arXiv:2301.03083v1 [math.OA] 8 Jan 2023

相对 Cuntz–Pimsner 代数：规范不变理想的分类：一个简单而完整的图景

Alexander Frei

2023年1月10日

我们通过核–协变对这一直观的参数化，对相对 Cuntz–Pimsner 代数（以及规范等变表示）的分类给出了一个简单而完整的图景。

为此，我们首先对核与余核态射（在一般的对应范畴中）进行分类，该分类建立在不变理想这一概念之上；这一概念由 Kajiwara–Pinzari–Watatani 加以实现并命名（Pimsner 也曾隐含地使用过）。所有这类核与余核态射的存在，使我们能够将一般分类问题归结为环境算子代数中对应的忠实情形。

第二个分量源于 Katsura 的一项观察：我们将 Katsura 的观察阐释为一个障碍，它涉及嵌入环境算子代数中的对应之协变理想值域；该值域构成核–协变对的第二个分量。因此，我们的参数化一方面遍历不变理想（作为核理想的离散值域），另一方面遍历某种最大协变性之下的有界理想（作为协变理想值域的上界）。

接着，我们沿着核–协变对的值域，展示相对 Cuntz–Pimsner 代数的格（因此也展示每个规范等变表示的格）。随后，我们通过将一般情形约化为忠实情形，给出规范不变唯一性定理的一般版本；对于忠实情形，我们还回顾 Evgenios Kakariadis 给出的一个简化证明。

这就确立了我们分类结果的前半部分：每个规范等变表示都可表示为一个相对 Cuntz–Pimsner 代数（对应于其自身的核–协变对），因此规范等变表示的类与相对 Cuntz–Pimsner 代数的类一致。由此，核–协变对穷尽了规范等变表示。

对于我们分类结果的后半部分，我们旨在通过作为参数的核–协变对唯一确定相对 Cuntz–Pimsner 代数：更准确地说，我们将从相应的相对 Cuntz–Pimsner 代数中，将每个抽象的核–协变对还原为实际的核与协变性，因此我们的核–协变对也具有分类作用。

基于我们所发现的核–协变对分类，我们进一步研究规范等变表示的格结构。特别是，我们详细阐述了余核链之间连接态射的存在性（由核–协变对的核分量给出），并通过图代数的例子展示我们的结果。

在这一讨论中，我们进一步澄清 Katsura 对 T-对的描述：它只是对核–协变对的一种简单转述（Katsura 本人此前已对此有所论述），但并未采用第二个分量，也未进一步探讨其如何描述协变理想的值域。

总而言之，我们的分类是对规范不变唯一性定理（沿余核态射）的简单化约，并结合了对相对 Cuntz–Pimsner 代数的核与协变性的识别。

最后，我们通过极大膨胀，将相对 Cuntz–Pimsner 代数实现为绝对 Cuntz–Pimsner 代数，并揭示 Katsura 构造正是由最大协变性给出的典范膨胀。我们还揭示，典范膨胀是图代数中一种熟悉的构造，并提供一个例子，说明最小膨胀可能并不存在。

作为一项应用，我们为 Robertson–Szymanski 先前关于拉回的结果提供了一种系统性方法，并将在与 Mariusz Tobolski 和 Piotr M. Hajac 即将开展的工作中将其推广到一般情形。

1 对应

我们首先介绍对应及其表示。特别是，我们将从一个较不拘泥于形式、更抽象的角度来讨论。这有助于从抽象视角理解它们的规范等变表示，进而分类整个规范不变理想格。此外，这也有助于更好地理解膨胀，并在后续研究中从抽象角度探讨移位等价问题。希尔伯特模是算子代数上的一个右模（该算子代数被视为系数代数），并配备了一个配对（与系数代数相容），使得右模在诱导范数下完备：

$$\langle -|- \rangle : X \times X \to A : \quad \|x\|^2 := \| \langle x|x \rangle \|.$$

给定两个定义在同一系数代数上的希尔伯特模，可以引入可伴随算子的概念，即那些存在伴随算子的算子：

$$T : X \to Y, \quad T^* : Y \to X : \quad \langle T - | - \rangle = \langle - | T^* - \rangle .$$

我们注意到，此类可伴随算子自动连续，这一点通过闭图定理可以最容易地看出。此外，定义在希尔伯特模对上的可伴随算子类构成一个具有复合与对合的“相容系统”巴拿赫空间

$$\mathcal{L}(Y|Z) \circ \mathcal{L}(X|Y) \subseteq \mathcal{L}(X|Z), \quad \mathcal{L}(X|Y)^* = \mathcal{L}(Y|X)$$

满足广义 C^*-恒等式

$$T \in \mathcal{L}(X|Y) : \quad \|T\|^2 = \|T^* T\|.$$

这里的竖线旨在表示“狄拉克左矢–右矢记号”，也就是说，我们有如下称为狄拉克演算的对应关系：

命题 1.1。该对应关系（及其共轭）

$$X = |X\rangle \subseteq \mathcal{L}(A|X), \quad X^* = \langle X| \subseteq \mathcal{L}(X|A) :$$

$$|x\rangle\, a := |xa\rangle , \quad \langle x|\, y := \langle x|y\rangle : \quad \langle x|^* = |x\rangle$$

定义一个等距嵌入（及其共轭），
从而将配对表示为

$$\langle x|y\rangle = \langle x| \circ |y\rangle \in \mathcal{L}(X|A) \circ \mathcal{L}(A|X).$$

这进一步将紧算子的概念表示为

$$\mathbb{K}(X, Y) := \overline{\operatorname{span}}\, |Y\rangle \langle X| \subseteq \mathcal{L}(X|Y)$$

并将可伴随算子的概念表示为

$$Tx = T \circ |x\rangle , \quad \langle Tx|y\rangle = \langle x| \circ T^* \circ |y\rangle = \langle x|T^* y\rangle .$$

以上所有内容使得可以将表达式拆分为算子的复合。

证明。我们首先注意到，系数代数本身定义了一个希尔伯特模：

$$\langle - | - \rangle : A \times A \to A : \quad \langle x|y\rangle = x^* y.$$

现在可以验证，这些赋值定义了互为伴随的映射

$$\langle x|^* = |x\rangle \in \mathcal{L}(A|X): \quad \big\langle \langle x|y\rangle \,\big|a\big\rangle = \ldots = \big\langle y\big|xa\big\rangle = \big\langle y\big|\,|x\rangle\, a\big\rangle$$

且该识别定义了一个等距嵌入

$$X = |X\rangle \subseteq \mathcal{L}(A|X): \quad \| \,|x\rangle\, \|^2 = \| \,\langle x| \circ |x\rangle \,\| = \ldots = \| \,\langle x|x\rangle \,\|.$$

我们将这些留作读者的启发性练习。 □

有了这一识别，希尔伯特模便可简洁地理解为一个右模，并配有一个由对合给出的抽象配对

$$(X \curvearrowleft A) \quad XA \subseteq X, \qquad (X \times X \to A) \quad X^*X \subseteq A$$

从现在起，我们将其简称为形式包含。
现在我们可以转而关注 C^*-对应这一概念：形式上，它们由希尔伯特模以及系数代数到可伴随算子的表示构成。不过，从上述观点来看，我们还可以将其描述为系数代数上的双模，并配有满足相容性条件的内积配对

$$AX \subseteq X, \qquad XA \subseteq X, \qquad X^*X \subseteq A \tag{1}$$

满足一些关系，例如（在狄拉克形式体系中显而易见的关系）

$$(ax)^*y = x^*(a^*y), \qquad x^*(ya) = (x^*y)a, \qquad \text{etc.}$$

与此同时，我们注意到，对应这一概念因配对而具有内在的不对称性。更确切地说，较为传统的希尔伯特模概念配有对偶配对，因此使这一概念具有对称性：

$$\begin{aligned} X^*X \subseteq A, \qquad XA \subseteq X, \\ XX^* \subseteq A, \qquad AX \subseteq X. \end{aligned}$$

事实上，这涵盖了协变表示的主要目标。我们将在下一节回到这一方面。接下来，我们将简要介绍对应的（内部）张量积。利用上文的狄拉克形式体系，我们现在可以将其简单地引入为如下形式幂：

$$A(XY\ldots Z) \subseteq (AX)Y\ldots Z, \qquad (XY\ldots Z)A \subseteq XY\ldots(ZA)$$

此时内积配对可简单写作

$$(XY\dots Z)^*(XY\dots Z) = Z^*\dots Y^*\Big(X^*X \subseteq A\Big)Y\dots Z$$
$$\subseteq Z^*\dots\Big(Y^*Y \subseteq B\Big)\dots Z \subseteq \dots \subseteq \Big(Z^*Z \subseteq A\Big).$$

此外，这也自动蕴含平衡关系，例如

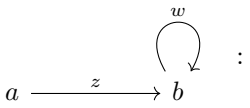
$$\Big((xa)y - x(ay)\Big)^*\Big((xa)y - x(ay)\Big) =$$
$$= y^*(a^*x^*)(xa)y - \dots + (y^*a^*)(x^*x)(ay) = 0.$$

下面给出一个关于此类张量积的示例：

例 1.2（图对应：张量幂）：考虑一个有向图，并将其图对应视为

$$X = \ell^2\Big(\ E = \text{edges}\ \Big), \quad A = c_0\Big(\ V = \text{vertices}\ \Big)$$

其作用和配对分别由值域和源给出



$$:\qquad \begin{aligned} z^*z &= a, \quad zz = z = bz, \\ z^*z &= b, \quad wb = w = bw. \end{aligned}$$

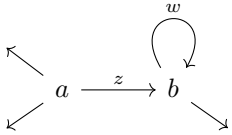
另一方面，我们根据 *[KPQ12]* 可知，每个定义在“以离散集为顶点的直和”上的非退化对应，都可表示为图对应：

$$A = c_0\Big(\text{vertices} = \text{some set}\Big) \implies X = \ell^2(\text{edges}).$$

事实上，这可通过一个简单的计数论证得出：

$$a, b \in \text{vertices}: \quad bXa = \ell^2\Big(\text{edges} : b \leftarrow a\Big) = \ell^2(bEa).$$

此外，由此论证还可得出，若允许存在端点指向虚空的边，例如，则退化对应也可以用同样的方式表示



此外，图对应的任意次幂本身也仍是一个图

对应，而且确实由相应长度的路径构成：

$$XX\dots X=\ell^2(EE\dots E),\quad A=c_0(\text{vertices}).$$

换言之，就是通过拼接各条边。

因此，张量积可以看作只不过是词的形式幂；同样，也可以考虑与对偶空间及其对偶配对相关的混合幂（不过形式上仅限于算子空间的语境）。

我们以希尔伯特双模的内在刻画结束本节。为此，我们首先需要以下众所周知的观察：

命题 1.3。考虑一个对应（采用狄拉克括号记号）

$$\langle X|X\rangle\subseteq A,\quad XA\subseteq X,\quad AX\subseteq A$$

并将该核的正交补视为（通过左作用），

$$\ker(A\curvearrowright X)=\{aX=0\}\subseteq A:$$

$$\ker(A\curvearrowright X)^\perp=\{a\ker(A\curvearrowright X)=0\}\subseteq A.$$

这便定义了使左作用忠实的最大理想。特别地，我们可以同时将正交补与其在可伴随算子空间中的等距像（通过左作用）视为同一对象。

证明。在开始实际论证之前，我们先作一个有用的观察：核定义了一个理想（闭且双边），因为

$$A\ker(A\curvearrowright X)X=0,\quad \ker(A\curvearrowright X)AX=0,$$

$$\overline{\ker(A\curvearrowright X)}X\subseteq\overline{\ker(A\curvearrowright X)X}=0$$

因此它也是自伴的（这一点也很容易直接验证）

$$\Big\langle X\Big|\ker(A\curvearrowright X)^*X\Big\rangle=\Big\langle\ker(A\curvearrowright X)X\Big|X\Big\rangle=0\implies\ker(A\curvearrowright X)^*X=0.$$

现在，这个核恰好刻画了使作用忠实的那些理想：

$$K\ker(A\curvearrowright X)=K\cap\ker(A\curvearrowright X)=0\iff K\restriction X=0.$$

因此，其正交补定义了最大的此类理想：

$$K\ker(A\curvearrowright X)=0\iff K\subseteq\ker(A\curvearrowright X)^\perp.$$

请注意，正交补（如我们所定义的，仅从左侧出发）本身定义了一个理想（闭且双侧）

$$A\ker(\ldots)^{\perp}\ker(\ldots)=0,\quad \ker(\ldots)^{\perp}A\ker(\ldots)=0,$$

$$\overline{\ker(\ldots)^{\perp}\ker(\ldots)}\subseteq\overline{\ker(\ldots)^{\perp}\ker(\ldots)}0$$

因此也得到一个自伴对象（这次并不那么显而易见）。 □

在此基础上，我们现在可以进一步给出希尔伯特双模的内在刻画（我们将其提升为定理，因为即使到现在，这一结果仍远非广为人知）。作者还要感谢 Adam Skalski 和 Bar- tosz Kwasniewski 协助完善了这一想法的关键细节：

定理 1.4. 考虑式 (1)中的一个对应，并将命题 *1.3* 中的正交补视为

$$\ker(A\curvearrowright X)^{\perp}=\{a\,\ker(A\curvearrowright X)=0\}\subseteq A$$

并如该命题所述，同时通过其作用加以识别

$$A\supseteq\ker(A\curvearrowright X)^{\perp}=\Big(\ \ker(A\curvearrowright X)^{\perp}\curvearrowright X\ \Big)\subseteq\mathcal{L}(X|X).$$

当且仅当紧算子（参见命题 *1.1*）都属于正交补时，该对应定义了一个希尔伯特双模

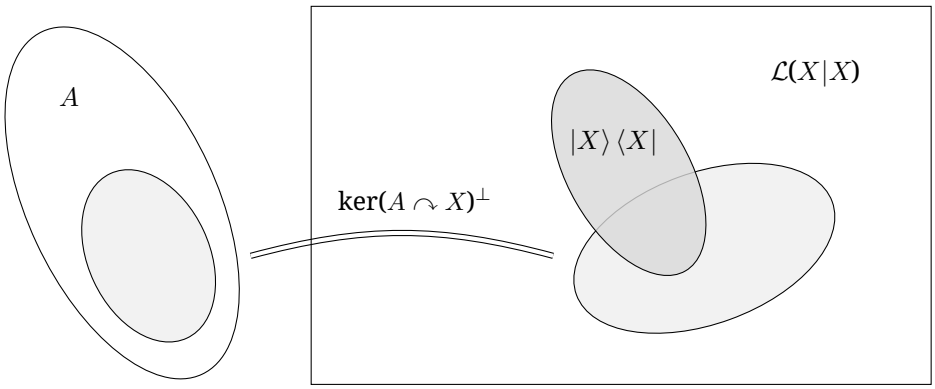
$$|X\rangle\langle X|\subseteq\ker(A\curvearrowright X)^{\perp}\subseteq\mathcal{L}(X|X)$$

而对偶配对总是由下式给出

$$|-\rangle\langle-|:X\times X\to A:\quad |X\rangle\langle X|\subseteq\ker(A\curvearrowright X)^{\perp}\subseteq A$$

由此便不再有任何歧义。因此，希尔伯特双模的概念是一种无需附加结构的纯粹性质。

在开始证明之前，我们注意到，上述情形或许可以通过下面的插图更直观地呈现在脑海中（也更容易记住）：



一般而言，这样的对应可以看作带有部分对偶配对的希尔伯特双模。带着这幅图景，我们开始证明。

证明。无需考虑希尔伯特双模，只需考虑希尔伯特模的情形（即单侧作用和配对的情形），例如由下式给出

$$\langle X|X\rangle \subseteq A, \quad XA \subseteq X.$$

单侧作用（此处为右侧作用）的核与配对的正交补（因此也与其支撑理想）一致：

$$\ker(X \curvearrowleft A) = \langle X|X\rangle^\perp \left(= \operatorname{supp}(X)^\perp\right).$$

确实，利用 Blanchard 分解 [Bla96，引理 1。3] 这立即由下式得出

$$\langle X|X\rangle\, a = 0 \iff \Big(|X\rangle = |X\rangle\langle X|X\rangle\Big) a = 0.$$

反过来，这一观察告诉我们应在哪里寻找配对：

$$\langle X|X\rangle \subseteq \langle X|X\rangle^{\perp\perp} = \ker(X \curvearrowleft A)^\perp$$

将上述考虑中的右作用替换为我们刚刚揭示的命题中的左作用，我们便得到了该命题中的条件。反之，给定该命题中的条件，我们只需利用正交补的等距像即可取回对偶配对。利用命题1.1 中的狄拉克演算，我们最终得到（仅通过复合）

$$|x\rangle \circ \Big(\langle y| \circ |z\rangle\Big) = \Big(|x\rangle \circ \langle y|\Big) \circ |z\rangle$$

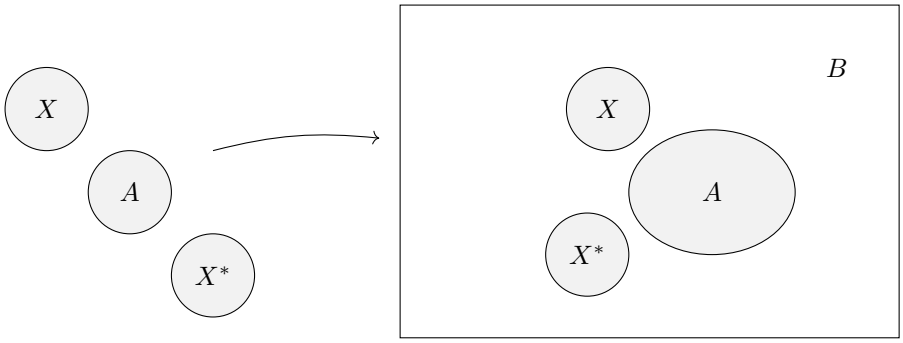
因此，传统的（配对之间的）相容性显然成立。 □

2 表示

考虑第一节中引入的抽象对应：

$$X^*X \subseteq A, \quad XA \subseteq X, \quad AX \subseteq X.$$

这种结构在某种意义上是自由悬置的，因此我们希望将其作为一个整体嵌入某个环境算子代数中，如下所示：



一个恰当的类比是将 Fell 丛嵌入任意交叉积中。这就是我们所说的表示。更准确地说，这是将对应和系数代数表示到某个环境算子代数中的表示，例如

$$(X, A) \longrightarrow B \ : \qquad \tau : X \to B, \qquad \varphi : A \to B$$

其中前者是向量空间态射，后者是算子代数态射，并且这一对态射与中间的结构相协调；用狄拉克形式体系表示，就是（见命题 1.1）：

$$\varphi(x^*y) = \tau(x)^*\tau(y), \qquad \tau(xa) = \tau(x)\varphi(a), \qquad \tau(ax) = \varphi(a)\tau(x).$$

众所周知，后者由前两者自动推出：事实上，利用 C^* 恒等式可得（用狄拉克形式体系书写）

$$\Big[\varphi(a)\tau(x) - \tau(ax)\Big]^* \Big[\varphi(a)\tau(x) - \tau(ax)\Big] =$$
$$= \varphi(a)^*\tau(x)^*\tau(x)\varphi(a) - \ldots + \tau(ax)^*\tau(ax)$$
$$= \varphi(x^*a^*ax) - \ldots + \varphi(x^*a^*ax) = 0.$$

现在考虑嵌入环境算子代数中的这一结构

$$X = \tau(X) \subseteq B, \quad A = \varphi(A) \subseteq B$$

那么，我们也可以将它们视为子空间和子代数，从而使前一节中的抽象包含成为实际的包含

$$X^*X \subseteq A \subseteq B, \quad XA \subseteq X \subseteq B, \quad AX \subseteq X \subseteq B.$$

我们注意到，尽管这些表示通常显然并不忠实，但我们总可以转而考虑其商对应，使该表示变为忠实。这将定义分类的第一个参数。

现在我们希望将表示扩展到更高阶的混合张量幂。为此，我们回顾 Kajiwara–Pinzari–Watatani 的以下结果：

命题 2.1 ([KPW98，引理 2。1])。 表示可规范地扩展到张量积和紧算子（以狄拉克形式体系表示）：

$$\begin{pmatrix} \tau : X \to Y \\ \varphi : A \to B \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} XX \to B : & \tau(xy) := \tau(x)\tau(y) \\ XX^* \to B : & \tau(xy^*) := \tau(x)\tau(y)^* \end{pmatrix}$$

后者还满足以下关系

$$\begin{aligned} KL \in (XX^*)(XX^*) \subseteq (XX^*) : &\qquad \tau(K)\tau(L) = \tau(KL) \\ aKb \in A(XX^*)A \subseteq (XX^*) : &\qquad \varphi(a)\tau(K)\varphi(b) = \tau(aKb) \end{aligned}$$

因此特别定义了一个算子代数态射。
此外，假设该态射在系数代数上是等距的，那么它在对应和紧算子上也同样是等距的：

$$\begin{aligned} \|(A \to B)-\| = \|-\| \quad &\Longrightarrow \quad \|(X \to B)-\| = \|-\|, \\ \|(A \to B)-\| = \|-\| \quad &\Longrightarrow \quad \|(XX^* \to B)-\| = \|-\|. \end{aligned}$$

通过迭代，该命题涵盖了所有更高次幂以及其他任意混合幂。

证明。我们给出向紧算子的扩张，因为这展示了如何运用狄拉克演算，并采用了 Kajiwara–Pinzari–Watatani 的一个巧妙技巧：我们需要验证，在初等紧算子上定义的形式线性映射仍然有界

$$\left\| \tau\left(\sum_n x_n y_n^* \right) \right\| \leq \left\| \sum_n x_n y_n^* \right\|, \qquad \forall x_n, y_n \in X,$$

因此，该赋值允许延拓至所有紧算子的完备化（事后证明其定义良好）。为此，我们运用矩阵演算，将

线性和重新表述为矩阵乘积

$$(x)(y^*) := \sum_n x_n y_n^* = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_N^* \end{pmatrix}.$$

重新表述后，Kajiwara、Pinzari 和 Watatani 提出的这一相当巧妙的技巧，现在是使用 C^*-恒等式（推广到可伴随算子的矩阵）：

$$\|xy^*\|^2 = \left\|(xy^*)(yx^*) = x(y^*y)x\right\| = \left\|x\sqrt{y^*y}\right\| = \ldots = \left\|\sqrt{x^*x}\sqrt{y^*y}\right\|.$$

注意，这会自动引入矩阵膨胀，因为例如

$$x^*x = \begin{pmatrix} \langle x_1| \\ \vdots \\ \langle x_N| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x_1\rangle & \cdots & |x_N\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \cdots & \langle x_1|x_N\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_N|x_1\rangle & \cdots & \langle x_N|x_N\rangle \end{pmatrix}.$$

另一方面，在调用表示时同样适用，因此我们得到所需的界

$$\|\tau(xy^*)\| = \left\|\varphi\left(\sqrt{x^*x}\sqrt{y^*y}\right)\right\| \leq \left\|\sqrt{x^*x}\sqrt{y^*y}\right\| = \|xy^*\|.$$

反过来，这一技巧同样适用于对应和张量积

$$X \to B: \quad \|\tau(x)\| = \|\varphi(x^*x)\| \leq \|x^*x\| = \|x\|,$$

$$XX \to B: \quad \|\tau(xy)\| = \|\varphi(y^*x^*xy)\| \leq \|y^*x^*xy\| = \|xy^*\|$$

