arXiv:2301.03085v1 [stat.ME] 8 Jan 2023

基于广义最小二乘法的异方差与结构突变时间序列格兰杰因果关系检验

Hugo J. Bello *

2023年1月10日

摘要

本文提出一种新方法（广义最小二乘格兰杰检验），通过估计自协方差矩阵并采用广义最小二乘法来确定时间序列之间的因果关系。我们展示了所提出的自协方差矩阵估计量（滑动自协方差矩阵）的有效性，并通过一个合成数据集和一个由加密货币构成的真实数据集，将所提出的方法与经典格兰杰 F 检验进行了比较。模拟结果表明，在残差存在异方差或结构突变的情况下，所提出的广义最小二乘格兰杰检验比格兰杰 F 检验能更准确地捕捉因果关系。最后，我们使用所提出的方法揭示加密货币之间未知的因果关系。

关键词： 格兰杰检验、因果关系、广义最小二乘法、沃尔德检验。

1 引言

格兰杰因果关系是一种统计学概念，可帮助我们判断一个时间序列中的信息是否有助于预测另一个时间序列。它广泛应用于经济学、金融学、地质学、遗传学和神经科学等诸多领域，用于理解变量之间的关系并识别可能的因果联系。

研究时间序列因果关系的主要工具是格兰杰因果关系 F 检验（[Gra69]，[Gra80]），该检验基于普通最小二乘法（OLS）估计，因此受 OLS 假设的限制（其中包括残差具有同方差性）

在许多实际应用中，我们会遇到存在各种问题的时间序列，例如异方差性（不同时间观测值之间的方差不相等）或结构突变（出现两个或更多均值不同的平稳时期）。在这些情况下，不建议使用 OLS，格兰杰 F 检验也可能不适用。

本文旨在介绍一种基于广义最小二乘法确定格兰杰因果关系的方法，该方法通过估计残差的自协方差矩阵实现。

1.1 预备知识

本节将介绍符号和定义，并回顾格兰杰因果关系的概念。

*hugojose.bello@uva.es 巴利亚多利德大学应用数学系（索里亚校区）

1.1.1 格兰杰因果关系 F检验

格兰杰因果关系（[Gra69], [Gra80]）检验是一种统计假设检验，用于确定一个时间序列$\mathbf{x} = (x_t)_{t=0}^{N}$ 是否有助于预测另一个时间序列 $y = (y_t)_{t=0}^{N}$。具体而言，格兰杰因果关系关注$\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 能否比单独使用$\mathbf{y}$ **更显著地**预测$\mathbf{y}$ 的未来值。在这种情况下，我们称$\mathbf{x}$ 对$\mathbf{y}$存在格兰杰因果关系。

其基本思想是，原因应有助于预测未来的结果，且这种预测能力应超出仅依据其自身过去值所能获得的预测能力。

检验的零假设指出，线性回归模型

$$y_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{p} \beta_k y_{t-k} + \varepsilon_t \tag{1}$$

对$\mathbf{y}$ 的拟合显著优于模型

$$y_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{p} \beta_k y_{t-k} + \sum_{k=1}^{p} \beta_k' x_{t-k} + \varepsilon_t \tag{2}$$

如果零假设成立，则意味着$\mathbf{x}$ 的滞后值能提高对$\mathbf{y}$ 的预测解释力，因此$\mathbf{x}$ 背后的过程会导致$\mathbf{y}$。

为检验模型 (2) 是否比模型 (1) 更准确，采用以下统计量

$$\frac{(SSR_{RM} - SSR_{UM})/N}{SSE_{UM}/(N-2)(p-1)} \tag{3}$$

其中， SSR_{RM}和 SSR_{UM}分别是受限模型和非受限模型的残差平方和

$$SSR_{RM} = \Sigma_t (y_t - \beta_0 - \sum_{k=1}^{p} \beta_k y_{t-k})^2$$

$$SSR_{UM} = \Sigma_t (y_t - \beta_0 - \sum_{k=1}^{p} \beta_k y_{t-k} - \sum_{k=1}^{p} \beta_k' x_{t-k})^2$$

如果满足普通最小二乘法所需的假设，那么在零假设下，(3)服从 $F(p,\ N-2p-1)$ 分布。

观测 1。 注意，1 可以理解为将$\mathbf{y}$ 写成滞后时间序列 $B^k\mathbf{y}$ 的线性组合（使用后移算子表示法），即:

