arXiv:2301.03079v1 [math.FA] 8 Jan 2023

L^p 测度的模拟

L. DE CARLI 和 E. LIFLYAND

Abstract. 受傅里叶分析的一般兴趣以及某些具体问题的启发，我们为测度构造了 L^p 空间的类比。结果表明，通常函数 L^p 空间的大多数标准性质都可以推广到测度情形。我们通过例子展示所得结果，并将其应用于得到一个不确定性原理的版本，以及一个关于有界变差函数的傅里叶变换可积性的结果。

1. 引言

翻阅任何一本关于傅里叶分析的著作，或仅仅查看其目录，都能看到，傅里叶变换或希尔伯特变换的 L^1 理论与相应的 L^p理论相辅相成。对于相应变换的测度理论，情况却并非如此，参见例如[3]。一个简单的好奇心或许会让人想知道，测度的类比理论究竟藏在何处。我们未能在文献中找到这样的理论工具。不过，我们对这类宝藏的探寻还有一个更具体的理由。考虑下面这个略显粗略的例子。半轴上的有界变差函数的余弦傅里叶变换，即 $f \in BV(\mathbb{R}_+)$，为

$$\widehat{f}_c(x) = \int_0^\infty f(t)\cos(2\pi x t)\,dt. \tag{1}$$

设 f 在 $(0,\infty)$ 上局部绝对连续；请注意，此处我们使用 $(0,\infty)$ 而非 $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$，因为避免声称函数在原点处绝对连续具有相当重要的意义和普遍性。此外，设 $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ 且 $\mathcal{H}^o f' \in L^1(\mathbb{R}_+)$。这里，对于定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的任意可积函数 g ，

$$\mathcal{H}^o g(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t g(t)}{x^2 - t^2}\,dt \tag{2}$$

是对 g的奇延拓应用希尔伯特变换；当然，这是在柯西主值意义下理解的。当它可积时，我们将这类函数g 对应的哈代空间记为 $H_0^1(\mathbb{R}_+)$。那么，式 (1) 中 f 的余弦傅里叶变换在 $\mathbb{R}_+$上勒贝格可积，且

$$\|\widehat{f}_c\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \lesssim \|f'\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} + \|\mathcal{H}^o f'\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} = \|f'\|_{H_0^1(\mathbb{R}_+)}. \tag{3}$$

2020年数学主题分类。主要分类：28A33；次要分类：42A38。关键词和短语：测度；傅里叶变换；豪斯多夫–杨不等式；杨不等式；不确定性原理。

关于这一结果以及许多其他更高级的结果，请参阅 [12]（参见 [5] 和 [7]；另见 [8, 第 3] 章，或较新的 [13]）。请记住，有界变差函数的导数几乎处处存在，且勒贝格可积。此处及下文中，$\varphi \lesssim \psi$ 表示 $\varphi \le C\psi$，其中 C 为绝对常数。

一个自然的问题是，我们能否放宽绝对连续性的假设。最终证明的第一步显而易见：在（1）中按斯蒂尔切斯意义进行分部积分，得到

$$\widehat{f}_s(x) = -\frac{1}{2\pi x}\int_0^\infty \sin(2\pi x t)\, df(t).$$

然而，如果我们试图沿用（3）的证明思路，并得到一个其希尔伯特变换 df 可积的哈代空间版本，就会失败。问题在于，df 的希尔伯特变换几乎处处存在（参见例如 [3,§8.1]），但其可积性会导出绝对连续性，而这正是我们试图去除的性质（参见例如 [4]及其中的参考文献）。

另一方面，存在一系列实用的子空间 $H_0^1(\mathbb{R}_+)$，其中余弦傅里叶变换的可积性成立，且（3）右端包含 f' 在此类空间之一中的范数。更确切地说，对于 $1 < p < \infty$，令

$$\|g\|_{O_p} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_{x\le t\le 2x} |g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

此外，对于 $p = \infty$，令

$$\|g\|_{O_\infty} = \int_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{x\le t\le 2x} |g(t)|\, dx.$$

以下关系是已知的（参见上述文献）：

$$O_\infty \hookrightarrow O_{p_1} \hookrightarrow O_{p_2} \hookrightarrow H_0^1 \hookrightarrow L^1 \quad (p_1 > p_2 > 1). \tag{4}$$

在上述假设下，有

$$\|\widehat{f_c}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \lesssim \|f'\|_{O_p(\mathbb{R}_+)}, \tag{5}$$

前提是右端对某个 $p > 1$ 有限。事实上，当对导数计算 O_p 范数时，采用另一种记号更为方便：$\|f\|_{V_p} := \|f'\|_{O_p}$. 这种记号正适用于后续的推广。一方面，(5) 可由 (3) 和 (4) 推出。另一方面，[7], 给出了 (5) 的直接证明，其中的关键是豪斯多夫–杨不等式。为了对由有界变差函数f 生成的测度 μ_f（而非函数）给出类似的论证（不过，我们将写作 df 而非 $d\mu_f$），我们需要豪斯多夫–杨不等式的相应推广。我们的特殊调和分析正是在此处发挥作用。我们不局限于为上述问题寻找直接工具，而是尝试建立一种一般性的多变量理论。本文将介绍并研究一系列相关问题。

1.1. 基本概念。

我们通过一个相应的范数，为测度定义一种类似于 L^p 空间的概念。对于给定的$p \in [1, \infty]$, 我们用记号 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ 中的标准范数，其中 dx 表示勒贝格测度。

我们用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示快速衰减的 C^∞ 函数所构成的施瓦茨空间，并用 $\mathcal{F}(f)\widehat{\ }$ 或 $\widehat{f}$ 表示函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶变换，记作