以及其他所有类型的张量积，例如算子代数的张量积。与此同时，这还意味着等距性会从系数代数传递到对应（及张量积），并传递到紧算子。此外，该态射满足紧算子上的关系，因为很容易通过初等紧算子验证：

$$\varphi(a)\tau(xy^*)\varphi(b) = \varphi(a)\tau(x)\tau(y^*)\varphi(b) = \tau(axy^*b),$$

$$\tau(xy^*)\tau(zw^*) = \tau(x)\varphi(y^*z)\tau(w^*) = \tau(xy^*zw^*).$$

因此，我们找到了所需的关系，证明完成。 □

有了这一点，我们现在可以引入协变性的概念。首先要指出的是（与前面的命题一样），我们本来也可以定义

态射（尽管这多少有些无意义）

$$A \supseteq \langle X|X\rangle \to B: \quad \tau(x^*y) := \tau(x)^*\tau(y)$$

它在系数代数上的作用（在某种程度上是显而易见的）与原来的作用一致：

$$\begin{array}{ccc} \langle X|X\rangle & \longrightarrow & B \\ \big\downarrow & & \big\| \\ A & \longrightarrow & B. \end{array} \qquad \tau(-) = \varphi(-)$$

另一方面，假设某些元素也作为紧算子作用：

$$A \cap |X\rangle\langle X| := \left\{ \, a \in A \;\middle|\; a \in |X\rangle\langle X| \, \right\} \subseteq A.$$

那么，没有理由认为前一个命题给出的诱导态射会与该代数对应的态射一致：

$$\begin{array}{ccc} A \cap |X\rangle\langle X| & \longrightarrow & B \\ \big\downarrow & & \big\| \\ |X\rangle\langle X| & \longrightarrow & B. \end{array} \qquad \tau(-) \neq \varphi(-)$$

然而，两个态射之差出人意料地定义了一个算子代数态射，因为（利用命题 2.1）

$$\begin{aligned} (\varphi - \tau)a(\varphi - \tau)b &= \varphi(a)\varphi(b) - \varphi(a)\tau(b) - \tau(a)\varphi(b) + \tau(a)\tau(b) \\ &= \varphi(ab) - \tau(ab) - \tau(ab) + \tau(ab) = \varphi(ab) - \tau(ab). \end{aligned}$$

因此，我们的表示分解为若干态射之和

$$\left(\; A \cap |X\rangle\langle X| \longrightarrow B \; \right) = \tag{2}$$

$$= \begin{pmatrix} A \cap |X\rangle\langle X| \\ \big\downarrow \\ |X\rangle\langle X| \longrightarrow B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \cap |X\rangle\langle X| \longrightarrow B \\ \big\| \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \cap |X\rangle\langle X| \\ \big\downarrow \\ |X\rangle\langle X| \longrightarrow B \end{pmatrix}.$$

因此，我们可以用协变理想来刻画等式成立的范围：

$$\operatorname{cov}\left(\; (X, A) \to B \; \right) := \ker \left(\text{———} \; '' \; \text{———} \right) \trianglelefteq A. \tag{3}$$

为简洁起见，我们通常省略对系数代数的依赖。协变性和核将对规范等变表示进行分类。接下来让我们仔细考察核态射和可能的协变性：

3 核与协变性

我们从刻画对应范畴中的核态射开始本节。为此，我们先引入对应之间态射的一般概念。与表示类似，这类态射由定义在对应和系数代数上的一对态射给出

$$(X, A) \longrightarrow (Y, B) \ : \qquad \tau : X \to Y, \qquad \varphi : A \to B$$

其中，前者定义线性态射，后者定义算子代数的态射，并且这对态射与其间的结构相协调。用狄拉克形式体系可以简洁地表示为：

$$\varphi(x^* y) = \tau(x)^* \tau(y), \qquad \tau(ax) = \varphi(a)\tau(x), \qquad \tau(xa) = \tau(x)\varphi(a).$$

由此得到的范畴并非阿贝尔范畴（这基本上是由于系数代数上的代数态射所致），但仍然拥有所有核和余核。不过，在阿贝尔范畴之外的范畴中，核和余核的概念并不标准，因此我们先作简要介绍。我们的对应及其态射范畴具有如下意义下的零态射：

$$\begin{aligned}(X, A) \longrightarrow (Y, B) \xrightarrow{0} (Z, C) \ &= \ (X, A) \xrightarrow{0} (Z, C),\\ (X, A) \xrightarrow{0} (Y, B) \longrightarrow (Z, C) \ &= \ (X, A) \xrightarrow{0} (Z, C).\end{aligned}$$

态射的核是通用的湮灭态射：

$$(?, ?) \xrightarrow{\ker} (X, A) \longrightarrow (Y, B) \ = 0$$

也就是说，任意其他湮灭态射都可唯一地通过核分解：

$$\begin{aligned}&(X', A') \longrightarrow (X, A) \longrightarrow (Y, B) \ = 0\\ \Longrightarrow \qquad &(X', A') \dashrightarrow^{\exists!} (?, ?) \xrightarrow{\ker} (X, A).\end{aligned}$$

对偶地，可以定义态射的余核。此外，我们将一个短正合列记为

$$0 \longrightarrow (?,?) \longrightarrow (X,A) \longrightarrow (?,?) \longrightarrow 0$$

当每一方分别是另一方的核或余核时：

$$(?,?) \longrightarrow (X,A) \;= \ker\Big(\;(X,A) \longrightarrow (?,?) \;\Big)$$

$$(X,A) \longrightarrow (?,?) \;= \operatorname{coker}\Big(\;(?,?) \longrightarrow (X,A) \;\Big)$$

我们将在下面的命题中填补这些问号。
不过，在此之前，我们先介绍不变理想与遗传理想的以下等价概念。这些概念可以追溯到 Pimsner，并由 Kajiwara–Pinzari–Watatani 明确提出（我们暂不讨论负不变理想，因为稍后将从不同角度研究它们）：

引理 3.1 ([Pim97，引理 3.5 后续内容] 和 [KPW98，第 4] 节；另见 [FMR03，第 2] 节，以及类似地 [Kat07，第 1] 节：不变理想与遗传理想的概念相同。更准确地说，系数代数 $K \trianglelefteq A$ 中的理想具有如下刻画：

$$XK = \{x \in X \mid X^*x \in K\} = \{x \in X \mid x^*x \in K\} \tag{4}$$

因此，以下等价关系也成立

$$X^*KX \subseteq K \iff KX \subseteq XK. \tag{5}$$

前者通常称为不变的，后者称为遗传的。

证明。 Katsura 基于 Lance 的一项分解结果给出了简洁的证明，更准确地说，是 [Lan95，引理 4。4]，不过，该结果本身仍需要一些相当技术性的逼近论证。我们也可以通过以下较为初等的观察来验证这一等价关系：首先注意，根据 Cohen–Hewitt，右侧的两个空间自动都是线性且闭的：

$$KX = \overline{\operatorname{span}}\, KX \subseteq X, \quad XK = \overline{\operatorname{span}}\, XK \subseteq X.$$

现在，显然我们有正向包含，因为

$$X^*(XK) = (X^*X)K \subseteq AK \subseteq K.$$

反过来，利用该理想的任意近似单位元，我们有：

$$x^*x \in K \implies (1-e)x^*x(1-e) \to 0 \implies x = \lim_e (xe) \in XK.$$

借助这一刻画，我们进一步得出正向结论

$$X^*KX \subseteq K \implies KX \subseteq XK: \quad (X^*K^*)(KX) = X^*KX \subseteq K.$$

或者，也可以利用 Blanchard 分解来验证正向结论（其原始证明十分简洁且初等，参见 [Bla96，引理 1。3]）：

$$KX = (KX)(KX)^*(KX) = (KX)(X^*KX) \subseteq (KX)K \subseteq XK$$

不过，这实际上隐含地用到了尚有些技术性的 Cohen–Hewitt 定理（见上文）。如果希望完全避免使用 Cohen–Hewitt 定理，也可以按以下逐元素方式论证（用狄拉克记号表述）：

$$K|X\rangle \ni k|x\rangle = |y\rangle\langle y|y\rangle \implies \langle y|y\rangle^3 = \langle x|k^*k|x\rangle \in K$$

$$\implies \langle y|y\rangle = \sqrt[3]{\langle x|k^*k|x\rangle} \in K \implies k|x\rangle = |y\rangle\langle y|y\rangle \in XK.$$

这些关于正向结论的变体各有优点。
对于逆向，我们只需如下论证

$$KX \subseteq XK \implies X^*KX \subseteq X^*XK \subseteq AK \subseteq K.$$

因此，不变理想与遗传理想的概念是一致的。 □

下面举例说明遗传理想这一概念：

例 3.2 （图对应：遗传理想）：考虑例 *1.2*中的图对应：

$$X = \ell^2\Big(\ E = \text{edges}\ \Big), \quad A = c_0\Big(\ V = \text{vertices}\ \Big).$$

那么，每个理想都对应于某个顶点集合

$$K = c_0\Big(S = \text{some vertices}\Big) \trianglelefteq c_0(V) = A$$

而遗传理想则成为顶点的遗传集合

$$c_0(S)\ell^2(E) \subseteq \ell^2(E)c_0(S) \quad \iff \quad SE \subseteq ES$$

将其展开用文字写出后可读作

$$\text{range(some edge)} \in S \implies \text{source(some edge)} \in S$$

以及其名称的由来：遗传理想。

为了理解核态射（进而也理解余核态射），我们作如下观察：设某个态射在系数代数上为零，那么它在整个对应上也为零：

$$(\ A \longrightarrow B\ ) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\ X \longrightarrow Y\ ) = 0 \tag{6}$$

事实上，容易验证（通过使用 C^*-恒等式）

$$\tau(x) = 0 \implies \varphi(x^*x) = \tau(x)^*\tau(x) = 0 \implies x^*x = 0 \implies x = 0$$

这等价于如下交换图（见上一节）

$$\begin{array}{ccc} \langle X|X\rangle & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \| \\ A & \longrightarrow & 0 \subseteq B. \end{array} \qquad \tau(-) = \varphi(-)$$

因此，我们不难预期，态射的核会以某种关键方式涉及系数代数上的核。有鉴于此，现在我们可以给出核与余核态射的一种新的内在刻画。

与此同时，作者想指出，考虑具体核对应（通过不变理想）的想法可追溯至[Pim97]，而其商对应则可追溯至 [KPW98]；其表示已出现在 [KPW98定理 4 的证明中。3] 并且在 [FMR03]中有明确表述。

作者将这些结果视为对范畴核与余核态射内在刻画的部分成果；经过进一步拓展和完善后，它们给出了对应范畴中核与余核态射的完整分类。鉴于这一分类的实用价值（包括在后续研究中的应用），我们将其作为一条定理提出。

定理 3.3（分类：核与余核态射）：对应范畴拥有所有核态射和余核态射。更准确地说，它们都具有以下特殊形式

$$0 \longrightarrow (XK, K) \longrightarrow (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow 0$$

当且仅当这些理想是不变的（等价地，是遗传的）

$$K \trianglelefteq A: \qquad X^*KX \subseteq K \quad (\iff KX \subseteq XK).$$

反过来，给定一个态射，其核为

$$(XK, K) \xrightarrow{\ker} (X, A) \longrightarrow (Y, B) \ : \qquad K = \ker(A \to B) \trianglelefteq A.$$

因此，其余核为（在像内）

$$(X, A) \longrightarrow (Y, B) \xrightarrow{\operatorname{coker}} \left(\tfrac{Y}{YL}, \tfrac{B}{L}\right) \ : \quad L = \sum\nolimits_{n\geq 0} \langle Y^n |\, BAB \,| Y^n \rangle \trianglelefteq B.$$

此外，余核态射恰好是满射态射。

在开始证明上述命题之前，我们先对商范数作简要说明（并给出一个相当简化的证明）：

引理 3.4 （比较 [FMR03，引理 2。1]和 [Kat07，引理 1。5]）：对于商对应，以下结论成立：希尔伯特模的范数与商巴拿赫空间的范数一致，

$$\left\| \frac{x_0}{XK} \right\|^2_{\text{Hilbert}} = \inf \| \langle x_0 | x_0 \rangle + K \| = \inf \|x_0 + XK\|^2 = \left\| \frac{x_0}{XK} \right\|^2_{\text{Banach}}.$$

特别地，商对应是完备的（由 Cohen–Hewitt 定理可知）。

证明。与这两篇参考文献相比，我们给出一个简化的证明：一方面，
显然有如下包含

$$\|x_0 + XK\|^2 \subseteq \| \langle x_0 + XK | x_0 + XK \rangle \| \subseteq \| \langle x_0 | x_0 \rangle + K \|$$

因此（取下确界时）有如下界

$$\left\| \frac{x_0}{XK} \right\|^2_{\text{Hilbert}} = \inf \| \langle x_0 | x_0 \rangle + K \| \leq \inf \|x_0 + XK\|^2 = \left\| \frac{x_0}{XK} \right\|^2_{\text{Banach}}.$$

对于反向蕴含，我们可以使用算子代数商范数的著名公式（这一简化技巧）

$$\left\| \frac{\langle x_0 | x_0 \rangle}{K} \right\| = \inf \| \langle x_0 | x_0 \rangle + K \| = \lim_{e \to 1} \| (1 - e) \langle x_0 | x_0 \rangle (1 - e) \|$$

其中，极限是对理想的某个（或任意一个）近似单位元取的。
由此可得反向包含关系

$$\| \langle x_0 - x_0 e | x_0 - x_0 e \rangle \| = \|x_0 - x_0 e\|^2 \in \|x_0 + XK\|^2$$

因此也得到了所需的反向估计：

$$\left\| \frac{x_0}{XK} \right\|^2_{\text{Banach}} = \inf \|x_0 + XK\|^2 \leq \lim_{e \to 1} \|(1-e)\langle x_0|x_0\rangle(1-e)\| = \left\| \frac{x_0}{XK} \right\|^2_{\text{Hilbert}}$$

因此，所需的希尔伯特模范数与巴拿赫空间范数相同。 □

既然已经说明商对应的完备性，我们现在可以放心地讨论所需的核与余核态射。

定理的证明 *3.3*。我们先陈述关于核态射的结论。首先验证每个态射都存在一个（范畴意义上的）核，定义如下：

$$(XK, K) = \ker(\ (X, A) \longrightarrow (Y, B)\ ) : \qquad K = \ker(A \to B).$$

显然，根据我们的观察（6），核会湮灭该态射：

$$\Big(\ker(A \to B) \to A \to B\Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big(X \ker(A \to B) \to X \to Y\Big) = 0$$

同时，我们也注意到，任何这样的理想都是不变的：

$$\langle X|\ker(A \to B)\,|X\rangle \subseteq \ker(A \to B) : \quad (A \to B)\Big(\langle X|\ker(A \to B)\,|X\rangle\Big) =$$

$$= (Y \leftarrow X)\langle X| \cdot (A \to B)\ker(A \to B) \cdot (Y \leftarrow X)\,|X\rangle = 0.$$

反过来，假设另一个态射从左侧湮灭

$$(W, D) \longrightarrow (X, A) \ : \quad (W \to X \to Y) = 0, \quad (D \to A \to B) = 0.$$

（由于我们上述的观察，只需在系数代数上满足湮灭条件即可。）显然，在系数代数层面，我们有所需的包含：

$$(D \to A \to B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D \to \ker(A \to B)$$

另一方面，回想一下，支撑理想上的诱导态射与系数代数层面的态射一致。因此，我们也必然有一个包含关系，其像包含于核中，

$$\begin{array}{ccccc} \langle W|W\rangle & \dashrightarrow & \ker(A \to B) & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \| & & \| \\ D & \longrightarrow & \ker(A \to B) & \longrightarrow & A. \end{array}$$

然而，我们有如下等价（利用刻画（4））：

$$W \to X \ker(A \to B) \iff \langle W|W\rangle \to \ker(A \to B).$$

由此，我们也得到了对应层面上所需的包含，

$$D \to \ker(A \to B) \quad \Longrightarrow \quad W \to X \ker(A \to B).$$

因此，在上述核对应上也存在唯一的分解。由此，每个态射都有一个由上述核态射给出的核。

接下来我们验证，每个这样的态射确实都是某个核，也就是命题中短正合列给出的核：

$$0 \longrightarrow (XK, K) \longrightarrow (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow 0 \ :$$

$$\ker\Big(\ (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right)\ \Big) = \ (XK, K) \longrightarrow (X, A).$$

为此，我们先验证该商给出了一个良定义对应

$$\left(\tfrac{X}{XK}\right)^*\left(\tfrac{X}{XK}\right) \subseteq \left(\tfrac{A}{K}\right), \quad \left(\tfrac{X}{XK}\right)\left(\tfrac{A}{K}\right) \subseteq \left(\tfrac{X}{XK}\right), \quad \left(\tfrac{A}{K}\right)\left(\tfrac{X}{XK}\right) \subseteq \left(\tfrac{X}{XK}\right).$$

换句话说，我们需要验证这些关系

$$(XK)^*X \subseteq K, \quad X^*(XK) \subseteq K, \quad \ldots, \quad (K \subseteq A)X \subseteq (XK).$$

这里唯一非平凡的一条（它并非自动成立）是最后一条，而这条恰恰要求遗传理想（等价地说，不变理想）

$$(K \subseteq A)X = KX \subseteq XK \quad (\iff KX \subseteq XK)$$

因此，商给出了一个良定义对应。

现在来讨论它的核。我们已经找到了上述态射的唯一（范畴意义上的）核。因此，所需的等式现在很容易由下式推出

$$\ker\Big(\ (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right)\ \Big) = \Big(X \ker\big(A \to \tfrac{A}{K}\big), \ker\big(A \to \tfrac{A}{K}\big)\Big) = (XK, K).$$

关于对应的核态射，暂且说到这里。现在我们来讨论余核态射。首先验证，每个余核都具有上述特殊形式

$$0 \longrightarrow (XK, K) \longrightarrow (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow 0 \ :$$

$$\operatorname{coker}\Big(\ (XK, K) \longrightarrow (X, A)\ \Big) = \ (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right).$$

显然，商会消去核（利用我们的观察（6））：

$$\big(K \to A \to \tfrac{A}{K}\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (XK \to X \to \tfrac{X}{XK}) = 0$$

反过来，给定任意另一个湮灭态射，例如

$$(X, A) \xrightarrow{(\tau,\varphi)} (Y, B) \ : \quad (XK \to X \to Y) = 0, \quad (K \to A \to B) = 0.$$

那么，这两个态射都可以唯一地经由该商分解（作为线性映射）：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (XK, K) & \longrightarrow & (X, A) & \longrightarrow & \big(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\big) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\tau,\varphi)} & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & (Y, B) & = & (Y, B) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

因此，仍需验证该分解定义了对应之间的一个态射。不过，这基本上可由原始态射推出（利用同余类）：

$$\begin{aligned} \varphi\Big((x + XK)^*(y + XK)\Big) &= \varphi(x^*y) = \tau(x)^*\tau(y) = \tau(x + XK)^*\tau(y + XK), \\ \tau\Big((x + XK)(a + K)\Big) &= \tau(xa) = \tau(x)\varphi(a) = \tau(x + XK)\varphi(a + K). \end{aligned}$$

请记住，与左作用的相容性会自动成立，

$$\Longrightarrow \ \tau\Big((a + K)(x + XK)\Big) = \varphi(a + K)\tau(x + XK).$$

因此，我们找到了所需的余核：

$$\operatorname{coker}\Big(\ (XK, K) \longrightarrow (X, A)\ \Big) = \big(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\big).$$

现在，我们希望为一般态射求出余核：

$$\operatorname{coker}(\ (X, A) \longrightarrow (Y, B)\ ) = (?, ?)$$

为此，我们现在可以利用以下关系：核和余核算子满足伽罗瓦连接（引自[Lan78，第 VIII 节。1] 另请参见 [Fre64，第 1 章以及 2]）：

核 余核 核 = 核，核 核 = 0 = 余核 余核，余核 核 余核 = 余核。

另一方面，我们已经找到了核态射的形式：

$$\ker\Big(\ (Y,B)\to(?,?)\ \Big)=(YL,L)\to(Y,B).$$

以及核态射的余核

$$\operatorname{coker}(\ (YL,L)\longrightarrow(Y,B)\ )=\ (Y,B)\longrightarrow\big(\tfrac{Y}{YL},\tfrac{B}{L}\big)\ .$$

因此，我们可以将这些结果与核算子和余核算子之间的伽罗瓦连接结合起来，从而确定余核态射的必要形式：

$$\begin{aligned}(?,?)&=\operatorname{coker}(\ (X,A)\longrightarrow(Y,B)\ )=\\&=\operatorname{coker}\ker\operatorname{coker}(\ (X,A)\longrightarrow(Y,B)\ )=\big(\tfrac{Y}{YL},\tfrac{B}{L}\big).\end{aligned}$$

因此，我们只需找到决定商的不变理想。为此，考虑经过像（余核的核）的分解

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&(X,A)&=\!=\!=&(X,A)&\longrightarrow&0&\longrightarrow&0\\&&\big\downarrow&&\big\downarrow&&\big\downarrow&&\\0&\longrightarrow&(YL,L)&\longrightarrow&(Y,B)&\longrightarrow&\big(\frac{Y}{YL},\frac{B}{L}\big)&\longrightarrow&0.\end{array}$$

因此，不变理想（它决定了核）必然包含系数代数的像

$$(X,A)\longrightarrow(YL,L)\qquad\Longrightarrow\qquad(A\to L\to B)$$

并且必然也是由该像生成的最小此类理想

$$L=BAB+\langle Y|\,BAB\,|Y\rangle+\ldots=\sum\nolimits_{n\geq0}\langle Y^n|\,BAB\,|Y^n\rangle\trianglelefteq B.$$

事实上，任何更大的不变理想都只会定义出一个更进一步的商：

$$\begin{array}{ccccccccc}0&\longrightarrow&(YL,L)&\longrightarrow&(Y,B)&\longrightarrow&\big(\frac{Y}{YL},\frac{B}{L}\big)&\longrightarrow&0\\&&\big\downarrow&&\big\|&&\big\downarrow&&\\0&\longrightarrow&(YL',L')&\longrightarrow&(Y,B)&\longrightarrow&\big(\frac{Y}{YL'},\frac{B}{L'}\big)&\longrightarrow&0\end{array}$$

因此，我们也找到了广义态射的余核。对于最后一个断言，

我们注意到，每个余核都是满射，这从它们的特殊形式很容易看出。

$$\Big(X \longrightarrow \tfrac{X}{XK} \longrightarrow 0 \Big) \quad \text{and} \quad \Big(A \longrightarrow \tfrac{A}{K} \longrightarrow 0 \Big).$$

对于逆命题，考虑一个满射态射 $(X, A) \to (Y, B)$：

$$\Big(X \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \Big) \quad \text{and} \quad \Big(A \longrightarrow B \longrightarrow 0 \Big).$$

回顾上文，核算子和余核算子定义了一个伽罗瓦连接，因此，我们的态射（为定义余核）只能是其自身的余像（核的余核）。

$$(X, A) \to (Y, B) = \operatorname{coker}\Big(\text{some morphism} \Big)$$

$$= \operatorname{coker}\ker\operatorname{coker}\Big(\text{some morphism} \Big) = \operatorname{coker}\ker\Big((X, A) \to (Y, B) \Big).$$

为此，回顾其经由余像的分解（如前所述）：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (XK, K) & \xrightarrow{\ker} & (X, A) & \xrightarrow{\operatorname{coker}\ker} & \left(\frac{X}{XK}, \frac{A}{K}\right) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & (Y, B) & = & (Y, B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因此，我们需要验证该分解定义了一个同构。
由此可知，我们的态射是满射（在系数代数上）：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/K & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因此，该分解在系数代数层面定义了一个同构。由此可知，该分解在对应上也是忠实的（例如，回顾命题2.1）：

$$\ker\Big(\tfrac{A}{K} \longrightarrow B \Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ker\Big(\tfrac{X}{XK} \longrightarrow Y \Big) = 0.$$

另一方面，该分解也是满射的（在对应上）

$$\operatorname{im}\Big(\tfrac{X}{XK} \longrightarrow Y \Big) = \operatorname{im}\Big(X \longrightarrow \tfrac{X}{XK} \longrightarrow Y \Big) = \operatorname{im}\Big(X \longrightarrow Y \Big) = Y$$

因此，该分解如所期望的那样定义了一个同构。
也就是说，每个满射态射也定义了一个余核态射。 □

让我们在有向图的背景下识别这类商代数：

例 3.5（图对应：商图）：
考虑一个如例 *1.2* 中的图对应

$$X = \ell^2\Big(E = \text{edges} \Big), \quad A = c_0\Big(\text{ver} = \text{vertices} \Big)$$

