arXiv:2301.03072v1 [math.CO] 8 Jan 2023

基于拉马努金图的二部唯一邻居扩展图

Ron Asherov 和 Irit Dinur*

魏茨曼科学研究所，雷霍沃特，以色列

摘要

我们构造了一个有界度二部唯一邻居扩展图的无限族，其两侧的规模可以任意不平衡。尽管我们的构造不如 Capalbo 等人构造的无损扩展图强，但它更简单，而且由于常数更小，可能更接近实际可实现。我们通过将二部拉马努金图与固定大小构件组合来构造这些图，这种方法推广了 Alon 和 Capalbo 构造唯一邻居扩展图的方法。为了分析我们的构造，我们证明了二部拉马努金图的小诱导子图中平均度的一个强上界。我们的上界将 Kahale 平均度上界推广到了二部拉马努金图，而且可能具有独立的研究价值。令人意外的是，我们的上界很大程度上依赖于图具有精确的拉马努金性质，而已知近似拉马努金图并不满足这一上界。

1 引言

如果存在 $\delta > 0$，使得对于每个 n 以及每个大小为 $|S| \le \delta |L_n|$ 的左侧顶点集合 $S \subseteq L_n$，S 在 G_n 中都有一个唯一邻居，即 R_n 中恰好与 S 中一个顶点相连的顶点，那么称具有 $|L_n| + |R_n| \to \infty$ 的 $(c,\ d)$-双正则图无限族 $G_n = (L_n \sqcup R_n,\ E_n)$ 为**唯一邻居扩展图族**。我们只要求左侧顶点集合有唯一邻居，而任意小的右侧集合可能没有唯一邻居。

Alon 和 Capalbo [AC02] 通过巧妙地组合拉曼努金图与一个构件，构造了若干唯一邻居扩展图的显式图族。他们构造了三个一般（非二部）图族，其中所有小集合都有唯一邻居；还构造了一个轻度不平衡二部图族，其中左侧的小集合在右侧都有唯一邻居。在他们的构造中，左侧的规模是右侧的 $22/21$ 倍。图越不平衡，小型左侧集合就越难扩展到右侧。Capalbo 等人 [Cap+02] 构造了任意不平衡的二部图，它们是无损扩展图，这一概念严格强于唯一邻居扩展性。他们的构造基于一系列较为复杂的组合步骤，并使用随机性导体。

我们的主定理给出了一种高效构造，可针对任意常数不平衡量 α以及任意足够大的特定形式的左正则度，构造一个二分唯一邻居扩展图的无限族：

定理 1。存在一个函数 $\hat{q}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{N}$，使得对于每个整数 $c_0 > 5$ 和实数 $\alpha > 1$，若 $q > \hat{q}(c_0, \alpha)$ 是一个素数幂，且 $\alpha c_0(q+1)$ 是一个整数，则存在一种多项式时间构造，可构造一个无限族的 $(c_0(q+1),\ \alpha c_0(q+1))$- 双正则唯一邻居扩展图。

该定理在 第 6.2 节中得到证明，并提供了一种计算 $\hat{q}(c_0,\ \alpha)$ 的方法。以下是 $\hat{q}(c_0,\ \alpha)$ 在 c_0、α 等若干取值下的计算结果。

*Irit Dinur 感谢欧洲研究理事会资助项目 772839 和以色列科学基金会资助项目 2073/21 提供的支持。

c_0	α	$\hat{q}(c_0,\alpha)$
10	2	18907
35	2	1492
100	100	136051
100	1.01	1135

注意到，$\hat{q}(c_o,\ \alpha)$ 随着 α 增大而增大，这反映了这样一个事实： α 较大的构造（即两侧更加不平衡）更难找到，而且需要更大的度。

该构造使用一个二部拉马努金图的无限族，即其非平凡谱包含于（$c,\ d$）-双正则树的谱中的图（详见预备知识）。我们通过取一族二部拉马努金图，并将它们与一个具有良好唯一邻居性质（小集合有唯一邻居）的固定规模图（“构件”）相结合，来构造唯一邻居扩展图族；该构件的存在性由概率方法证明（引理 11）。组合方式如下：首先，为拉马努金图的每个右侧顶点放置一个构件副本。该顶点被替换为构件的右侧，而它的邻居则与构件的左侧相识别。构件用于将拉马努金图中每个左侧顶点的邻居连接到乘积图中的相应邻居。

乘积图中的扩展性来自构件的唯一邻居扩展性以及拉马努金图中的低度顶点。由于以下关于二部拉马努金图诱导子图平均度的（新）界，足够低度的顶点必然存在；这一界本身也可能具有独立的研究价值。

定理 2. 设 $G=(L\sqcup R,E)$ 是一个(c,d)-双正则拉马努金图，且 $\varepsilon>0$。那么存在$\delta>0$，它仅取决于 ε,c,d，使得对于任意大小为 $|S|\le\delta|L|$ 的 $S\subset L$，集合 $N(S)\subseteq R$（即 S 的邻居）满足

$$\frac{c|S|}{|N(S)|}\le 1+(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{d-1}{c-1}}.$$

该定理表明，左侧的每个小集合都能在右侧找到邻居，使得这些邻居在诱导子图中的度较低。证明涉及对非回溯路径的递归分析。有趣的是，只有当图是拉曼努金图时，该递归才有一个优美的解。目前尚不清楚这种方法能否推广到“近似拉曼努金”图。

将平均度上界与构件结合，拉曼努金图中度较低的右侧顶点意味着构件中存在一个较小的左侧顶点集合；该集合在构件中有一个唯一邻居，由此（借助 引理 12）可知它在构造出的图中也有一个唯一邻居。

尽管拉马努金图是我们所能期待的最优谱扩展图，但高效构造拉马努金图（无论其是否为二部图）并不意味着我们就能立即构造出唯一邻居扩展图。在 d正则情形下，Kahale 证明（[Kah95，定理 5。2]）存在扩展性至多为 $d/2$的近似拉马努金图，而这不足以保证唯一邻居扩展性。事实上，Kamber 和 Kaufman 最近 [KK22] 证明了某些拉马努金图的唯一邻居扩展性很差，并给出了明确构造的任意小集合，这些集合没有唯一邻居。

如前所述，我们定义的图乘积需要一个固定大小的构件，而其存在性证明并非构造性的。原则上，由于搜索空间大小为常数，可以通过穷举搜索找到这样的构件。我们构造中的构件大小至少关于 q呈立方增长，因此即使 q取较小值，穷举搜索也不切实际。遗憾的是，我们尚不知道如何高效构造满足所需参数的构件。或许可以利用 [AK19] 中介绍的图采样方法，更高效地构造固定大小的构件。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们综述唯一邻居扩展图的一些用途，并介绍这类图的已知构造。第 3 节给出基本定义和结果。我们的主要技术工具断言二部拉马努金图具有较低的诱导度，并将在第 4 节中陈述并证明。我们证明，存在一个具有良好唯一邻居扩展性的固定大小构件

性质将在第 5 节中讨论。在第 6 节中，我们定义如何利用拉曼努金图和该构件来构造二部唯一邻居扩展图，并据此证明定理 1。

2 相关工作

二部扩张图，尤其是二部唯一邻居扩张图的一项重要用途，也是本工作的研究动机之一，是构造纠错码。Tanner [Tan81] 的工作，以及后来 Sipser 和 Spielman [SS96] 的工作，利用一个二分图 B 和一个较小的线性码 C_0构造线性纠错码 $\mathcal{C}(B, C_0)$。研究表明，在对码 C_0和二分图 B的扩展性质作出某些假设后，所得到的码具有良好的距离。这提供了一种将图族转化为码族的方法。我们的工作描述了一种构造，从某种意义上说，它反其道而行之：给定两个二分图 B 和 B_0，我们将 B_0 视为基础码 C_0的校验图[1]，而 B 则充当 Tanner 码 $\mathcal{C}(B, C_0)$的底层图。我们的输出图就是 $\mathcal{C}(B, C_0)$的校验图。我们在第 6.1 节详细介绍这一图乘积。

在 [DSW06；BV09] 中证明了，基于唯一邻居扩展图构造的码具有弱平滑性，可用于构造鲁棒可测试码。然而，唯一邻居扩展图的用途并不限于纠错码：例如，这类图可用于无阻塞网络，在这类网络中，需要以互不相交的路径连接多个输入输出终端。Arora 等人 [ALM96] 使用扩展性超过 $d/2$ 屏障的图，证明图中存在唯一邻居，这有助于在在线场景下寻找输入输出路径。粗略来说，在路由一组输入输出对时，算法可以自由使用所有唯一邻居，因为可以保证它们不会与任何其他路径冲突。Pippenger [Pip93] 使用谱扩展图的显式构造来解决一个类似问题，其中路径规划是在本地计算的。在这种情况下，已证明图的谱扩展性意味着其组合扩展性，这与我们的定理 2类似。

唯一邻居扩展图的另一种用途是解决负载均衡问题，例如 [PU89], 中所述的令牌分配问题，以及类似的棋子分配问题，后者在 [AC02]中有简要讨论。在后者中，棋子被任意放置在图的顶点上，需要通过图的边进行分配，使每个顶点至多有一枚棋子。若棋子总数较少，且该图具有唯一邻居性质，我们就能使用高效的并行算法重新分配棋子。

Alon 和 Capalbo [AC02] 构造了若干类唯一邻居扩展图，其中一类是二分图，其左侧的规模是右侧的 $22/21$ 倍。与本文提出的构造类似，所构造的每个图都是由一个拉曼努金图和一个固定图组合而成。这些图并非（双）正则图，但其度有一个常数上界。Becker [Bec16]采用另一类8-正则拉曼努金图，构造了一类（非二部）唯一邻居扩展图；此外，这类图中的每个图都是一个 Cayley 图。