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot y}\, dx,$$

其中 $x\cdot y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$。回顾一下，$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一一映射，且逆傅里叶$\check{}$变换为 $f(y) = f(-y)$。本文中，除非有必要，我们不区分傅里叶变换与逆傅里叶变换。

对于 $p \in [1,2]$，算子 $\mathcal{F}\colon L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$，是有界的，且 $\|\widehat{\ }\|_{p'} \le \|f\|_p$ 且当 $p = 2$ 时取等号。对于 $L^p(\mathbb{R}^n)$，$p > 2$，傅里叶变换可在分布意义下定义为

$$\langle \widehat{f}, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\psi}(x)\, dx, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);$$

显然，$\widehat{f}$ 是函数，当且仅当对于某个 $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$，有 $f = \widehat{g}$。基于这一观察，我们给出如下定义。

对于给定的 $p \in [1,\infty]$，我们令

$$\widehat{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : f = \widehat{g} \text{ for some } g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{6}$$

我们以自然的方式在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上赋予范数

$$\|f\|_{\widehat{L}^p} = \|\widehat{f}\,\|_{p'}. \tag{7}$$

根据这个定义，傅里叶变换

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to (\widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n),\ \|\cdot\|_{\widehat{L}^{p'}})$$

是一个一一等距映射。当 $p \in [1,2]$ 时，豪斯多夫–杨不等式给出 $\|f\|_{\widehat{L}^p} \le \|f\|_p$，且当 $p = 2$ 时等号成立。

我们用 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的 σ有限博雷尔测度空间。对于每个 $p \in [1,\infty]$，我们定义泛函 $\|\cdot\|_p^*\colon \mathcal{M} \to [0,\infty]$ 为

$$\|\mu\|_p^* = \sup_{\substack{h\in\widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{\widehat{L}^{p'}}\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(t)d\mu(t)\right|; \tag{8}$$

我们令

$$\mathcal{M}_p = \{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\|_p^* < \infty\}. \tag{9}$$

注意，对于每个 $\mu \in \mathcal{M}_p$ 以及每个 $h \in \widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} h(x)d\mu(x)\right| \le \|h\|_{\widehat{L}^{p'}}\|\mu\|_p^*. \tag{10}$$

我们不假设测度是正的，甚至不假设它们取实值。关于非正测度的定义和性质，参见例如[9]。在这一假设下，空间 $\mathcal{M}_p$ 是向量空间，我们将在第2节证明，泛函 $\|\mu\|_p^*$ 是 $\mathcal{M}_p$上的范数。

1.2. 论文结构。

将 $\|\mu\|_p^*$ 和 $\mathcal{M}_p$ 分别类比于 L^p记号后，我们接着建立这些测度空间的基本性质。

我们将在第2节证明， $\mathcal{M}_p$ 空间与 L^p空间有许多共同性质。我们将确立 $\mathcal{M}^p$ 空间中测度的性质，以及$\widehat{}$空间中函数的性质 L^p（$\mathbb{R}^n$）。随后讨论测度的傅里叶变换，并建立一种 Hausdorff–Young 型不等式。此外，对于函数与测度的卷积，我们将证明适用于本研究情形的 Young 型不等式。我们还要指出，第2节的结果辅以若干例子。

第3节致力于介绍所提出方法的应用。其中之一是为测度发展一种不确定性原理。傅里叶分析中的不确定性原理将这样一种直觉定量化：函数及其傅里叶变换不可能同时集中在小集合上。Havin 和 J¨oricke [10] 的著作以及 Folland 和 Sitaram [6]的一篇文章中，都可以找到这一原理的许多例子。在第3.1小节中，我们利用 [1], 中的一项结果的定量版本，证明有限测度及其傅里叶变换不可能同时支撑在勒贝格测度有限的集合上。回顾一下，如果 F 是一个与 E不相交的可测集合，那么测度 μ 支撑在集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上，意即 $\mu(F) = 0$。

总之，我们表述并证明了有界变差函数的一个类似于 (5) 的结果，且不假设绝对连续性。这就是定理 10。为了表述并证明该结果，作为函数空间 V_p 的类比，我们引入测度的 $f \in V_p^*$ 概念，其中

$$\|f\|_{V_p^*} = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{p}} \|\chi_{(x,2x)}\mu_f\|_p^* \, dx$$

其中 χ_E 表示 E 的特征函数。测度 μ 与可测函数 f 的乘积是如下定义的测度：对于每个可测集 F，有 $(f\mu)(F) = \int_F f \, d\mu$。对于 $1 < p \leq 2$，我们新提出的豪斯多夫–杨不等式将会有所帮助；而对于 $p > 2$，我们证明一个类似于 (4) 的结果，并使用嵌入论证。

2. 测度的 L^p 性质

本节将确立引言中定义的空间 $\mathcal{M}_p$ 中测度的基本性质，其中 $p \in [1, \infty]$，这些性质类似于函数在 L^p 空间中的性质。我们还将确立在 (6) 中定义的空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的性质$\widehat{}$。

若 E 是 $\mathbb{R}^n$的可测子集，且 $|E| \neq 0$，我们定义

$$\|\mu\|_{p,E}^* = \|\chi_E \mu\|_p^* = \sup_{\substack{h \in \widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n): \\ \|h\|_{\widehat{L}^{p'}} \leq 1}} \left| \int_E h(t) \, d\mu(t) \right|, \tag{11}$$

以及 $\mathcal{M}_{p,\ E} = \{\mu : \|\mu\|_{p,\ E}^* < \infty\}$。

我们也可以定义

$$\mathcal{M}_{1,loc} = \{\mu : \|\mu\|_{1,E}^* < \infty \text{ for every measurable bounded set } E\}. \tag{12}$$

标准勒贝格测度和狄拉克测度是 $\mathcal{M}_p$ 测度的显著例子。在本文其余部分，我们将用 $\mathcal{L}$（或在积分中用 dx ）表示标准勒贝格测度。