及其由遗传集族给出的遗传理想（如例 *3.2* 中所示）

$$K = c_0\Big(S \subseteq \text{vertices} \Big) \trianglelefteq A : \qquad SE \subseteq ES.$$

显然，其商代数本身也可表示为一个图，因为它们的系数代数将顶点定义为离散直和，如 *1.2* 中所示：

$$0 \longrightarrow K = c_0(S) \longrightarrow A = c_0(V) \longrightarrow \tfrac{A}{K} = c_0\Big(T := V \setminus S \Big) \longrightarrow 0.$$

事实上，我们现在可以直接揭示这个商：

$$0 \longrightarrow XK = \ell^2(ES) \longrightarrow X = \ell^2(E) \longrightarrow \tfrac{X}{XK} = \ell^2(TE) \longrightarrow 0.$$

因此，其商代数直接由补图得到。

我们现在已经找到了关于核与余核态射的一切。有了这些工具，我们接下来讨论协变性。为此，我们指出，可以使任意表示成为忠实表示：事实上，我们只需将任意表示经由商对应进行分解

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (XK, K) & \xrightarrow{\ker} & (X, A) & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XK}, \frac{A}{K}\right) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & (B, B) & = & (B, B) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由此得到的分解在系数代数上是忠实的（等距的），因此在整个对应上也是如此（参见命题 2.1）：

$$K = \ker(A \to B) : \qquad \ker\left(\tfrac{A}{K} \to B\right) = 0 \implies \ker\left(\tfrac{X}{XK} \to Y\right) = 0.$$

因此，我们总可以先转到唯一的商对应，使任意表示成为忠实表示。这是规范等变表示分类的第一步。第二步是理解实际中可能出现的协变性。Katsura 在下文中的一项重要观察揭示了这一点

。为此，我们先回顾一下 Katsura 理想

$$\max(X, A) = \ker(A \curvearrowright X)^{\perp} \cap XX^* \trianglelefteq A \tag{7}$$

由于下述结果将阐明其中缘由，我们将其称为极大理想；为简便起见，通常省略对系数代数的依赖。还请注意，我们已在希尔伯特双模的另一种语境中遇到过这个理想（参见命题 1.3 和 1.4）。牢记这个理想后，下面来看 Katsura 的观察（我们将其拆分为关于忠实表示的结果，以及进一步推广到一般忠实态射的结果）：

命题 3.6 ([Kat04，命题 3.3]的第一部分):
考虑嵌入到某个环境算子代数中

$$(X, A) \subseteq B \;\; : \qquad A \subseteq B \quad (\implies X \subseteq B).$$

那么，其协变性 (3) 与核正交

$$\mathrm{cov}(\;\; (X, A) \subseteq B \;\;) \perp \ker(A \curvearrowright X).$$

特别是，对于一般表示（并按上述方式分解）也成立

$$(X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \dashrightarrow B :$$

$$0 \subseteq \mathrm{cov}\Big(\;\; \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow B \;\; \Big) \subseteq \max\left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right).$$

因此，协变性的可能范围以上界 Katsura 理想为界，这也正是其名称以及在 (7) 中记作极大理想的由来。

证明。我们用自己的语言重新表述 Katsura 的论证。为此，我们先回顾协变理想的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{cov}(X \to B) \subseteq A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \| \\ |X\rangle\langle X| & \longrightarrow & B. \end{array}$$

在我们的情形中，该表示也是忠实的（所有水平路径均如此）：

$$A \subseteq B, \qquad X \subseteq B, \qquad XX^* \subseteq B, \qquad \ldots$$

另一方面，协变理想在系数代数中定义了一个理想

（正如我们在上一节中所观察到的那样）。因此我们还有

$$\ker(A \curvearrowright X)\,\mathrm{cov}(X \to B) \subseteq \mathrm{cov}(X \to B).$$

因此，可以将这个表达式放入上方的交换图中，从而得到

$$\begin{array}{ccc} \ker(A \curvearrowright X)\,\mathrm{cov}(X \to B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \| \\ \ker(A \curvearrowright X)|X\rangle\langle X| = 0 & \longrightarrow & B \end{array}$$

然后（沿着上方路径）直接回溯出所需的正交性。其余结论可由命题前的讨论得出。 □

下面我们来揭示图代数情形下的最大协变性：

例 3.7（图对应：最大协变性）：
考虑例 *1.2* 中的图对应：

$$X = \ell^2\Big(E = \mathrm{edges}\Big), \quad A = c_0(\mathrm{vertices}).$$

对于这些图，平凡作用部分（左作用的核）和紧作用部分分别对应源点和有限接收点：

$$\ker(A \curvearrowright X) = c_0\Big(a : |a\,\mathrm{edges}\,| = 0\Big) = c_0(\mathrm{sources}),$$

$$A \cap XX^* = c_0\Big(a : |a\,\mathrm{edges}\,| < \infty\Big) = c_0(\text{fin receivers}).$$

因此，正交补合起来写作

$$\max(X, A) = \ker(A \curvearrowright X)^\perp \cap XX^* =$$

$$= c_0\Big(a : 0 < |a\,\mathrm{edges}\,| < \infty\Big) = c_0(\mathrm{regular}).$$

也就是说，最大协变性对应于正则顶点，因此任何其他协变理想都对应于其中某些顶点的集合。

我们以考察对应之间的态射的协变性（而非映入算子代数的表示）来结束本节。首先讨论对应之间的忠实态射。与表示的情形一样（参见命题2.1）：忠实性会从系数代数传递到对应（以及任何其他幂）：

$$(X, A) \to (Y, B) \;:\qquad A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad X \subseteq Y.$$

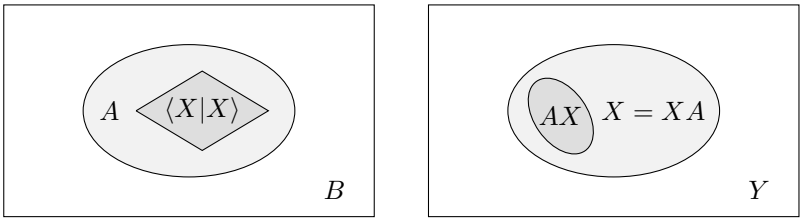
因此，忠实态射可以看作不过是一种子对应：也就是说，其内积本来就属于该子代数，且两侧的作用也同样如此，

$$\begin{gathered}\langle Y|Y\rangle \subseteq B, \quad BY \subseteq Y, \quad YB \subseteq Y: \\ X \subseteq Y, \quad A \subseteq B: \qquad \langle X|X\rangle \subseteq A, \quad AX \subseteq X, \quad XA \subseteq X\end{gathered} \tag{8}$$

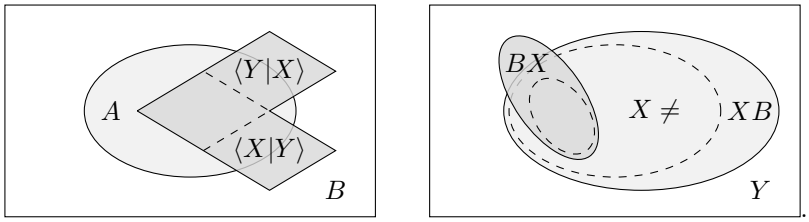
而作为比较，混合表达式仅满足

$$\langle X|Y\rangle \subseteq B, \quad BX \subseteq Y, \quad XB \subseteq Y.$$

示意而言，子对应的包含关系可能如下所示



与之相比，混合表达式可能仅有



因此，可以将子对应视为某种相容的限制：想想全局作用及其向部分作用的限制。紧算子在环境对应上的作用进一步表示为

$$(XX^*)Y \subseteq X(Y^*Y) \subseteq XB \subseteq Y$$

总而言之，我们现在确实可以将子对应简单地视为子空间和子代数，这在后文中也会相当方便。特别地，我们有（理由相当显而易见）

$$(T - T')Y = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T - T')X = 0$$

因此对于 $a \in A$ 和 $k \in XX^*$ 也同样成立，

$$(a - k)Y = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a - k)X = 0. \tag{9}$$

这个基本上显而易见的蕴含已经验证了 Katsura 的第二个观察结果；请注意，从子空间和子代数的角度思考带来了成效：

命题 3.8 （[Kat04，命题 3.3]）：
对于如（8）中所述的子对应，协变性是通过拉回得到的

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\Big(\ X \subseteq Y\ \Big) &= \Big\{\ a \in A\ \Big|\ \operatorname{im}(a \curvearrowright Y) \in \operatorname{im}(XX^* \curvearrowright Y)\ \Big\}\\ &= (A \curvearrowright Y)^{-1}\Big(\ \operatorname{im}(A \curvearrowright Y) \cap \operatorname{im}(XX^* \curvearrowright Y)\ \Big)\end{aligned}$$

我们通常将其简称为它们的交。
由此可得平凡协变性的刻画

$$\operatorname{cov}\Big(\ (X, A) \subseteq B\ \Big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{im}(A \to B) \cap \operatorname{im}\Big(XX^* \to B\Big) = 0$$

这揭示了关于 Toeplitz 表示的经典说法：
其系数代数与紧算子的交为零的那些。

证明。 这不过是平凡的蕴含（9）。 □

我们继续讨论核与余核态射的协变性。为此，我们先介绍 Kajiwara–Pinzari–Watatani 提出的以下相当标准的结果；该结果在后文中将特别有用：

命题 3.9 （参见 [KPW98，命题 4。2]）：
对应之间的短正合列（见定理 *3.3*）

$$0 \longrightarrow (XK, K) \longrightarrow (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow 0$$

诱导出一个（算子代数的）态射

$$\mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\tfrac{X}{XK}\right)\ : \qquad T(x + XK) := Tx + XK$$

其核具有等价的刻画

$$X^{-1}(K) := \Big\{X^*TX \subseteq K\Big\} = \Big\{TX \subseteq XK\Big\} = \ker\Big(\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}\left(\tfrac{X}{XK}\right)\Big). \quad (10)$$

此外，该态射与系数代数的左作用可交换，

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \frac{A}{AK} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & \mathcal{L}(X) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\frac{X}{XK}\right). & & \end{array}$$

证明。为了验证诱导态射，我们先注意以下事实：可伴随算子限制到核对应上：

$$T \in \mathcal{L}(X) \implies T \in \mathcal{L}(XK): \qquad T(XK) \subseteq (TX)K \subseteq XK.$$

因此我们得到一个交换图，由此可伴算子也下降到商上，

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & XK & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \frac{X}{XK} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & XK & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \frac{X}{XK} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

所得算子是可伴的，这一点很容易验证

$$\langle T(x+XK) \mid y+XK\rangle = \langle TX \mid y\rangle = \langle x \mid T^*y\rangle = \langle x+XK \mid T^*(y+XK)\rangle .$$

因此我们得到了所需的态射（算子代数之间的）

$$\mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) : \qquad T(x+XK) := Tx + XK.$$

同时我们注意到，该态射通常并非满射！此外，很明显，该态射与系数代数的左作用交换；这一点很容易验证（可以从子空间的角度来思考）

$$(a+K)(x+XK) = ax + XK = a(x+XK).$$

关于核的其余断言立即由（4）得出。 □

接下来我们给出紧算子的类似结果，例如 Fowler–Muhly–Raeburn 中的结果（我们为此提供一个略为简化的证明）：

命题 3.10 （见 [FMR03，引理 2。6]）：
对应的一个短正合列（参见定理 3.3）

$$0 \longrightarrow (XK, K) \longrightarrow (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow 0$$

在紧算子层面诱导出一个短正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (XK)(XK)^* = XKX^* & \longrightarrow & XX^* & \longrightarrow & \big(\frac{X}{XK}\big)\big(\frac{X}{XK}\big)^* & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & \mathcal{L}(X) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\frac{X}{XK}\big) & & \end{array}$$

其限制来自可伴随算子的态射，如图所示。

证明。显然，紧算子上的诱导态射与可伴随算子的态射可交换，因为（从子空间的角度考虑）

$$(x + XK)(y + XK)^*(z + XK) = xy^*z + XK = xy^*(z + XK).$$

接下来我们已经知道，核对应（作为子对应）在紧算子层面定义了一个嵌入：

$$(XK, K) \subseteq (X, A) \quad \Longrightarrow \quad (XK)(XK)^* \subseteq XX^*.$$

对于核对应，这些现在进一步定义了一个理想，例如

$$\Big((XK)(XK)^* = XKX^*\Big)XX^* = XK(X^*XX^*) = XKX^*.$$

另一方面，右侧的态射显然也是满射，因为

$$X \longrightarrow \tfrac{X}{XK} \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad XX^* \longrightarrow \big(\tfrac{X}{XK}\big)\big(\tfrac{X}{XK}\big)^* \longrightarrow 0.$$

关于正合列中间项的正合性，我们现在可以运用前一个命题对核的刻画；对于紧算子，该刻画如下

$$X^{-1}(K) \cap XX^* = \ker\Big(\ XX^* \longrightarrow \big(\tfrac{X}{XK}\big)\big(\tfrac{X}{XK}\big)^*\ \Big).$$

显然，该理想包含于核中（留作读者练习），而反向包含关系则可由上述描述轻易推出：

$$\begin{aligned} X^{-1}(K) \cap XX^* &= XX^*\Big(X^{-1}(K) \cap XX^*\Big)XX^* \\ &\subseteq X\Big(X^*X^{-1}(K)X\Big)X^* \subseteq XKX^*. \end{aligned}$$

因此，我们得到了紧算子所需的正合性。 □

现在，结合前面的结果，我们很容易推出核与余核态射所需的协变性

命题 3.11. 核与余核态射具有完全协变性，

$$0 \longrightarrow (XK, K) \longrightarrow (X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow 0 \ :$$

$$\operatorname{cov}\Big(\ (XK, K) \to (X, A)\ \Big) = K \cap XKX^*,$$
$$\operatorname{cov}\Big(\ (X, A) \to \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right)\ \Big) = A \cap XX^*.$$

这与表示的协变性形成对比：
表示的协变性受 Katsura 理想限制(7)。

证明。注意，核态射定义了一类特殊的子对应，因此我们处于命题3.8所讨论的情形：蕴含式（9）的非平凡逆命题对核对应成立，

$$a \in K, \quad k \in XKX^* : \qquad (a-k)XKX^* = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a-k)X = 0.$$

注意，我们也可以等价地验证蕴含式

$$KX^*(a-k)X^*K = 0 \quad \Longrightarrow \quad X^*(a-k)X = 0.$$

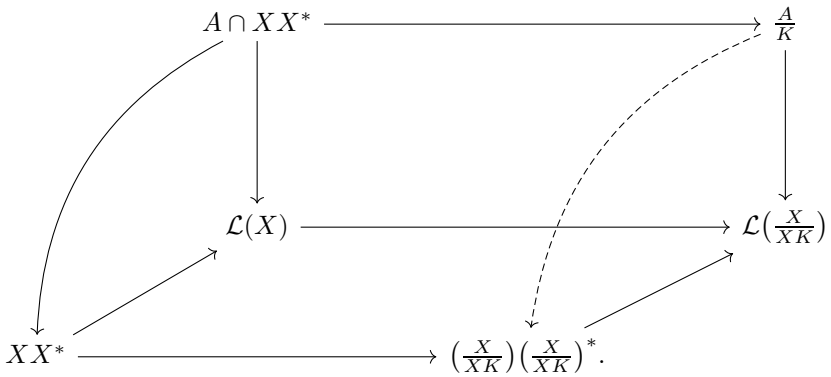
为此，我们注意到以下包含关系（由不变性可得）：

$$X^*(a-k)X \subseteq X^*(K + XKX^*)X = (X^*KX) + (X^*X)K(X^*X) \subseteq K.$$

因此，上述蕴含成立，因为对于

$$K\Big(\ X^*(a-k)X \subseteq K\ \Big)K = 0 \quad \Longrightarrow \quad X^*(a-k)X = 0$$

因此，核态射具有完整的协变性，正如所 期望的。
关于余核态射，我们可以结合命题3.9 和 3.10 得出所需的完全协变性



由此得出核与余核态射具有完全协变性。 □

接下来请回想，我们总能通过在商上取诱导表示，使表示变得忠实。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (XK,K) & \xrightarrow{\ker} & (X,A) & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XK},\frac{A}{K}\right) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & (B,B) & = & (B,B) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

前面的结果使我们现在能够进一步阐明商对应上的协变性（相关的协变性）与原表示的协变性之间的关系（作者谨此指出，他发现 Katsura 在 [Kat07] 中提出了这一特例作为一项观察）：

命题 3.12。 考虑一个余核态射（正如命题 *3.3* 中所指出的，它就是某个满态射），其后接一个任意态射

$$(X,A) \longrightarrow (Y,B) \longrightarrow 0 \quad \textit{and} \quad (Y,B) \longrightarrow (Z,C).$$

那么，复合的协变性可由拉回得到

$$\operatorname{cov}(X \to Y \to Z) = (A \to B)^{-1} \operatorname{cov}(Y \to Z) \cap XX^*.$$

特别地，表示的协变性可以从商对应上的诱导表示中恢复，

$$(X,A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK},\tfrac{A}{K}\right) \dashrightarrow B :$$

$$\operatorname{cov}(\ X \to B\ ) = \left(A \to \tfrac{A}{K}\right)^{-1} \operatorname{cov}\left(\tfrac{X}{XK} \to B\right) \cap XX^*$$

这与 Katsura 的观察相似 *[Kat07*，引理 5.10 的陈述 (v)*]*。

证明。现在可以由我们前面的命题轻易得出该结果：事实上，由于余核态射具有完全协变性，我们可分别为余核和任意态射得到一个协变图

$$\begin{pmatrix} A\cap XX^* & \longrightarrow & B\cap YY^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ XX^* & \longrightarrow & YY^* \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(Y\to Z) & \longrightarrow & C\cap ZZ^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ YY^* & \longrightarrow & ZZ^* \end{pmatrix}$$

因此也可为它们的复合得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} (A \to B)^{-1}(\,\dots\,) \cap XX^* & \longrightarrow & \text{协变性}(Y \to Z) & \longrightarrow & C \cap YY^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ XX^* & \longrightarrow & YY^* & \longrightarrow & ZZ^*. \end{array}$$

也就是说，拉回包含在协变性之中

$$(A \to B)^{-1} \operatorname{cov}(Y \to Z) \cap XX^* \subseteq \operatorname{cov}(X \to Z).$$

要证明反向包含，只需证明

$$\begin{aligned} & \operatorname{cov}(X \to Z) \subseteq (A \to B)^{-1} \operatorname{cov}(Y \to Z) \\ \iff \quad & (A \to B) \operatorname{cov}(X \to Z) \subseteq \operatorname{cov}(Y \to Z) \end{aligned}$$

也就是验证协变图

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{cov}(X \to Z) & \longrightarrow & (A \to B) \operatorname{cov}(X \to Z) & \longrightarrow & C \cap ZZ^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & YY^* & \longrightarrow & ZZ^*\ ? \end{array}$$

事实上，沿着协变图即可轻松看出这一点

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{cov}(X \to Z) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C \cap ZZ^* \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ XX^* & \longrightarrow & YY^* & \longrightarrow & ZZ^* \end{array}$$

以及我们余核态射的完全协变性（再一次）

$$\begin{array}{ccccc} A \cap XX^* & \longrightarrow & B \cap YY^* & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ XX^* & \longrightarrow & YY^* & \longrightarrow & ZZ^*. \end{array}$$

因此，复合的协变性正如所期望的那样源自拉回。剩下的陈述则是上述内容的一个特例。 □

我们以如下关于子对应协变性的否定结果结束本节：虽然我们发现核与余核态射具有完全协变性，但子对应一般而言并非如此

。也就是说，蕴含式（9）的逆命题一般不成立：

$$a \in A, \quad k \in XX^* : \qquad (a-k)X = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad (a-k)Y = 0.$$

为此，我们考虑下面这个较为简单的例子：

例 3.13（具有零协变性的子对应）：考虑一个算子代数的直和，同时将其视为系数代数和希尔伯特模（我们将其画作对角算子）

$$Y = \begin{pmatrix} D & \\ & D \end{pmatrix} = B \quad \Longrightarrow \quad Y^*Y \subseteq B, \quad YB \subseteq Y \quad \checkmark$$

但左作用由 $B = D \oplus D$ 上的翻转自同构给出：

$$\begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} y_1 & \\ & y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} y_1 & \\ & y_2 \end{pmatrix}.$$

考虑由该子代数给出的子对应（非不变理想！）

$$\left(X = \begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix} = A \right) \subseteq \left(Y = \begin{pmatrix} D & \\ & D \end{pmatrix} = B \right).$$

因此，其左作用恒等于零（尤其是通过紧算子作用时）：

$$A \curvearrowright X = \left[\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix} = 0$$

另一方面，它在环境对应上绝不会恒等于零

$$A \curvearrowright Y = \left[\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} D & \\ & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & \\ & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & D \end{pmatrix}.$$

因此，协变图具有最大程度的非交换性：

$$\begin{array}{ccc} A = A \cap XX^* & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \neq & \downarrow \\ XX^* & \longrightarrow & YY^* \end{array} \quad : \qquad \begin{aligned} \ker\left(A \subseteq B \subseteq YY^* \right) &= 0, \\ \ker\left(A \to XX^* \subseteq YY^* \right) &= A. \end{aligned}$$

因此，对于子对应的协变性需要保持谨慎：在最坏的情况下，需要手动验证特定的协变性。

至此，我们结束了关于核与余核态射以及各种可能协变性的讨论。有了这些准备，现在可以继续探讨规范等变表示及其分类——换言之，即相对 Cuntz–Pimsner 代数的分类。

4 相对 Cuntz–Pimsner 代数

本节将介绍相对 Cuntz–Pimsner 代数，并详细说明它们为何以及如何用于对规范等变表示进行分类。

我们从 Toeplitz 代数开始：它是这样的泛表示（更准确地说，是始表示），任何其他表示都能唯一地通过该泛表示进行分解，

$$\begin{array}{ccc} (X,A) & = & (X,A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}(X,A) & \dashrightarrow & (B,B). \end{array}$$

接下来回顾上一节的内容：通过转至商对应，我们可以使任意表示变得忠实。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (XK,K) & \xrightarrow{\ker} & (X,A) & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XK},\frac{A}{K}\right) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & (B,B) & = & (B,B) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并回忆定理 3.3 指出，任意此类商恰好对应于某个不变理想（等价地，遗传理想）

$$K = \ker(A \to B) \trianglelefteq A: \qquad X^*KX \subseteq K \quad (\iff KX \subseteq XK).$$

另一方面，我们在命题3.6 中发现，忠实表示的协变性有一个最大协变性作为上界，

$$0 \subseteq \operatorname{cov}\Big(\left(\tfrac{X}{XK},\tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow B \Big) \subseteq \max\left(\tfrac{X}{XK},\tfrac{A}{K}\right).$$

因此，我们可以尝试通过一对理想来分类表示：一个不变理想（作为可能的协变性），以及另一个有界理想（作为可能的协变性）：

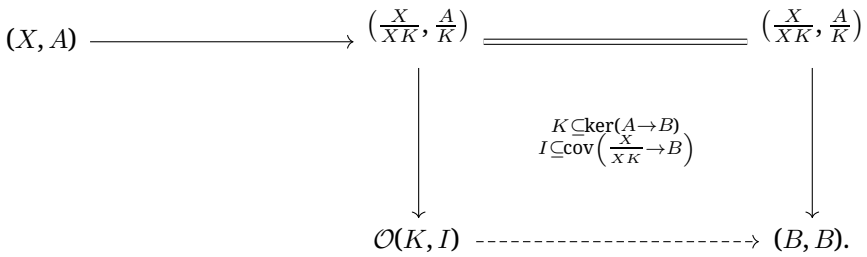
$$\Big(\ K \trianglelefteq A: \ X^*KX \subseteq K \ \Big| \ I \trianglelefteq \tfrac{A}{K}: \ I \subseteq \max\left(\tfrac{X}{XK}\right) \ \Big) \tag{11}$$