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \sum_{k=1}^{L} \beta_k B^k \mathbf{y} + \varepsilon$$

类似地，1

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \sum_{k=1}^{L} \beta_k B^k \mathbf{y} + \sum_{k=1}^{L} \beta_k B^k \mathbf{x} + \varepsilon$$

因此，格兰杰因果关系可以理解为使用 F检验来比较两个多元线性回归模型。

1.1.2 广义最小二乘

对于形式如下的线性回归模型

$$y_i = \beta_1 \, x_{i1} + \beta_2 \, x_{i2} + \cdots + \beta_p \, x_{ip} + \varepsilon_i, \tag{4}$$

普通最小二乘法（OLS）要具备所需的渐近性质，必须满足以下假设：

(P1) 设定正确。生成数据的过程本质上必须是线性的。**(P2) 严格外生性**。回归中的误差项的条件均值必须为零：$\mathrm{E}[\,\varepsilon \mid X\,] = 0$

(P3) 不存在完全线性相关。所有回归变量必须彼此线性独立。**(P4) 同方差性** $E[\varepsilon_i^2|X] = \sigma^2 \; \forall i$。每个观测值中的误差项具有相同的方差 σ^2 。**(P5) 不存在自相关** $E[\varepsilon_i\varepsilon_j|X] = 0 \; \forall i \neq j$。不同观测值之间的误差不相关。**(P6)** 正态性。 </style}有时还会额外假设，在给定回归变量的条件下，误差服从正态分布

如果不满足同方差性（P4）或无自相关（P5）的假设，我们可以使用**广义最小二乘法**（GLS），以更好地估计式（4）中的参数。

使用标准的矩阵表示法，式（4）可写为

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$$

其中 $\mathbf{y} = (y_i)$、 $X = (x_1^T \ldots x_p^T)$为设计矩阵， ε 为误差项。如果误差项满足 $E[\varepsilon|X] = 0$ ，并记 $\mathrm{cov}[\varepsilon|X] = \Omega$ 为非奇异的残差协方差矩阵，则 $\boldsymbol{\beta}$ 的广义最小二乘估计为

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{\beta}}(y - X\boldsymbol{\beta})^T\Omega(y - X\boldsymbol{\beta}) = \left(\mathbf{X}^\mathsf{T}\Omega^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\Omega^{-1}\mathbf{y} \tag{5}$$

（参见 [Gre03，第 9.3] 节。）注意，对于 $\Omega = \sigma^2 I$ （其中 I 为单位矩阵），我们处于普通最小二乘法的假设下，所得估计量为

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \left(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y} \tag{6}$$

已知

$$E[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}] = \boldsymbol{\beta}_{GLS} \tag{7}$$

$$\mathrm{cov}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}] = V = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1} \tag{8}$$

事实上

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} - \boldsymbol{\beta}_{GLS}) \longrightarrow^D N(0, V)$$

1.1.3 沃尔德检验

沃尔德检验是一种统计假设检验，它基于无约束估计与其在零假设下的假设值之间的加权距离，评估回归模型对统计参数的约束（参见 [Gre03，第 5.3] 节）。

$\widehat{\ }$设 $\boldsymbol{\beta}$ 如前所述，带有协方差 V的回归模型（广义最小二乘或普通最小二乘法）模型的样本估计。如果关于 p 参数的 Q 假设表示为 $Q \times p$矩阵 R:

$$H_0 : R\beta = r$$
$$H_1 : R\beta \neq r$$

Wald 检验统计量为

$$(R\widehat{\boldsymbol{\beta}} - r)^T \cdot \left(R\widehat{V} R^T \cdot \frac{1}{n} \right)^{-1} \cdot (R\widehat{\boldsymbol{\beta}} - r) \tag{9}$$

在零假设下，Wald 统计量 (9) 服从 $F(Q,\ N-p)$ 分布。

将格兰杰 F 检验作为沃尔德检验

(3) 中所述的格兰杰 F 检验实际上是沃尔德检验的一个特例。若考虑$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$，则可以建立无约束回归模型

$$\mathbf{y} = \beta_0 + \beta_1 B\mathbf{y} + \ldots + \beta_p B^p \mathbf{y} + \beta_1' B\mathbf{x} + \ldots + \beta_p' B^p \mathbf{x} \tag{10}$$