Fo对于给定的 $a \in \mathbb{R}^n$，我们令 δ_a 为如下定义的测度： $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\delta_a = f(a)$。

Example 1. 我们证明标准勒贝格测度属于 $\mathcal{M}_\infty$ 和 $\|\mathcal{L}\|_\infty^* = 1$。事实上，

$$\|\mathcal{L}\|_\infty^* = \sup_{\substack{h\in\widehat{L}^1(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{\widehat{L}^1}=\|\widehat{h}\|_\infty\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(t)\,dt\right| \le \sup_{\substack{h\in L^1(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_1\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(t)\,dt\right| \le 1.$$

为证明等号成立，我们可以考虑 $g = e^{-\pi|x|^2}$。容易验证 $\widehat{g}(x) = g(x)$，因此 $g \in \widehat{L}^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|g\|_{\widehat{L}^1} = \|\widehat{g}\|_\infty = 1$。由于 $1 = \widehat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t)\,dt = \|g\|_1$，我们得到

$$\|\mathcal{L}\|_\infty^* \ge \int_{\mathbb{R}^n} g(t)\,dt = 1,$$

这正是所需的结果。

Example 2. 我们仅对 $p = 1$ 和 $\|\delta_a\|_1 = 1$ 证明 $\delta_a \in \mathcal{M}_p$。事实上，为简单起见，假设 $a = 0$，我们很容易看出

$$\begin{aligned}\|\delta_0\|_1^* &= \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{\widehat{L}^\infty}\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(t)\,d\delta_0\right| = \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|\widehat{h}\|_1\le 1}} |h(0)| \\ &= \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|\widehat{h}\|_1\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\,dx\right| \le \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|\widehat{h}\|_1\le 1}} \|\widehat{h}\|_1 = 1.\end{aligned}$$

为证明等号成立，我们可以考虑前一个例子中的函数 $g = e^{-\pi|x|^2}$，并验证 $\|\delta_0\|_1^* \ge \|g\|_1 = 1.$。对此论证稍作变动即可证明，若 $p > 1$，则 $\delta_0 \notin \mathcal{M}_p$。

2.1. H¨older 型不等式。

我们证明如下结论

Theorem 1. 若 $\mu \in \mathcal{M}_p$ 且 $f \in \widehat{L}^q(\mathbb{R}^n)$，并且 $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$，则

$$\|f\mu\|_r^* \le \|f\|_{\widehat{L}^q}\|\mu\|_p^*. \tag{13}$$

Proof. 假设 $\|f\|_{\widehat{L}^q} = 1$；否则，将 f 替换为 $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_{\widehat{L}^q}}$。沿用前面引入的记号，

$$\|f\mu\|_r^* = \sup_{\substack{h\in\widehat{L}^{r'}(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{\widehat{L}^{r'}}\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(y)f(y)\,d\mu(y)\right|.$$

我们来证明 $hf \in \widehat{L}^{p'}$ 和 $\|hf\|_{\widehat{L}^{p'}} \le 1$。事实上，$\widehat{hf} = \widehat{h} * \widehat{f}$（标准卷积）。由于 $\frac{1}{r} + \frac{1}{q'} = 1 + \frac{1}{p}$，由卷积的杨不等式和豪斯多夫–杨不等式，

$$\|hf\|_{\widehat{L}^{p'}} = \|\widehat{hf}\|_p = \|\widehat{h} * \widehat{f}\|_p \le \|\widehat{h}\|_r\|\widehat{f}\|_{q'} = \|h\|_{\widehat{L}^{r'}}\|f\|_{\widehat{L}^q} \le 1.$$

因此，$\|hf\|_{\widehat{L}^{p'}} \le 1$，于是

$$\|f\mu\|_r^* \le \sup_{\substack{k\in\widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n):\\ \|k\|_{\widehat{L}^{p'}}\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} k(y)\,d\mu(y)\right| = \|\mu\|_p^* = \|\mu\|_p^*\,\|f\|_{\widehat{L}^q},$$

证毕。 □

Remark 2. 当 $r = 1$ 时，对每个 $\mu \in \mathcal{M}_p$ 和 $f \in \widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$，我们都有

$$\|f\mu\|_1^* \le \|f\|_{\widehat{L}^{p'}}\|\mu\|_p^*.$$

这是 与标准 H¨older 不等式最相似的 (13) 情形 .

COROLLARY 3. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$的一个有界子集。那么$\mathcal{M}_{r,\ E} \subset \mathcal{M}_{p,\ E}$ 只要 $1 \le p \le r \le \infty$.

PROOF. 假设 $p < r$, 因为 $p = r$ 的情形显然成立。还假设存在某个 $R > 0$, 使得 $E \subset Q_R = [-R,\, R]^n$ 。由（11）得,

$$\|\mu\|^*_{r,E} = \sup_{\|h\|_{\widehat{L}^{r'}} \le 1} \left| \int_E h(y)\, d\mu(y) \right| = \sup_{\|\widehat{h}\|_{L^r} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(y) h(y) \chi_E(y)\, d\mu(y) \right|.$$

设 $q = \frac{rp}{r-p}$。由于 $r \ne p$, 我们有 $q < \infty$ 和 $q' > 1$。Q_R 的特征函数的傅里叶变换为

$$\widehat{\chi}_{Q_R}(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(\pi R x_j)}{\pi x_j},$$

a因此, 对于每个 $s > 1$, $\widehat{\chi}_{Q_R}(x) \in L^s(\mathbb{R}^n)$。我们有 $\|\widehat{\chi}_{Q_R}\|_s = C_s^n R^{\frac{n}{s'}}$, 其中

$$C_s = \left\| \frac{\sin(\pi\cdot)}{\pi\cdot} \right\|_s = \begin{cases} \left(\frac{2s'}{\pi}\right)^{\frac{1}{s}}, & 1 < s < 2, \\ \left(\frac{2}{s}\right)^{\frac{1}{2s}}, & 2 \le s < \infty \\ 1, & s = \infty, \end{cases}$$