为处理这一任务，我们可以考虑这样一类表示：其核与协变性至少达到给定的一对不变理想和有界理想，

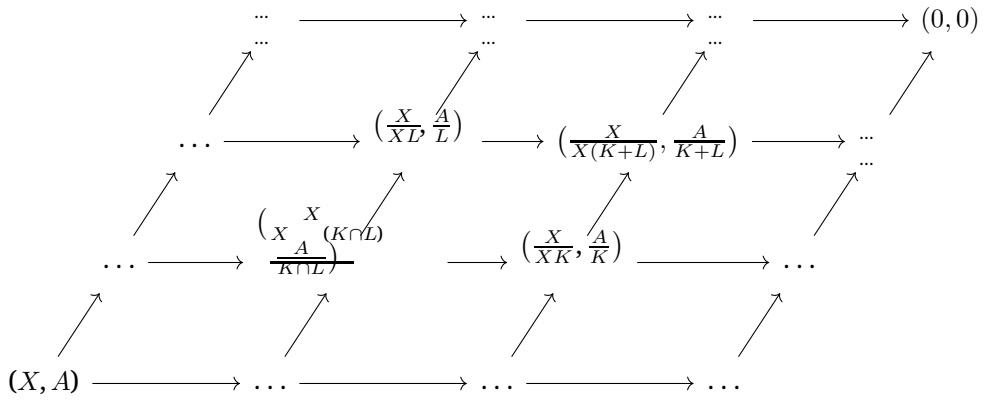
$$(X,A) \longrightarrow (B,B) \ : \qquad K \subseteq \ker(A \to B), \quad I \subseteq \operatorname{cov}\left(\tfrac{X}{XK} \to B\right).$$

请注意，任何此类等价类至少包含平凡表示，并且

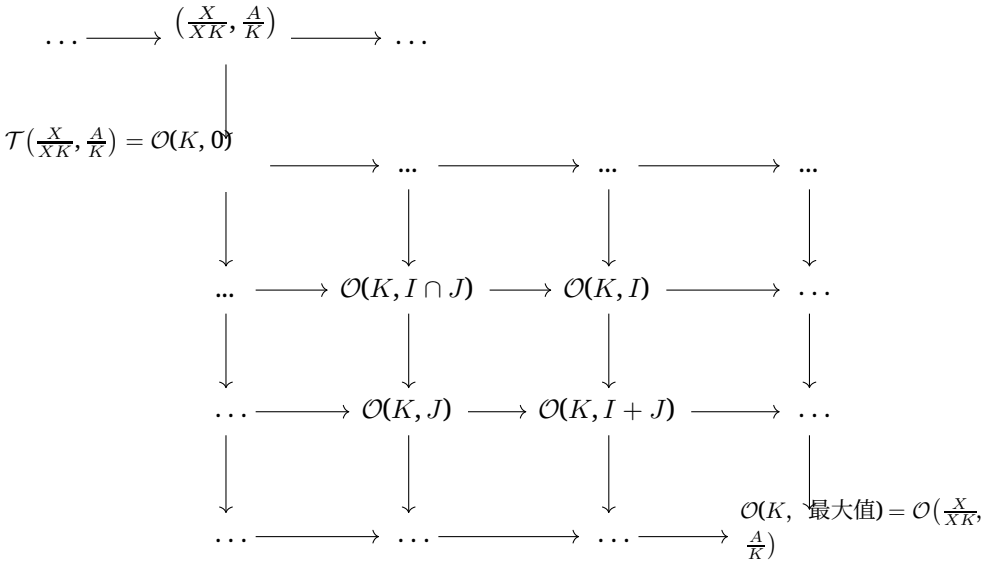
此外，表示的核和协变性也可能更大（目前我们无法排除这种情况，原因将在下文解释）。对于给定的核–协变对，如式（11）所示，这样的泛表示现在定义了相对 Cuntz–Pimsner 代数：



因此，我们通过先沿着余核态射格（由不变理想给出），



后接（所选余核上的）协变理想格



以 Toeplitz 代数和绝对 Cuntz–Pimsner 代数为极端点。

现在我们来说明相对 Cuntz–Pimsner 代数分类的具体目标。首先要指出，相对 Cuntz–Pimsner 代数自带规范作用，使其表示具有规范等变性（我们将在下一节中对此作更详细的解释）。因此，相对 Cuntz–Pimsner 代数可能的值域至多是规范等变表示。其分类的第一个令人惊讶的目标是：每个规范等变表示实际上都能作为一个相对 Cuntz-Pimsner 代数出现（尤其是，每个规范等变表示本身都是一个泛表示）。更准确地说，首先考虑使该表示忠实的诱导表示

$$(X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \dashrightarrow (B, B) \ : \qquad K = \ker(A \to B)$$

然后考虑所得表示的协变性

$$\left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow (B, B) \ : \qquad I := \operatorname{cov}\Big(\ \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \subseteq B \ \Big).$$

为了更清楚地阐明这个问题，我们不妨将该表示限制在其值域上，也就是由该对应（的像）生成的算子代数，

$$(X, A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow C^*(X \cup A) \subseteq B.$$

根据这一描述，第一个问题表明

$$(X,A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow \mathcal{O}(K,I) = C^*(X \cup A).$$

换句话说，由不变理想作为核、有界理想作为协变理想所构成的这些对，穷尽了所有规范等变表示。我们将通过熟悉的规范不变唯一性定理来解决这个问题。

第二个目标是确定，事实上每一种可能的核与协变性本身都能作为实际的核与协变性出现。更确切地说，考虑任意一对不变理想作为核、有界理想作为协变理想：

$$\begin{pmatrix} K \trianglelefteq A: & X^*KX \subseteq K \\ I \trianglelefteq A/K: & I \subseteq \max(X/XK) \end{pmatrix}$$

那么，可能根本不存在一个表示，其核和协变理想恰好就是给定的那些（因此并非每一对这样的理想都能实际出现）：

$$(X,A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow (B,B) \ :$$

$$\Big(\ \ker(A \to B),\ \operatorname{cov}\big(\tfrac{X}{XK} \to B\big) \ \Big) = (K,I) \ ?$$

换句话说，原则上，两对可能不同的核与协变理想，可能导出同一个相对 Cuntz–Pimsner 代数：

$$\mathcal{O}(K,I) = \mathcal{O}(K',I') \quad \Longrightarrow \quad (K,I) = (K',I') \ ?$$

不过，我们将得到以下关系（两者都非平凡！）：

$$(X,A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\right) \longrightarrow \mathcal{O}(K,I) \ :$$

$$\Big(\ \ker\big(\tfrac{A}{K} \to \mathcal{O}(K,I)\big) = 0 \ \Big| \ \operatorname{cov}\big(\tfrac{X}{XK} \to \mathcal{O}(K,I)\big) = I \Big)$$

因此也得到了所需的核–协变对

$$\Big(\ \ker(A \to \mathcal{O}(K,I)) = K \ \Big| \ \operatorname{cov}\big(\tfrac{X}{XK} \to \mathcal{O}(K,I)\big) = I \Big). \tag{12}$$

为此，Fock 表示将发挥作用：它的具体表示使我们能够实际计算其核与协变性，从而验证所需的关系。因此，每一对可能的不变理想（作为核）和有界理想（作为协变性）本身都能作为实际的核与协变性出现。概括这些目标，核–协变对完全参数化了整个规范等变表示格。换言之，相对

Cuntz–Pimsner 代数的格（如上图示）对整个规范等变表示格进行分类。

有了这一点，我们将进一步研究相对 Cuntz–Pimsner 代数之间的连接态射。更确切地说，我们将发现，由核–协变对给出的参数化定义了一个格同构，即

$$(\ K \subseteq L \mid \text{“}I \subseteq J\text{”} \ ) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{O}(K,I) \leq \mathcal{O}(L,J)$$

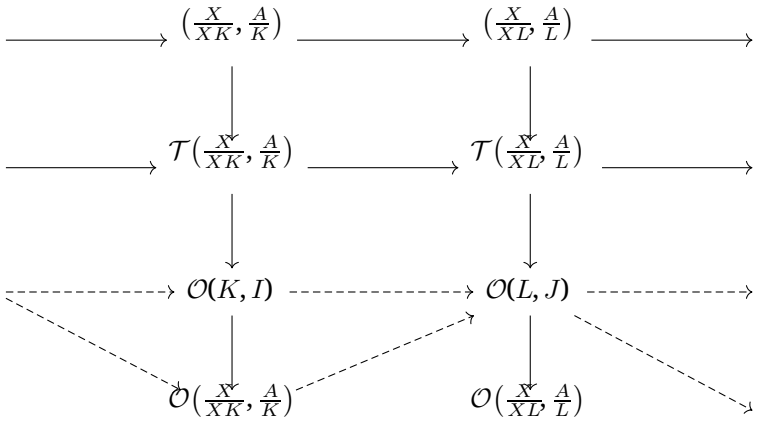
其中，后者表示分解（按照通常的记法）：

$$\begin{array}{ccc} (X,A) & = & (X,A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(K,I) & \dashrightarrow & \mathcal{O}(L,J). \end{array}$$

Katsura 已在其 2007年 关于利用所谓 T-对（以及进一步的 O-对）研究规范不变理想的文章中观察到这一点，不过他采用了不同的方法：我们将揭示，这些对象不过是我们的核–协变对经过变换后的版本，并据此为这类对给出一种自然的解释。随后，我们还将精确描述余核链之间何时存在连接态射（包括从何处到何处）

$$\mathcal{O}(K, I = \text{??}) \dashrightarrow \mathcal{O}(L,J) \ , \quad \mathcal{O}(K,I) \dashrightarrow \mathcal{O}(L, \max) \ \text{??}$$

这些结果推广了 Katsura 的结论。综上，我们因此获得了大量余核串之间的连接态射，例如



并且请注意，还会缺少许多连接态射。
为此，我们将进一步举出一些图代数的例子，以阐明

连接态射的缺失。有鉴于此，闲言少叙，我们现在来讨论规范等变表示这一类：

5 规范作用：傅里叶空间

我们先从以下观察入手，以说明规范等变表示的动机：对于环面上的每个固定复数，我们都可以考虑一个旋转该对应的自同构

$$z \in \mathbb{T}: \qquad (X,A) \longrightarrow (X,A) \;:\quad z \curvearrowright x = zx, \quad z \curvearrowright a = a$$

它们共同定义了一个圆群作用 $\mathbb{T} \curvearrowright (X,A)$。
显然，这些作用不会影响表示的核，因为对于

$$(X,A) \longrightarrow B \;: \qquad \ker(\; A \xrightarrow{1} A \longrightarrow B \;) = \ker(\; A \longrightarrow B \;).$$

同样，它们不会影响协变性，因为它们在紧算子上作用平凡，

$$zz^* = 1: \;\; XX^* \longrightarrow XX^* \;:\quad x(zz^*)y^* = xy^*:$$

$$\begin{array}{ccccc} A \cap XX^* & = & A \cap XX^* \subseteq A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & = & \downarrow & =? & \| \\ XX^* & = & XX^* & \longrightarrow & B. \end{array}$$

因此，每个相对 Cuntz–Pimsner 代数（作为某些关系的泛表示）都存在唯一的规范作用，使其表示成为规范等变的（可以从生成元与关系的角度来理解）：

$$\exists \mathbb{T} \curvearrowright \mathcal{O}(K,J): \qquad \Big(\mathbb{T} \curvearrowright (X,A)\Big) \longrightarrow \Big(\mathbb{T} \curvearrowright \mathcal{O}(K,I))\Big).$$

因此，我们至多只能希望在那些伴随规范作用、使表示具有等变性的表示中，对相对 Cuntz–Pimsner 代数进行分类。更确切地说，这可以写成

$$(\varphi,\tau): \Big(\mathbb{T} \curvearrowright (X,A)\Big) \longrightarrow \Big(\mathbb{T} \curvearrowright B\Big):$$

$$z \curvearrowright \tau(x) = \tau(z \curvearrowright x) = \tau(zx),$$
$$z \curvearrowright \varphi(a) = \varphi(z \curvearrowright a) = \varphi(a).$$

等价地说，这些就是算子代数的常规范等变表示（来自前文所述任意一种相对 Cuntz–Pimsner 代数）

$$\pi : \ \Big(\mathbb{T} \curvearrowright \mathcal{O}(K,I)\Big) \longrightarrow \Big(\mathbb{T} \curvearrowright B\Big) \ : \quad z \curvearrowright \pi(-) = \pi(z \curvearrowright -).$$

现在考虑允许对我们的规范等变表示进行分解的相对 Cuntz–Pimsner 代数（作为泛表示）：

$$(X,A) \longrightarrow \mathcal{O}(K,I) \dashrightarrow B$$

$$\iff \quad \Big(\ K \subseteq \ker(A \to B) \ \Big| \ I \subseteq \mathrm{cov}\big(\tfrac{X}{XK} \to B\big) \ \Big)$$

因此——如果规范等变表示有可能成为某个核–协变对的泛表示，那么它最有可能对应的当然是该表示自身的核–协变对：

$$(K,I) = \Big(\ \ker(A \to B) \ \Big| \ \mathrm{cov}\big(\tfrac{X}{XK} \to B\big) \ \Big) :$$

$$(X,A) \longrightarrow \mathcal{O}(K,I) \Longrightarrow C^*(X \cup A) \subseteq B \ ?$$

这正是规范等变唯一性定理将在下一节中确立的内容，也是相对 Cuntz–Pimsner 代数分类的首要目标。因此，让我们进一步做好准备，仔细考察规范等变表示及其傅里叶空间。

众所周知，每个配备圆群作用的算子代数（例如我们的规范等变表示）都伴有傅里叶空间

$$B(n \in \mathbb{Z}) = \Big\{ \ b \ \Big| \ \Big(b(z) := z \curvearrowright b\Big) = z^n b \ \Big\} \subseteq B$$

尤其是它的不动点代数

$$B(n=0) = \Big\{ \ b \ \Big| \ \Big(b(z) := z \curvearrowright b\Big) \equiv b \ \Big\} \subseteq B$$

它们定义了一个以整数为底的 Fell 丛

$$B(m)B(n) \subseteq B(m+n), \quad B(n)^* = B(-n)$$

以及到其不动点代数上的条件期望

$$E : \ B \longrightarrow B(0) \ : \quad E(b) = \int_{\mathbb{T}} \Big(b(z) = z \curvearrowright b\Big) \, \mathrm{d}z$$

更一般地，还配有到其任意傅里叶空间上的投影

$$E_n : \ B \longrightarrow B(n) \ : \quad E_n(b) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} b(z) \, \mathrm{d}z.$$

回顾一下，由取平均给出的条件期望由于状态空间能够分离正元素（且取平均是作为 Bochner 积分进行的），因而自动是忠实的：

$$b \geq 0 \implies \Big(b(z) = z \curvearrowright b \Big) \geq 0 \implies SB\Big(b(z) = z \curvearrowright b \Big) \geq 0 :$$

$$E(b \geq 0) = 0 \implies SB(E(b)) = SB\bigg(\int b(z) \, \mathrm{d}z \bigg) = \int SB(b(z)) \, \mathrm{d}z = 0$$

$$\implies SB\Big(b(z) = z \curvearrowright b \Big) \equiv 0 \implies SB\Big(b = 1 \curvearrowright b \Big) = 0 \implies b = 0.$$

与此同时，我们注意到，傅里叶空间通过[Exe94，命题 2，稠密地张成算子代数。5]（这种关系看起来相当直观，但并非显然）

$$B = \overline{\Big(\ldots + B(-1) + B(0) + B(1) + \ldots \Big)} = \sum_n B(n)$$

我们也鼓励读者看看 Exel 的精彩证明：它不需要任何切萨罗逼近，而只调用了基本的同构（作为 Coburn 的基本版本）

$$C^*(\mathbb{Z}) = C^*(u^* u = 1 = u u^*) = C(\ \sigma u \mid u^* u = 1 = u u^*) = C(\mathbb{T})$$

$$\implies C^*(\mathbb{Z}) = \overline{\Big(\ldots + \mathbb{C} u^* + \mathbb{C} e + \mathbb{C} u + \ldots \Big)} = C(\mathbb{T}).$$

简短地岔开一下：与此同时，人们可能会疑惑，既然任意元素都可以用傅里叶和逼近，而其傅里叶系数构成的级数却只在切萨罗平均意义下收敛（并且通常不按范数收敛），这怎么可能。将环面替换为开圆盘，并将三角级数和替换为多项式和之后，这个问题的答案便显而易见了。

$$\{\ldots, 1/z, 1, z, z^2, \ldots\} \subseteq C(\mathbb{T}) \quad \rightsquigarrow \quad \{1, z, z^2, \ldots\} \subseteq C(\mathbb{D})$$

众所周知，任何连续函数都可以用多项式在范数意义下逼近（根据 Stone–Weierstrass 定理）。另一方面，收敛幂级数对应于泰勒解析函数这一类函数。

$$f(z) = \sum_n a_n z^n \iff f \in C^\infty(\mathbb{D})$$

区别在于，对连续函数进行多项式逼近通常会改变序列中的每一个系数——包括此前已经确定的系数！因此，可以将收敛傅里叶级数视为解析函数的一种推广。

现在，我们进一步将注意力限定在表示的值域上（也因为其所在的环境其余部分并不能反映该对应）：更准确地说，这就是由该对应（的像）生成的算子代数，

$$(X, A) \longrightarrow C^*(X \cup A) \subseteq B \qquad \rightsquigarrow \qquad B = C^*(X \cup A).$$

请回想，对应（以及它在表示下的像）满足其定义性包含关系，更多详细说明见第1节：

$$X^*X \subseteq A, \quad XA \subseteq X, \quad AX \subseteq X.$$

因此，该值域（作为生成的算子代数）具有一种“精细结构”

$$C^*(X \cup A) = \overline{\text{span}}\Big(\ldots + (X^* + XX^*X^* + \ldots) +$$

$$+ (A + XX^* + XXX^*X^* + \ldots) + (X + XXX^* + \ldots) + \ldots \Big)$$

我们根据它们所属的傅里叶空间将其编排成若干组。因此，我们也得到了不动点代数的一种“精细结构”

$$B(n = 0) = E\Big(B = C^*(X \cup A)\Big) = \overline{\text{span}}\Big(A + XX^* + XXX^*X^* + \ldots\Big)$$

这使我们能够通过归纳法推导出规范不变唯一性定理。还要注意，对于任意对应（包括可能退化的对应！）

$$X^*X \subseteq A, \quad XA \subseteq X, \quad AX \subseteq X$$

$$\Longrightarrow \; XA = X, \quad XXA = XX, \quad \ldots$$

因此，傅里叶空间还满足

$$B(n \geq 1) = E_n\Big(B = C^*(X \cup A)\Big) = \overline{\text{span}}\Big(X^n + X^nXX^* + \ldots\Big)$$
$$= X^n\Big(A + XX^* + XXX^*X^* + \ldots\Big) = X^nB(0)$$

在更具体的陈述中，我们省略了线性张成和闭包；根据对合，负傅里叶空间也同样如此，因此这里一并省略

$$B(n \geq 1) = X^nB(0), \qquad B(n \leq -1) = B(0)X^{-n}.$$

因此，Fell 丛（限制在值域上）还满足

$$B(n \geq 1) = B(1)^n : \qquad B(n) = X^n B(0) \subseteq B(1)^n B(0) \subseteq B(1)^n \subseteq B(n)$$

对于其负傅里叶空间也同样如此，因此总体上定义了一个半饱和的 Fell 丛（例如参见 [Exe94，命题 4。8]）：

$$\begin{aligned} B(m \geq 0)B(n \geq 0) &= B(m+n), \\ B(m \leq 0)B(n \leq 0) &= B(m+n). \end{aligned}$$

这些关系对于 [MPT08] 中引入的二分膨胀非常有用。掌握了傅里叶空间的相关知识后，我们现在可以回到前面提出的分类问题：

$$(K, I) = \Big(\ \ker(A \to B) \ \Big| \ \operatorname{cov}\big(\tfrac{X}{XK} \to B\big) \ \Big) :$$

$$(X, A) \longrightarrow \mathcal{O}(K, I) \Longrightarrow C^*(X \cup A) \subseteq B \ ?$$

首先，我们可以转而考虑商对应

$$(X, A) \longrightarrow \big(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\big) \dashrightarrow \mathcal{O}(K, I) \longrightarrow B$$

以获得一个真正的嵌入，因为

$$K = \ker(A \to B) \quad \Longrightarrow \quad A/K \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad X/XK \subseteq B.$$

因此，我们可以假设该对应忠实地包含在环境算子代数中（将原对应替换为商对应后），

$$\big(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\big) \rightsquigarrow (X, A) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}(K, I) \rightsquigarrow \mathcal{O}(0, I) \quad \Longrightarrow \quad X \subseteq B, \ A \subseteq B \tag{13}$$

同时将注意力限制在其值域上：

$$C^*(X \cup A) \subseteq B \quad \rightsquigarrow \quad C^*(X \cup A) = B.$$

因此，我们可以将两个环境代数都视为该对应的忠实完备化——但它们先验上可能具有不同的范数拓扑：

$$\mathcal{O}(X; I) = C^*(X \cup A) \longleftarrow X \cup A \longhookrightarrow C^*(X \cup A) = B$$

作为另一种有价值的视角，也可以将上述问题视为规范等变包络（类似于最大和最小

C^*-非自伴算子代数的包络）：

$$\mathcal{T}(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{O}(X;I) \longrightarrow Q \longrightarrow \ldots \ : \qquad (X,A) \subseteq (\mathbb{T} \curvearrowright Q).$$

作者谨此感谢 Elias Katsoulis 提出了这一想法。接下来，由于我们的表示是规范等变的，它尤其限制在不动点代数上，并且还与条件期望交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X;\, I) & \longrightarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}(X;\, I)(0) & \longrightarrow & B(0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X;\ \ I) & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(X;\, I)(0) & \longrightarrow & B(0) \end{array}$$

因此，只需在不动点代数上验证上述等式：

$$\pi: \ \mathcal{O}(X;I)(0) = B(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \pi: \ \mathcal{O}(X;I) = B \tag{14}$$

事实上，这可由忠实条件期望的标准论证得出（对于相对 Cuntz–Pimsner 代数而言，这已经足够）：

$$\begin{aligned} \pi(a) = 0 \implies \pi(a^*a) = 0 \implies \pi(E(a^*a)) = E(\pi(a^*a)) = 0 \\ \implies E(a^*a) = 0 \implies a^*a = 0 \implies a = 0. \end{aligned}$$

另一种有趣但不太为人所知的由 Exel 提出的论证基本上利用了这样一个事实：傅里叶系数全为零的连续函数本身恒等于零（参见[Exe94，命题 2.5 和 2.9]）：

$$E_n(a)E_n(a)^* \in \mathcal{O}(X;I)\Big(n - n = 0\Big):$$

$$\begin{aligned} \pi(a) = 0 \implies E_n(\pi a)E_n(\pi a)^* = \pi\Big(E_n(a)E_n(a)^*\Big) \equiv 0 \\ \implies E_n(a)E_n(a)^* \equiv 0 \implies E_n(a) \equiv 0 \implies a = 0. \end{aligned}$$

不过，对于不动点代数，我们找到了其“精细结构”

$$\mathcal{O}(X;I)(n=0) = \overline{\operatorname{span}}\left(A + XX^* + XXX^*X^* + \ldots\right)$$

因此，不动点代数构成一个递增并（归纳极限）

$$\mathcal{O}(X;I)(n=0) = \operatorname{closure}\left(\bigcup_N \overline{\operatorname{span}}\left(A + XX^* + \ldots + X^N X^{-N}\right)\right).$$

因此，我们可以沿着 $n \in \mathbb{N}$ 通过归纳法验证其忠实性：

$$\mathcal{O}(X;I) \supseteq \overline{\text{span}}(A + XX^* + \ldots + X^n X^{-n}) \xhookrightarrow{\qquad} B \ ? \tag{15}$$

这里的重点并不是每个直和项都能分别嵌入（这显而易见）

$$A \hookrightarrow B, \qquad XX^* \hookrightarrow B, \qquad XXX^*X^* \hookrightarrow B, \qquad \ldots$$

而是这些直和项彼此之间会有大量相关性（具体来说，恰好是协变性的程度），这使得表示中的许多和式都会合并，例如协变性本身，

$$\text{cov}(X \to B) = \ker \left[\begin{pmatrix} \text{cov}(X \to B) & \longrightarrow & B \\ & & \| \\ & & B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{cov}(X \to B) & \\ \downarrow & \\ XX^* & \longrightarrow B \end{pmatrix} \right]$$

$$\Longrightarrow \left\{ (a) + (k = -a) \in A + XX^* \;\middle|\; a \in \text{cov}(X \to B) \right\} \subseteq \ker\Big(A + XX^* \longrightarrow B \Big).$$

事实上，命题 3.8 告诉我们，协变性恰好刻画了这个核。给读者留一道有趣的思考题：你能想明白原因吗?