构造二分图的另一种方法是使用随机性导体。随机性导体是这样一种函数：输入一个具有一定熵（按某种熵度量衡量）的比特串，以及一个均匀随机的比特串；输出一个比特串，并对其熵提供某些保证。一些导体可以通过谱方法显式构造出来，而 Capalbo 等人 [Cap+02] 以类之字形方式组合它们，从而构造出一个无限族的二分无损扩展图，即左正则度固定为 c 的二分图，其中包含在左侧中的足够小的集合在右侧至少有 $c(1-\varepsilon)$个邻居。这些图显然是唯一邻居扩展图，因为简单的计数论证表明，如果一个集合的扩展倍数大于 $c/2$，那么它就有唯一邻居。

[1]这是一个二分图　　其关联结构由奇偶校验　　矩阵给出。

3 预备知识

3.1 扩展图

在本文中，我们研究无向图，它们的两个顶点之间可以有重边，但不含自环。对于图 G 及其顶点的一个子集 S，我们用 $N_G(S)$ 表示 S的邻域，即与 S中的某个顶点相邻的所有顶点。当所讨论的图显而易见时，我们可以省略它，并写作 $N(S)$。如果 $u \in S$ 中恰有一个与 v相邻的顶点，我们就称 v 是 S 的**唯一邻居** 。

设 (G_n) 是一列顶点数趋于无穷的图。在图族中，有几种经过充分研究的**扩展性 概念**；我们列举其中一些。

1. 顶点扩展。若对每个 n 和任意子集 $S \subseteq V_{G_n}$，只要 $|S| \leq \delta|V_{G_N}|$，就有 $|N_{G_N}(S)| \geq \alpha|S|$，则称 (G_n) 为 (δ, α)-顶点扩展图。2. 边扩展。若对每个 n 和任意子集 $S \subseteq V_{G_n}$，只要 $|S| \leq \delta|V_{G_N}|$，则至少有 α 比例的边满足：其一个端点在 S 中，另一个端点在 S 外，此时称 (G_n) 为 (δ, α)-边扩展图。3. 谱扩展。假设 (G_n) 都是 d-正则图，并令 A_n 为与 G_n 关联的邻接算子，因此 A_n 以 G_n 的顶点为索引，而 $(A_n)_{uv}$ 统计 G_n 中 u 与 v 之间的边数。令 $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{V_n}$ 为其谱。可以看出 $\lambda_1 = d$。那么，如果对所有 n 和 $i \neq 1$ 都有 $|\lambda_i| \leq \lambda$，则称 (G_n) 为λ-谱扩展图。4. 唯一邻居扩展。若对每个 n，任意大小至多为 $\delta|V_{G_N}|$ 的子集 $S \subseteq V_{G_n}$ 都有一个唯一邻居，则称 (G_n) 为 δ-唯一邻居扩展图。

这些定义同样适用于二分图 $G_n = (L_n \sqcup R_n,\ E_n)$，但通常我们只考虑包含在左侧的集合，并要求 L_n/R_n 是一个常数，通常大于 1。在这种情况下，边扩展没有意义（因为所有离开左侧的边都会进入右侧）；如果一个二分图是 $(c,\ d)$-双正则的，也就是说，所有左侧顶点的度都是 c，所有右侧顶点的度都是 d，那么相应邻接算子的最大特征值为 $\sqrt{cd}$。

可以看出，对于 d-正则图，我们所能期望的最佳谱扩展为 $\alpha = 2\sqrt{d-1}$。这类图称为**拉马努金图**。

3.2 二分拉马努金图

拉马努金图具有最佳谱隙 [Nil91], ，其非平凡特征值包含在无限 d-正则树 T_d 的谱中。类似地，在二分情形中，双正则拉曼努金图是通过它们与无限双正则树的关系来定义的：对于 $d > c$，无限 $(c,\ d)$-双正则树 $T_{c,\ d}$ 的谱为

$$\lambda \in \operatorname{spec}(T_{c,d}) \Leftrightarrow |\lambda| \in \{0\} \cup \left[\sqrt{d-1} - \sqrt{c-1}, \sqrt{d-1} + \sqrt{c-1}\right]$$

(例如， [GM88], [LS96]。）因此，我们称有限的$(c,\ d)$-双正则图为**二部拉马努金图**，如果其非平凡特征值属于此集合。这意味着，二部拉马努金图的每个特征值 λ 都属于以下类别之一：

1. 平凡： $\lambda = \pm\sqrt{cd}$，其特征向量在两侧分别为常数，或 $\lambda = 0$;
2. $\lambda \in [\sqrt{d-1} - \sqrt{c-1}, \sqrt{d-1} + \sqrt{c-1}]$ 是非平凡正特征值;
3. $\lambda \in [-\sqrt{c-1} - \sqrt{d-1}, \sqrt{c-1} - \sqrt{d-1}]$是非平凡负特征值。注意，由于该图是二部的， λ 是特征值当且仅当 $-\lambda$ 是特征值。

根据 [FL96], 中给出的阿隆-博帕纳界的推广，这是我们所能期望的最佳谱隙，至少就 $|\lambda|$ 的上界而言。我们注意到，与 d-正则情形不同，我们还需要 $|\lambda|$ 的下界，这对我们的证明至关重要。

尽管关于构造 d-正则拉曼努金图的文献十分丰富（最著名的当属[LPS88] 和 [Mar88]），但关于二分拉曼努金图的研究却较少。2014 年，Marcus 等人 [MSS13]证明了双正则图的存在性，其单侧谱性质与拉曼努金界相近：这些图仅满足单边不等式，即 $|\lambda| \le \sqrt{d-1}+\sqrt{c-1}$ 对每个非平凡特征值 λ。Gribinski 等人 [GM21]展示了这类图的多项式时间构造，适用于任意度(d, kd) 以及任意整数 d, k。这些图不足以支持我们的分析，因为我们也明确用到了下界 $|\lambda| \ge \sqrt{d-1}-\sqrt{c-1}$。

2021 年，Brito 等人 [BDH22]证明了随机双正则图以高概率近似满足拉曼努金性质。有趣的是，与该领域的其他研究不同，我们的证明严重依赖于图恰好是拉曼努金图这一条件，因此也无法使用那些构造。

我们使用 Ballantine 等人给出的二部拉马努金图的显式构造（非平凡特征值的上下界均有保证）：

定理 3 ([Bal+15])。 对于每个素数幂 q，都存在一个显式构造的 $(q+1, q^3+1)$- 双正则拉曼努金图。

4 双正则拉曼努金图中的顶点扩展

我们的主要技术工具是以下定理，它表明二部拉马努金图具有优异的从左到右的扩张性。为方便起见，我们重述该定理。

定理 2。 设 $G=(L \sqcup R, E)$ 是一个 (c,d)-双正则拉曼努金图，且令 $\varepsilon > 0$。那么存在$\delta > 0$，它仅取决于 ε, c, d，使得对于每个大小为 $|S| \le \delta |L|$ 的 $S \subset L$， S 的邻居集合 $N(S) \subseteq R$ 满足

$$\frac{c|S|}{|N(S)|} \le 1 + (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{d-1}{c-1}}.$$

我们注意到，不等式左侧的量可以作如下解释。考虑由左侧的顶点 S 和右侧的 $N(S)$ 所诱导的二分图。由于每个左侧顶点都有 c 条出边，诱导子图中的边总数为 $c|S|$。这意味着，不等式左侧的表达式恰好是诱导子图右侧的平均度。有趣的是，本定理中的界严格强于仅应用扩张子混合引理所得的结果，后者给出

$$\frac{c|S|}{|N(S)|} \le (1+\varepsilon)\cdot\left(1+\frac{d-1}{c-1}+2\sqrt{\frac{d-1}{c-1}}\right).$$

详见 命题 4 。我们改进扩张子混合引理并不令人意外，因为我们的分析基于枚举非回溯路径，而不只是考察第二大特征值的大小。我们还使用了所有非平凡特征值大小的下界，而扩张子混合引理只使用上界。

4.1 与已知界的比较

如上所述，定理 2 改进了扩张子混合引理在类似情形下给出的界；该引理仅使用单边不等式 $|\lambda| \le \sqrt{d-1}+\sqrt{c-1}$。作为参考，我们陈述并证明二分拉马努金图的扩张子混合引理。

命题 4（二分拉马努金图的扩张子混合引理）。设 $G = (L \sqcup R, E)$ 是一个 (c, d)-双正则拉马努金图，且 $\varepsilon > 0$。那么存在 $\delta > 0$，使得对于每个大小为 $|S| \le \delta|L|$ 的 $S \subseteq L$，S 的邻域满足

$$\frac{c|S|}{|N(S)|} \le (1+\varepsilon)\left(1 + \frac{d-1}{c-1} + 2\frac{\sqrt{d-1}}{\sqrt{c-1}}\right).$$

证明。双正则图的扩张子混合引理指出，对于任意 $S \subseteq L, T \subseteq R$，都有

$$\left|\frac{|e(S,T)|}{|E|} - \frac{|S|}{|L|}\cdot\frac{|T|}{|R|}\right| \le \frac{\lambda}{\sqrt{cd}}\sqrt{\frac{|S|}{|L|}\cdot\frac{|T|}{|R|}}$$