与 R 无关。事实上, 对于所有 $s < \infty$, C_s 都可以取为 $\left(\frac{2s'}{\pi}\right)^{\frac{1}{s}}$。这可以通过最简便的方式计算：将积分拆分

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right|^s dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right|^s dt \tag{14}$$

分成两部分, 分别对 $|t| \le 1$ 和 $|t| > 1$ 进行处理, 并将第一部分中的 $\left|\sin(\frac{t}{t})\right|$替换为 **1**, 第二部分中替换为$\frac{1}{|t|}$。然而, 已知（见 [**2**, 引理 3] 或 [**14**, 第 **VI** 章第 **7** 节5]）, 对于 $s \ge 2$, **(14)** 的最佳界为 $\sqrt{\frac{2}{s}}$。

在命题 **1** 中用 $f = \chi_{Q_R}$ 和 $\chi_E \mu$ 代替 μ, 得到

$$\|\mu\|^*_{p,E} \le \|\chi_{Q_R}\|_{\widehat{L}^q} \|\mu\|^*_{r,E} = C_q^n R^{\frac{n}{q'}} \|\mu\|^*_{r,E}, \tag{15}$$

因此, 当 $\|\mu\|^*_{r,E} < \infty$ 时, $\|\mu\|^*_{p,E} < \infty$, 证毕。 □

COROLLARY 4. 对于每个 $p \in [1, \infty]$, 都有 $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_{1,loc}$。

PROOF. 由推论3和 **(12)** 得出。 □

COROLLARY 5. 对每个 $p \in [1,\, \infty]$, 泛函 $\|\ \|^*_p$ 都是 $\mathcal{M}_p$ 上的范数。

PROOF. 不难验证, 对每个 μ、 $\sigma \in \mathcal{M}_p$ 以及每个 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|\mu + \sigma\|^*_p \le \|\mu\|^*_p + \|\sigma\|^*_p, \qquad \|\lambda\mu\|^*_p = |\lambda|\, \|\mu\|^*_p.$$

现在我们证明, $\|\mu\|^*_p = 0$ 当且仅当 $\mu \equiv 0$, 其含义是：对于每个 μ–可测集 E, $\mu(E) = 0$ 。

为了证明 $\mu \equiv 0$，只需验证对于每个有界集 E，$\mu(E) = 0$。设 E 有界且 $\mu-$可测。假设 $E \subset Q_R$ 对某个 $R > 0$成立。利用 (15) 和命题 8，我们立即可以看出

$$\mu(E) = \int_E d\mu(x) = \int_{Q_R} \chi_E d\mu(x) \le \|\chi_{Q_R}\|_{\widehat{L}^\infty} \|\mu\|^*_{p,E} \le \|\mu\|^*_p = 0$$

因此，对于每个 $\mu-$可测有界集 E，都有 $\mu(E) = 0$。 □

2.2. L^p 空间的性质。

本小节将建立式 (6) 中定义的空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$的性质。我们首先说明，当$f \in L^p$时，形如 $d\mu = f dx$ 的测度如何与所引入的范数相关，

THEOREM 6. 设 $d\mu = f dx$，且对于某个 $p \in [1, \infty]$，有 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$；则 $\mu \in \mathcal{M}_p$并且

$$\|\mu\|^*_p = \|f\|_{\widehat{L}^p}.$$

在讨论定理 6 之前，我们先证明以下命题

LEMMA 1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在每个 $p \in [1, \infty]$ 下都在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密。

PROOF. 由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$，且对于每个 $p \in [1, \infty$， $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，因此我们立即可以看出，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中也稠密。为了证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中也稠密，我们注意到每个 $f \in \widehat{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 都是某个 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 经傅里叶变换得到的像。我们可以找到函数 $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - g\|_1 = 0$。但是

$$\|\psi_n - g\|_1 = \|\widehat{\widehat{\psi}_n} - \widehat{f}\,\|_1 = \|\widehat{\psi}_n - f\|_{\widehat{L}^\infty},$$

因此 $\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - f\|_{\widehat{L}^\infty} = 0$。由于 $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，我们已经证明 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中稠密 . □

PROOF OF THEOREM 6. 由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $\widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，并且傅里叶变换在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中是一一对应的，我们立刻可以看出

$$\|f\|_{\widehat{L}^p} = \|\widehat{f}\|_{p'} = \sup_{\substack{g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|g\|_p\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} g(t)\widehat{f}(t)\,dt\right| = \sup_{\substack{g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|g\|_p\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t) f(t)\,dt\right|$$

$$= \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|\widehat{h}\|_p\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(t) f(t)\,dt\right| = \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{\widehat{L}^{p'}}\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(t) f(t)\,dt\right| = \|\mu\|^*_p,$$

这就完成了证明。 □

REMARK 7. 若 $d\mu = f dx$ 如定理 6 中所述，且 $p \in [1, 2]$，则有

$$\|\mu_f\|^*_p = \|f\|_{\widehat{L}^p} = \|\widehat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p.$$

COROLLARY 8. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个（勒贝格）可测集。

a) 对每个 $p \in [1, \infty]$，都有

$$\|\chi_E\|_{\widehat{L}^p} \le |E|^{\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

b) 对每个 $1 \le p \le q \le \infty$ 和每个 $\mu \in \mathcal{M}_q$，都有

$$\|\mu\|^*_{p,E} \le \|\mu\|^*_q |E|^{\frac{1}{r}}, \qquad \text{where } \tfrac{1}{r} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{q}.$$

我们使用了 s 标准约定 $\frac{1}{\infty} = 0$。因此，对于每个集合 E，(16) 得出 $\|\chi_E\|_{\widehat{L}^\infty} \le 1$.