在继续之前，我们想指出，上述归纳及其证明的思路出自 Evgenios Kakariadis，见 [Kak16] ；请注意，这大大简化了 Katsura 的原始证明！我们不再深入比较这些方法（因为这对当前工作没有帮助），但想指出，Katsura 分析核代数的方法在更一般的乘积系统背景下或许颇有价值，因此感兴趣的读者可参阅 [Kat04，第 5] 节进行比较。接下来，我们可以讨论规范不变唯一性定理。

6 唯一性定理

现在，我们可以陈述并证明我们版本的规范不变唯一性定理，该定理适用于沿核–协变性对构造的任意规范等变表示的相对 Cuntz–Pimsner 代数：

定理 6.1（规范不变唯一性定理：一般版本）。考虑一个规范等变表示（如上一节所述）

$$\Big(\mathbb{T} \curvearrowright (X, A)\Big) \xhookrightarrow{\qquad} \Big(\mathbb{T} \curvearrowright B\Big)$$

并为该表示选取核–协变对

$$(K, I) = \Big(\ \ker(A \to B) \ \Big| \ \ \mathrm{cov}\big(\tfrac{X}{XK} \to B\big) \ \Big).$$

那么，从相对 Cuntz–Pimsner 代数到商代数的映射是忠实的：

$$(X, A) \longrightarrow \mathcal{O}(K, I) \Longrightarrow C^*(X \cup A) \subseteq B.$$

因此，每个规范等变表示都定义一个相对 Cuntz–Pimsner 代数。
另一方面，每个相对 Cuntz–Pimsner 代数本身都定义了一些规范等变表示。
因此，规范等变表示与相对 Cuntz–Pimsner 代数（核–协变对的值域）相对应。

我们实际上已经证明了该定理：事实上，我们已经将一般情形归结为忠实表示的情形（见上一节），而忠实情形是 Katsu[ra04] 的经典结果，参见 [Kat16]。为方便读者，我们回顾一下简化版本：

首先，我们从几个观察和有用的关系开始。先考虑归纳问题中的递增子代数（15）（它们穷尽了不动点代数）：

$$\overline{\mathrm{span}}(A + XX^* + \ldots + X^n X^{-n}) \subseteq \mathcal{O}(X; I)$$

为了简化归纳过程，我们需要处理一个技术细节：注意，理想之和本来就是闭的，但子代数之和一般并非如此，

$$A \subseteq B, \quad A' \subseteq B: \qquad (A + A') \subseteq \overline{(A + A')}.$$

不过，理想与子代数之和仍然是闭的：

$$A \subseteq B, \quad J \trianglelefteq B: \qquad (A + J) = \overline{(A + J)}.$$

代数与理想情形的简短证明（与两个理想的情形类似）：
考虑可能不完备的代数的短正合列，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & (A+J) & \longrightarrow & (A+J)/J & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & \pi & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \overline{(A+J)} & \longrightarrow & \overline{(A+J)}/J & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

注意，商代数之间的态射定义了一个嵌入，因为

$$J \cap (A+J) = J \quad \Longrightarrow \quad (A+J)/J \subseteq \overline{(A+J)}/J.$$

由于 $*$-同态的值域总是闭的，我们也得到

$$\pi(A+J) = \pi(A) = \overline{\pi(A)} = \overline{\pi(A+J)} = \pi\Big(\overline{A+J}\Big).$$

因此商代数相同，所以（根据基本的同调代数）

$$(A+J)/J = \overline{(A+J)}/J \quad \Longrightarrow \quad (A+J) = \overline{(A+J)}. \tag{16}$$

因此，代数与理想的和构成一个闭子代数。
有了这一点，在我们的情形下（利用显然的包含）可得

$$AXX^* \subseteq XX^* \quad \Longrightarrow \quad \overline{\text{span}}(A + XX^*) = A + \overline{\text{span}}(XX^*)$$

更大的和也同理

$$\overline{\text{span}}\left(A + XX^* + \ldots + X^n X^{-n}\right) = A + \overline{\text{span}}\left(XX^* + \ldots + X^n X^{-n}\right).$$

至此，我们关于技术细节的讨论就结束了。
由此，归纳问题归结为求出其核

$$\ker\left(\ \mathcal{O}(X;I) \supseteq A + \overline{\text{span}}\left(XX^* + \ldots + X^n X^{-n}\right) \longrightarrow B\ \right)$$

因此也就是求出与紧算子相交的系数代数

$$A \cap \left(XX^* + \ldots + X^n X^{-n}\right) \subseteq B$$

下文为了使陈述更简洁，将省略闭线性张成的记号。我们希望更深入地理解这个交。为此，我们先讨论以下结果，它给出了 [Exe11] 中非交换 Cartan 子代数的一个有趣的代数描述，即非退化的 Cartan 子代数：

引理 6.2. 子代数包含环境代数的某个近似单位元，当且仅当该子代数是非退化的：

$$A \subseteq B: \qquad AB = B \quad \Longleftrightarrow \quad (1-e)B \to 0 \ \textit{for}\ A \ni e \to 1.$$

另一方面，非退化性等价于子代数能够到达

整个环境代数的遗传部分（隐含地使用 Cohen–Hewitt）

$$AB = B \quad \iff \quad \mathrm{her}(A) = ABA = B.$$

此外，该子代数在中间子代数上仍然是非退化的：

$$A \subseteq B_0 \subseteq B: \qquad AB = B \quad \implies \quad AB_0 = B_0.$$

作适当修改后，将该子代数和环境代数替换为任意一对算子代数，也有类似结论。

证明。正向结论显然，因为对于任意近似单位

$$A \ni e \to 1: \qquad (1-e)B = (1-e)AB \to 0$$

这里我们照常隐式地使用 Cohen–Hewitt。
反向结论也显然成立。

$$(1-e)B \to 0 \quad \implies \quad B \subseteq AB.$$

关于遗传子代数，我们有：

$$AB = B \quad (\implies B = B^* = (AB)^* = B^*A^* = BA)$$

$$\implies \quad B = (AB) = A(BA) = ABA \quad \implies \quad B = ABA \subseteq AB$$

关于中间代数，我们有：

$$\begin{array}{ccc} AB = B & \iff & (1-e)B \to 0 \text{ for } A \ni e \to 1 \\ & & \Downarrow \\ AB_0 = B_0 & \iff & (1-e)B_0 \to 0 \text{ for } A \ni e \to 1 \end{array}$$

对于任意一对算子代数（而非子代数）：
需要将等号替换为包含关系，并额外取闭包。 □

考虑到非退化性，我们现在可以展开上面的交：为此，我们首先注意到，紧算子在高阶紧算子的和中是非退化的，

$$\Big(XX^* + \ldots + X^nX^{-n}\Big) = XX^*\Big(XX^* + \ldots + X^nX^{-n}\Big).$$

事实上，我们只需从每个直和项中取出一只兔子（使用 Blanchard）：

$$XX^* = (XX^*)XX^*, \qquad XXX^*X^* = (XX^*)XXX^*X^*, \qquad \ldots$$

由此我们得到包含（与引理 6.2类似）：

$$A \cap \Big(XX^* + \ldots + X^n X^{-n} \Big) \subseteq \Big(A \cap (XX^* + \ldots + X^n X^{-n}) \Big) XX^*.$$

然而，后者位于紧算子代数之中，因为

$$\Big(A \cap (XX^* + \ldots + X^n X^{-n}) \Big) XX^* \subseteq AXX^* \subseteq XX^*$$

因此也位于该表示的协变性之中（见命题 3.8）。由于协变性不会减弱，我们得到如下组合关系：

$$A \cap \Big(XX^* + \ldots + X^n X^{-n} \Big) = \operatorname{cov}(X \to B) = \operatorname{cov}\Big(X \to \mathcal{O}(X; I) \Big).$$

特别地，核是由紧算子之和构成的：

$$\begin{aligned} &\ker\Big(A + \Big(XX^* + \ldots + XX^n X^{-n} X^* \Big) \longrightarrow B \Big) \\ &\subseteq XX^* + \Big(XX^* + \ldots + XX^n X^{-n} X^* \Big) \subseteq \mathcal{O}(X; I). \end{aligned}$$

以上是我们的引言性观察和关系。牢记这些内容后，我们现在可以开始证明规范等变唯一性定理。

定理*6.1* （规范不变唯一性定理）：我们已在（13）中将一般情形归约为忠实表示的情形：

$$\big(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K} \big) \rightsquigarrow (X, A) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}(K, I) \rightsquigarrow \mathcal{O}(0, I) \quad \Longrightarrow \quad X \subseteq B, \quad A \subseteq B$$

此外，问题可如（14）所示归约为不动点代数

$$\mathcal{O}(X; I)(0) \Longrightarrow B(0) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}(X; I) \Longrightarrow B$$

并可如（15）所示，沿其精细结构通过归纳法求解：

$$\mathcal{O}(X; I) \supseteq A + \Big(XX^* + \ldots + X^n X^{-n} \Big) \hookrightarrow B \ ?$$

有了这一点，我们现在可以开始从 [**Kak16**]：归纳证明。基例只是陈述我们早已熟知的包含关系，

$$\mathcal{O}(X; I) = C^*(X \cup A) \hookleftarrow A \hookrightarrow C^*(X \cup A) = B.$$

在开始归纳法之前，先综合以上的观察结果。

现在考虑归纳步骤（同时假设归纳假设成立）：

$$\ker\Big(\ A + \Big(XX^* + \ldots + X^{n+1}X^{-n-1}\Big) \longrightarrow B\ \Big) = 0\ ?$$

我们可以通过压缩，将这个问题归约到归纳假设。

$$\begin{aligned} X^* \ker\Big(\ A + \Big(XX^* + \ldots + X^{n+1}X^{-n-1}\Big) \longrightarrow B\ \Big)X \\ \subseteq \ker\Big(\ X^*X + X^*\Big(XX^* + \ldots + X^{n+1}X^{-n-1}\Big)X \longrightarrow B\ \Big) \\ \subseteq \ker\Big(\ A + \Big(XX^* + \ldots + X^nX^{-n}\Big) \longrightarrow B\ \Big) = 0 \end{aligned}$$

由此我们推知，压缩的核为零。

$$XX^* \ker\Big(\ A + \Big(XX^* + \ldots + X(X^nX^{-n})X^*\Big) \longrightarrow B\ \Big)XX^* = 0.$$

然而，我们发现核包含在紧算子的和中：

$$\begin{aligned} \ker\Big(\ A + \Big(XX^* + \ldots + XX^nX^{-n}X^*\Big) \longrightarrow B\ \Big) \\ \subseteq XX^* + \Big(XX^* + \ldots + XX^nX^{-n}X^*\Big) \subseteq \mathcal{O}(X;I). \end{aligned}$$

与此同时，紧算子在高阶紧算子中构成一个非退化子代数，因此其湮灭子是平凡的：

$$\begin{aligned} \Big(XX^* + \ldots + XX^nX^{-n}X^*\Big) = XX^*\Big(XX^* + \ldots + XX^nX^{-n}X^*\Big) \\ \implies \quad (XX^*)^\perp \cap \Big(XX^* + \ldots + XX^nX^{-n}X^*\Big) = 0. \end{aligned}$$

因此，上述核在不进行压缩的情况下也必然消失。 □

总结本节和上一节的内容，我们已经完成了相对 Cuntz–Pimsner 代数分类工作的第一部分：也就是说，我们发现每个规范等变表示本身都可视为某个核–协变对所对应的相对 Cuntz–Pimsner 代数。简言之，核–协变对涵盖了所有规范等变表示。

现在我们可以继续讨论第二部分，即相对 Cuntz–Pimsner 代数的分类：核–协变对能够对相对 Cuntz–Pimsner 代数进行分类；等价地，每一种可能的核–协变对本身都能在实际中出现。因此，我们需要构造足够多的表示（以及任何非平凡表示）。这正是

Fock 表示及其商代数将发挥作用之处：

7 Fock 表示

我们从以下问题开始：请注意，到目前为止，除了平凡表示之外，我们尚未遇到任何表示（暂且不论是否足够多）。

$$B = 0: \qquad X \longrightarrow 0, \qquad A \longrightarrow 0$$

因此，原则上，相对 Cuntz–Pimsner 代数（针对某些对应）可能全都与唯一的平凡表示重合。

$$(X, A) \longrightarrow \mathcal{T}(X, A) = \ldots = \mathcal{O}(K, I) = \mathcal{O}(K', I') = \ldots = 0 \ ??$$

由此引出一个问题：对应是否总是存在非平凡表示（并且进一步存在足够多的忠实表示）？为此，我们考察一种失败的尝试，而它又引导我们转向 Fock 表示：作为初步设想，我们可以考虑与该对应相关联的链接代数（仅将其视为希尔伯特模）。

$$B = \begin{pmatrix} A \\ X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & X^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & X^* \\ X & XX^* \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} A \\ X \end{pmatrix} \right]$$

以及由典范嵌入给出的表示

$$\begin{pmatrix} A & \\ & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & X^* \\ X & XX^* \end{pmatrix} = B, \qquad \begin{pmatrix} & 0 \\ X & \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A & X^* \\ X & XX^* \end{pmatrix} = B.$$

现在，尽管这个表示尊重希尔伯特模结构（基本上是由构造决定的），但它并不尊重左模结构：

$$\begin{pmatrix} 0 & x^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*y & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ax & 0 \end{pmatrix}.$$

解决方法很简单：沿对角线将这些延伸至无穷远处，这便直接引出了 Fock 空间表示。更确切地说，Fock 空间是

递增张量幂的无穷直和（如第 1 节所示）

$$\mathcal{F}(X) := A \oplus X \oplus XX \oplus XXX \oplus \ldots = \begin{pmatrix} A \\ X \\ XX \\ \vdots \end{pmatrix}$$

以及分别作为对角作用和右移的表示：

$$A \to \mathcal{L}(\mathcal{F}X): \qquad a\Big(A \oplus X \oplus XX \oplus \ldots\Big) := aA \oplus aX \oplus aXX \oplus \ldots$$

$$X \to \mathcal{L}(\mathcal{F}X): \qquad x\Big(A \oplus X \oplus XX \oplus \ldots\Big) := 0 \oplus xA \oplus xX \oplus xXX \oplus \ldots$$

我们用矩阵记法将它们可视化（使用形式上的左移位与右移位）：

$$X\otimes R = X\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ldots & \end{pmatrix}, \quad A\otimes 1 = A\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}, \quad X^*\otimes L = X^*\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}.$$

此外，Fock 表示还带有（内）圆群作用

$$\mathbb{T} \curvearrowright \mathcal{L}(\mathcal{F}X): \qquad (z \curvearrowright -) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z & & \\ & & z^2 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z & & \\ & & z^2 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}^*$$

这使该表示成为规范等变的：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z & & \\ & & z^2 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z & & \\ & & z^2 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}^* = 1A \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z & & \\ & & z^2 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ldots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & z & & \\ & & z^2 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}^* = zX \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ldots & \end{pmatrix}.$$

此外，紧算子的表示为

$$XX^* \;\mapsto\; X\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ldots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix} X^* = XX^* \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ldots \end{pmatrix}$$

完成这些初步计算后，我们现在可以揭示 Fock 表示即为泛表示（即 Toeplitz 代数）：

命题7.1（Fock 表示 = Toeplitz 代数）：

Fock 表示的核与协变性均为平凡

$$\ker\Big(A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}X) \Big) = 0, \qquad \operatorname{cov}\Big(X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}X) \Big) = 0$$

因此定义了泛表示（根据定理 *6.1*）。

证明。显然，该表示是忠实的（因而核是平凡的），因为

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a = 0.$$

因此，我们还可以将协变性交表示中的交来计算（作为命题 3.8中的特例）

$$\operatorname{cov}\Big(X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}X) \Big) = A\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \cap XX^*\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix} = 0.$$

因此，协变性也为平凡，命题得证。 □

需要注意的是，更重要的是，我们确立了任意非平凡表示的存在性（等价地，泛表示不同于平凡表示），并进一步确立了忠实表示的存在性（等价地，泛表示是忠实的）。换言之，现在我们可以沿着商对应的格（即核–协变性对的第一维）区分 Toeplitz 代数：

$$\mathcal{T}\big(\tfrac{X}{XK}\big) = \mathcal{O}(K,0) \;=\; \mathcal{O}(K',0) = \mathcal{T}\big(\tfrac{X}{XK'}\big) \quad \Longrightarrow \quad K = K'$$

事实上，我们甚至得到了（12）中更强的核关系：

$$\ker\Big(A \longrightarrow \mathcal{T}(X) \Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ker\Big(A \longrightarrow \tfrac{A}{K} \longrightarrow \mathcal{T}\big(\tfrac{X}{XK}\big) \Big) = K$$

我们还需要回答以下问题（接下来就会讨论）：

$$\mathcal{O}(K,I) = \mathcal{O}(K',I') \quad \Longrightarrow \quad (\; K = K' \mid I = I' \;) \quad ?$$

为此，我们现在可以将 Fock 表示视为 Toeplitz 代数的一种具体实现，并以此进一步沿着核–协变性对构造每个相对 Cuntz–Pimsner 代数，作为它的一个具体商。例如，先给定一个商对应（对应于某个不变理想）

$$K \trianglelefteq A: \quad X^*KX \subseteq K: \qquad (X,A) \longrightarrow \big(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\big)$$

我们可以通过对核取商来构造相应的 Toeplitz 代数

（更准确地说，是在原 Toeplitz 表示中生成的理想）

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (XK,K) & \longrightarrow & (X,A) & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XK},\frac{A}{K}\right) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}X(K\subseteq A)\mathcal{T}X & \longrightarrow & \mathcal{T}X & \longrightarrow & \mathcal{T}\left(\frac{X}{XK}\right) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

在较为精确的陈述中，我们照例省略闭线性张成。继续之前，为方便起见，我们用商对应替换原始对应，

$$\left(\tfrac{X}{XK},\tfrac{A}{K}\right)\rightsquigarrow(X,A) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{T}\left(\tfrac{X}{XK}\right)\rightsquigarrow\mathcal{T}(X).$$

接下来考虑一个理想（视为协变性），它不超过最大协变性（如命题3.6所述），

$$I\trianglelefteq A: \quad I\subseteq\max(X,A).$$

这个上界是必要的，因为更大的协变性会迫使出现额外的核，因此会经由某个进一步的商对应分解。与相对 Toeplitz 代数类似，相对 Cuntz–Pimsner 代数现在是所选协变性的余等化子

$$\mathcal{O}(K,I)=\operatorname{coeq}\left(\begin{array}{ccc} I\subseteq A\cap XX^* & \longrightarrow & \mathcal{T}X \\ \downarrow & & \| \\ XX^* & \longrightarrow & \mathcal{T}X \end{array}\right)$$

因此也如（2）所示，是以它们之差取商：

$$0\longrightarrow\mathcal{T}X\Big(\ (\varphi-\tau)I\ \Big)\mathcal{T}X\longrightarrow\mathcal{T}X\longrightarrow\mathcal{O}(X;I)\longrightarrow 0:$$

$$(\varphi-\tau)=\left(\begin{array}{ccc} A\cap XX^* & \longrightarrow & \mathcal{T}X \\ & & \| \\ & & \mathcal{T}X \end{array}\right)-\left(\begin{array}{ccc} A\cap XX^* & & \\ \downarrow & & \\ XX^* & \longrightarrow & \mathcal{T}X \end{array}\right).$$

现在，我们将 Fock 表示视为 Toeplitz 代数：回顾一下，我们已经在此找到了系数代数的具体嵌入，以及紧算子的具体嵌入（见上文）

$$\mathcal{T}X\subseteq\mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} A \\ X \\ \cdots \end{pmatrix}\right]: \qquad A\ \mapsto\ A\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \cdots \end{pmatrix},\quad XX^*\ \mapsto\ XX^*\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \cdots \end{pmatrix}$$

因此，它们的差为

$$A \cap XX^* \;\mapsto\; A \cap XX^* \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

因此，我们得到了作为商的相对 Cuntz–Pimsner 代数

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathcal{T}X \longrightarrow \mathcal{T}X \longrightarrow \mathcal{O}(X;I) \longrightarrow 0. \tag{17}$$

这最初由 Muhly 和 Solel 在 [MS98 的定理 2 中确立。19]现在我们希望验证诱导的商表示仍然忠实：也就是说，我们注意到，该商原则上可能会引入新的核，

$$I \subseteq A \cap XX^* : \qquad \ker\Big(A \longrightarrow \mathcal{T}X \longrightarrow \mathcal{O}(X;I) \Big) = 0 \; ?$$

事实上，我们注意到，一旦协变性超过最大协变性，该商就会引入新的核（正如我们在上文也已指出的那样）。因此，我们必须确保，只要协变性低于命题 3.6 中的最大协变性，这种情况就不会发生。为此，我们注意到，上述平凡核现在也可以等价地通过平凡交来验证

$$I \subseteq \max(X,A) : \qquad A \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cap \mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathcal{T}X = 0 \; ? \tag{18}$$

另一方面，我们还希望验证式（12）中的协变关系：

$$\operatorname{cov}\Big(A \longrightarrow \mathcal{T}X \longrightarrow \mathcal{O}(X;I) \Big) = I \; ?$$

这里的问题在于，协变性原则上也可能增加。事实上，相对 Cuntz–Pimsner 代数的构造（甚至我们对其所作的定义本身）只能保证对于给定的协变理想存在一个最小协变性。下面的论述可以使这一点更加明显：为此，考虑由泛性质经 Toeplitz 代数分解得到的差态射：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & A \cap XX^* & = & A \cap XX^* & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \mathcal{T}X & \longrightarrow & \mathcal{T}X & \xrightarrow{\varphi - \tau} & \mathcal{O}(X;I) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

因此，可以从共同的交中读出协变性：

$$\begin{pmatrix} A \cap XX^* & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \cap \mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \mathcal{T}X = \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} ? \tag{19}$$

注意，这同时也凸显了协变性可能会增强：如何增强？让我们先验证该表示在商映射下仍然忠实。为此，我们先从以下众所周知的关系入手（这可以追溯到 Joachim Cuntz 在 [Cun77] 中的一项观察）：

命题 7.2。 由协变性生成的理想，如 (17) 中所示，与以下形式的紧算子理想重合

$$\mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \mathcal{T}X = \begin{pmatrix} A \\ X \\ \dots \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} A & X^* & \dots \end{pmatrix} = \mathbb{K}\left[\begin{pmatrix} A \\ X \\ \dots \end{pmatrix} I \right]$$

对于更精确的表述，默认取闭线性张成。

证明思路：利用前文所述的形式右移和左移算子，可以最容易地得到该结果；由此，协变理想可写为

$$\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} = I\left[\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \right] = I \otimes (1 - RL).$$

不过，回顾可知，它们满足众所周知的关系

$$LR = 1 \quad \Longrightarrow \quad L(1 - RL) = 0 = (1 - RL)R.$$

因此，对于该理想，我们得到的唯一贡献是

$$\mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \mathcal{T}X = \sum_{mn} \left(X \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \right)^m \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \left(X^* \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \right)^n.$$