其中，B 是后移算子 $B^k x = (x_{t-k})_t$。因此，若要使 y 由 x 引起，系数$\beta_1', \ldots \beta_p'$必须为零，所以我们需要检验以下假设

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_k' = 0 \text{ for all } k \leq p \\ H_1 &: \beta_k' \neq 0 \text{ for some } k \leq p \end{aligned} \tag{11}$$

定义矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \\ \beta_1' \\ \vdots \\ \beta_p' \end{pmatrix};\ r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

我们可以将检验 11 表示为

$$\begin{aligned} H_0 &: R\boldsymbol{\beta} = 0 \\ H_1 &: R\boldsymbol{\beta} \neq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

可以证明 [Gre03，第 5 节4], ，采用这种记号时，相应的 Wald 统计量 (9) 实际上与 F 检验统计量 (3) 相同

2 方法论

格兰杰 F 检验 (3) 假设条件 (4) 得到满足。我们旨在提出一种基于广义最小二乘法的格兰杰检验版本$\widehat{\ }$，为此我们需要 Ω，即协方差矩阵 cov$[\varepsilon|X]$ =Ω 的一个估计值。

在大多数情况下，Ω 未知，一种合理的方法是使用 β_{OLS} 来获得残差

$$r_t(\beta) = y_t - \beta_0 - \sum_{k=1}^{p} y_{t-k}\beta_k - \sum_{k=1}^{p} x_{t-k}\beta_k'$$

A并尝试使用 r_t 的协方差矩阵来估计 Ω。这一程序通常称为
d**可行的最小二乘**。时间序列的协方差矩阵（通常称为自协方差矩阵）一般是未知的。为了解决这个问题，在许多情况下，我们假设 r_t 遵循一个已知模型，例如一阶自回归模型，其理论自协方差矩阵已知，并且可以根据模型参数求得。这种方法限制很大，因为一般而言，r_t 可以有多种形式。因此，我们将首先处理以下问题：

问题2。给定一个时间序列$\mathbf{x} = (x_t)$，如何估计协方差矩阵 $\Omega = (\mathrm{cov}(x_t, x_{t'}))_{t,t'}$?

由于一般而言，前述问题可能确实难以解决，我们将施加一些假设。我们将研究以下非常一般的时间序列范畴：**局部联合平稳**，正如我们将看到的，这类时间序列的协方差可以方便地估计（我们将其称为**滑动自协方差矩阵**）

2.1 局部联合平稳性与滑动自协方差矩阵

定义3. 若存在一个递增的时间点序列 $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$（称为**时间断点**），使得每个子序列

$$x^{(k)} = x_{t_k:t_{k+1}} = \{x_t : t \in [t_k, t_{k+1}]\}$$

均为平稳的，且与其余子序列联合平稳，则称该时间序列具有局部联合平稳性。

回顾一下，若两个时间序列$\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ 满足 $\mathrm{cov}(x_t, y_t) = \mathrm{cov}(x_{t+h}, y_{t+}$，则称它们联合平稳。 $_h)$

例4. 平稳时间序列具有局部联合平稳性。这很容易验证，因为平稳时间序列的每个子序列都与任何其他子序列交叉平稳。可以任选一个时间点 T，根据定义，初始子序列 $x_{0:T}$ 显然与该序列的其余部分交叉平稳。

例5. 若时间序列(x_t)满足，**则称其为具有结构突变的平稳时间序列**，如果它满足

$$x_t = \alpha + \delta D_t + \varepsilon_t$$

其中

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq T_B + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for α, $\delta \in \mathbb{R}$ 且 ε_t 平稳。这些时间序列由 Perron 引入（参见 [Per89] 和 [LS01]）。

性质 6. 具有结构突变的平稳时间序列是局部联合平稳的。

证明。考虑对 $a_t = \alpha + \varepsilon_t$ 进行子抽样得到的时间序列，该序列定义于 t 取值介于 0 和 T_b 之间且 $b_t = \alpha + \delta + \varepsilon_t$ 的情形。由于 ε_t 是平稳的，这两个时间序列是联合平稳的：