Proof. 我们先证明 a)。当 $p \in [1,2]$ 时，由注7可得

$$\|\chi_E\|_{\widehat{L}^p} \le \|\chi_E\|_p = |E|^{\frac{1}{p}}.$$

现在假设 $p \in (2,\infty)$。根据豪斯多夫–杨不等式，我们立即得到

$$\{f \in \widehat{L}^{p'} \ : \ \|f\|_{\widehat{L}^{p'}} = \|\widehat{f}\|_p \le 1\} \subset \{f \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_{p'} \le 1\}.$$

鉴于这一观察以及定理 6，我们可以令 $d\sigma = \chi_E dx$ ，并写出以下不等式链：

$$\begin{aligned} \|\chi_E\|_{\widehat{L}^p} = \|\sigma\|^*_{p,E} &= \sup_{\substack{f\in\widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n):\\ \|f\|_{\widehat{L}^{p'}}\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) f(x)dx\right| \\ &\le \sup_{\substack{f\in L^{p'}(\mathbb{R}^n):\\ \|f\|_{p'}\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) f(x)dx\right| \qquad (17) \\ &\le |E|^{\frac{1}{p}}\|f\|_{p'} \le |E|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

最后一步用到了 H¨older 不等式。

当 $p = \infty$ 时，由 (17) 可得

$$\sup_{\substack{f\in L^1(\mathbb{R}^n):\\ \|f\|_1\le 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) f(x)dx\right| \le \sup_{\substack{f\in L^1(\mathbb{R}^n):\\ \|f\|_1\le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)|f(x)|dx \le 1.$$

b) 部分随之得证 由 H¨older 不等式 (1) 和 a) 部分可知。事实上，令 $r = \frac{pq}{q-p}$，我们有 e

$$\|\mu\|^*_{p,E} = \|\chi_E\mu\|^*_p \le \|\chi_E\|_{\widehat{L}^r}\|\mu\|^*_q \le |E|^{\frac{1}{r}}\|\mu\|^*_q.$$

推论的证明完毕。 □

ˆ我们利用定理 6 证明 L^p 空间及其对偶空间之间的包含关系。回顾一下，赋范空间 X 的对偶空间，记作 $(X)'$，是由满足条件 $V \to \mathbb{C}$ 的线性泛函 L 构成的集合，其中 $\sup_{\|f\|_X\le 1}|L(f)| < \infty$。

ˆ ˆ根据定义，当 $p \in [1,2]$ 时， $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$；但一般而言， $L^p(\mathbb{R}^n)$ 是⌢$L^p(\mathbb{R}^n)$ 的真子空间。例如，黎曼-勒贝格引理表明， $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是由在无穷远处趋于零的一致连续函数构成的空间。

ˆ尽管当 $p \in [1,2]$ 时， $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$，但这些空间上的范数不同，因此它们的对偶空间也不同。当 $p \le 2$ 时，豪斯多夫–杨不等式给出：

$$\|f\|_{\widehat{L}^p} = \|\hat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p.$$

当 $p = 2$ 时，我们有 $\|f\|_2 = \|f\|_{\widehat{L}^2}$；但当 $p > 2$ 时，上述不等式可能是严格不等式。

我们证明如下

Proposition 1. 对于每个 $p \in [1,\infty]$，我们都有

$$\widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n) \subset (\widehat{L}^p(\mathbb{R}^n))'.$$

当 $p \in [1,2]$ 时，我们有 $\widehat{L}^{p'}(\mathbb{R}^n) \subset (\widehat{L}^p(\mathbb{R}^n))' \subset L^{p'}(\mathbb{R}^n)$。

Proof. 对于给定的 $g \in \widehat{L^{p'}}(\mathbb{R}^n)$，令 $d\mu = g dx$，并令 $L_g: \widehat{L^p}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ，

$$L_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx.$$

根据 Hölder 不等式 (13) 和定理 6

$$|L_g(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \right| \le \|f\|_{\widehat{L^p}} \|\mu\|^*_{p'} = \|f\|_{\widehat{L^p}} \|g\|_{\widehat{L^{p'}}}$$

因此 $L \in (L^p(\mathbb{R}^n))'$。

当 $p \le 2$ 时，对于每个 $L \in (L^p(\mathbb{R}^n))'$，我们有

$$|L(f)| \le C\|f\|_{\widehat{L^p}} = C\|\hat{f}\|_{p'} \le C\|f\|_p$$

因此 $L \in (L^p(\mathbb{R}^n))' = L^{p'}(\mathbb{R}^n)$。 □

2.3. 有限测度的傅里叶变换。有限博雷尔测度的傅里叶变换μ定义为函数

$$\widehat{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} d\mu(x). \tag{18}$$

为了与函数的傅里叶变换相区分，它有时被称为傅里叶–斯蒂尔切斯变换。众所周知（参见例如 [3, §5.3] 或 [15, §4.4]），函数 $\widehat{\mu}$ 连续且有界。根据黎曼-勒贝格引理，L^1 函数的傅里叶变换在无穷远处趋于零，但 $\mathcal{M}_1$ 测度的傅里叶变换则不一定如此。例如，我们已在例 2 中证明，狄拉克测度 $\mu = \delta_a$ 属于 $\mathcal{M}_1$；其傅里叶变换为 $\widehat{\mu}(x) = e^{2\pi i a\cdot x}$，且 $|\widehat{\mu}(x)| \equiv 1$。

我们证明豪斯多夫–杨不等式的以下类似结果。

Proposition 2. 设 $\mu \in \mathcal{M}_p$，且 $1 \le p \le 2$。那么，$\widehat{\mu} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|\widehat{\mu}\|_{p'} \le \|\mu\|^*_p. \tag{19}$$

