线。设（α, β）是一对等宽单位速曲线，其中 α 为类时曲线，且位于类时曲面 M_f上。若 m_1 不为零，则曲线 β 可表示为以下情形之一:

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + m_1 T + \dot{m}_1 Y + \frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1 + m_1)U, \tag{105}$$

其中

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{c_0^2+1}}\left(a_1 e^{\sqrt{c_0^2+1}z} - a_2 e^{\sqrt{c_0^2+1}z}\right).$$

证明。设 α 是 Walker 三维流形中的一般螺线。那么我们有 $\frac{\tau}{\kappa} = c_0 = constant$。由 (103) 式可得

$$\left(\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\kappa}m_1'\right)'\right)' - \left(c_0^2+1\right)m_1' = 0. \tag{106}$$

通过将自变量 s 替换为 $z = \int \kappa ds$，我们得到

$$\dddot{m}_1 - (c_0^2+1)\dot{m}_1 = 0. \tag{107}$$

解这个方程可得

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{c_0^2+1}}\left(a_1 e^{\sqrt{c_0^2+1}z} - a_2 e^{\sqrt{c_0^2+1}z}\right) \tag{108}$$

由 (101) 式可得 $m_2 = \dot{m}_1$ 和 $m_3 = \frac{1}{c_0}(\ddot{m}_1 + m_1)$。 □

子情况 2： $m_1 = 0$
通过与上述相同的计算，可得以下定理:

定理 4.17. 设 $(\alpha; \beta)$ 是 (M, g_f) 中的定宽曲线对。若 α 是一条位于 M_f 中类时曲面上的类空渐近曲线（其中 $\epsilon_2 = -1$ 和 $\epsilon_3 = 1$）。若 $m_1 = 0$，则曲线 β 可表示为

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \left[b_1 \cos\left(\int \tau ds\right) + b_2 \sin\left(\int \tau ds\right)\right] Y(s) + \left[-b_1 \sin\left(\int \tau ds\right) + b_2 \cos\left(\int \tau ds\right)\right] U(s).$$

4.3.2 情形（主线）

在这种情形下，我们有以下两个定理:

定理 4.18. 设 (α, β) 是 $(M, g_f\epsilon)$ 中的一对定宽曲线。设 α 是一条类空主线（其中 $\epsilon_2 = -1$ 和 $\epsilon_3 = 1$），且为一般螺线，则 β 可表示为

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + m_1 T + m_2 Y + m_3 U, \tag{109}$$

其中

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left(a_1 e^{\sqrt{1+c^2}\theta} - a_2 e^{-\sqrt{1+c^2}\theta}\right),$$

$m_2 = c\int m_1$ 双曲余弦 $\theta d\theta$ 和 $m_3 = -c\int m_1$ 双曲正弦 $\theta d\theta$。

定理 4.19. 设 (α, β) 是 $(M, g_f\epsilon)$ 中的一对等宽曲线。设 α 是位于 M_f 中类时曲面上的主线（具有 $\epsilon_2 = -1$ 和 $\epsilon_3 = 1$）。若 $m_1 = 0$，则 α 是一般螺线，或者 α 是平面曲线，且曲线 β 表示为

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + c_2 Y + c_3 U, \tag{110}$$

其中 c_2 和 c_3 是常数。

致谢

作者谨向匿名审稿人致谢，感谢他们提出的评论和建议。作者还要特别感谢阿希埃夫兰大学（土耳其）的Ferdag Kahraman教授提出的意见和建议。

参考文献

[1] B. Altunkaya, F. Kahraman，基于Darboux标架的等宽曲线。《安卡拉大学理学院通讯》A1系列：数学与统计，66（2），44–52（2017）。[2] B. Altunkaya, F. Kahraman，闵可夫斯基四维空间中的定宽零曲线。《安卡拉大学理学院通讯》A1系列：数学与统计，68（1），451–456（2019）。[3] Blaschke W.，关于定宽曲线与曲面的若干注记，《萨克森科学院莱比锡报告》，67，290–297（1915）。[4] M. Brozos-V´azquez, E. Garc´ıa-Rio, P. Gilkey, S. Nikevi´c 和 R. V´azquez-Lorenzo，《Walker流形的几何》，《数学与统计学综合讲座》，第5卷。Morgan and Claypool 出版社，威利斯顿，佛蒙特州（2009）。[5] G. Calvaruso 和 J. Van der Veken，具有平行零向量场的洛伦兹三维流形中的平行曲面，《物理学杂志A》，43（32），325207（2010）。[6] A. S. Diallo, A. Ndiaye 和 A. Niang，三维Walker流形上的极小图，第一届NLAGA-BIRS研讨会论文集，达喀尔，塞内加尔，《数学趋势》，Birkh$\ddot{a}$user/Springer，Cham，425–438（2020）。[7] M. Fujivara，关于空间中的定宽曲线，《东北数学杂志》，5，179–184（1914）。[8] M. Gningue, A. Ndiaye, R. Nkunzimana，严格Walker三维流形中的双调和曲线。《国际数学与数学科学杂志》，1–6（2022）。[9] O. Kose，平面中卵形线和等宽曲线的一些性质，《Doga科学杂志》B系列，（8），2，119–126（1984）。[10] A. Magden 和 O. Kose，关于 $\mathbb{E}^4$ 空间中的等宽曲线，《土耳其数学杂志》，21，277–284（1997）。[11] R. M. Solow，《经济学季刊》，70，6594（1956）。