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(a_{t_1}, b_{t_2}) &= \operatorname{cov}(\alpha + \varepsilon_{t_1}, \alpha + \delta + \varepsilon_{t_1}) \\ &= \operatorname{cov}(\varepsilon_{t_1}, \varepsilon_{t_2}) = \operatorname{cov}(\varepsilon_{t_1+h}, \varepsilon_{t_2+h}) \\ &= \operatorname{cov}(\alpha + \varepsilon_{t_1+h}, \alpha + \delta + \varepsilon_{t_1+h}) \\ &= \operatorname{cov}(a_{t_1+h}, b_{t_2+h})\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{x}$ 满足定义3，采用划分 $0 \le t \le T_b$ 和 $T_b < t_\circ$ □

定义7。给定一个时间序列 $\mathbf{x} = (x_t)$，我们将**长度为** τ 且位于 t_0 a 的窗口定义为 s

$$w_\tau(\mathbf{x}, t_0) = x_{t_0:t_0-\tau} = \{x_t : t \in [t_0 - \tau, t_0]\}$$

定义8。设$\mathbf{x} = (x_t)$为一个时间序列，且有两个时刻 t_1, t_2。考虑长度为 τ 的窗口

$$\begin{aligned}w^1 &= w_\tau(\mathbf{x}, t_1) \\ w^2 &= w_\tau(\mathbf{x}, t_2)\end{aligned}$$

我们将位于 t_1, t_2 、长度为 τ 的**窗口化样本自协方差** 称为

$$\widehat{\gamma}_\tau(t, t') = \widehat{\gamma}_{w^1 w^2}(t, t') \tag{13}$$

$$= \frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau}(w_k^1 - \overline{w^1})(w_k^2 - \overline{w^2}) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau}(x_{t-k} - \overline{w^1})(x_{t'-k} - \overline{w^2}) \tag{15}$$

这与时间序列 $w_\tau(\mathbf{x}\ t)$ 和$w_\tau(\mathbf{x}\ t')$ 之间的样本互协方差 [1]一致

性质 9。设$\mathbf{x} = (x_t)$为一个具有时间断点 $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ 的局部联合平稳时间序列。给定 t, t'，取

$$\tau = \underset{\substack{1 \le m \le n \\ T = t, t'}}{\operatorname{argmin}} |T - t_m|$$

长度为 τ 的窗口化样本自协方差是 $\operatorname{cov}(x_t,\ x_{t'})$ 的一个估计量

证明。设紧邻 t 之前的时间断点为 t_m，紧邻 t' 之前的时间断点为 $t_{m'}$。我们首先考虑 t_m 和 t'_m 不同的情况。

注意到（沿用 3 中的记号），根据 τ 的选择

$$\begin{aligned}w_\tau(\mathbf{x}, t, \tau) &= w_\tau(\mathbf{x}^{(t_m)}, t, \tau) \\ w_\tau(\mathbf{x}, t', \tau) &= w_\tau(\mathbf{x}^{(t_{m'})}, t', \tau)\end{aligned}$$

[1]两个（联合平稳）时间序列 $\mathbf{x}$ 和$\mathbf{y}$ 的样本互协方差定义为 $\widehat{\gamma}_{xy}(h) = \sum(x_{t+h} - \overline{x})(y_{t+h} - \overline{y})$。参见示例 1。23 [SSS00]

因此，$\widehat{\gamma}_\tau(t,\ t')$，长度为 τ 的窗口化样本自协方差与前两个子序列窗口 $w_\tau(\mathbf{x}^{(t_m)}t,\ \tau)$ $w_\tau(\mathbf{x}^{(t_{m'})}t',\ \tau)$ 的样本互协方差一致。

由于子序列 $\mathbf{x}^{(t_m)}$ 和 $\mathbf{x}^{(t_{m'})}$ 是联合平稳的，$\widehat{\gamma}_\tau(t,t')$ 估计的协方差

$$\mathrm{cov}(w_\tau(\mathbf{x}^{(t_m)},t,\tau),w_\tau(\mathbf{x}^{(t_{m'})},t',\tau))$$

必须与 $\mathrm{cov}(\mathbf{x}^{(t_m)}{}_t,\mathbf{x}^{(t_{m'})}{}_{t'})=\mathrm{cov}(x_t,x_{t'})$ 相同。

若 $t_m=t'_m$，则在前面的论证中，$\mathbf{x}^{(t_m)}=\mathbf{x}^{(t_{m'})}$，并且利用 $\mathbf{x}^{(t_m)}$ 的平稳性可得到相同的结论。