另一方面，它们生成如下的矩阵单位系统

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，对于上述理想，我们得到

$$\mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \mathcal{T}X = \dots = \sum_{mn} \begin{pmatrix} 0 \\ X^n \\ 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 0 & X^{-n} & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{F}(X)\mathcal{F}(X)^*$$

这正是协变理想所需的关系。 □

为了处理商上的诱导表示的核

我们需要仔细考察 7.2 中的紧算子理想：为此，我们从众所周知的“有限秩矩阵”逼近开始。更确切地说，对于 Fock 空间上的紧算子，有 $S \subseteq \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \mathbb{K}[\dots] & \\ & & 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} 0 & & \\ & k(S) & \\ & & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S \to \mathbb{N}} \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & \\ k_{10} & k_{11} & \\ & & \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{K}\left[\begin{pmatrix} A \\ X \\ \dots \end{pmatrix}\right].$$

事实上，利用 1.1 中的狄拉克演算，很容易验证这一点:

$$\begin{pmatrix} \dots & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ X \\ \dots \end{pmatrix} (A^* \ X^* \ \dots) \longrightarrow 0 \longleftarrow \begin{pmatrix} A \\ X \\ \dots \end{pmatrix} (A^* \ X^* \ \dots) \begin{pmatrix} \dots & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

特别地，我们得到 7.2 中的对角紧算子:

$$\mathbb{K}\left[\begin{pmatrix} A \\ X \\ \dots \end{pmatrix} I\right] \cap \begin{pmatrix} \mathcal{L}(A) & & \\ & \mathcal{L}(X) & \\ & & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & & \\ & XIX^* & \\ & & \to 0 \end{pmatrix}.$$

与此同时，作者谨借此机会感谢他以前的导师 Dominic Enders，感谢他在私人讨论中指出了这一视角。

现在的想法是将前述关系与 Katsura 的以下观察结合起来，并用我们的语言重新表述：为此，考虑 Fock 空间上的对角算子

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}(A) & & \\ & \mathcal{L}(X) & \\ & & \dots \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{L}\left[\mathcal{F}X = \begin{pmatrix} A \\ X \\ \dots \end{pmatrix}\right]$$

以及此类对角算子之间的表示:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \mathcal{L}(X^n) & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \mathcal{L}(X^n) \otimes 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \mathcal{L}(X^n \otimes X) & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

这通常无法定义忠实表示：例如，可以考虑任意有限无环图的图对应，比如

$$X = \ell^2\Big(E = \ \bullet \longrightarrow \bullet\ \Big) \quad \Longrightarrow \quad XX = \ell^2\Big(EE = \varnothing\Big) = 0.$$

Katsura 的关键观察告诉我们，现在通过我们的协变性理想将其限制到紧算子子空间后，它就变成忠实的:

命题 7.3 ([Kat04, 引理 4.7])。 上述表示定义了一个

在如命题 7.2 中所述的最大协变性上限制后得到的嵌入，

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & |X^n\rangle \max(X,A) \langle X^n| & \\ & & 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 0 & & \\ & |X^n\rangle \max(X,A) \langle X^n| \otimes 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，该表示也为任何小于最大协变性的协变理想定义了一个嵌入。

证明来自 *[Kat04]*：我们注意到，对于核（采用狄拉克括号记号）

$$\begin{aligned} &\langle X^n| \ker \Big[|X^n\rangle \max(X,A) \langle X^n| \curvearrowright |X^n\rangle \otimes |X\rangle \Big] |X^n\rangle \\ &\subseteq \ker \Big[\langle X^n|X^n\rangle \max(X,A) \langle X^n|X^n\rangle \curvearrowright |X\rangle \Big] \\ &\subseteq \ker(A \curvearrowright X) \cap \ker(A \curvearrowright X)^\perp = 0 \end{aligned}$$

其中我们用到了显然的包含关系

$$\langle X^n|X^n\rangle \max(X,A) \langle X^n|X^n\rangle \subseteq \max(X,A) \subseteq \ker(A \curvearrowright X)^\perp.$$

（注意，该交也反映了命题 1.3中的第一级。）然而，对于诸如上述核这样的理想，有

$$\langle X^n| \Big(\ker[\ldots] = \ker[\ldots]^* \ker[\ldots] \Big) |X^n\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ker[\ldots] |X^n\rangle = 0.$$

因此我们得到了包含关系

$$\ker \Big[|X^n\rangle \max(X,A) \langle X^n| \curvearrowright |X^n\rangle \otimes |X\rangle \Big] \subseteq \ker \Big[|X^n\rangle\langle X^n| \curvearrowright |X^n\rangle \Big] = 0.$$

特别地，对于任何不超过最大协变性的协变性，这一结论也成立。 □

借助 Katsura 的观察，我们现在可以验证所需的核与协变关系，如（12）所示；这将解决相对 Cuntz–Pimsner 代数分类的后半部分。这里指出，核关系已由 Katsura 建立，见[Kat04]:

定理 7.4（相对 Cuntz–Pimsner 代数：核与协变性）：对于上述相对 Cuntz–Pimsner 代数，有

$$\begin{aligned} \ker\Big(A \to \mathcal{T} \to \mathcal{O}(X;I) \Big) &= 0 \\ \operatorname{cov}\Big(X \to \mathcal{T} \to \mathcal{O}(X;I) \Big) &= I \end{aligned}$$

因此，核–协变对也具有分类作用。

证明。 我们从 核关系 开始，该关系由 Katsura 提出，见 [Kat04]：与开篇讨论中一样，我们需要验证关系（18）：

$$I \subseteq \max(X, A): \qquad A\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \cap \mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \mathcal{T}X = 0 \ ?$$

为此，我们首先在命题 7.2 中揭示，在 Toeplitz 代数中由我们的协变性生成的理想与紧算子一致。因此，它与系数代数的交为

$$A\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \cap \mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \mathcal{T}X = A\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} I & & \\ & |X\rangle\, I\, \langle X| & \\ & & \to 0 \end{pmatrix}.$$

相比之下，Katsura 在命题 7.3 中的观察告诉我们，这些对象沿对角线嵌入，因此范数始终保持不变，

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \dots \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & & \\ & |X\rangle\, I\, \langle X| & \\ & & \dots \end{pmatrix}: \qquad \|a\| = \|a \curvearrowright X\| = \ldots = \|a \curvearrowright X^n\|.$$

紧算子沿对角线消失且范数保持不变，只有在交为平凡情形时才可能；因此核也必为平凡的。

我们继续讨论（协变关系12）中的内容：为此，我们现在只需验证（19）中的公共交，并使用命题 7.2：

$$\begin{pmatrix} A \cap XX^* & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \cap \mathcal{T}X \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \mathcal{T}X =$$

$$= \begin{pmatrix} A \cap XX^* & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} I & IX^* & \\ XI & XIX^* & \\ & & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & \dots \end{pmatrix}.$$

因此，协变性不会增加，定理得证。 □

至此，我们也确立了分类的后半部分：更准确地说，我们首先发现，相对 Cuntz–Pimsner 代数涵盖了全部规范等变表示（这正是规范不变唯一性定理的内容）。另一方面，我们现在发现，通过核–协变对进行参数化同样能够实现分类：

$$\mathcal{O}(K, I) = \mathcal{O}(K', I') \quad \Longrightarrow \quad (K, I) = (K', I') \quad \checkmark$$

综上，我们得出：核–协变对格将整个规范等变表示格参数化为其中的各个点。

8 格结构

迄今为止，我们的讨论已将规范等变表示格中的各个表示视为格上的单独点，但这仍未说明核–协变对的格结构如何反映规范等变表示彼此之间的格结构。下面我们就来探讨这一点：请回想，核–协变对编码了商对应的协变性（从而使表示变得忠实）。

$$(X, A) \longrightarrow B \ : \qquad K = \ker\Big(A \to B\Big) \quad \Longrightarrow \quad I = \mathrm{cov}\Big(\tfrac{X}{XK} \to B\Big)$$

及其在商上的内在刻画（作为有界理想）

$$\Big(\ K \trianglelefteq A \ \Big| \ X^*KX \subseteq K \ \Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\ I \trianglelefteq A/K \ \Big| \ I \subseteq \max(\tfrac{X}{XK}) \ \Big).$$

因此，我们首先将定义在原对应上的核–协变对进行转换。这样，我们便能在核–协变对上给出一种内在序，以反映表示的格结构。通过这一转换，我们还进一步揭示，Katsura 的神秘 T 对不过是我们原来的核–协变对（只是将最大协变性伪装了起来）。

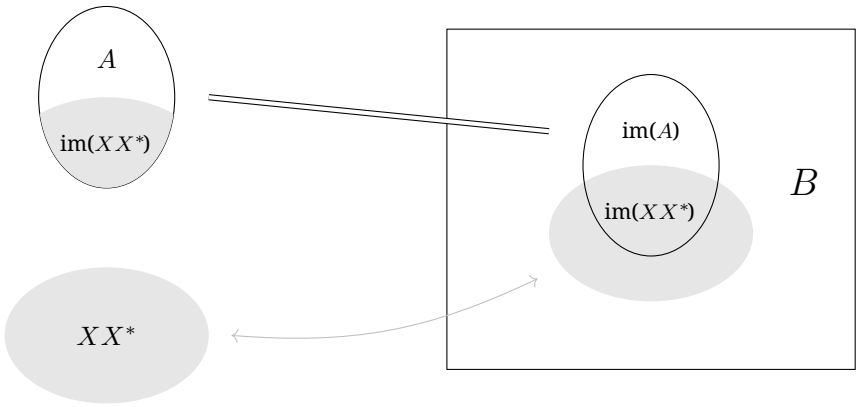
对于这种转换，我们首先回顾一下：对于嵌入（忠实表示），协变性可以直接通过环境代数中的交来读取（如命题 3.8）

$$(X, A) \subseteq B : \qquad \mathrm{cov}(X \to B) = \mathrm{im}(A \to B) \cap \mathrm{im}(XX^* \to B).$$

更确切地说，可以取系数代数的一部分

$$\mathrm{cov}(X \to B) = \Big\{ \ a \in A \ \Big| \ a \in \mathrm{im}(XX^* \to B) \ \Big\} = A \cap \mathrm{im}(XX^*).$$

不过，只要跟踪系数代数的嵌入，这些信息量就与实际的交相同：



有了这一图景，我们继续讨论一些一般的表示

$$(X,A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XK},\tfrac{A}{K}\right) \dashrightarrow B \ : \qquad K=\ker(A\to B).$$

我们首先注意到，对于一个商（即满射），沿着该商映射拉回任意理想绝不会造成任何一般性损失，因为对于

$$I\trianglelefteq A/K \quad \rightsquigarrow \quad \left(A\to\tfrac{A}{K}\right)^{-1}I\trianglelefteq A: \qquad I=\left(A\to\tfrac{A}{K}\right)\left(A\to\tfrac{A}{K}\right)^{-1}I$$

因此，我们可以采用核–协变对的等价内在定义：其协变性不超过商中的最大协变性：

$$(I+K)\trianglelefteq A: \qquad I/K\subseteq \max\left(\tfrac{X}{XK}\right) \quad !! \tag{20}$$

我们将协变理想（此处及下文）写成与核理想的和，只是为了确保该理想确实是从商中拉回得到的。

另一方面，请注意，协变性的程度（如上所述）并未改变；就系数代数与紧算子的交有多大而言也是如此，因为（另见命题 3.10）：

$$\operatorname{im}\Big(\ A\longrightarrow\tfrac{A}{K}\longrightarrow B\ \Big)=\operatorname{im}\Big(\ \tfrac{A}{K}\longrightarrow B\ \Big),$$

$$\operatorname{im}\Big(\ XX^*\longrightarrow\left(\tfrac{X}{XK}\right)\left(\tfrac{X}{XK}\right)^*\longrightarrow B\ \Big)=\operatorname{im}\Big(\ \left(\tfrac{X}{XK}\right)\left(\tfrac{X}{XK}\right)^*\longrightarrow B\ \Big).$$

因此，从这个角度来看，确实也没有失去一般性。

由此，我们得到核–协变对的另一个等价的外在定义：其协变理想描述了系数代数与紧算子之间的公共交集部分：

$$(X,A)\longrightarrow B \ : \qquad (I+K)=\operatorname{im}(A\to B)\cap\operatorname{im}(XX^*\to B).$$

不过，为了比较核–协变对，从现在起我们将采用如上所述系数代数内的部分，即

$$(I+K)=\left\{\ a\in A\ \middle|\ a\in\operatorname{im}(XX^*\to B)\ \right\}=A\cap\operatorname{im}(XX^*\to B)$$

我们注意到，这与内在定义一致（现在看来这多少有些显而易见）。与此同时，我们也牢记将协变性视为共同交的大小这一观点，因为它为表示提供了一个有趣的视角。

有了这两个定义（内在定义和外在定义），我们现在可以讨论规范等变表示格。给定一对表示，我们按通常方式定义表示的序：

$$\Big(\ (X,A)\to B\ \Big)\leq\Big(\ (X,A)\to B'\ \Big):\qquad (X,A)\longrightarrow B\dashrightarrow B'.$$

更确切地说，这表示一个表示可经由另一个表示分解；并且请注意，由于所有表示都是由对应（的像）作为算子代数生成的，这种分解一旦存在便是唯一的：

$$B=C^*(A\cup X)\quad\Longrightarrow\quad B\dashrightarrow B'\ \text{ uniquely }\ \checkmark$$

给定一个分解，我们现在很容易推得它们的核与协变性

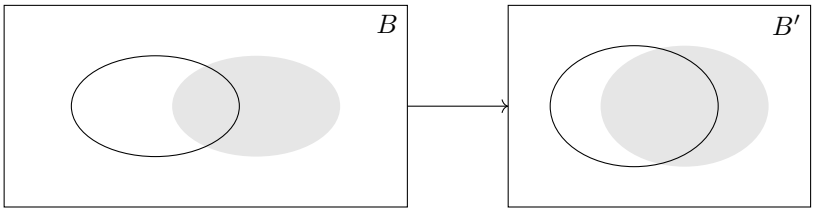
$$\ker(A\to B)\subseteq\ker(A\to B\to B'),$$

$$A\cap\operatorname{im}(XX^*\to B)\subseteq A\cap\operatorname{im}(XX^*\to B\to B').$$

事实上，后者可以很容易地看出来（某种程度上说显而易见）。

$$\operatorname{im}(a\to B)\in\operatorname{im}(XX^*\to B)\ \Longrightarrow\ \operatorname{im}(a\to B\to B')\in\operatorname{im}(XX^*\to B\to B').$$

示意而言，交的程度可能大致如下：



因此，我们得到了以下逆向结论（利用定理 7.4）：

$$\Big(\ K\subseteq L\ \Big|\ I+K\subseteq J+L\ \Big)\quad\Longleftarrow\quad\mathcal{O}(K,I)\leq\mathcal{O}(L,J)\ \ \checkmark$$

那么正向推导呢？也就是说，假设我们有一个

如上所述的核–协变对的包含。由于核理想之间存在包含关系，因此特别地，我们可以得到它们的商对应

$$\begin{array}{ccccc} (X,A) & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XK},\frac{A}{K}\right) & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XL},\frac{A}{L}\right) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{O}(K,I) & & \mathcal{O}(L,J) \end{array}$$

因此，我们可以像往常一样用商来替换我们的对应

$$\left(\tfrac{X}{XK},\tfrac{A}{K}\right) \rightsquigarrow (X,A) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}(K,I) \rightsquigarrow \mathcal{O}(0,I).$$

回想一下，相对 Cuntz–Pimsner 代数满足（根据定义）

$$(X,A) \longrightarrow \mathcal{O}(X;I) \dashrightarrow B \quad \Longleftrightarrow \quad I \subseteq \operatorname{cov}(\ X \to B\ )$$

因此，我们需要验证最小程度的协变性

$$I \subseteq \operatorname{cov}\Big(\ (X,A) \longrightarrow \left(\tfrac{X}{XL},\tfrac{A}{L}\right) \longrightarrow \mathcal{O}(L,J)\ \Big)\ ?$$

这基本上可由我们在第 3 节对核态射和协变理想的研究得出。为了更清楚地说明其在我们语境中的含义，我们现在回顾一下：起初我们发现，核与余核态射具有完全协变性。也就是说，在我们的语境中，商态射对应完全交换图，而商表示则对应协变图：

$$\begin{array}{ccc} A\cap XX^* & \longrightarrow & A/L \\ \downarrow & & \downarrow \\ XX^* & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XL}\right)\left(\frac{X}{XL}\right)^* \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccc} J/L & \longrightarrow & \mathcal{O}(L,J) \\ \downarrow & & \| \\ \left(\frac{X}{XL}\right)\left(\frac{X}{XL}\right)^* & \longrightarrow & \mathcal{O}(L,J). \end{array}$$

将这些结果与我们关于协变理想的假设结合起来，我们得到

$$\begin{array}{ccccc} (I+0) & \longrightarrow & J/L & \longrightarrow & \mathcal{O}(L,J) \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ XX^* & \longrightarrow & \left(\frac{X}{XL}\right)\left(\frac{X}{XL}\right)^* & \longrightarrow & \mathcal{O}(L,J) \end{array}$$

因此便得到了所需程度的协变性，

$$(I+0)\subseteq(J+L)\quad\Longrightarrow\quad I\subseteq\operatorname{cov}\Big(\ (X,A)\to\mathcal{O}(L,J)\ \Big).$$

因此，我们也得到了正向结论，从而得到了序同构，这正是本文的主要结论：

定理 8.1 (核–协变对：序同构)：如 (20)中的核–协变对定义了序同构

$$\Big(\ K\subseteq L\ \Big|\ I+K\subseteq J+L\ \Big)\quad\Longleftrightarrow\quad\mathcal{O}(K,I)\leq\mathcal{O}(L,J)\tag{21}$$

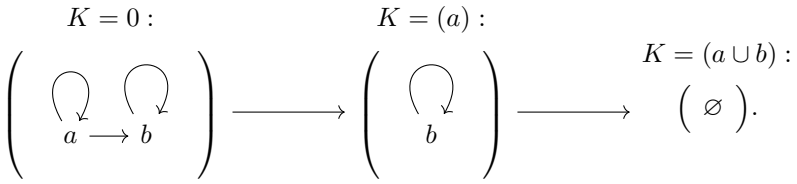
因此，按包含关系赋予自然序的核–协变对格刻画了整个规范等变表示格，等价地，也刻画了整个规范不变理想格。

我们来举例说明我们的结果在某个图代数中的应用，同时也展示处理这类核–协变对的简便性：

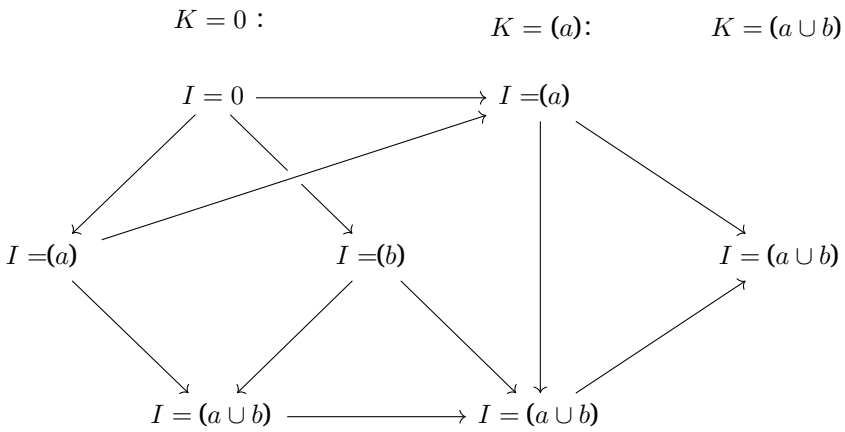
例 8.2（图对应：规范不变理想）：
考虑如下的图对应，见例 *1.2*,

$$X=\ell^2\Big(E=\text{edges}\Big),\quad A=c_0(\text{vertices})$$

并回顾其商图，如*3.5* 所示（由遗传理想给出，如*3.2*所示），以及由其正则顶点集合给出的协变理想，如*3.7*所示。作为示例，考虑以下图及其商图 /2



那么，其规范等变表示格可表示如下（哈斯图）：



因此也等价地得到规范不变理想的格。请注意，我们现在可以通过核–协变对轻松读出序关系。

继续之前，我们先对这个序同构作几点说明。特别是，下面关于连接态射的讨论，基本上会涵盖下文注中涉及的上确界和下确界的概念：

注 8.3（格同构：上确界与下确界）：
注意，由于两个格序同构，它们也格同构，因为并集与交集（有限或任意）以及顶元和底元，分别由上确界和下确界确定，

$$\text{order iso}\left(\sup_s a_s\right) = \sup_s\left(\text{order iso} a_s\right)$$

而它们是否存在，除此外只取决于给定的序。
换句话说，格的概念实际上只是一种纯粹的性质，不会定义任何额外结构，因此规范等变表示格与核–协变对格之间实际上没有区别。不过，我们稍后会发现，核–协变对的任意上确界和下确界不一定总能分别由其核理想与协变理想的交集和和集得到；也就是说，我们只有

$$\inf_s(K_s|I_s) \leq \left(\bigcap_s K_s \,\middle|\, \bigcap_s I_s\right) \quad and \quad \sup_s(K_s|I_s) \geq \left(\sum_s K_s \,\middle|\, \sum_s I_s\right).$$

事实上，不变理想的交与和仍是不变的，

$$\langle X|\left(\bigcap K_s\right)|X\rangle \subseteq \bigcap K_s \quad and \quad \langle X|\left(\sum K_s\right)|X\rangle \subseteq \sum K_s$$

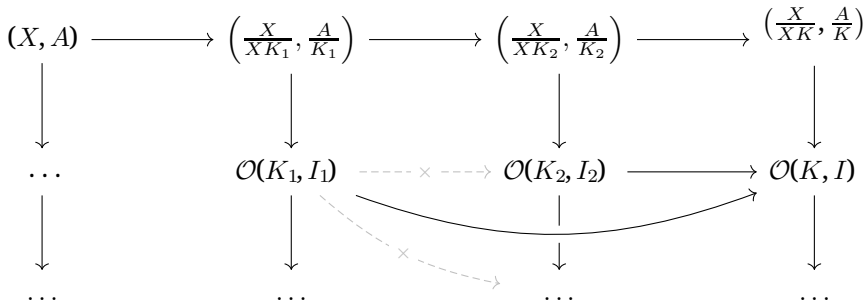
而协变理想的交与和未必总是包含在最大协变性之下，

$$\bigcap I_s \subseteq \max\left(\frac{X}{X(\bigcap K_s)}\right) \quad \textit{and} \quad \sum I_s \subseteq \max\left(\frac{X}{X(\sum K_s)}\right) \ ?$$

概括来说，下一个可能的核–协变对可能恰好位于更远处（如任意理想对的格中所见），例如

$$\begin{array}{c} \Big(\ K : \ \dots \ \Big| \ I \subseteq \max(\frac{X}{XK}) \ \checkmark \ \Big) \\ \uparrow \\ \Big(\ (K_1 + K_2) : \ \dots \ \Big| \ (I_1 + I_2) \nsubseteq \max\Big(\frac{X}{X(K_1+K_2)}\Big) \ \Big) \\ \uparrow \\ \Big(\ K_s : \ \dots \ \Big| \ I_s \subseteq \max\Big(\frac{X}{XK_s}\Big) \ \checkmark \ \Big). \end{array}$$

例如，要求协变性至少与所有给定的协变理想一样强，可能会迫使核大于给定核理想之和；更进一步说，甚至可能不存在连接态射从每个相对 Cuntz–Pimsner 代数映射到核理想之和上的余核串。我们将在下文*8.5* 看到这样一个例子，其中甚至只涉及一对核–协变对：



此外，我们注意到，无论采用哪种描述，该序关系都定义了一个偏序（而不仅仅是预序），这一点很容易从

$$\Big(\ (X,A) \longrightarrow C^*(X \cup A) = B \ \Big) \quad \textit{and} \quad \Big(\ (X,A) \longrightarrow C^*(X \cup A) = B' \ \Big) :$$

$$\begin{pmatrix} (X,A) & = & (X,A) & = & (X,A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X,A) & = & (X,A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & = & B \end{pmatrix}$$