其中 λ 是 G 的第二大特征值（参见例如 [Hae95]）。需要说明的是，我们将 G 视为邻接算子来考虑其谱，因此最大特征值为 $\sqrt{cd}$。

选取 $T = N(S)$ 意味着所有从 S 出发的边都位于割中，即 $|e(S, T)| = c|S|$。代入后得到

$$\left|\frac{c|S|}{c|L|} - \frac{|S|}{|L|}\cdot\frac{|N(S)|}{|R|}\right| \le \frac{\lambda}{\sqrt{cd}}\sqrt{\frac{|S|}{|L|}\cdot\frac{|N(S)|}{|R|}}.$$

两边同乘 $\frac{|L|}{|S|}$，得到

$$\left|1 - \frac{|N(S)|}{|R|}\right| \le \frac{\lambda}{\sqrt{cd}}\sqrt{\frac{|S|}{|L|}\cdot\frac{|N(S)|}{|R|}}\cdot\frac{|L|}{|S|} = \frac{\lambda}{\sqrt{cd}}\sqrt{\frac{|N(S)|}{|R|}\cdot\frac{|L|}{|S|}} = \frac{\lambda}{\sqrt{cd}}\sqrt{\frac{|N(S)|}{|S|}}\cdot\sqrt{\frac{d}{c}} = \frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{|N(S)|}{|S|}} \quad (1)$$

这里还用到了这样一个事实：$|E| = c|L| = d|R|$。

假设 $|S| = \alpha|L|$。那么我们可以将 $|N(S)|$ 上界估计为

$$|N(S)| \le c|S| = \alpha c|L| = \alpha d|R|$$

因此我们有

$$1 - \frac{|N(S)|}{|R|} \ge 1 - \frac{d\alpha|R|}{|R|} = 1 - d\alpha.$$

我们将（1）平方，并代入最后一个不等式，得到

$$(1-d\alpha)^2 \le \frac{\lambda^2}{c}\cdot\frac{|N(S)|}{c|S|}.$$

Rec这一切都表明 G 是二分拉曼努金，因此 $|\lambda| \le \sqrt{d-1} + \sqrt{c-1}$。利用这一点并重新排列：

$$\begin{aligned}
\frac{c|S|}{|N(S)|} &\le \frac{\lambda^2}{c}(1-d\alpha)^{-2} \\
&\le \frac{d-1+c-1+2\sqrt{d-1}\sqrt{c-1}}{c}(1-d\alpha)^{-2} \\
&\le \frac{d-1+c-1+2\sqrt{d-1}\sqrt{c-1}}{c-1}(1-d\alpha)^{-2} \\
&= \left(1 + \frac{d-1}{c-1} + 2\frac{\sqrt{d-1}}{\sqrt{c-1}}\right)(1-d\alpha)^{-2}.
\end{aligned}$$

只需注意到存在某个 $\delta > 0$，使得对于每个 $\alpha < \delta$，都有 $(1-d\alpha)^{-2} \le 1+\varepsilon$，也就是说，当且仅当 $|S| \le \delta|L|$ 时。 □

Kahale 证明了（[Kah95，定理 4。2]）对于 d-正则拉马努金图（不一定是二部图），小诱导子图的平均度至多为 $1+\sqrt{d-1}$。有趣的是，这一结果几乎可以直接由定理 2推出。这是因为以下引理（证明见附录 A ）断言：一个（见 [SS96]）的边 - 顶点关联图是一个 d- 正则拉马努金图，则它是一个（ 2， d ） - 双正则拉马努金图：

引理 5。 设 G 是一个 d-正则拉曼努金图， G' 是它的边-顶点关联图。那么 G' 是一个$(2,d)$-双正则拉曼努金图。

我们陈述并证明 Kahale界，但在我们的构造中不会用到它。

推论6。 设 $G=(V_G,E_G)$ 是一个 d-正则拉曼努金图，并设 $\varepsilon>0$。那么存在 $\delta>0$，使得对于每个至多有 $\delta|V_G|$ 个顶点的诱导子图 S， S 的平均度至多为

$$\overline{d_S}:=\frac{2|E_S|}{|V_S|}\le 1+(1+\varepsilon)\sqrt{d-1}.$$

证明。设 $G=(V_G,E_G)$ 是一个 d-正则拉曼努金图，且 $\varepsilon>0$。我们将边-顶点关联图定义为 $G'=(L_{G'}\sqcup R_{G'}, E_{G'})$，即 $L_{G'}=E_G$, $R_{G'}=V_G$；对于 G 中的每条边 $e=\{u,v\}$，都有两条边 $\{e,u\}$ 和 $\{e,v\}$ 属于 G'。由于 G 中每个顶点的度都是 d，且每条边都有两个端点，因此 G' 是一个 $(2,d)$- 双正则图。引理 5 断言 G' 在二部图意义下是拉曼努金图。根据定理 2，存在 $\delta>0$，使得如果 $T\subseteq L_{G'}$ 的大小至多为 $\delta|L_{G'}|$，那么

$$\frac{2|T|}{|N_{G'}(T)|}\le 1+(1+\varepsilon)\sqrt{d-1}.$$

图 G 的子图 $S=(V_S,E_S)$ 满足： E_S 是 G' 中左侧顶点的子集， V_S 是 G' 中右侧顶点的子集，并且 $V_S=N_{G'}(E_S)$（因为若一条边属于该子图，则它的两个端点都属于该子图，而且我们假设该子图不含孤立顶点）。因此，若 E_S 足够小，即若 $|E_S|\le\delta|L_{G'}|=\delta|E_G|$，那么根据定理 2， $N_{G'}(E_S)=V_S$ 的平均度有上界 $1+(1+\varepsilon)\sqrt{d-1}$。

补充一点，若要确定顶点数的上界，注意到 $|E_S|\le\frac{d}{2}|V_S|$。因此，任何顶点数不超过 $\frac{2}{d}\delta|E_G|=\delta|V_G|$ 的诱导子图都满足所需的平均度上界。

□

4.2 定理2的证明

定理 2 通过枚举非回溯路径来证明。长度为 ℓ 的非回溯路径是一列边 $((s(e_i)\ t(e_i)))_{i=1}^{\ell}$ 满足对每个 i， $t(e_i)=s(e_{i+1})$ 且 $s(e_i)\neq t(e_{i+1})$。

对于二分图 G 和左侧顶点的子集 S，我们定义 $M_\ell(S)$ 为所有左侧顶点均属于 S 的非回溯路径数量，并定义 $M_\ell(S,G)$ 为首尾左侧顶点均属于 S 的非回溯路径数量。显然， $M_\ell(S)\le M_\ell(S,G)$，因为后一类路径可能会离开 $S\sqcup N(S)$（并在最后一步重新进入 S）。我们使用 Kam19] 给出的 $M_\ell(S)$ 的下界：

引理 7. 对于每个无向二分图 $G=(L_G\sqcup R_G,E_G)$ 和整数 l，都有

$$M_\ell(L_G)\ge|E_G|\left(\sqrt{(\bar{d}_L-1)(\bar{d}_R-1)}\right)^{\ell-1}$$

其中 d_L,d_R 分别是 G 左右两侧的平均度。

我们陈述并证明 $M_\ell(S,\ G)$ 的一个上界：

引理 8. 设 G 是一张具有 n 个左侧顶点的 (c,d)-双正则拉马努金图，且 S 是左侧的一个子集。那么对于每个整数 ℓ:

$$M_{2\ell}(S,G) \le |S| \left((2+\sqrt{d-1})\ell + 2\right)(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}$$

只要 S 足够小:

$$|S|(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2} \le n. \tag{2}$$

在证明 上界之前，我们说明如何结合这些界来得到 定理 2。

定理 2的证明。令 ℓ 为稍后确定的一个整数， $S \subseteq L$ 为一个足够小的子集（“足够小”指 (2)）。用 $N(S)$ 表示 S的邻居。由 $S \cup N(S)$ 诱导的子图有 $c|S|$ 条边，左侧各顶点的度均为 c，右侧平均度为 $\bar{d}_R = \frac{c|S|}{|N(S)|}$。

串联引理 7 和引理 8中的不等式，得到

$$c|S|\left((c-1)(\bar{d}_R-1)\right)^{\frac{2\ell-1}{2}} \le M_{2\ell}(S) \le M_{2\ell}(S,V_G) \le |S| \cdot \left((2+\sqrt{d-1})\ell+2\right) \cdot (c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}.$$

化简后得到,

$$\begin{aligned}
c(c-1)^{\ell-\frac{1}{2}}(\bar{d}_R-1)^{\ell-\frac{1}{2}} &\le \left((2+\sqrt{d-1})\ell+2\right)\cdot(c-1)^{\ell/2}\cdot(d-1)^{\ell/2} \\
(\bar{d}_R-1)^{\ell-\frac{1}{2}} &\le \frac{\left((2+\sqrt{d-1})\ell+2\right)\sqrt{c-1}}{c}\left(\sqrt{\frac{d-1}{c-1}}\right)^{\ell} \\
\bar{d}_R - 1 &\le \underbrace{\left(\frac{\left((2+\sqrt{d-1})\ell+2\right)\sqrt{c-1}\sqrt{\bar{d}-1}}{c}\right)^{1/\ell}}_{\bigstar} \cdot \sqrt{\frac{d-1}{c-1}}
\end{aligned}$$

由于 $\bar{d} \le d$，我们有 $\bigstar = O(\ell)$，因此 $\bigstar^{1/\ell} = O(1)$，所以对于固定的 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 ℓ （仅依赖于 ε、c、d），使得 $\bigstar^{1/\ell} \le 1+\varepsilon$；由此通过不等式（2），可以确定一个固定的 δ，使得只要 $|S| \le \delta n$，我们就有

$$\bar{d}_R \le 1 + (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{d-1}{c-1}}.$$