□

观测 10. 请注意，由于联合平稳时间序列的样本互协方差是有偏估计量，窗口化样本自协方差 $\widehat{\gamma}_\tau(t,t')$ 也是有偏估计量。然而，在期望值 $E[\mathbf{x}]$ 已知的情况下，在公式中用期望值替代平均值后，互协方差变为无偏，因此根据前面的证明，$\widehat{\gamma}_\tau(t,t')$ 也具有相同性质。

定义 11。长度为 τ 的**滑动自协方差矩阵**是矩阵 Ω_τ，由每一对时间点对应的窗口化样本自协方差 $\widehat{\gamma}_\tau(t,t')$ 定义，即

$$\Omega_\tau=(\widehat{\gamma}_\tau(t,t'))_{t,t'} \tag{16}$$

根据命题 9，当序列 $\mathbf{x}$ 是局部联合平稳时，Ω_τ 是协方差矩阵 Ω 的一个估计量。根据命题 6，若 $\mathbf{x}$ 是具有结构突变的平稳序列，则 Ω_τ 估计 Ω。

观测 12。请注意，在式 (16) 中，当 t,t' 较小时，估计值 $\widehat{\gamma}_\tau(t,t'))_{t,t'}$ 会因之前的取值数量较少而不够精确。在某些情况下，解决这一问题的一种方法是利用 $x_{-t}=x_t$，用 0 之前的取值补全时间序列。

例 13。考虑具有 $\phi_1=0.9$ 的时间序列 $x_t=\phi_1x_{t-1}+\varepsilon_t$。由于该时间序列服从一阶自回归模型，我们知道其自协方差

$$\mathrm{cov}(x_t,x_{t+h})=\phi_1^h\cdot var(x_t) \tag{17}$$

图 1 顶部展示了该时间序列的模拟结果，左侧展示了使用前述公式 17 得出的理论协方差矩阵，右侧展示了使用（16）估计的滑动协方差矩阵。对于低值附近的不精确性，我们采用了观察结果 12 中描述的程序。计算自协方差矩阵时，我们使用了数值 $\tau=N/3$，其中 N 是该时间序列的样本量；τ 取较低值时，估计结果相近。