因此，一个是另一个的收缩，反过来也同样如此；或者也可以

等价地，也可以利用它们在 Toeplitz 代数中的核来论证

$$\Big(\mathcal{T}X \longrightarrow B \longrightarrow B' \Big) \quad \Longrightarrow \quad \ker\Big(\mathcal{T}X \to B\Big) \subseteq \ker\Big(\mathcal{T}X \to B'\Big)$$

它们此前已经是同一个商

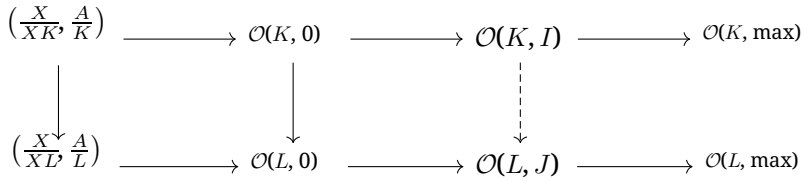
$$\ker\Big(\mathcal{T}X \to B\Big) = \ker\Big(\mathcal{T}X \to B'\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\mathcal{T}X \longrightarrow B = B' \Big).$$

或者现在也可以从核–协变对的角度进行论证，

$$\Big(K \subseteq L \subseteq K \;\Big|\; I \subseteq J \subseteq I \Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(K = L \;\Big|\; I = J \Big).$$

总之，我们指出，规范等变表示格与核–协变对格完全一致，而核–协变对的上确界和下确界可能并不只是其核理想与协变理想的交和和。

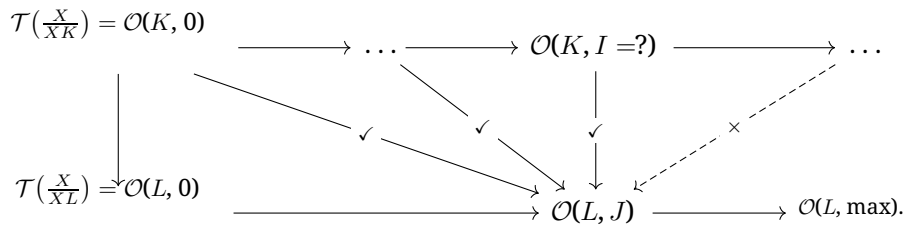
有鉴于此，我们继续探讨第 4 节中尚未解决的问题：更确切地说，我们希望找到合适的刻画，说明何时不同的商链（基于核–协变对）之间存在态射



并且我们先提醒一下，这些对象并非总是存在。首先，我们注意到，显然其存在意味着核理想的包含；为简便起见，我们可以用商替换原对应

$$(X, A) := \big(\tfrac{X}{XK}, \tfrac{A}{K}\big) \longrightarrow \mathcal{O}(K = 0, 0) \longrightarrow \mathcal{O}(K = 0, I) \longrightarrow \dots$$

特别是，至少总存在一个从 Toeplitz 代数出发的连接态射，因此也存在一些进一步的相对Cuntz-Pimsner代数



因此，首先要解决的问题是找出存在连接态射的最小相对 Cuntz–Pimsner 代数。

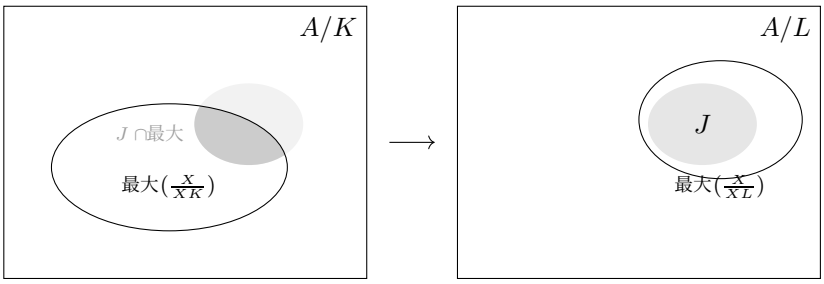
从该代数出发。现在很容易解决这个问题，因为

$$\mathcal{O}(K,I) \dashrightarrow \mathcal{O}(L,J) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (I+K) \subseteq (J+L)$$

因此，最大的协变理想（即最大协变性中的理想）正是与商中给定的协变性取交所得，

$$I = \max\left(\tfrac{X}{XK}\right) \cap \left(A/K \to A/L\right)^{-1} J = \max\left(\tfrac{X}{XK}\right) \cap (J+K).$$

示意而言，这个交可以呈现为如下形式：



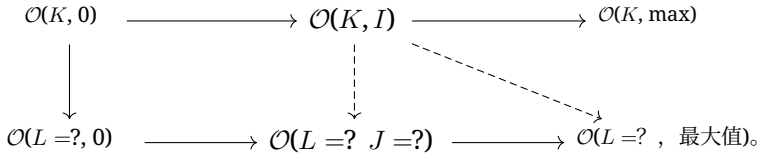
读者可以轻易找到一些例子（使用上述图代数）：

最大$\left(\frac{X}{XK}\right) \neq 0$：$(J\cap$最大$) = 0$ / $0 \neq (J\cap$最大$) \neq$最大 /$(J\cap$最大$) =$最大?

此外，现在也可以轻易猜出核–协变对的交：

$$\bigwedge_s (\ K_s \mid I_s\ ) = \left(\ K = \bigcap K_s \;\middle|\; I = \bigcap I_s \cap \max\left(\tfrac{X}{XK}\right)\ \right)$$

关于来自前述余核链的连接态射，至此已讨论完毕。
然而，另一个方向更有意思：相对 Cuntz-Pimsner 代数不一定会与后续的每个商对应相连接，而且甚至未必会从每个相对 Cuntz-Pimsner 代数开始，

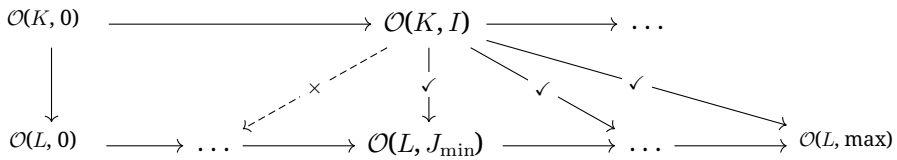


请注意，这也描述了给定相对 Cuntz–Pimsner 代数的规范不变理想格（因为每个这样的理想都会定义一个商）。不过我们注意到，一旦它与另一个相对 Cuntz–Pimsner 代数相联系（在某个后续的商对应中），它当然也会与该商对应的绝对 Cuntz–Pimsner 代数相联系。

因此，这引入了一个障碍，现在可以借助（21）来处理：

$$\mathcal{O}(K,I) \le \mathcal{O}(L,\max) \quad \Longleftrightarrow \quad J_{\min} := \Big(A/K \to A/L\Big) I \subseteq \max\big(\tfrac{X}{XL}\big)$$

这一条件有时并不成立（下面我们会给出一个简单的例子）。若满足这一条件，我们得到最小解



而如果条件不成立，那么就不存在连接态射。因此，我们也得到了任意相对 Cuntz-Pimsner 代数的格；这实际上只是对主要结果的重述（同时也推广了 O-对）：

推论 8.4 (相对 Cuntz-Pimsner 代数：规范不变理想)：考虑一个相对 Cuntz-Pimsner 代数（如第 4 节所述）

$$(X,A) \longrightarrow \big(\tfrac{X}{XK},\tfrac{A}{K}\big) \longrightarrow \mathcal{O}(K,0) \longrightarrow \mathcal{O}(K,I)$$

对应于上文 (20)中的某个核–协变对。
那么，其规范不变理想构成的格就是由 (21) 中的各对组成

$$\Big(K \subseteq L \;\Big|\; I+K \subseteq J+L \Big) \iff \Big(K \subseteq L \;\Big|\; J_{\min} \subseteq J \subseteq \max\big(\tfrac{X}{XL}\big) \Big)$$

换言之，就是所有更大的核–协变对。

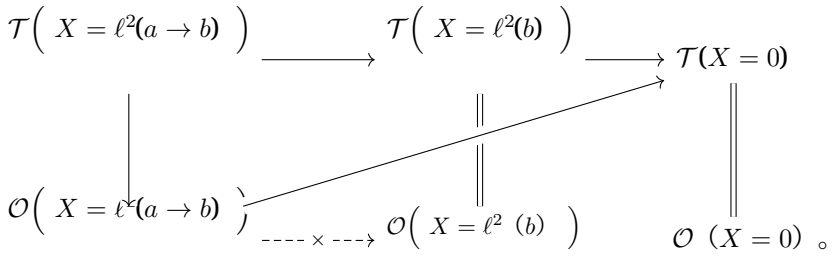
下面举一个不存在连接态射的例子：

例 8.5（图对应：不存在连接态射）：以下面的图及其商图为例 /2

$$\begin{array}{ccccc} K=0: & & K=(a): & & K=(a\cup b): \\ \Big(\ a\to b\ \Big) & \longrightarrow & \Big(\ b\ \Big) & \longrightarrow & \Big(\ \varnothing\ \Big). \end{array}$$

因此，绝对 Cuntz-Pimsner 代数之间不存在连接态射

第一个商与第二个商之间（只需直接读取协变理想即可）：



事实上，协变理想不满足该障碍：

$$I_1=(b)=\mathrm{reg}\big(\ a\to b\ \big)\quad and\quad K_2=(a)\subseteq \mathrm{her}(a\to b):$$

$$(A\to A/K_2)I_1=(b)\not\subseteq \mathrm{reg}\big(\ \text{quotient graph}=b\ \big).$$

问题在于，遗传理想根本不是饱和的。或者也可以注意到，第一个定义了 2×2 矩阵的单代数。
特别地，对于核–协变对的并，我们得到

$$\Big(\ K_1=0\ \Big|\ I_1=(b)\ \Big)\vee\Big(\ K_2=(a)\ \Big|\ I_2=(a)\ \Big)=\Big(\ K=(a\cup b)\ \Big|\ \dots\ \Big).$$

换言之，作为下一个可能的核–协变对的并，只有在超出核理想与协变理想之和之后才会出现。因此，我们找到了一个例子，说明上确界和下确界通常不只是理想的交集与和（正如前文提到的那样）。

我们以澄清一个广为忽视的 Katsura 工作中的对应关系来结束本节：也就是说，我们阐明 Katsura 的 T-对（以及 O-对）不过是上文核–协变对的拉回版本。更确切地说，我们将详细阐释 Katsura 隐晦的要求

$$J(K):=\Big\{\ a\in A\ \Big|\ \dots\ \text{and}\ aX^{-1}(K)\subseteq K\ \Big\}:\qquad K\subseteq I\subseteq J(K)$$

，以及这如何定义了命题 3.6中的约束条件的一个转译：也就是说，任何嵌入到算子代数中的协变性，都必然与左作用的核正交；在我们的情形下，这可表述为

$$\mathrm{cov}\big(\ \tfrac{X}{XK}\to B\ \big)\perp\ker\big(\ \tfrac{A}{K}\curvearrowright\tfrac{X}{XK}\ \big)$$

因此，这些协变性不能超出最大协变性（亦称 Katsura 理想）

$$\mathrm{cov}\big(\ \tfrac{X}{XK}\to B\ \big)\subseteq\Big[\big(\tfrac{X}{XK}\big)\big(\tfrac{X}{XK}\big)^*\cap\ker\big(\tfrac{A}{K}\curvearrowright\tfrac{X}{XK}\big)^{\perp}\Big]=\max\big(\tfrac{X}{XK}\big).$$

因此，我们转而发现，核–协变对由不变理想作为核给出（这为核理想定义了某种离散值域）

$$K \trianglelefteq A: \qquad X^*KX \subseteq K$$

以及作为协变性上界的理想（它为协变性理想的值域定义了一个上界）

$$I \trianglelefteq A/K: \qquad 0 \subseteq I \subseteq \max\left(\tfrac{X}{XK}\right)$$

而我们在分类的后半部分发现，每一个这样的核–协变对确实都由其自身产生（更准确地说，定理7.4）。为了确立 Katsura 要求，我们首先注意到显而易见的

$$I = \Big(A \to A/K\Big)^{-1} J \quad \iff \quad K \subseteq I$$

另一方面，对于商映射而言，包含关系为

$$J \subseteq \max\left(\tfrac{X}{XK}\right) \quad \iff \quad \Big(A \to A/K\Big)^{-1} J \subseteq \Big(A \to A/K\Big)^{-1} \max\left(\tfrac{X}{XK}\right).$$

因此Katsura 条件简单地表述为（见 [Kat07，引理 5。2]）

$$J(K) = (A \to A/K)^{-1} \max\left(\tfrac{X}{XK}\right)$$

对此，只需进一步验证（另见 [Kat07，引理 5。2]）

$$\Big\{\ aX^{-1}(K) \subseteq K\ \Big\} = \Big(A \to A/K\Big)^{-1} \ker\left(\tfrac{A}{K} \curvearrowright \tfrac{X}{XK}\right)^{\perp}$$

因为点状条件所表示的不过是紧作用系数。不过，现在很容易验证这一点：为此考虑拉回（其中包含相同的信息）

$$\ker\left(A \curvearrowright \tfrac{X}{XK}\right) = \Big(A \to A/K\Big)^{-1} \ker\left(\tfrac{A}{K} \curvearrowright \tfrac{X}{XK}\right):$$

$$\Big(A \to A/K\Big)\Big(A \to A/K\Big)^{-1}(\ \dots\ ) = (\ \dots\ )$$

并且进一步可写为（如命题3.9所示）

$$\ker\left(A \curvearrowright \tfrac{X}{XK}\right) = \Big\{\ a\tfrac{X}{XK} = 0\ \Big\} = \{aX \subseteq XK\} = \{X^*aX \subseteq K\} = X^{-1}(K).$$

综合起来，我们得到正交补所需的关系。值得注意的是，Katsura 已在[Kat07的引理 5 中推导出了这一关系。 2]

不过，这一工作并未进一步推进：Katsura 选择采用晦涩的要求，而没有探究其对应的核—协变性关系。可能是因为它们只被部分地认定为协变理想。

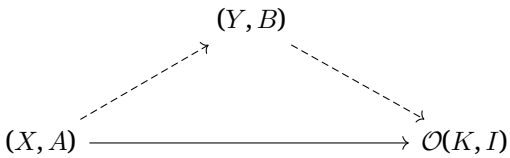
最后，作者指出，本文的结果源于对 [Kat07] 的更深入研究，该研究建立在 [FMR03] 以及进一步的 [KPW98] 和 [Pim97]之上。更确切地说，作者将 [Kat07引理 510]中的关系（其推广了 [FMR03引理 29]）视为关于范畴核与余核态射的一项部分结果，由此得出了它们的内在刻画（定理3.3），并进而得到了可能的核理想的值域。

另一方面，作者将 [Kat04, proposition 3.3] 中的第一个观察视为对商上的诱导表示所对应的可能协变理想值域的一种内在刻画。这使作者得以系统地运用此类核–协变对：一方面，通过归约到忠实情形来处理一般版本的规范不变唯一性定理；这一做法源自 Evgenios Kakariadis 在 [Kak16] 中简洁而精炼的证明（该证明借鉴了 [Kat04, proposition 3.3] 中的第二个观察）；另一方面，Takeshi Katsura 在其 2004 年开创性论文的 [Kat04, lemma 4.7] 中提出的关键观察，使作者得以从相对 Cuntz-Pimsner 代数中恢复核–协变对（定理 7.4）。不过，主要区别在于，我们无需像 [Kat07] 中那样，为对应构造任何临时的、近似范畴推出的东西。相反，整个方法都基于一个简单的想法：利用核与余核态射，将问题归约到忠实表示。

9 Pimsner 膨胀

本节作为最后一节，将介绍膨胀的概念，并证明作为希尔伯特双模的极大膨胀存在。我们还将揭示 Katsura 构造是一种特殊的非极大膨胀，并说明最小膨胀并不存在。与此同时，作者借此机会感谢 Ralf Meyer 分享了他对 Pimsner 膨胀作为极大膨胀的深刻见解。

我们从扩张这一概念开始：更准确地说，它是指在某个中间对应上的任意规范等变分解，例如



其中，规范等变性归结为

$$Y \longrightarrow \mathcal{O}(K,I)(1) \quad \text{and} \quad B \longrightarrow \mathcal{O}(K,I)(0).$$

正如原对应生成相对 Cuntz–Pimsner 代数，中间对应也生成该代数

$$C^*(X \cup A) = \mathcal{O}(K,I) \quad \Longrightarrow \quad C^*(Y \cup B) = \mathcal{O}(K,I)$$

因此，这种分解本身定义了一个相对 Cuntz–Pimsner 代数：

$$(Y,B) \longrightarrow \mathcal{O}(K,I) = \mathcal{O}\Big(Y,B \Big| \, L =? \; J =? \, \Big)$$

因此，接下来的任务是寻找能够将相对 Cuntz–Pimsner 代数生成为绝对 Cuntz–Pimsner 代数的膨胀：

$$(X,A) \dashrightarrow \Big(\, Y =?, B =? \, \Big) \dashrightarrow \mathcal{O}(K,I) = \mathcal{O}\Big(Y,B \; \Big| \; L = 0, J = \max \, \Big) \; ?$$

由于核应当是平凡的，我们只能在相对 Cuntz–Pimsner 代数内部寻找。此外，照例可以假设原对应嵌入其中（只需将原对应替换为它的商对应即可）。因此，我们的中间对应必然是一个中间子空间

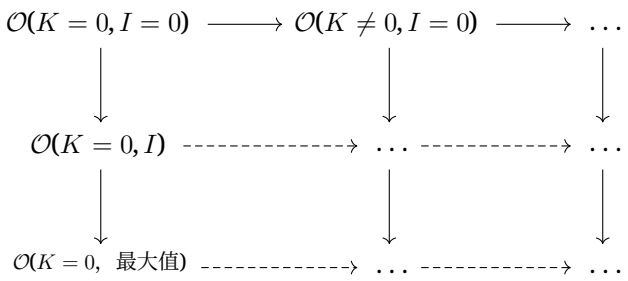
$$X \subseteq Y \subseteq \mathcal{O}(K=0,I)(1) \quad \text{and} \quad A \subseteq B \subseteq \mathcal{O}(K=0,I)(0).$$

另一方面，我们发现（这是一个广为人知的描述）：绝对 Cuntz–Pimsner 代数是使系数代数（因而对应也）忠实嵌入其中的最小规范等变商；换言之，系数代数能够检测绝对 Cuntz–Pimsner 代数中的规范不变理想。因此，我们旨在寻找一个能够检测其余规范不变理想的中间子空间。

$$J \trianglelefteq \mathcal{O}(K=0,I): \qquad B \cap J = 0 \implies J = 0 \; ?$$

根据我们的主要结果（定理 7.4），我们找到了整个

规范等变表示格



由核–协变对给出

$$\Big(\ K \trianglelefteq A: \ X^*KX \subseteq K \ \Big| \ I \trianglelefteq \tfrac{A}{K}: \ I \subseteq \max\big(\tfrac{X}{XK}\big) \ \Big).$$

因此，规范不变理想（在 Toeplitz 代数内）也同样如此，从而对相对 Cuntz-Pimsner 代数也成立。然而，我们原有的系数代数已经能够检测核分量：

$$A \cap \mathcal{T}(X,A)(K \subseteq A)\mathcal{T}(X,A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad K = 0 \quad \checkmark$$

因此，我们原有的系数代数无法检测到的规范不变理想，恰好就是协变理想（其核分量为零）。

$$I \subseteq \max(X,A): \qquad A \cap \mathcal{T}(X,A)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}\mathcal{T}(X,A) = 0.$$

此外，我们已经针对某种协变性取了商（由此得到相对 Cuntz–Pimsner 代数），因此剩余的规范不变理想是作为剩余商代数出现的。

$$\mathcal{O}(K=0; I=0) \longrightarrow \mathcal{O}(K=0, I) \longrightarrow \ \ldots \ \longrightarrow \mathcal{O}(K=0, \max).$$

因此，我们需要找到一个中间系数代数，使其能够检测除给定的 $I \subseteq J \subseteq \max(X, A)$ 之外的所有剩余协变理想：

$$A \subseteq B \subseteq \mathcal{O}(K,I)(0): \qquad B \cap \mathcal{O}(K,I)\begin{pmatrix} J & \\ & 0 \end{pmatrix}\mathcal{O}(K,I) \neq 0 \qquad (22)$$

以中间子空间作为对应（如第 1 节所述）

$$X \subseteq Y \subseteq \mathcal{O}(K,I)(1): \qquad Y^*Y \subseteq B, \quad BY \subseteq Y, \quad YB \subseteq Y.$$

因此，可以先选择一个能够检测剩余协变理想（以及在需要时检测某个指定子空间）的中间子代数，然后

只需扩大所选子代数以构成一个对应，例如取包含它的最小对应：

$$\bigcap\Big\{ \ (Y_0 \subseteq Y | B_0 \subseteq B) \ \Big| \ Y^*Y \subseteq B, \ BY \subseteq Y, \ YB \subseteq Y \ \Big\}.$$

事实上，任意一类对应的交仍构成一个对应：

$$\Big(\ Y = \bigcap Y_n \ \Big| \ B = \bigcap B_n \ \Big) : \qquad Y_n^* Y_n \subseteq B_n, \ \ldots \implies Y^*Y \subseteq B, \ \ldots$$

与此同时，我们需要验证总存在一个更大的对象：为此，我们只需考虑极大膨胀（亦称 Pimsner 膨胀）

$$\Big(\ Y = \mathcal{O}(K,I)(1) \ \Big| \ B = \mathcal{O}(K,I)(0) \ \Big).$$

事实上，极大膨胀甚至定义了一个希尔伯特双模，因而也定义了一个对应，正如傅里叶空间定义 Fell 丛一样（参见第5节）：

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(K,I)(-1)\mathcal{O}(K,I)(1) &\subseteq \mathcal{O}(K,I)(-1+1=0), \\ \mathcal{O}(K,I)(0)\mathcal{O}(K,I)(1) &\subseteq \mathcal{O}(K,I)(0+1=1), \quad \ldots \end{aligned}$$

另一方面，也很容易看出，极大膨胀还能检测到所有剩余的协变性，因为每一种协变性都是由不动点代数生成的：

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + XX^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{O}(K,I)(0) \\ \implies \quad & \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{O}(K,I)(0) \cap \left[\ \mathcal{O}(K,I) \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{O}(K,I) \ \right] \end{aligned} \tag{23}$$

事实上，我们可以更一般地论证：给定任意一个带有给定圆群作用的算子代数，并考虑其不动点代数（如第 5 节所述）

$$\mathbb{T} \curvearrowright B : \qquad B(n=0) = \Big\{ \ b \ \Big| \ \big(b(z) := z \curvearrowright b \ \big) \equiv b \ \Big\}.$$

那么，它的不动点代数能够识别每一个规范不变子代数：

$$\Big(\ A = \mathbb{T} \curvearrowright A \ \Big) \subseteq B : \qquad A \cap B(0) = 0 \implies A = 0.$$

事实上，利用条件期望即可得出这一结论（参见第 5 节）

$$\mathbb{T} \curvearrowright B : \quad E(b) = \int_{\mathbb{T}} \Big(b(z) = z \curvearrowright b \Big) \, \mathrm{d}z.$$

由于该子代数是规范不变的，条件期望不会离开

该子代数（通过其作为 Bochner 积分的构造）

$$\Big(A = \mathbb{T} \curvearrowright A \Big) \quad \Longrightarrow \quad E(A) = \int_{\mathbb{T}} \Big(z \curvearrowright A \subseteq A \Big) \, \mathrm{d}z \subseteq A.$$

另一方面，每个算子代数都由其正部分张成，

$$A = \operatorname{pos}(A) - \operatorname{pos}(A) + i \operatorname{pos}(A) - i \operatorname{pos}(A), \qquad \operatorname{pos}(A) := \{0 \leq a \in A\}.$$