Proof. 我们已经注意到，有限测度的傅里叶变换总是有界的，因此当 $p = 1$ 时，该命题显然成立。当 $p \in (1, 2]$, 时，我们有

$$\|\widehat{\mu}\|_{p'} = \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_p\le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} h(y)\widehat{\mu}(y)\, dy.$$

根据富比尼定理,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(y)\widehat{\mu}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(y)e^{-2\pi i x\cdot y}\, d\mu(x)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\, d\mu(x). \tag{20}$$

鉴于 (20) 以及 $\| h \|_{p'} \le \|h\|_p \le 1$ 这一事实，我们立即可以看出

$$\|\widehat{\mu}\|_{p'} = \sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_p\le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(y)\, \mu(y) \le \sup_{\substack{k\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|\,\widehat{k}\,\|_{p'}\le 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(x)\, d\mu(x) \right| = \|\mu\|^*_p,$$

从而完成证明。 □

Example 3. 如果 μ_f 由 [16], 中的奇异函数 f 生成，我们有 e

$$|\widehat{\mu_f}(x)| = O\Big(\frac{1}{|x|^{\delta}}\Big)$$

当 $|x|$ 较大时，满足 $0 < \delta < \frac{1}{2}$。于是 $\widehat{\mu_f} \in L^{p'}(\mathbb{R})$，其中 $\frac{1}{\delta} < p' < \infty$，相应地， $2 < p' < \infty$。由此可得 $\|\mu_f\|_p^* < \infty$，因为

$$\begin{aligned}\|\mu_f\|_p^* &= \sup_{\|h\|_{\widehat{L}^{p'}} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}} h(t)\, df(t) \right| = \sup_{\|g\|_{L^p} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x)\, df(x) \right| \\ &= \sup_{\|g\|_{L^p} \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \widehat{df}(x)\, dx \right| < \infty,\end{aligned}$$

由于 $g \in L^p$ 和 $\widehat{\mu_f} \in L^{p'}$，其中 $1 < p < \frac{1}{1-\delta} < 2$.

我们在 [16] 中使用了奇异函数的经典例子，但也存在更微妙的例子。然而，对于所有这些例子，都存在一个类似于上文 $0 < \delta < \frac{1}{2}$ 的障碍，阻碍 L^2；例如参见 [11] 及其中的参考文献。

2.4. 函数与测度的卷积。设 μ 是一个 σ有限博雷尔测度，并设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数，使得函数

$$x \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu(y) \tag{21}$$

对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$，其值有限。 f 与 μ的卷积记为 $f * \mu$，是式 (21) 中定义的函数。我们证明卷积的杨不等式的以下类似结论。

Proposition 3. 若 $\mu \in \mathcal{M}_p$ 与 $f \in \widehat{L}^q(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$，则 $f * \mu \in \widehat{L}^r(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|f * \mu\|_{\widehat{L}^r} \le \|f\|_{\widehat{L}^q} \|\mu\|_p^*.$$

Proof. 根据命题6,

$$\|f * \mu\|_{\widehat{L}^r} = \|f * \mu\|_r^* = \sup_{\substack{h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{\widehat{L}^{r'}} \le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(f * \mu)(x)\, dx. \tag{22}$$

对每个 $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(f * \mu)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, d\mu(y)\, dx, = \int_{\mathbb{R}^n} h * \tilde{f}(y)\, d\mu(y) \tag{23}$$

其中 $\tilde{g}(t) = g(-t)$。由 (23) 和 (10),

$$\int_{\mathbb{R}^n} h * \tilde{f}(y)\, d\mu(y) \le \|h * \tilde{f}\|_{\widehat{L}^{p'}} \|\mu\|_p^* = \|\widehat{h}\, \widehat{f}\|_p \|\mu\|_p^*. \tag{24}$$

回忆起 $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$，我们有 $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q'}$。由 H¨older 不等式,

$$\|\widehat{h}\, \widehat{f}\|_p \le \|\, \widehat{h}\, \|_r \|\, \widehat{f}\, \|_{q'} = \|h\|_{\widehat{L}^{r'}} \|f\|_{\widehat{L}^q}$$

由（22）和（24），我们得出

$$\|f * \mu\|_{\widehat{L}^r} \le \|f\|_{\widehat{L}^q} \|\mu\|_p^*,$$

按要求。 □

3. 应用

如前所述，本节将介绍所得结果的应用。

3.1. 不确定性原理。

在本小节中，我们将说明不确定性原理同样适用于测度。我们证明以下结论：

THEOREM 9. 有限的非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_2$ 及其傅里叶变换 $\widehat{\mu}$ 不可能同时支撑在勒贝格测度有限的集合上。

该定理的证明依赖于以下结果：

LEMMA 2. 设 E、$F \subset \mathbb{R}^n$ 为勒贝格测度有限的集合。存在常数 $C > 0$，使得对于任意测度 $\mu \in \mathcal{M}_2$，都有

$$\|d\mu\|^*_{2,F} \leq C\| \widehat{\mu} \|_{L^2(E^c)}.$$

PROOF. 回顾 Amrein 和 Berthier 在 [1]中得到的不确定性原理结果的以下定量形式：设 E、$F \subset \mathbb{R}^n$ 为有限测度集合。存在常数 $C > 0$，使得对于任意函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\| \widehat{f} \|_{L^2(F)} \leq C\|f\|_{L^2(E^c)}. \tag{25}$$