□

下面我们来证明引理 8。

对于二分图 $G = (L_G \sqcup R_G,\ E_G)$ 和整数 ℓ，我们将 A_ℓ^{LL}，A_ℓ^{LR}，A_ℓ^{RL}，A_ℓ^{RR}定义为与长度为 ℓ的非回溯路径对应的算子，即

$$A_\ell^{LL} : L^2(L_G) \to L^2(L_G) \qquad , \qquad (A_\ell^{LL} f)(x) = \sum_{(e_1,\ldots,e_\ell),t(e_\ell)=x,s(e_1),t(e_\ell)\in L_G} f(s(e_1))$$

求和遍历所有长度为 ℓ 的非回溯路径，其他算子的定义也类似。

令 M 为从 G 右侧到 G左侧单步对应的算子，即M 有 $|R_G|$ 行和 $|L_G|$ 列，其中 M_{uv} 统计 $u \in R_G$ 与 $v \in L_G$之间的边数。于是，对每个整数 $\ell > 1$，以下递归公式成立:

$$\begin{aligned}
M^\top A_\ell^{LL} &= A_{\ell+1}^{RL} + (d-1)A_{\ell-1}^{RL} \\
M^\top A_\ell^{LR} &= A_{\ell+1}^{RR} + (d-1)A_{\ell-1}^{RR} \\
M A_\ell^{RL} &= A_{\ell+1}^{LL} + (c-1)A_{\ell-1}^{LL} \\
M A_\ell^{RR} &= A_{\ell+1}^{LR} + (c-1)A_{\ell-1}^{LR}
\end{aligned}$$

第一个公式可作如下解释。从 R 到 L 的每条长度为 $\ell+1$ 的非回溯路径，都由一条从 L 到 L 、长度为 ℓ 的非回溯路径再加上一步组成（这就是 $M^\top A_\ell^{LL}$因子）。反过来也成立，但 $M^\top A_\ell^{LL}$中计入的回溯路径除外；这类路径由一条长度为 $\ell-1$的非回溯路径构成，随后沿同一条边来回行走。选择这条边有 $d-1$ 种方法（因为它不能是长度为 $\ell-1$的路径中最后经过的那条边，否则它就不会被计入 $M^\top A_\ell^{LL}$），因此我们需要减去 $(d-1)A_{\ell-1}^{RL}$。其余公式的解释方式类似。

由对称性可得：

$$(A_\ell^{LL})^\top = A_\ell^{LL} \quad , \quad (A_\ell^{RR})^\top = A_\ell^{RR} \quad , \quad (A_\ell^{LR})^\top = A_\ell^{RL}$$

由于该图是二部的，我们有：

$$A_{2\ell}^{LR} = \mathbf{0} \quad , \quad A_{2\ell}^{RL} = \mathbf{0}$$
$$A_{2\ell+1}^{LL} = \mathbf{0} \quad , \quad A_{2\ell+1}^{RR} = \mathbf{0}$$

这些方程给出了 A_ℓ^{LL} 的递归公式，其初始条件如下：

$$\begin{aligned} A_2^{LL} &= MM^\top - cI \\ A_4^{LL} &= MM^\top A_2^{LL} - (c-1+d-1)A_2^{LL} - c(d-1)I \\ MM^\top A_\ell^{LL} &= A_{\ell+2}^{LL} + ((c-1)+(d-1))A_\ell^{LL} + (c-1)(d-1)A_{\ell-2}^{LL} \quad , \quad \forall \ell \geq 4 \end{aligned} \tag{3}$$

下面的引理在附录 A中证明，它指出，给定具有固定系数的线性递归关系，可以找到 $A_{2\ell}^{LL}$的非递归公式。

引理 9。 设(x_n) 是由系数为固定系数 A、 $B \in \mathbb{C}$ 的二阶线性递推定义的级数：

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}$$

假设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是特征多项式 $\lambda^2 - A\lambda - B$ 的（实数或复数）根。那么存在依赖于初始条件 x_0、 x_1 的 α、 $\beta \in \mathbb{C}$, 使得

$$x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

对每个 $n \geq 0$。

如果特征 多项式有一个重数为 2 的单根 λ，那么存在 α、 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得 t

$$x_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$$

对每个 $n \geq 0$。

给定双正则图的谱界后，我们利用该引理来限制 $A_{2\ell}^{LL}$ 的特征值。

引理 10. 设 G 是一个 (c,d) 双正则图。则存在一个整数系数多项式序列 $(p_\ell(x))$，使得对于 G 的每个特征对 (λ, v)， $p_\ell(\lambda^2)$ 都是 $A_{2\ell}^{LL}$ 的特征值；此外，对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，若

$$|\lambda| \in \{0\} \cup [\sqrt{d-1} - \sqrt{c-1}, \sqrt{d-1} + \sqrt{c-1}] \tag{4}$$

then

$$|p_\ell(\lambda^2)| \leq (2+\sqrt{d-1})\ell(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}. \tag{5}$$

证明。上文证明的递归公式（3）表明，存在一个多项式级数 $p_n(x)$，其系数为整数，并且满足 $A_{2n}^{LL} = p_n(MM^\top)$。注意，该图的邻接矩阵为

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M^\top & 0 \end{bmatrix}$$

因此，若 (λ, v) 是 G 的一个特征对，那么 (λ^2, v) 是

$$A_G^2 = \begin{bmatrix} MM^\top & 0 \\ 0 & M^\top M \end{bmatrix}.$$

这表明，只要 $p_\ell(\lambda^2)$ 是 $A_{2\ell}^{LL}$的一个特征值，λ 就是 G的一个特征值。反过来也成立。公式 (3) 可以变换为：$p_n(x)$ 满足以下方程：

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x - c \qquad , \qquad p_2(x) = x^2 + (2 - 2c - d)x + c(c-1) \\ xp_n(x) &= p_{n+1}(x) + (c - 1 + d - 1)p_n(x) + (c-1)(d-1)p_{n-1}(x) \end{aligned}$$

对所有 $n > 1$ 均成立。令 $n = 1$，得到一个涉及 $p_0(x)$ $p_1(x)$ $p_2(x)$ 的方程。我们可以求解该方程得到 $p_0(x)$，并对初始条件作出更简洁的描述：

$$p_0(x) = \frac{c}{c-1} \qquad , \qquad p_1(x) = x - c \tag{6}$$

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + (c - 1 + d - 1)p_n(x) + (c-1)(d-1)p_{n-1}(x) \tag{7}$$

对所有 $n > 0$ 均成立。

我们固定一个满足（t 的 4），也就是说：

$$|t| \in \{0\} \cup [\sqrt{d-1} - \sqrt{c-1}, \sqrt{d-1} + \sqrt{c-1}].$$

我们先讨论 $|t| \in (\sqrt{d-1} - \sqrt{c-1}, \sqrt{d-1} + \sqrt{c-1})$ 的情形，之后再考虑 t 是该线段端点之一或为 0 的边界情形。记 $x = t^2$。对于这个固定的 x，级数 $(p_n(x))_n$ 满足一个系数固定的二阶线性递推。利用引理 9，我们得出存在函数 $\alpha(x)$ $\lambda_1(x)$ $\beta(x)$ $\lambda_2(x)$，它们仅取决于 x、c 和 d，使得

$$p_n(x) = \alpha(x)(\lambda_1(x))^n + \beta(x)(\lambda_2(x))^n \tag{8}$$

对每个 n。

为了求出 λ_1，λ_2 我们求解 λ 特征多项式，即由式（7）推导出的以下二次方程：

$$x\lambda = \lambda^2 + (c - 1 + d - 1)\lambda + (c-1)(d-1)$$

为了得到

$$\lambda_{1,2}(x) = \frac{x - (c-1) - (d-1) \pm \sqrt{\Delta(x)}}{2}$$

其中

$$\Delta(x) = x^2 - 2x((c-1) + (d-1)) + (c-d)^2. \tag{9}$$

使用以下初始值：$p_0(x)$ $p_1(x)$ 将其代入6，再代回8，得到方程组

$$\begin{aligned} \frac{c}{c-1} &= \alpha(x)(\lambda_1(x))^0 + \beta(x)(\lambda_2(x))^0 = \alpha(x) + \beta(x) \\ x - c &= \alpha(x)(\lambda_1(x))^1 + \beta(x)(\lambda_2(x))^1 = \alpha(x)\lambda_1(x) + \beta(x)\lambda_2(x) \end{aligned}$$

其解为

$$\alpha(x)=\frac{(c-1)x-(c-1)^2-(c-1)+(c-1)(d-1)+(c-1)\sqrt{\Delta(x)}-x+d-1+\sqrt{\Delta(x)}}{2(c-1)\sqrt{\Delta(x)}}$$
$$\beta(x)=\frac{c}{c-1}-\alpha(x).$$

我们通过求解 $\Delta(x)=0$，检验何时成立9）以求得 x:

$$\begin{aligned}x_{1,2}&=\frac{2((c-1)+(d-1))\pm\sqrt{4(c-1+d-1)^2-4(c-d)^2}}{2}\\&=(c-1+d-1)\pm\sqrt{(c+d)^2-4(c+d)+4-(c-d)^2}\\&=(c-1+d-1)\pm\sqrt{c^2+2cd+d^2-4c-4d+4-c^2+2cd-d^2}\\&=(c-1+d-1)\pm\sqrt{4cd-4c-4d+4}\\&=(c-1+d-1)\pm2\sqrt{c-1}\sqrt{d-1}\\&=(\sqrt{d-1}\pm\sqrt{c-1})^2\end{aligned}$$