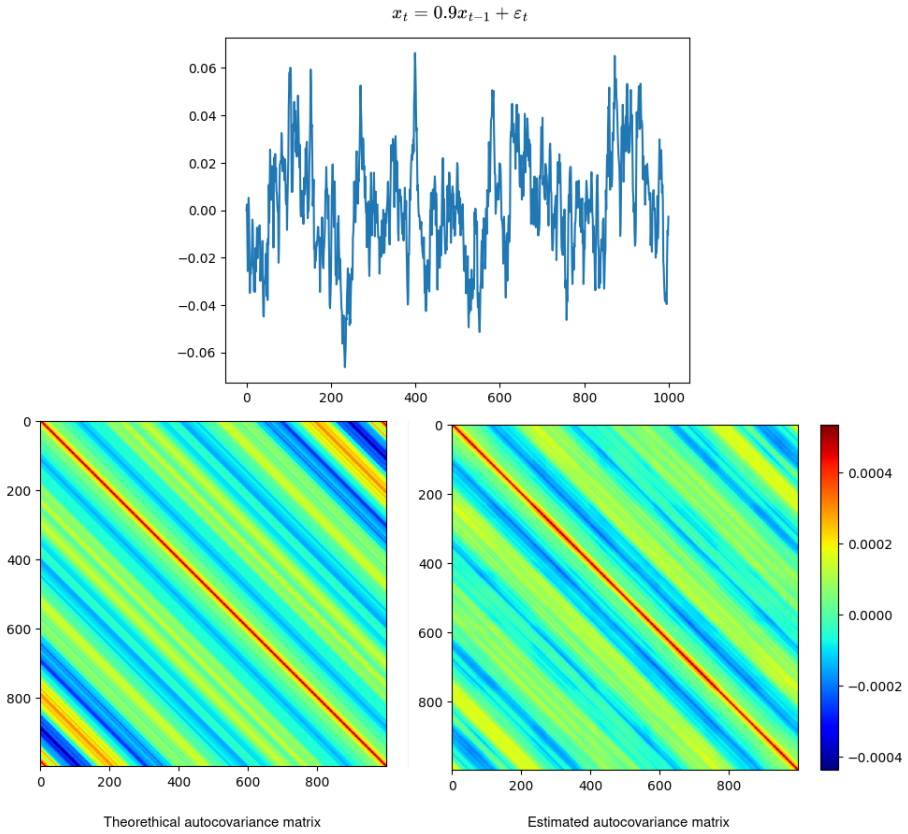


图1：自协方差矩阵和估计的滑动自协方差矩阵。

2.2 广义最小二乘格兰杰因果关系检验

回到格兰杰因果关系检验，本节将介绍一种新颖的格兰杰因果关系检验，该检验基于沃尔德检验，并通过滑动自协方差矩阵估计残差协方差矩阵。

方法14 (广义最小二乘格兰杰因果检验)。 给定两个时间序列$\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$，为了评估**$\mathbf{x}$ 是否以滞后阶数** L 导致 $\mathbf{y}$，我们采用以下程序，它是对经典格兰杰因果关系检验的一种变体：

1. 使用普通最小二乘法为模型估计参数 $(\boldsymbol{\beta}_{OLS}, \boldsymbol{\beta}'_{OLS})$

$$y_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{p} \beta_k y_{t-k} + \sum_{k=1}^{p} \beta'_k x_{t-k} + \varepsilon_t \tag{18}$$

2. 使用前一个模型的残差

$$r_t = y_t - \beta_0 - \sum_{k=1}^{p} \beta_k y_{t-k} - \sum_{k=1}^{p} \beta'_k x_{t-k}$$

使用滑动自协方差矩阵 Ω_T 估计其协方差矩阵，如式（16）所示

3. 使用广义最小二乘和前一个协方差矩阵，按照式（5）再次估计模型（18）中的参数 ($\boldsymbol{\beta}_{GLS}$, $\boldsymbol{\beta}'_{GLS}$)。

4. 使用沃尔德检验，零假设为

$$H_0 : \beta'_{GLS\ k} = 0 \text{ for all } k \leq p$$

如果拒绝零假设，则得出结论：**x 导致 y**；否则得出相反的结论 .

3 结果

现在，我们将评估所提出的广义最小二乘格兰杰因果检验（14）的效果，并将其与经典格兰杰 F 检验（第 1.1.1 节）进行比较。

3.1 模拟数据集

给定时间序列$\mathbf{x}$，我们采用以下程序，以一致的方式生成一个**受因果影响的**序列$\mathbf{y}$。该程序通过以下方式定义$\mathbf{y}$

$$y_t = \sum_{k=1}^{L} x_{t-k} \cdot \beta_k + \varepsilon_t \tag{19}$$

其中，β_k 是随机生成的，而 ε 是一个时间序列，可根据我们想要模拟的因果关系类型，通过几种不同方式构造。我们可以考虑：

(M1) ε 平稳时间序列，例如白噪声 $\varepsilon_t \sim N(0,\ \sigma^2)$。

(M2) ε 是具有结构突变的平稳时间序列，例如考虑 $\varepsilon_t =\sim N(\mu_t,\ \sigma^2)$，其中 $\mu_t = 0$适用于 $t \leq t_b$，而 $\mu_t = \mu$ 适用于 $t > t_b$。

(M3) ε 具有变化方差的非平稳时间序列，例如 $\varepsilon_t \sim N(0,\ (t \cdot \sigma)^2)$。

另一方面，为了模拟**非因果关系**，我们只需使用参数不同的自回归过程，模拟两个时间序列$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1}\phi + \varepsilon_t \\ y_t &= y_{t-1}\phi' + \varepsilon_t \end{aligned} \tag{AR1}$$

观测值 15。注意，使用滞后时间序列 $B^k\mathbf{y}$ 和 $B^k\mathbf{y}$ （如观测值 1 中使用后向算子）建立的回归模型，可以用于预测 y 。回归参数将近似于 β_1，，回归残差将近似于 ε。

鉴于此，(M1) 将生成能够很好地适用经典格兰杰 F 检验的时间序列。相比之下，(M2) 将生成带有结构突变的平稳残差，而 (M3) 将生成异方差残差，因此经典格兰杰 F 检验对这些时间序列的效果会较差。