设 $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$。根据 (25)，不等式$\|h\|_{L^2(E^c)} \leq 1$给出 $\| \widehat{h} \|_{L^2(F)} \leq C$。鉴于 (20)，我们可以写出以下不等式链：

$$\begin{aligned}
\| \widehat{\mu} \|_{L^2(E^c)} &= \sup_{\substack{h\in L^2(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{L^2(E^c)}\leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\widehat{\mu}(x) \\
&= \sup_{\substack{h\in L^2(\mathbb{R}^n):\\ \|h\|_{L^2(E^c)}\leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(y)\, d\mu(y) \geq \sup_{\substack{h\in L^2(\mathbb{R}^n):\\ \| \widehat{h} \|_{L^2(F)}\leq C}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{C} \sup_{\substack{k\in L^2(\mathbb{R}^n):\\ \| \widehat{k} \|_2\leq 1}} \int_F k(x) d\mu(x) = \frac{1}{C}\|\mu\|^*_{2,F},
\end{aligned}$$

从而得到所需结果。 □

PROOF OF THEOREM 9. 反设 μ的支集包含于 F中，且 $\widehat{\mu}$的支集包含于 E中，其中 E、 $F \subset \mathbb{R}^n$ 均为有限测度。根据引理 2，有 $\|\mu\|^*_{2,F} = \|\chi_F\mu\|^*_2 = 0$，而推论 5给出 $\chi_F\mu \equiv 0$。由于假设 $\chi_{F^c}\mu \equiv 0$成立，我们有 $\mu = 0$，这就产生了矛盾。□

3.2. 傅里叶变换定理

为了揭示与绝对连续 f 情形的类比，我们证明（4）中相应嵌入的对应结果。

PROPOSITION 4. 对于 $p_1 > p_2 > 1$，有

$$V^*_{p_1} \hookrightarrow V^*_{p_2}.$$

Proof. 我们将应用推论3。由于对于 $E=(x,2x)$，由（16）可知，（15）中有

$$\|\chi_{Q_R}\|_{\widehat{L}^q}\lesssim x^{\frac{1}{q}},$$

由此可得

$$\|\mu_f\|^*_{p_2,(x,2x)}\lesssim x^{\frac{1}{q}}\|\mu_f\|^*_{p_1,(x,2x)}.$$

相应的关系 $\frac{1}{p_2}=\frac{1}{q}+\frac{1}{p_1}$ 得出 $\frac{1}{q}=\frac{p_1-p_2}{p_1p_2}$。还需注意到

$$x^{-\frac{1}{p_2}}\,x^{\frac{p_1-p_2}{p_1p_2}}=x^{-\frac{1}{p_1}},$$

这就得到了所需的嵌入。 □

借助这些嵌入和前文阐述的工具，我们研究 $\gamma=0$ 或 $1\ 4$ 时的傅里叶变换 -

$$\widehat{f}_\gamma(x)=\int_0^\infty f(t)\cos 2\pi(xt-\gamma)\,dt. \tag{26}$$

显然，在 $\gamma=0$ 的情况下，$\widehat{f}_\gamma$ 表示余弦傅里叶变换，而取 $\gamma=\frac{1}{4}$ 则得到正弦傅里叶变换。

Theorem 10. 设 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上具有有界变差且在无穷远处趋于零，即 $\lim_{t\to\infty}f(t)=0$。若 $f\in V_p^*$，则对于 $x>0$，有

$$\widehat{f}_\gamma(x)=\frac{1}{2\pi x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\sin 2\pi\gamma+\Gamma(x),$$

其中 $\gamma=0$ 或 $1\!4$，且 $\|\Gamma\|_{L^1(\mathbf{R}+)}\lesssim\|f\|_{V_p^*}$，前提是对于某个 $p,\,1<p\leq\infty$，最后一个值有限。

Proof. 将 (26) 中的积分拆开并分部积分，得到

$$\widehat{f}_\gamma(x)=-\frac{1}{2\pi x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\sin 2\pi(1-\gamma)$$
$$+\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)\cos 2\pi(xt-\gamma)\,dt-\frac{1}{2\pi x}\int_{\frac{1}{x}}^\infty\sin 2\pi(xt-\gamma)\,df(t).$$

此外，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)\cos 2\pi(xt-\gamma)\,dt\\
&=\int_0^{\frac{1}{x}}[f(t)-f\Big(\frac{1}{x}\Big)]\cos 2\pi(xt-\gamma)\,dt+\int_0^{\frac{1}{x}}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\cos 2\pi(xt-\gamma)\,dt\\
&=-\int_0^{\frac{1}{x}}\Big[\int_t^{\frac{1}{x}}df(s)\Big]\cos 2\pi(xt-\gamma)\,dt\\
&+\frac{1}{2\pi x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\sin 2\pi(1-\gamma)+\frac{1}{2\pi x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\sin 2\pi\gamma\\
&=\frac{1}{2\pi x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\sin 2\pi\gamma+\frac{1}{2\pi x}f\Big(\frac{1}{x}\Big)\sin 2\pi(1-\gamma)+O\Big(\int_0^{\frac{1}{x}}s|df(s)|\Big).
\end{aligned}$$

为了继续证明，我们需要以下内容

LEMMA 3. 我们有如下不等式

$$\int_0^\infty |df(s)| \lesssim \|f\|_{V_p^*}. \tag{27}$$

PROOF. 有

$$\begin{aligned}\ln 2 \int_0^\infty |df(s)| &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_x^{2x} |df(s)|\, dx \\ &= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{p}} \left| \int_x^{2x} h(s)\, df(s) \right| dx,\end{aligned}$$