我们看到，$\Delta(x)$ 是关于 x 的二次式，根为 $(\sqrt{d-1}\pm\sqrt{c-1})^2$。这就得到了 $\Delta(x)$ 的一个漂亮的因式分解:

$$\begin{aligned}\Delta(x)&=x^2-2x((c-1)+(d-1))+(c-d)^2\\&=\left(x-\left(\sqrt{d-1}+\sqrt{c-1}\right)^2\right)\left(x-\left(\sqrt{d-1}-\sqrt{c-1}\right)^2\right)\end{aligned}$$

回想一下，对于我们固定的 x，有 $\sqrt{x}=t\in(\sqrt{d-1}-\sqrt{c-1},\ \sqrt{d-1}+\sqrt{c-1})$，因此乘积的第一项为负，第二项为正，所以 $\Delta<0$，从而 $\lambda_{1,2}$ 是两个互为共轭的复数，其模为

$$\begin{aligned}|\lambda_{1,2}|^2&=\frac{(x-(c-1)-(d-1))^2-\Delta(x)}{4}\\&=\frac{x^2-2x((c-1)+(d-1))+(c-1+d-1)^2-(x^2-2x((c-1)+(d-1))+(c-d)^2)}{4}\\&=\frac{(c+d-2)^2-(c-d)^2}{4}=(c-1)(d-1)\end{aligned}\tag{10}$$

类似的计算表明，α，β 互为共轭，模为

$$|\alpha|^2=|\beta|^2=\frac{x(x-cd)}{\Delta(x)\cdot(c-1)}$$

这就完成了对所有此类 x 的证明:

$$\begin{aligned}|p_\ell(x)|&=|\alpha(x)\lambda_1^\ell+\beta(x)\lambda_2^\ell|\le|\alpha(x)\lambda_1^\ell|+|\beta(x)\lambda_2^\ell|\\&=|\alpha(x)||\lambda_1|^\ell+|\beta(x)||\lambda_2|^\ell\\&=2\sqrt{\frac{x(x-cd)}{\Delta(x)\cdot(c-1)}}(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}\end{aligned}$$

我们记住 x 是固定的，因此当 ℓ 足够大时，该表达式小于 $(2+\sqrt{d-1})\cdot\overline{\ell\cdot(c-1)}^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}$。

剩下的情况是 $x=t^2$ 当 $t=0$，$\sqrt{d-1}\pm\sqrt{c-1}$:

1. $t = 0$。我们采用相同的方法，得到特征多项式为

$$\lambda^2 + (c - 1 + d - 1)\lambda + (c - 1)(d - 1)$$

其根为

$$\lambda_1 = -(c - 1) \quad , \quad \lambda_2 = -(d - 1).$$

利用初始条件（$p_0(0) = c/(c - 1)$, $p_1(0) = -c$），我们得到

$$\alpha(0) = \frac{c}{c - 1} \quad , \quad \beta(0) = 0$$

利用 $c < d$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} |p_\ell(0)| &= |\alpha(0)\lambda_1^\ell + \beta(0)\lambda_2^\ell| \\ &= \frac{c}{c - 1}(c - 1)^\ell \\ &< 2l(c - 1)^{\ell/2}(c - 1)^{\ell/2} \\ &< 2l(c - 1)^{\ell/2}(d - 1)^{\ell/2}. \end{aligned}$$

2. $t = \sqrt{d - 1} + \sqrt{c - 1}$。那么 $x = t^2 = (\sqrt{d - 1} + \sqrt{c - 1})^2 = d - 1 + c - 1 + 2\sqrt{d - 1}\sqrt{c - 1}$, 特征多项式有一个二重根，即

$$\lambda = \frac{x - (c - 1) - (d - 1)}{2} = \sqrt{d - 1}\sqrt{c - 1}.$$

因此，解的形式为

$$p_n(x) = (\alpha(x) + n\beta(x))(c - 1)^{n/2}(d - 1)^{n/2}.$$

利用初始值，我们得到

$$\alpha(x) = \frac{c}{c - 1} \quad , \quad \beta(x) = \frac{x - c}{\sqrt{d - 1}\sqrt{c - 1}} - \frac{c}{c - 1} = 2 + \frac{d - 2}{\sqrt{d - 1}\sqrt{c - 1}} - \frac{c}{c - 1}.$$

$1 < \frac{c}{c-1} \leq 2$ 因此 $\beta(x) \leq \sqrt{d} - 1 + 1$，总计得到

$$\begin{aligned} |p_\ell(x)| &= |\alpha(x) + \ell\beta(x)|(c - 1)^{\ell/2}(d - 1)^{\ell/2} \\ &\leq \left(\left|\frac{1}{\ell} \cdot \frac{c}{c - 1}\right| + |\beta(x)|\right) \ell(c - 1)^{\ell/2}(d - 1)^{\ell/2} \\ &\leq \left(2 + \sqrt{d - 1}\right) \ell(c - 1)^{\ell/2}(d - 1)^{\ell/2} \end{aligned}$$

对于足够大的 ℓ。

3. $t = \sqrt{d - 1} - \sqrt{c - 1}$。我们得到 $x = t^2 = d - 1 + c - 1 - 2\sqrt{d - 1}\sqrt{c - 1}$，其余部分与前一种情况的计算相同。

□

关于 $A_{2\ell}^{LL}$的谱界给出了完全包含在一个小集合中的非回溯路径数量的界，因此得出 引理 8。

引理 8的证明。 回忆一下， $M_{2\ell}(S,\ G)$ 统计长度为 2ℓ 且起点和终点均在 S中的非回溯路径数量，因此根据 A_n^{LL}算子e的定义，我们有 $M_{2\ell}(S,\ G)=\langle A_{2\ell}^{LL}\mathbb{1}_S,\mathbb{1}_S\rangle$。

注意到 $A_{2\ell}^{LL}\mathbb{1}_L=c(c-1)^{\ell-1}(d-1)^{\ell}\mathbb{1}_L$，因为从给定顶点出发的每条非回溯路径，都是先选取第一条左到右边（我们有 c 条这样的边可供选择），然后交替选取与当前顶点相邻的任意一条 d 边或 c 边，但不能选取到达该顶点时经过的那条边。

令 $\mathbb{1}_S=\frac{|S|}{n}\mathbb{1}_L+r$，其中 $r\perp\mathbb{1}_L$，且 $\|r\|_2^2\le\|\mathbb{1}_S\|_2^2=|S|$。由于该图是拉曼努金图，其谱分解中的非平凡特征值的绝对值属于集合 $\{0\}\cup[\sqrt{d-1}-\sqrt{c-1},\ \sqrt{d-1}+\sqrt{c-1}]$。我们只关注非平凡特征值，因为 $r\perp\mathbb{1}_L$，因此在正交基 r 的展开中，只有对应于非平凡特征值的特征向量会出现。我们使用 引理 10得到

$$\langle A_{2\ell}^{LL}r,r\rangle\le(2+\sqrt{d-1})\ell(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}\cdot\|r\|_2^2.$$

综合以上可得

$$\begin{aligned}
M_{2\ell}(S,G)=\langle A_{2\ell}^{LL}\mathbb{1}_S,\mathbb{1}_S\rangle&=\left\langle A_{2\ell}^{LL}\frac{|S|}{n}\mathbb{1}_L+r,\frac{|S|}{n}\mathbb{1}_L+r\right\rangle\\
&=\frac{|S|^2}{n^2}\langle A_{2\ell}^{LL}\mathbb{1}_L,\mathbb{1}_L\rangle+\langle A_{2\ell}^{LL}r,r\rangle\\
&=\frac{|S|^2}{n^2}\cdot c(c-1)^{\ell-1}(d-1)^{\ell}\langle\mathbb{1}_L,\mathbb{1}_L\rangle+\langle A_{2\ell}^{LL}r,r\rangle\\
&\le\frac{|S|^2}{n}c(c-1)^{\ell-1}(d-1)^{\ell}+(2+\sqrt{d-1})\ell(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}\|r\|_2^2\\
&\le|S|\left(\frac{|S|\cdot c\cdot(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}}{n(c-1)}+(2+\sqrt{d-1})\ell\right)(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}\\
&\le|S|\left(\frac{c}{c-1}+(2+\sqrt{d-1})\ell\right)(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}\\
&\le|S|\left((2+\sqrt{d-1})\ell+2\right)(c-1)^{\ell/2}(d-1)^{\ell/2}
\end{aligned}$$

□

5 随机构件

本节证明，存在这样的二分图：每个由少量左侧顶点构成的集合，在右侧都有一个唯一邻居。我们从与以下文献中类似的分布抽取一个随机双正则图：[Pip77],并使用与 [Vad+12，定理 44].