然而，条件期望（通过取平均给出）在正部分上是忠实的，因此我们找到了检测方法

$$E(\operatorname{pos} A) \subseteq A \cap B(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{pos}(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 0.$$

这一众所周知的技巧在其他情境中也相当有用。
因此，我们轻松得到了以下熟悉的结果（注意，基本上已经没有什么需要证明的了）：

定理 9.1（极大膨胀：绝对 Cuntz–Pimsner 代数）：极大膨胀将相对 Cuntz–Pimsner 代数实现为绝对 Cuntz–Pimsner 代数

$$\mathcal{O}(K, I) = \mathcal{O}\Big(\, Y = \mathcal{O}(K, I)(1) \, \Big| \, B = \mathcal{O}(K, I)(0) \, \Big).$$

并进一步定义极大希尔伯特双模。

证明。 现在这直接由满足（23）和（22）得出。 □

然而，这种膨胀相当庞大，因为除了其普适描述外，我们几乎无法控制其行为。例如，可以将极大膨胀视为类似于极大 Furstenberg 边界的对象。因此，我们转而寻求一种足够小、便于以组合方式处理，同时又足够大、能够检测协变性的膨胀。如上所述，为此可以先从一个能够检测协变性的小子代数入手，再简单地扩张所选子代数，使其成为一个对应。在实践中，例如可以尝试运行该算法

$$\begin{aligned} Y = BX + X + XB + BXB \quad &\Longrightarrow \quad B' = B + Y^* Y \\ \Longrightarrow \quad Y' = B'Y + Y + YB' \quad &\Longrightarrow \quad \dots \end{aligned} \tag{24}$$

其中闭线性张成按惯例省略。
虽然总是存在一个如上所述的最小上方对应，但这一过程可能永远不会终止，因此我们也就无法了解其组合行为。不过，在良好的情形下，算法会终止，从而能够

对其进行组合描述。特别是，对于由最大协变性本身给出的典范子代数，情况便是如此：

$$A \subseteq \left[B = A + \begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix} \right] \subseteq \mathcal{O}(K, I)(0) \tag{25}$$

其和定义了一个子代数，因为

$$\begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \max(X, A)A & \\ 0 & \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

这只不过是以下命题中的关系（来自命题 2.1）

$$(\varphi - \tau) \max(X, A) \cdot \varphi(A) = (\varphi - \tau)\Big(\max(X, A)A\Big) \subseteq (\varphi - \tau) \max(X, A).$$

另一方面，其左作用使该空间保持不变

$$\begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix} X \subseteq (A + XX^*)X \subseteq X \tag{26}$$

因此，算法在第一轮结束后立即停止，

$$Y = X + X \begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix} = XB : \qquad Y^*Y = BX^*XB \subseteq B$$

因此，我们得到了作为组合对象的典范膨胀。
利用左移位与右移位（如第 7 节所示），我们还进一步注意到

$$\begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix} \curvearrowright X = \max(X, A)(1 - RL) \cdot XR = 0 \tag{27}$$

这不过是显然的关系（另见命题 2.1）

$$\tau(XX^*)\tau(X) = \tau(XX^*X) \quad \Longrightarrow \quad (\varphi - \tau)\Big(A \cap XX^*\Big)\tau(X) = 0.$$

这与 [Kat04] 中的 Katsura 构造相似，因此我们将由最大协变性给出的典范膨胀称为 Katsura 膨胀 （并且这里也要指出，基本上已经没有什么需要证明的了）：

定理 9.2（Katsura 膨胀：绝对 Cuntz–Pimsner 代数）：由最大协变性给出的典范膨胀，将一个相对 Cuntz–Pimsner 代数实现为一个绝对 Cuntz–Pimsner 代数

$$\mathcal{O}(K = 0, I) = \mathcal{O}\left(Y = X + X \begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix} \;\middle|\; B = A + \begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ 0 & \end{pmatrix} \right)$$

以及针对带核理想的核–协变对的类似膨胀。这种膨胀可能无法定义出检测协变性的极小膨胀

即使它是极小的，通常也并非唯一的极小膨胀。

证明。 这现在是由满足（25）和（22）立即得出的结论。我们还在例 9.8.中给出未满足最小性的示例。 □

推论 9.3（Katsura 膨胀：内在描述）：
由最大协变性给出的典范膨胀，可以内在地描述为由其抽象副本自由生成的算子代数

$$\left(A = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cup \left(\max(X,A)/I = \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

其乘法定义如下

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} A\max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix}$$

对应本身也同样如此。
对于带有核理想的核–协变对，也有类似的表达式。这也重新得到了 *[Kat07* 中定义 6 的特定描述。*1]*。

证明。 根据主要结果的一部分（定理 7.4 的非平凡部分），我们发现，相对 Cuntz–Pimsner 代数不会引入额外的核，因此系数代数的副本是忠实的（这是一个熟知的结果）：

$$(X,A) \longrightarrow \mathcal{O}(K=0,I): \qquad A = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

另一方面，相对 Cuntz–Pimsner 代数也不会引入额外的协变性（已有的协变性除外），即

$$\begin{pmatrix} A \cap XX^* \\ 0 \end{pmatrix} \cap \mathcal{T}(X,A)\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\mathcal{T}(X,A) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此，加入的最大协变性定义了一个忠实的副本，直到

$$\max(X,A)/I = \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{O}(K=0,I).$$

注意，最大协变性包含系数代数，因此它们的和已经是一个闭的、因而完备的算子代数（参见第 16 节中关于代数与理想之和的快速证明（6）：

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix}} \subseteq \mathcal{O}(K=0,I).$$

事实上，这在任何表示中都成立，因为它们的泛性质也如此：

$$C^*\Big(A \cup \max(X,A)/I \;\Big|\; A\max(X,A)/I \subseteq \max(X,A)/I \Big)$$
$$= A + \max(X,A)/I = \overline{A + \max(X,A)/I}.$$

因此，任何为系数代数和最大协变性（模去协变理想）提供忠实且互不相交副本的具体表示，都定义了它们自由生成的算子代数的忠实表示：

$$A \cap \max(X,A)/I = 0 \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad C^*(A \cup \max(X,A)/I) \subseteq B$$

这实际上直接由一些基本的线性代数即可得出。特别地，这对它们在相对 Cuntz–Pimsner 代数中的副本也成立

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ker(A \curvearrowright X) \\ 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

其中我们用到了它们的交为零

$$\ker(A \curvearrowright X) \cap \max(X,A) \subseteq \ker(A \curvearrowright X) \cap \ker(A \curvearrowright X)^{\perp} = 0$$

因此，膨胀就是泛表示

$$C^*\Big(A \cup \max(X,A)/I \;\Big|\; A\max(X,A)/I \subseteq \max(X,A)/I \Big)$$
$$= A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \max(X,A) \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{O}(K = 0, I).$$

请注意，这定义了一种相当一般的论证，也适用于其他情形。最后，Katsura 的描述不过是这个同构

$$C^*\Big(A \cup M \;\Big|\; AM \subseteq M \Big) = \Big\{ a \oplus (\operatorname{im} a + m) \in A \oplus (\operatorname{im} A + M \subseteq B) \Big\}$$

它只是为任意 $A \to B$ 强制采用忠实且互不相交的副本：

$$A = A(1 \oplus 1), \quad A(1 \oplus 1) \cap (0 \oplus M) = 0, \quad M = 0 \oplus (M \subseteq B).$$

不过，这种形式化描述的选择并没有什么特别之处。
相反，它的性质是通过如下普适描述来刻画的：由自由生成的副本构成，并带有一个吸收

吸收性，它概括了其性质：

$$C^*\Big(A \cup \max(X,A)/I \;\Big|\; A\max(X,A)/I \subseteq \max(X,A)/I \Big)$$
$$= A\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \max(X,A) & \\ & 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{O}(K=0,I).$$

读者现在也可以对这个对应作类似的论证。 □

现在，我们可以轻松地得出这一经典结果：任意某个（可能是相对的）图代数的规范等变商仍然是图代数。为此，我们先回顾一下，任何商对应（作为核分量）都来自某个商图（参见例3.5）

$$A/K = c_0(V)/c_0\Big(H = \text{hereditary} \Big) = c_0\Big(W = V \setminus H \Big)$$
$$X/XK = \ell^2(E)/\ell^2(EH) = \ell^2\Big(F := WE \Big)$$

因此，我们可以用商图替换原图

$$X = \ell^2(E := F), \quad A = c_0(V := W) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}(K=0,I).$$

另一方面，回顾一下，图（在我们的例子中是商图）的任何协变理想都简单地对应于一个正则顶点集（参见例3.7）：

$$\max(X,A) = c_0\Big(\text{regular} \Big) \quad \Longrightarrow \quad I = c_0\Big(R \subseteq \text{regular} \Big).$$

有了这一记号，我们现在可以将典范膨胀确定为一个图。为此我们注意到，由于它是通过上述算法给出的，我们可以根据原始数据将典范膨胀重新恢复为一个组合对象；在我们的情形中，这归结为由图产生的典范膨胀：

推论 9.4 (Katsura 膨胀：图对应)：由最大协变性给出的典范膨胀，如 (25)

$$\Big(XB = X + X\begin{pmatrix} \max(X,A) & \\ & 0 \end{pmatrix} \;\Big|\; B = A + \begin{pmatrix} \max(X,A) & \\ & 0 \end{pmatrix} \Big)$$

由下述典范图给出（沿用上文的记号 ）：
其系数代数由顶点的正交和构成

$$W = \text{singular}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & \\ & \text{regular} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \text{regular} \setminus R & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

以及由图给出的对应

$$EW = E\Big(\text{ singular}\Big(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \Big) \cup \Big(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & \text{regular} \end{smallmatrix} \Big) \cup \Big(\begin{smallmatrix} \text{regular} \setminus R & \\ & 0 \end{smallmatrix} \Big) \Big)$$

其左作用由.....给出（由此定义边的值域）

$$\Big(\begin{smallmatrix} a & \\ & a \end{smallmatrix} \Big) EW = (aE)W \quad \textit{and} \quad \Big(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & b \end{smallmatrix} \Big) EW = \Big(\begin{smallmatrix} b & \\ & b \end{smallmatrix} \Big) EW = (bE)W$$

而对剩余的最后一个直和项，则作用平凡。
因此，用更经典的术语来描述，该图为 s

$$W = \Big(\text{ all vertices} = \text{singular} \cup \text{regular} \Big) \amalg \Big(\text{ regular} \setminus R \Big)$$

$$EW = E\Big(\text{ all vertices} \Big) \amalg E\Big(\text{ regular} \setminus R \Big)$$

其值域和源映射由.....给出

$$s(- \amalg \varnothing) = s(-) \amalg \varnothing \quad \textit{and} \quad s(\varnothing \amalg -) = \varnothing \amalg s(-),$$

$$r(- \amalg \varnothing) = r(-) \amalg \varnothing = r(\varnothing \amalg -).$$

请注意，合并后的直和项基本上还原了原图，而最后一个则提供了一个额外副本，以补足最大协变性。另一方面，所有边都指向原顶点副本。因此，这还原了图代数中熟悉的构造：任何规范等变商都可由图代数本身实现。

证明。 要将典范膨胀还原为一个图，只需将其系数代数表示为顶点的正交和（参见例1.2）。在我们的情形中，系数代数本身已经表示为顶点之和

$$A\Big(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \Big) + \Big(\begin{smallmatrix} \max(X, A) & \\ & 0 \end{smallmatrix} \Big) = c_0\big(\text{ vertices } \big) \Big(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \Big) + \Big(\begin{smallmatrix} c_0\big(\text{ regular } \big) & \\ & 0 \end{smallmatrix} \Big)$$

我们现在可以进一步将其分解为正交和：首先，奇异顶点（即非正则顶点）与正则顶点显然互不相交，因此构成一个正交直和项，

$$\text{vertices} = \text{singular} \cup \text{regular}: \qquad \text{singular}\Big(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \Big) \perp \Big(\begin{smallmatrix} \text{regular} & \\ & \text{regular} \end{smallmatrix} \Big).$$

另一方面，也可以将正则顶点上的和写为

$$\text{regular}\Big(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \Big) + \Big(\begin{smallmatrix} \text{regular} & \\ & 0 \end{smallmatrix} \Big) = \Big(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & \text{regular} \end{smallmatrix} \Big) + \Big(\begin{smallmatrix} \text{regular} & \\ & 0 \end{smallmatrix} \Big)$$

其直和项属于相对 Cuntz–Pimsner 代数，因为

$$\tau(XX^*) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & XX^* \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (\varphi - \tau)(A \cap XX^*) = \begin{pmatrix} A \cap XX^* & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

而这仅适用于紧作用部分！后一个直和项恰好在给定的协变性下消失（见定理 7.4 或推论 9.3）

$$\begin{pmatrix} \text{regular} \setminus R & \\ & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} R & \\ & 0 \end{pmatrix} = 0$$

因此，该和可约化为非零顶点

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ & \text{regular} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{regular} & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \text{regular} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{regular} \setminus R & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，我们的膨胀所对应的系数代数分解为

$$\text{vertices}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{regular} & \\ & 0 \end{pmatrix} = \text{singular}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & \text{regular} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{regular} \setminus R & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

因此，我们找到了图对应的顶点。
现在，我们可以直接从对应中读出边：

$$X + X\begin{pmatrix} \max(X, A) & \\ & 0 \end{pmatrix} = \ell^2(E)\left(\text{singular}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & \text{regular} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{regular} \setminus R & \\ & 0 \end{pmatrix} \right)$$

边的源显然如此。另一方面，其左作用为（利用从 2.1）诱导出的紧算子上的态射）

$$\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} EW = \varphi(a)\tau(E)W = \tau(aE)W = (aE)W$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ & b \end{pmatrix} EW = \tau(b)\tau(E)W = \tau(bE)W = (bE)W$$

$$\begin{pmatrix} c & \\ & 0 \end{pmatrix} EW = (\varphi - \tau)c\tau(E)W = 0$$

因此，我们得到了所需的图。 □

下面我们通过以下重要的图来说明典范膨胀：

例 9.5（Katsura 膨胀：Toeplitz 图）：
考虑由单环给出的对应

$$\left(X = \ell^2\left(\begin{array}{c} x \\ \circlearrowleft \\ a \end{array} \right) = \mathbb{C}x \;\middle|\; A = c_0\big(\text{vertices}\big) = \mathbb{C}a \right).$$

它的 Toeplitz 代数恢复了传统的 Toeplitz 代数，因为

$$\mathcal{T}(X,A) = C^*\Big(\ x \cup a \ \Big| \ x^*x = a, \ ax = x \ \Big) = C^*\Big(\ x^*x = 1 \ \Big) = \mathcal{T}$$

因此它有一个颇具启发性的名称：Toeplitz 图。另一方面，它的绝对 Cuntz–Pimsner 代数还原出了传统的圆代数

$$\mathcal{O}(X,A) = C^*\Big(\ x \cup a \ \Big| \ x^*x = a = xx^* \ \Big) = C^*\Big(\ x^*x = 1 = xx^* \ \Big) = C(\mathbb{T}).$$

这些已经定义了它的所有规范等变表示：
事实上，只有一个协变理想，它由唯一的顶点给出

$$\max(X,A) = c_0\Big(\ \text{regular} = a = \text{vertices} \ \Big) = A$$

并且没有其他商图（除了平凡的商图）。
因此，我们找到了规范等变表示的整个格。接下来，我们可以计算典范膨胀对应的图：为此，我们只需直接读出该图（参见推论 *9.4*）

$$\Big(\ W = (a) \amalg (a \setminus \varnothing) = a \amalg a \ \Big| \ EW = (xa) \amalg (xa) = x \amalg x \ \Big) :$$

$$\begin{pmatrix} s(x \amalg \varnothing) = a \amalg \varnothing, \ s(\varnothing \amalg x) = \varnothing \amalg a \\ \\ r(x \amalg \varnothing) = a \amalg \varnothing = s(\varnothing \amalg x) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \amalg \varnothing \\ \circlearrowright \\ a \amalg \varnothing \xleftarrow{\varnothing \amalg x} \varnothing \amalg a \end{pmatrix}.$$

综合起来，我们得到了 Toeplitz 代数的实现：

$$\mathcal{T}\left(\ \circlearrowright \bullet \ \right) = \mathcal{O}\left(\ \circlearrowright \bullet \longleftarrow \bullet \ \right)$$

后者有时也称为 Toeplitz 图。

现在我们继续讨论极小膨胀是否存在的问题。为此，我们先介绍关于相对图代数的以下肯定结果：

推论9.6（Katsura 膨胀：极小膨胀）。对于图对应，典范膨胀是极小的。粗略地说，不存在更小的图能够将相对图代数实现为绝对图代数。

证明。考虑一个能够检测每个协变性 $B \subseteq c_0$（正则）的子代数：

$$B \cap c_0\Big(S \subseteq \text{regular}\Big) = 0 \quad \implies \quad c_0\Big(S \subseteq \text{regular}\Big) = 0.$$

那么该子代数必然包含每个直和项，因此也包含

$$c_0\Big(S=\{r\}\Big)=\mathbb{C}(r)\subseteq B \quad \Longrightarrow \quad B=\bigoplus\nolimits_r \mathbb{C}(r)=c_0\Big(\text{regular}\Big).$$

因此，最大协变性定义了一个极小膨胀。 □

前面的观察现在引出了关于空间上的对应（以空间作为系数代数）的如下结果，尤其适用于整数作用：

推论 9.7（Katsura 膨胀：空间上的对应）：
对于具有交换最大协变性的对应（因此也适用于空间上的对应），以下结论成立：由最大协变性给出的典范膨胀是极小膨胀，当且仅当最大协变性具有离散谱（分别地，最大协变性定义了一个离散子空间）。具有全不连通谱的最大协变性并不足够。

证明。注意，整个问题涉及一个阿贝尔算子代数。根据 Stone–Weierstrass 定理，只需考察谱中某一点上的任意理想，以及以下形式的一对点上的任意子代数

$$\ker\Big(\omega : B\to\mathbb{C}\Big)=\Big\{b(\omega)=0\Big\} \quad \text{and} \quad \operatorname{eq}\Big(\omega_i : B\rightrightarrows\mathbb{C}\Big)=\Big\{b(\omega_1)=b(\omega_2)\Big\}.$$

对于理想，我们首先注意到，对于一对闭子空间 $E,F\subseteq X=\Gamma B$：

$$\ker(E)\cap\ker(F)=\ker(E\cup F)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad E\cup F=X.$$

因此，某个非孤立点无法检测到的理想只有

$$\ker(\omega)\cap\ker(F)=0: \quad \ker\Big(F=\overline{X-\omega}=X\Big)=0$$

由此，非孤立点便能检测到每个理想。反过来，假设谱定义了一个离散空间 e.
那么，如上所述的每个子代数甚至无法检测到两个理想：

$$\operatorname{eq}\big(\omega_1,\omega_2\big)\cap\ker(X-\omega_i)=\Big\{b(X-\omega_i)=0=b(\omega_i)\Big\}=0$$

结合这两个观察即可得到该推论。
关于全不连通空间的最后一个结论留给读者。 □

鉴于前面的推论，我们现在可以举出一些反例，说明极小膨胀并不总是存在：

例 9.8（极小膨胀：存在性失效）。为此，我们现在只需将任意整数作用视为我们的对应，

$$\mathbb{Z} \curvearrowright C_0(\text{space}) \quad \Longrightarrow \quad X = C_0(\text{space}) = A.$$

请注意，任何整数作用都会定义一个正则对应，因此系数代数也就定义了最大协变性。现在考虑某个连续空间，例如实数轴，由此我们得到：a) 典范膨胀并非最小，例如以下理想已经可以检测每种协变性

$$C_0(\mathbb{R} - r) = \ker(r) \subseteq C_0(\mathbb{R}) : \qquad C_0(\mathbb{R} - r) \cap I = 0 \quad \Longrightarrow \quad I = 0.$$

b) 另一方面，这些理想也都不是最小的，因为此外，对协变性的检测早已可以通过具有离散补集的理想实现，例如

$$C_0\Big(\mathbb{R} - \{r_1, \ldots, r_n\}\Big) = \ker\Big(r_1 \cup \ldots \cup r_n\Big) \subseteq C_0(\mathbb{R}).$$

现在考虑有理数的一种枚举 $\{q_1, q_2, \ldots\} = \mathbb{Q}$。由此我们得到一个递减理想序列，并可进行检测：

$$\ker(q_1) \supseteq \ker(q_1 \cup q_2) \supseteq \ldots \supseteq \ker(q_1 \cup \ldots \cup q_n) \supseteq \ldots$$

然而，它们的交无法检测任何协变性，因为

$$\ker\Big(\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}\Big) = \ker\Big(\overline{\{q_1, q_2, \ldots\}} = \mathbb{R}\Big) = 0.$$

因此，给定的理想序列不存在极小膨胀。
事实上，我们甚至发现选择公理并不适用！

致谢

作者谨向导师 Søren Eilers 致以谢意，感谢他给予的悉心支持与鼓励；同时也感谢 Evgenios Kakariadis 指出了 [Kat07]Takeshi Katsura 撰写的一篇有价值的后续论文，该论文启发作者找到了缺失的部分。此外，作者感谢玛丽·居里博士奖学金第 801199 号提供的支持。

参考文献

[Bla96] Etienne Blanchard。D´eformations de C^*-代`数 de Hopf。《法国数学会通报》，124(1):141–215，1996年。[Cun77] Joachim Cuntz。由等距算子生成的简单 C^*-代数。《数学物理通讯》，57(2):173 – 185，1977年。[Exe94] Ruy Exel。 C^*代数上的圆群作用、部分自同构及广义 Pimsner-Voiculescu正合列。《泛函分析杂志》，122(2):361–401，1994年。[Exe11] Ruy Exel。 C^*代数的非交换 Cartan 子代数。《纽约数学杂志》，17:331–382，2011年。[FMR03] Neal Fowler、Paul Muhly 和 Iain Raeburn。Cuntz-Pimsner代数的表示。《印第安纳大学数学杂志》，52(3):569–605，2003年。[Fre64] Peter Freyd。《阿贝尔范畴》。Harper and Row 和 John Weatherhill，1964年。[Kak16] Evgenios Kakariadis。关于 C^*-对应的规范不变唯一性定理的一则札记。《以色列数学杂志》，215(2):513—-521，2016年9月。[Kat04] Takeshi Katsura。关于与 C^*-对应相关的 C^*代数。《泛函分析杂志》，217(2):366–401，2004年。[Kat07] Takeshi Katsura。与 C^*-对应相关的 C^*代数的理想结构。《太平洋数学杂志》，230(1):107–145，2007年。[KPQ12] Steven Kaliszewski、Nura Patani 和 John Quigg。图 C^*-对应的刻画。《休斯敦数学杂志》，38(3):751–759，2012年。[KPW98]Tsuyoshi Kajiwara、Claudia Pinzari 和 Yasuo Watatani。由希尔伯特双模生成的 C^*代数的理想结构与单纯性。《泛函分析杂志》，159(2):295–322，1998年。[Lan78] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴论》，数学研究生教材第5卷。Springer New York，第二版，1978年。

[Lan95] Christopher Lance。《Hilbert C^*-模：算子代数学家的工具箱》，伦敦数学会讲义丛书第 210 卷。剑桥大学出版社，1995 年。[MPT08] Paul Muhly、James Pask 和 Mark Tomforde。C*对应的强移位等价。《以色列数学杂志》，167：315–346，2008 年。[MS98] Paul Muhly 和 Baruch Solel。 C^*-对应上的张量代数：表示、膨胀与 C^*-包络。《泛函分析杂志》，158(2)：389–457，1998 年。[Pim97] Michael Pimsner。一类 C^*-代数，同时推广了 Cuntz–Krieger 代数和由 $\mathbb{Z}$得到的交叉积。载于 Dan-Virgil Voiculescu（编），《自由概率论》，Fields Institute Communications 第 12 卷，第 189–212 页，1997 年。