因此，所引入的数据集（使用 M1、M2 和 M3 进行模拟）适合用于比较所提出的广义最小二乘格兰杰因果检验与经典格兰杰 F 检验。

示例 16. 在下图 2 中，我们展示了使用 (M1)、(M2) 和 (M3) 生成的数据集的三个示例。

请注意，在图 2 的图表中，我们可以观察到因果关系：变化$\mathbf{x}$ （以蓝色显示）在若干滞后阶数后导致$\mathbf{y}$ 发生变化。

在第二张图中，我们可以看到$\mathbf{y}$（M2）的残差中引入的结构突变。

最后，在图中的最后一张图里，我们可以看到（M3）在$\mathbf{y}$中引入的方差不断增大的残差。

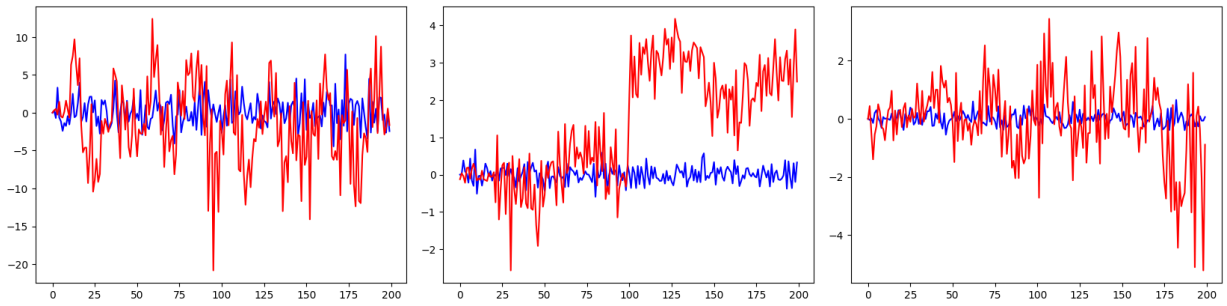


图 2：使用前述方法生成的三对时间序列（对于 $L = 15$ 和随机$\beta_1, \ldots, \beta_L$）。蓝色为使用 $AR(1)$ 过程生成的原始时间序列$\mathbf{x}$。红色为使用三种方法（M1）、（M2）和（M3）分别生成的因果作用 时间序列$\mathbf{y}$ 。

实验结果

We 进行四次实验，每次实验包含 150 对时间序列，每条序列有 600 个点。滞后阶数 use用于模拟因果关系的 d 为 $L = 15$。

前三项实验通过使用方法 (M1)、(M2) 和 (M3) 模拟因果关系，测试经典格兰杰与所提出的广义最小二乘格兰杰的性能。为了进行比较，我们记录每种方法的正确预测百分比。

最后一项实验旨在寻找 假阳性。在这项实验中，我们使用前文所述的方法 (AR1) 生成不存在因果关系的时间序列。

模拟因果关系 关系	模拟 程序	经典格兰杰正确率% 格兰杰 F 检验	正确率% GLS-格兰杰
y **由 x 导致**	(M1) 平稳残差	75.0%	**96.6%**
y **由 x 导致**	(M2) 结构突变残差	57.3%	**85.5%**
y **由 x 导致**	(M3) 异方差残差	32.6%	**42.6%**
y **不由 x 导致**	(AR1)	**94.0%**	**94.7**%

表 1：实验结果表

用于滑动自协方差矩阵估计的窗口长度 τ 为 $\tau = N/5$，其中 N 为观测值的数量。该值通过交叉验证获得，但 τ 取更大的值会产生非常相似的结果。

从表 1 可以看出，在所有模拟的数据集中，所提方法的结果都比格兰杰 F 检验更准确。

3.1.1 真实数据集

加密货币以其波动性和相互依赖性著称。格兰杰因果关系是一种研究加密货币相互依赖性的常用工具。例如， [KCP21] 发现比特币（BTN）与以太坊（ETH）之间存在很强的关系，而 [Yav22] 则指出，主要加密货币之间存在复杂的相互依赖性。

我们将使用 2020年7月至2021年7月期间市值排名前 10 的加密货币（比特币、以太坊、Aave、币安币、卡尔达诺、Chainlink、Cosmos、Crypto.com币、狗狗币、EOS、IOTA、Litecoin、门罗币）的数值组成的数据集。

通过一阶差分去除了这些时间序列的趋势成分。即使经过差分，时间序列的方差仍呈现逐渐变化（见图 3）。这表明，尽管某些情况下序列通过了增广 Dickey-Fuller 平稳性检验，但每次格兰杰 F 检验中进行的普通最小二乘估计仍会不精确或存在问题。这种情况与 (M3) 中的模拟有许多相似之处，因此，我们提出的方法更适用于处理残差的异方差行为。（见第 3.1 节和图 2）。