引理 11。 对于任意整数 L,R,c,d，若 $Lc=Rd,\ L>R,\ c>3$，且 k是满足以下不等式的整数，

$$k^{\frac{c-3}{2}}\le\frac{1}{2Le}\cdot\left(\frac{R}{3ec}\right)^{\frac{c-1}{2}}$$

那么存在一个(c,d)-双正则图，其两侧分别为 $[L]$ 和 $[R]$，并且每个大小至多为k 的左侧顶点集合都有一个唯一邻居。

我们按如下方式随机生成一个 (c,d)-双正则图：固定左侧的 L 个顶点和右侧的 R 个顶点（$cL=dR$），将每个左侧顶点复制 c 份，将每个右侧顶点复制 d 份，并通过均匀随机匹配将它们连接起来。也就是说，选取一个均匀随机置换π：$L\times[c]\to R\times[d]$，对于每个 $u\in L,v\in R,i\in[c],j\in[d]$，若 $\pi(u,i)=(v,j)$，则添加 (u,v) 作为一条边。注意，我们允许两个顶点之间存在重边（如果有多个 i,j 满足 $\pi(u,i)=(v,j)$）。

设 G 是从上述分布中抽取的随机二分图，其左侧有 L 个顶点，右侧有 R 个顶点。设 A 是左侧顶点的一个子集，大小为 k。注意，如果 A 至少扩张 $(c+1)/2$，那么根据一个简单的计数论证， A 有一个唯一邻居。因此，只需找出 A 至少扩张 $(c+1)/2$ 的概率。

固定 ck 条从 A 出发的边的任意排序，并将其记为 e_1，...， e_{ck}。如果 e_i 接触到一个此前已覆盖的顶点，我们就称它为**重复边**，也就是说，它的右端点属于集合 e_1，...， e_{i-1} 的右端点集合。注意，如果 A 没有至少扩张 $(c+1)/2$，那么同样通过一个简单的计数论证，至少有 $(c-1)k/2$ 条重复边。这是因为重复边的数量与 A 的邻居集合的大小之和，等于从 A 出发的边数，即 ck。

注意，对于每个 i，如果 e_i 接触到至多 $i-1$ 个此前已覆盖的顶点之一，它就是一条重复边。这意味着 **概率**$[e_i$ 是一条重复边$] \le \frac{i-1}{R} < \frac{ck}{R}$。此外，如果我们以最初 $i-1$ 条边中有一些也是重复边这一事件为条件，那么 e_i 是重复边的概率只会降低，因为这意味着"禁止"的端点更少。由此可得，对于每个由 l 条边组成的集合：

$$\mathbf{Pr}[e_{i_1},\dots,e_{i_l} \text{ are repeats}] = \prod_{j=1}^{l} \mathbf{Pr}[e_{i_j} \text{ is a repeat} \mid e_{i_1},\dots e_{i_{j-1}} \text{ are repeats}] < \left(\frac{ck}{R}\right)^l.$$

如果 A 扩张得不够，那么就会有许多重复项。我们可以用这一点来界定 A 没有唯一邻居的概率：

$$\begin{aligned}
\textbf{概率}[A \text{ 没有唯一邻居}] &\le \mathbf{Pr}[A \text{ expands by } < (c+1)/2] \\
&\le \mathbf{Pr}[\text{there are at least } (c-1)k/2 \textit{ repeats}] \\
&\le \sum_{i_1,\dots,i_{(c-1)k/2} \in \binom{ck}{(c-1)k/2}} \mathbf{Pr}[\{e_{i_1},\dots,e_{i_{(c-1)k/2}}\} \text{ are repeats}] \\
&< \binom{ck}{\frac{c-1}{2}k} \cdot \left(\frac{ck}{R}\right)^{\frac{c-1}{2}k}
\end{aligned}$$

对 A的所有可能取值应用并集界：

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}[\exists \text{“bad” } A \text{ of size } k] &\le \binom{L}{k} \cdot \mathbf{Pr}[A \text{ expands by } < (c+1)/2] \\
&\le \binom{L}{k} \cdot \binom{ck}{\frac{c-1}{2}k} \cdot \left(\frac{ck}{R}\right)^{\frac{c-1}{2}k} \\
&\le \left(\frac{Le}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{cke}{\frac{c-1}{2}k}\right)^{\frac{c-1}{2}k} \cdot \left(\frac{ck}{R}\right)^{\frac{c-1}{2}k} \qquad (11) \\
&= \left(\frac{Le}{k} \cdot \left(\frac{2ce}{c-1} \cdot \frac{ck}{R}\right)^{\frac{c-1}{2}}\right)^k \\
&\le \left(\frac{Le}{k} \cdot \left(\frac{3eck}{R}\right)^{\frac{c-1}{2}}\right)^k
\end{aligned}$$

最后一个不等式由假设 $c \ge 3$，因此 $\frac{2c}{c-1} \le 3$得出。 —

现在我们可以证明引理 11。

引理*11*的证明。从上述分布中抽取一个$(c,\ d)$-双正则图 $G = ([L] \sqcup [R],\ E)$。令 k 为满足（11）的整数。利用并集界和（11）中的不等式，可得（其中

概率是对 G的选取取平均）：

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}[\exists \text{“bad” } A \subseteq [L] \text{ of size} \le k] &= \sum_{a=1}^{k} \mathbf{Pr}[\exists \text{“bad” } A \subseteq [L] \text{ of size } a] \\ &\le \sum_{a=1}^{k} \left(\frac{Le}{a} \cdot \left(\frac{3eca}{R} \right)^{\frac{c-1}{2}} \right)^a \\ &< \sum_{a=1}^{\infty} \left(\frac{Le}{k} \cdot \left(\frac{3eck}{R} \right)^{\frac{c-1}{2}} \right)^a \\ &= \sum_{a=1}^{\infty} \left(k^{\frac{c-1}{3}} \cdot Le \cdot \left(\frac{3ec}{R} \right)^{\frac{c-1}{2}} \right)^a \\ &\le \sum_{a=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^a < 1.\end{aligned}$$

我们看到，随机图以严格大于零的概率不存在大小为 $\le k$ 的“坏”子集，因此存在具有所需唯一邻居性质的图。

□

6 构造

6.1 路由积的定义

先简要介绍一下编码理论的背景。纠错码通常通过一个 $m \times n$校验矩阵 H 给出，使得 $C = \mathrm{Ker}\ H \subseteq \{0,1\}^n$。矩阵 H可以表示为一个二分图，称为校验图，其左侧和右侧分别包含 n 和 m 个顶点；当且仅当 $H(j,i) \neq 0$ 时，两者之间存在一条边 $i \sim j$。给定一个二分图 B 和一个基础码 $C_0 = \mathrm{Ker}\, H_0$ [Tan81]，即可定义 Tanner 码。理解路由积的一种方式是从编码的角度出发。考虑 H_0 的校验图 B_0，并将 B 和 B_0 的路由积定义为 Tanner 码 $\mathcal{C}(B, C_0)$ 的校验图。

下面给出路由积的一种更详细、更具组合性的定义，不涉及编码。设 $G = (L \sqcup R, E)$ 是一个 (c,d)-双正则图，$G_0 = (L_0 \sqcup R_0, E_0)$ 是一个 (c_0, d_0)-双正则图。我们把 G 看作一个大图（实际应用中，它是一个拉曼努金图的无限族），把 G_0 看作一个固定规模的图（构件）。假设 $|L_0| = d$，并将 G 的边视为一个函数 $E\colon R \times [d] \to L$，它把一个右侧顶点 v 和一个索引 i 映射到 G 中 v 的第 i^{th} 个邻居。

我们可以将路由积图 $G' = G \circ G_0$ 定义为一个二分图，其左侧为 L，右侧为笛卡尔积 $R \times R_0$，边的集合为

$$E' = \{(E(v,i),(v,j))\colon v \in R, i \in [d], j \in [R_0], (i,j) \in E_0\}.$$

也就是说，我们在 R 中为每个顶点写下 R_0 个副本；大图 G 中的每个右侧顶点 v，以及小构件 G_0 中的一条边 $(i,\ j)$，都会产生一条边，连接 G 中 v 的 i^{th} 邻居与分配给 G' 中 v 的 G_0 副本中的 j^{th} 顶点。换句话说，我们使用 G_0 将大图 G 的每条边路由为乘积图 G' 中的 c_0 条边。

更准确地说，对于每个 $v \in R$，G' 中左侧为 $N_G(v)$、右侧为 $(v,\ \cdot)$ 的二部子图都同构于 G_0。这意味着，粗略来说，唯一邻居性质会从小图传递到乘积图：

引理 12。 令 $S \subseteq L$, $v \in N_G(S)$。定义 $S' = \{i\colon\ E(v,i) \in S\} \subseteq [d]$ 为 S 中 v 的带索引邻居。如果 S' 作为构件 G_0 中的顶点集合，在 G_0 中有唯一邻居 $j \in R_0$，那么 (v,j) 就是乘积图 G' 中 S 的唯一邻居。

证明是直　　视线停留在图 1时显而易见，但为完整起见，证明见附录　　A.