[1]其中， $h(s) = x^{-\frac{1}{p'}}$为符号函数 $df(s)$（若 $x < s < 2x$），否则为零。这个 h不一定具有有界变差；然而，由于它总是在积分号下出现，我们可以取一个与之等价且具有有界变差的函数。这是可行的，因为 f 的跳跃点个数构成零测集。我们将继续用记号 h 表示这样的函数。容易看出， $\|h\|_{p'} = 1$. 令$g(u) = h(u)$。我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty |g(u)|^p\, du = \left(\int_0^{\frac{1}{x}} + \int_{\frac{1}{x}}^\infty \right) |g(u)|^p\, du \\ &\lesssim \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x^{\frac{1}{p'}}} \right)^p + x^{-\frac{p}{p'}} \int_{\frac{1}{x}}^\infty \left(\left| h(s) \frac{e^{-ius}}{-iu} \right|_x^{2x} \right| + \frac{1}{u} \int_x^{2x} |dh(s)| \right)^p du.\end{aligned}$$

右侧第一项有界。由于

$$\int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{du}{u^p} \lesssim x^{\frac{1}{p'}},$$

h 的定义表明第二项也有界。

因此， h 是一个 L^p 函数 g的傅里叶变换。这给出了式（27）中所需的右端项。□

我们回到定理的证明。由于

$$\int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{x}} s|df(s)|\, dx = \int_0^\infty |df(s)|,$$

由（27）可知，要证明该定理，还需估计

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \left| \int_{\frac{1}{x}}^\infty \sin 2\pi(xt - \gamma)\, df(t) \right| dx.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\ln 2 \int_0^\infty \frac{1}{x} \left| \int_{\frac{1}{x}}^\infty \sin 2\pi(xt - \gamma)\, df(t) \right| dx \\ &\le \int_0^\infty \frac{1}{u} \int_{\frac{1}{u}}^\infty \frac{1}{x} \left| \int_u^{2u} \sin 2\pi(xt - \gamma)\, df(t) \right| dx\, du + \ln 2 \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |df(t)|\, dx.\end{aligned}$$

右侧后一个加项由 $\int_0^\infty |df(t)|$ 控制。对第一个加项的 x 中的积分应用 H¨older 不等式后，我们需要估计

$$\int_0^\infty \frac{1}{u}\left(\int_{\frac{1}{u}}^\infty x^{-p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \left|\int_u^{2u} \sin 2\pi(xt-\gamma)\, df(t)\right|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} du$$
$$= \int_0^\infty u^{-\frac{1}{p}} I(u)\, du. \tag{28}$$

其中，第二个括号中的项记为 $I(u)$。我们可以看到

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \left|\int_{\mathbb{R}} \left(e^{2\pi i(xt-\gamma)} - e^{-2\pi i(xt-\gamma)}\right)\, \chi_{(u,2u)}(t)\, df(t)\right|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \left|\, e^{2\pi i\gamma}\widehat{\chi_{(u,2u)}\mu_f}(x) - e^{-2\pi i\gamma}\widehat{\chi_{(u,2u)}\mu_f}(-x)\,\right|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\le \|\widehat{\chi_{(u,2u)}\mu_f}\|_{p'}.$$

对于 $1 < p \le 2$，应用豪斯多夫–杨不等式 (19)，得到

$$I \le \|\widehat{\chi_{(u,2u)}\mu_f}\|_{p'} \le \|\chi_{(u,2u)}\mu_f\|_p^*,$$

由此可得，(28) 有如下上界

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{p}} \|\mu_f\|^*_{p,(u,2u)}\, du,$$

正如所需。对于 $p > 2$，命题 4 完成证明。 □

REMARK 11. 对于多变量情形，存在与 (5) 类似的结果；例如参见 [12] 或 [13]。不过，上述一维结果更为直观，也更具说明性，因为将其推广到多个维度只是记号繁琐且带有技术细节的常规工作。

参考文献

[1] W.O. Amrein 和 A.M. Berthier，《 L^p函数及其傅里叶变换的支撑性质》，《函数分析杂志》24 (1977)，258–267。[2] K. Ball，《立方体截面与 $\mathbb{R}^n$》，《美国数学会会刊》97 (1986)，465–473。[3] P. L. Butzer 和 R. J. Nessel，《傅里叶分析与逼近》第一卷：一维理论，学术出版社，纽约和伦敦，1971。[4] J.A. Cima、A.L. Matheson 和 W.T. Ross，《柯西变换》，《数学调查与专著》第125卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006。[5] S. Fridli，《由可积性条件生成的哈代空间》，《逼近理论杂志》113 (2001)，91–109。[6] G. Folland 和 A. Sitaram，《不确定性原理》，《傅里叶分析及其应用杂志》3 (1997)，207–238。[7] D.V. Giang 和 F. M´oricz，《傅里叶变换与乘子 L^1 理论》，《塞格德数学学报》61 (1995)，293–304。[8] A. Iosevich 和 E. Liflyand，《傅里叶变换的衰减：解析与几何方面》，Birkhäuser，2014。[9] P.R. Halmos，《测度论》，范诺斯特兰德出版社，纽约，1950年。[10] V.P. Havin 和 B. J¨oricke，《调和分析中的不确定性原理》，施普林格出版社，柏林，1994。[11] T.W. K¨orner，《广义函数的傅里叶变换与豪斯多夫测度》，20 (2014)，547–565。[12] E. Liflyand，《某些类函数的傅里叶变换》，Anal. Math. 19 (1993)，151–168。[13] E. Liflyand，《有界变差函数及其傅里叶变换》，Birkhäuser，2019。[14] B. Makarov 和 A. Podkorytov，《实分析：测度、积分与应用》，施普林格出版社，2013。

[15] H. Reiter 和 J.D. Stegeman, 《经典调和分析与局部紧群》第二版, 《伦敦数学学会专著·新系列》第22卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000年。[16] N. Wiener 和 A. Wintner, 《傅里叶-斯蒂尔切斯变换与奇异无穷卷积》, 《美国数学杂志》60 (1938)，513–522。

Department of Mathematics and Statistics, Florida International University, Miami, FL, 33199,USA电子邮箱：decarlil@fiu.edu

Department of Mathematics, Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan, Israel电子邮箱：liflyand@gmail.com