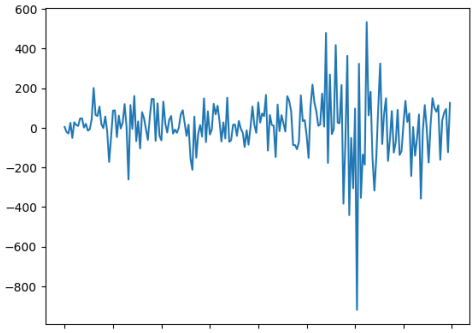


图 3：2020年7月至2021年7月期间以太坊加密货币的差分数据

我们对每一对被认为构成因果图的加密货币应用了格兰杰 F 检验和我们提出的广义最小二乘格兰杰检验。因果图是指以所有时间序列为节点、以因果关系为边的图（如果$\mathbf{x}$ 导致$\mathbf{y}$ ，我们就绘制$\mathbf{x} \to \mathbf{y}$）

我们使用了滞后阶数 $L = 1$，最优滞后阶数通过赤池信息准则（AIC）确定。

结果如图 4 所示。图 4 左侧展示了格兰杰 F 检验因果图，右侧则展示了由此得到的广义最小二乘格兰杰图。正如加密货币的行为所预期的那样，我们得到了一个连接非常紧密的因果网络。有趣的是，所提出的方法能够捕捉到更多因果关系，构建出连接更加紧密的网络。值得注意的是，广义最小二乘格兰杰图显示了许多因果关系，将两种领先的加密货币比特币和以太坊与其他加密货币连接起来。例如，所提出的方法发现了以太坊 $\to$ 卡尔达诺、比特币 $\to$ EOS、比特币 $\to$Chainlink、IOTA $\to$ 比特币之间的关系。

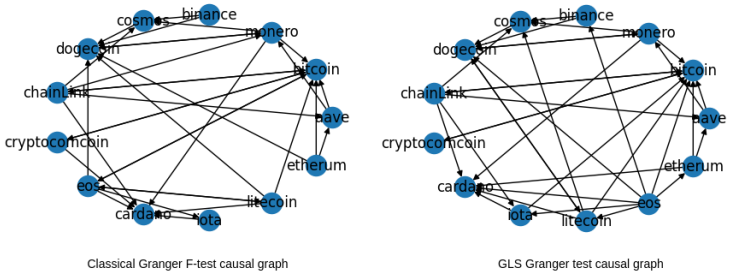


图 4：因果图

4 结论与未来工作

本文提出了对格兰杰 F 检验的一种推广，通过估计残差自协方差矩阵并采用广义最小二乘法，从异方差和结构突变时间序列中揭示时间因果结构。

我们在四个模拟数据集和一个实际应用数据集上验证了该方法的有效性。未来，我们计划研究滑动协方差矩阵在时间序列分类和机器学习领域中的其他用途。

代码可用性

本文的数据集和脚本可在 GitHub 上获取：https://github.com/Granger-Causality- GLS

参考文献

[Gra69] Clive WJ Granger，《运用计量经济模型和交叉谱方法探究因果关系》，Econometrica: 计量经济学会期刊（1969），424–438。[Gra80] ，《因果关系检验：个人观点》，《经济动态与控制杂志》**2**（1980），329–352。[Gre03] William H Greene，《计量经济学分析》，培生印度教育，2003。[KCP21] Myeong Jun Kim、Nguyen Phuc Canh 和 Sung Y Park，《加密货币之间的因果关系：条件分位数方法》，《金融研究快报》**42**（2021），101879。[LS01] Junsoo Lee 和 Mark Strazicich，《存在结构突变时对平稳性原假设的检验》，《应用经济学快报》**8**（2001），第6期，377–382。[Per89] Pierre Perron，《大崩盘、油价冲击与单位根假设》，Econometrica: 计量经济学会期刊（1989），1361–1401。[SSS00] Robert H Shumway、David S Stoffer 和 David S Stoffer，《时间序列分析及其应用》，第3卷，施普林格，2000。

.[Yav22] GUL Yavuz，加密货币市场中的因果关系与协整，《国际经济与行政研究期刊》（2022），第34期，129–142。