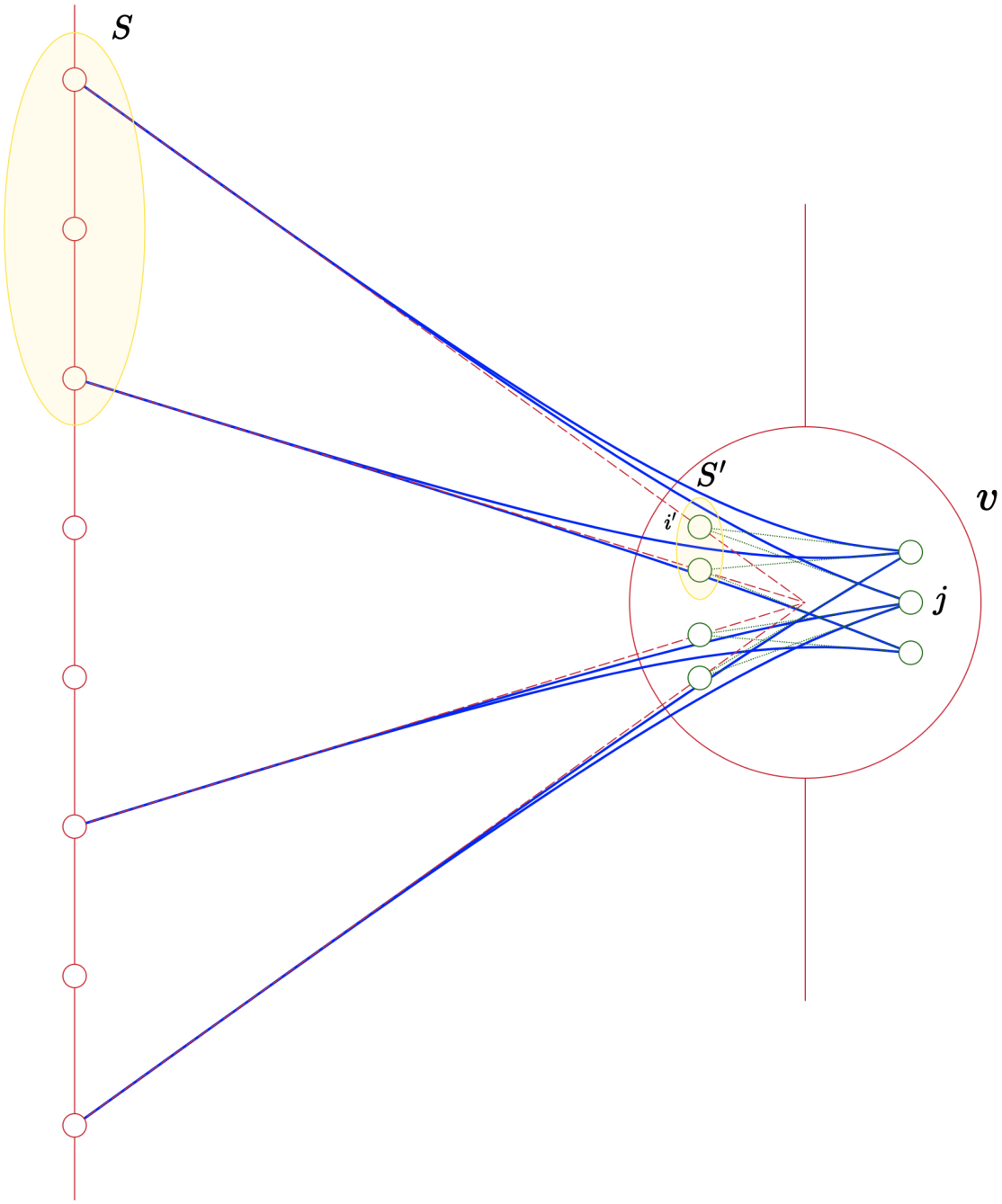

图 1：二分图 G （红色虚线）、小型构件 G_0 （绿色点线）以及路由积 $G' = G \circ G_0$（蓝色实线）的示例。集合 $S \subseteq L$ 有一个邻居 $v \in R$，因此 S 与 S' 相关联，S' 是 G_0 的副本中左侧顶点的集合，而该副本与 v 相关联。由于 (i', j) 是 G_0 中连接 j 和 S' 的唯一一条边，因此 (v, j) 是 G' 中 S 的唯一邻居。

6.2 定理1 的证明

设 q 为素数幂，c_0 为整数，且 $\alpha > 1$。假设 $\alpha c_0(q+1)$ 为整数。在下述某些假设下，我们构造一个无限族的 $(c_0(q+1), \alpha c_0(q+1))$-双正则图，并具有唯一邻居性质。

记 $c = q+1$ 和 $d = q^3+1$。根据定理 3，存在一种高效构造，可生成一个无限族的 (c,d)-双正则拉曼努金图 (G_n)。令 $G_0 = (L_0 \sqcup R_0, E_0)$ 为一个构件：一个 c_0-左正则二部图，其左侧有 $|L_0| = d = q^3+1$ 个顶点，右侧有 R_0 个顶点，并且每个大小足够小的左侧集合在右侧都有一个唯一邻居；这里“足够小”是指引理 11给出的界。为了使构造出的图的左侧比右侧大 α 倍，我们令 $R_0 = \frac{d}{\alpha c} = \frac{q^3+1}{\alpha(q+1)}$。

我们将 $G'_n = G_n \circ G_0$ 定义为 G_n 和 G_0的路由积。为方便起见，在这段（简短的）证明中，我们省略记号中的 n。

令 $\varepsilon < \frac{1}{q}$。由 定理 2，存在 $\delta > 0$，使得对于任意大小至多为 $S \subseteq L$ 的 $\delta|L|$，“平均右度” d_S（即 $N_G(S)$ 中顶点的度的平均值）在诱导子图 $S \sqcup N_G(S)$中有如下上界：

$$\bar{d}_S := \frac{c|S|}{|N_G(S)|} \le 1 + (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{d-1}{c-1}}.$$

我们证明，这样的 S 在 G'中有一个唯一邻居。

注意到 $\frac{d-1}{c-1} = q^2$，因此由于 $\varepsilon < \frac{1}{q}$，我们有一个顶点 $v \in R$，它在 G中的“度”至多为 $q+1$，也就是说，集合 $S' \subseteq [d]$ 是 v在 S 中的邻居集合，其大小至多为 $q+1$。由 引理 12，若 S'作为 G_0中的左侧顶点集合，在 j 中有一个唯一邻居 G_0，那么原集合 S 在 (v,j) 中有一个唯一邻居 G_0。

接下来需要选择参数，使得所有大小至多为 $q+1$ 的左侧顶点集在 G_0中都有一个唯一邻居。根据 引理 11，我们需要满足：

$$(q+1)^{\frac{c_0-3}{2}} \le \frac{1}{2(q^3+1)e} \cdot \left(\frac{\frac{q^3+1}{\alpha(q+1)}}{3ec_0} \right)^{\frac{c_0-1}{2}}. \tag{12}$$

左端为 $O\left(q^{\frac{c_0-3}{2}}\right)$，右端为 $\Theta\left(q^{c_0-4}\right)$，因此如果 $c_0 > 5$，那么对于充分大的 q，该构造给出一个唯一邻居扩展图。也就是说，存在某个 $\hat{q}(c_0, \alpha)$，使得当 $q > \hat{q}$ 时，（12）成立。因此，我们构造出了定理 1中所承诺的二部唯一邻居扩展图。

7 未来工作

我们方法的主要缺陷在于构件的非构造性。从理论上讲，由于构件的大小是常数，这并不是问题。然而，即使对于较小的 q值，穷举搜索也不切实际。这是因为构件的大小关于 q 呈立方增长，因此搜索空间的大小关于 q^3呈指数增长。一个自然的问题是，是否能够以高效的方式构造这样的构件，因为这样便能使整个唯一邻居扩展图族在实践中具有可构造性。对于我们工作中所选的二分拉曼努金族（即 Ballantine 等人构造的族 [Bal+15]），我们提出如下问题。

问题 13. 对于哪些素数幂 q 和实数 $\alpha \ge 1$，可以高效地构造一个双正则图，其左侧为 q^3+1、右侧为 $\frac{q^3+1}{\alpha(q+1)}$，并且每个大小至多为 $q+1$的左侧集合都有一个唯一邻居？

我们注意到，[AC02中的引理 4 给出的固定规模图3] 是一个很好的构件（适用于 $\alpha = 22/21$ 以及44正则拉曼努金图族的边-顶点关联图），事实上，这些图可用于构造二分唯一邻居扩展图。

既然我们证明了随机构件以不可忽略的概率适用于我们的构造，那么通过简单地随机抽取构件并测试其是否符合要求来构造这样的构件，或许会很有趣。随机抽取很简单，因此剩下的任务就是进行测试。为此，我们提出：

问题 14. 给定一个二分图，能否高效地找到一个最小的非空左侧顶点集合，使其没有唯一邻居？

目前我们尚不知道比枚举所有左侧顶点集更好的方法；这种做法的复杂度随图的大小呈指数增长，因此并不实用。关于测试随机图扩展性的一种有趣方法，请参阅 [AK19] 。

本文提出的方法并不局限于 $(q+1, q^3+1)$-双正则拉曼努金族。因此，我们也可以反过来提出这个问题——寻找一个构件（通过抽样或其他任何方式），再看看能否高效地构造一个二分拉曼努金族，使其能够奏效；也就是说，能否借此改写定理 1的证明。这凸显了一个广为人知且自然的问题：如何构造具有任意度数的拉曼努金图，尤其是在二分双正则情形下。

问题 15。 对于哪些整数 $c < d$ ，可以高效地构造一个无限族的(c, d)-双正则拉马努金图？

我们注意到，我们的构造与“右侧唯一邻居扩展性”相去甚远，因为单个构件的完整右侧是一个常数规模的集合，在左侧没有唯一邻居。我们想知道，是否可能构造这样一种二分图：所有 小规模集合（无论它们包含于任一侧还是同时包含于两侧）都有唯一邻居。

参考文献

[AC02] Noga Alon 和 Michael Capalbo。“显式唯一邻居扩展图”。载于：第43届 IEEE 计算机科学基础年度研讨会，2002年。会议论文集。IEEE。2002年，第73–79页。[AK19] Benny Applebaum 和 Eliran Kachlon。“无禁子图采样图，以及误差可忽略的不平衡扩展图”。载于：2019年 IEEE 第60届计算机科学基础年度研讨会（FOCS）。IEEE。2019年，第171–179页。[ALM96] Sanjeev Arora、Frank Thomson Leighton 和 Bruce M Maggs。“无阻塞网络中的在线路径选择算法”。载于：SIAM 计算杂志 25.3（1996），第600–625页。[Bal+15] Cristina Ballantine、Brooke Feigon、Radhika Ganapathy、Janne Kool、Kathrin Maurischat 和 Amy Wooding。“拉马努金双图的显式构造”。载于：欧洲女性与数论。施普林格，2015年，第1–16页。[BDH22] Gerandy Brito、Ioana Dumitriu 和 Kameron Decker Harris。“随机二部双正则图中的谱隙及其应用”。载于：组合学、概率与计算 31.2（2022），第229–267页。[Bec16] Oren Becker。“对称唯一邻居扩展图与优质低密度奇偶校验码”。载于：离散应用数学 211（2016），第211–216页。ISSN：0166-218X。doi：https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.04.022。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X16301810。[BV09] Eli Ben-Sasson 和 Michael Viderman。“弱平滑码的张量积具有鲁棒性”。载于：计算理论 5.1（2009），第239–255页。[Cap+02] Michael Capalbo、Omer Reingold、Salil Vadhan 和 Avi Wigderson。“随机性导体与突破度数/2障碍的常数度扩展”。载于：第34届 ACM 理论计算年度研讨会论文集。2002年，第659–668页。[DSW06] Irit Dinur、Madhu Sudan 和 Avi Wigderson。“低密度奇偶校验码张量积的鲁棒局部可测试性”。载于：近似、随机化与组合优化。算法与技术。施普林格，2006年，第304–315页。[FL96] Keqin Feng 和 Wen-Ch’ing Winnie Li。“ 超图谱及其应用 ”。载于：数论杂志 60.1 （ 1996 ），第 1–22 页。[GM21] Aurelien Gribinski 和 Adam W Marcus。“所有度数的双正则二部拉马努金图的存在性与多项式时间构造”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2108.02534（2021）。[GM88] Chris D Godsil 和 Bojan Mohar。“无限图的游走生成函数与谱测度”。载于：线性代数及其应用 107（1988），第191–206页。[Hae95] Willem H Haemers。“交错特征值与图”。载于：线性代数及其应用 226（1995），第593–616页。[Kah95] Nabil Kahale。“正则图的特征值与扩展性”。载于：ACM杂志（JACM）42.5（1995），第1091–1106页。[Kam19] Amitay Kamber。 L^p 扩展图。2019年。arXiv：1609.04433 [math.CO].[KK22] Amitay Kamber 和 Tali Kaufman。“通过闭轨道研究组合学：数论拉马努金图并非唯一邻居扩展图”。载于：第54届 ACM SIGACT 理论计算年度研讨会论文集。2022年，第426–435页。[LPS88] Alexander Lubotzky、Ralph Phillips 和 Peter Sarnak。“拉马努金图”。载于：Combinatorica 8.3（1988），第261–277页。[LS96] Wen-Ch’ing Winnie Li 和 Patrick Solé。“正则图与超图的谱及正交多项式”。载于：欧洲组合学杂志 17.5（1996），第461–477页。doi：https://doi.org/10.1006/eujc.1996.0040。

[Mar88] G. A. Margulis。《组合方案的显式群论构造及其在扩展器与集中器设计中的应用》。载于: *Problemy peredachi informatsii*24.1（1988），第 51–60 页。[MSS13] Adam Marcus、Daniel A Spielman 和 Nikhil Srivastava。《交错族 I：任意度的二部 Ramanujan 图》。载于：*2013 IEEE* 第 *54* 届计算机科学基础年度研讨会。IEEE。2013 年，第 529–537 页。[Nil91] Alon Nilli。《关于图的第二特征值》。载于：离散数学91.2（1991），第 207–210 页。[Pip77] Nicholas Pippenger。《超集中器》。载于：*SIAM* 计算杂志6.2（1977），第 298–304 页。[Pip93] Nicholas Pippenger。《自路由超集中器》。载于：第二十五届 *ACM* 计算理论研讨会论文集。1993 年，第 355–361 页。[PU89] David Peleg 和 Eli Upfal。《令牌分配问题》。载于：*SIAM* 计算杂志18.2（1989），第 229–243 页。[SS96] Michael Sipser 和 Daniel A Spielman。《扩展码》。载于：*IEEE* 信息论汇刊42.6（1996），第 1710–1722 页。[Tan81] R Tanner。《低复杂度码的递归方法》。载于：*IEEE* 信息论汇刊27.5（1981），第 533–547 页。[Vad+12] Salil P Vadhan 等。《伪随机性》。载于：理论计算机科学基础与前沿7.1–3（2012）。

8 附录 A

我们重新陈述并证明了全文中用到的引理。

引理 5. 设 G 是一个 d-正则拉曼努金图， G' 是其边-顶点关联图。那么 G' 是一个$(2,\ d)$-双正则拉马努金图。

证明。 设 $G=(V,\ E)$ 是一个 d-正则拉曼努金图。 G' 的邻接矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & M\\ M^\top & 0\end{bmatrix}$，其中 M 有 $|E|$ 行，每行包含两个 1； $|V|$ 有 d 1 列，每列包含 d 1 个。设 v 是 A 的一个特征向量，其特征值为 λ；那么 v 是 A^2 的一个特征向量，其特征值为 λ^2。注意到

$$A^2=\begin{bmatrix}MM^\top & 0\\ 0 & M^\top M\end{bmatrix}$$

因此，只需考虑 $M^\top M$ 的谱；它本质上对应于这样一个算子：从 G 的一个顶点出发，沿游走到与其相接的一条边，再回到该边的某个端点（可能是起始顶点）。

对于每个 $v\in V$，都有 d 种方式从它游走到一条边，再返回 v；所有其他合法路径都对应于选择一条与 v相接的边。由此可得 $M^\top M=dI+A$，因此 G'的每个特征值 λ 都满足 $\lambda^2=d+\sigma$，其中 G的一个特征值为 σ。

注意到 $|\sigma|\le 2\sqrt{d-1}$ （因为 G 是拉曼努金图），即可证明该引理，因此

$$d-2\sqrt{d-1}\le\lambda^2\le d+2\sqrt{d-1}$$

不等式两端的项可验证为 $(\sqrt{d-1}\pm 1)^2$，因此得到 $|\lambda|\in[\sqrt{d-1}-1,\sqrt{d-1}+1]$，这正是所需结果（回想一下，在 G'中，左正则度为 $c=2$，所以 $\sqrt{c-1}=1$）。 □

引理 9. 设 (x_n) 为一个通过系数固定为 A、$B\in\mathbb{C}$的二阶线性递推定义的级数：

$$x_n=Ax_{n-1}+Bx_{n-2}$$

设 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 是特征多项式 $\lambda^2-A\lambda-B$ 的（实或复）根。那么存在α、$\beta\in\mathbb{C}$，它们取决于初始条件 x_0、x_1，使得

$$x_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$$

对每个 $n\ge 0$ 都成立。

如果特征多项 式只有一个重数为2的根 λ，那么存在 α、$\beta\in\mathbb{C}$，使得 at

$$x_n=\alpha\lambda^n+\beta n\lambda^n$$

对每个 $n\ge 0$ 都成立。

证明。 注意，对每个 $n\ge 2$，我们都有

$$\begin{bmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Ax_{n-1}+Bx_{n-2}\\ x_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ x_{n-2}\end{bmatrix}$$

将 2×2 矩阵记作 D，因此根据归纳法，

$$\begin{bmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{bmatrix}=D^n\begin{bmatrix}x_1\\ x_0\end{bmatrix}$$

让我们对 D 进行对角化。特征多项式为

$$p_D(\lambda)=\det(\lambda I-D)=\begin{vmatrix}\lambda-A & -B\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-A)-B=\lambda^2-A\lambda-B$$

如果 $p_D(\lambda)$ 有两个不同根 λ_1, λ_2，那么该矩阵可对角化；这意味着存在一个 2×2矩阵 M，使得 $D = M \cdot \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\} \cdot M^{-1}$。我们得到：

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^n M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

我们可以显式计算 M, M^{-1}，将矩阵相乘，得到 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，使得 $x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$，如所需。

否则，若 $p_D(\lambda)$ 有一个重数为 2 的单根 λ，那么我们可以求出其若尔当标准形，即找到满足以下条件的 M

$$D = M \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} M^{-1}$$
$$D^n = M \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n M^{-1} = M \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} M^{-1}$$

最后一个等式由简单的归纳法得出。

类似地，我们得到

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

同样，我们可以找到 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，如所需。 □

对于下面的引理，提醒一下：$G = (L \sqcup R, E)$ 是一个 (c, d)-双正则图，$G_0 = (L_0 \sqcup R_0, E_0)$ 是一个 (c_0, d_0)-双正则图，并且 $G' = G \circ G_0$ 是 G 与 G_0 的路由积。回顾一下，当 $v \in R$ 是 G 的右侧顶点时，G' 的边为 $(E(v, i), (v, j))$；$i \in [d]$、$E(v, i)$ 是根据 G 得到的 v 的 i^{th} 个邻居，并且 $(i, j) \in E_0$。

引理 12。 令 $S \subseteq L$, $v \in N_G(S)$。定义 $S' = \{i : E(v, i) \in S\} \subseteq [d]$ 为 v 在S中的带索引邻居。若 S'作为构件 G_0中的顶点集合，在 G_0中有唯一邻居 $j \in R_0$，那么(v, j) 是乘积图 G'中 S 的唯一邻居。

证明。 假设 $i' \in S'$ 是 G_0中 j 的唯一邻居。根据路由积的定义，我们有 $(E(v, i'), (v, j))$ 是 G中的一条边。由于 $i' \in S'$，我们有 $E(v, i') \in S$，因此 (v, j) 确实是 G'中 S 的一个邻居。因此，只需证明它是唯一的，也就是说，证明 $E(v, i')$ 是 S中 (v, j) 的唯一邻居。

v, j 在 G 中的邻居是：对于所有满足 $(i, j) \in E_0$ 的 i，都有 $E(v, i)$。如果 $E(v, i) \in S$，那么根据 S' 的定义，我们有 $i \in S'$，因此 i 是 E_0 中 j 的邻居。但我们知道 j 是 E_0 中 S' 的唯一邻居，因此必有 $i = i'$，而且 (v, j) 是 G' 中 S 的唯一邻居。 □