arXiv:2301.03089v2 [math.GT] 3 Jun 2024

正交多胞形阿波罗尼奥斯球填充中的链环

JORGE L. RAM´IREZ ALFONS´IN† 与 IV´AN RASSKIN*

Abstract. 本文建立了阿波罗尼奥斯堆积与纽结理论之间的联系。我们提出了在正则晶体学球堆积的相切图中实现链环的新表示。特别地，我们证明，任何代数链环都可以在正交多胞形阿波罗尼奥斯堆积的立方截面中实现。我们利用这些表示改进了一个交替代数链环无限族的球数上界。此外，这些表示使我们能够重新诠释有理缠结与有理数之间的对应关系，并从几何角度揭示丢番图方程 $x^4 + y^4 + z^4 = 2t^2$ 的本原解。

1. Introduction

阿波罗尼奥斯堆积及其推广在科学的许多领域都有应用，包括用于对颗粒系统 [AM95], 流体乳液 [Kwo+20] 进行建模，以及数论领域 [Gra+03]。本文进一步探讨阿波罗尼奥斯堆积的应用，提出在某些阿波罗尼奥斯堆积的三维类比物的相切图中实现链环的新表示，从而将其应用拓展至纽结理论这一新领域。

1.1. 主要结果。 我们首先证明，任意链环都可以在任意正则晶体学球填充的相切图中实现（定理1）。随后，我们将重点放在代数链环上，并证明任意代数链环都可以在正交多胞形阿波罗尼奥斯堆积的立方阿波罗尼奥斯截面的相切图中实现（定理2）。由此构造得到的图示称为正交立方表示，它们有以下应用：

1.1.1. 球数。 链环 L 的项链表示 是一个球填充，其中包含一组不相交圈，其相切图实现了 L。项链表示已被用于研究双曲三维流形的尖点体积 [Gab+21]。 L的球数 记作 ball(L)，定义为构造 L的项链表示所需球面的最少数量。据悉，ball(2_1^2) $= 8$ 且 $9 \leq$ ball(3_1) ≤ 12 [Mae07], ，其中 2_1^2 表示霍普夫链环， 3_1 表示三叶结。目前，霍普夫链环仍是唯一已知球数的链环。在 [RR21b], 中，作者根据 L的交叉数给出了每个非平凡且不可分裂链环球数的线性上界。其交叉数记作 cr(L)，定义为 L所有图示中交叉数的最小值。具体而言，文中证明了 ball(L) ≤ 5cr(L)，并提出了以下问题。

猜想1。 对于任意非平凡且不可分裂的链环 L，球数(L) $\leq 4\mathrm{cr}(L)$。此外，当 L 为交替链环时，等号成立。

猜想1中的不等式源于这样一种观察：在局部构造中，需要四个交叉球才能形成一个交叉。随后，为了连接所有交叉，我们需要添加若干串连接球。我们的目标是确定一种构造项链的方法，使球串的长度尽可能短。 [RR21b]中提出的方法生成的项链表示中，每个交叉对应一个连接球。由此得到上界 ball(L) ≤ 5cr(L)。然而，在某些特定情况下，我们注意到可以修改给定的堆积，从而避免使用所有连接球。本文提出的方法基于正交立方表示，可用于一个交替代数链环的无限族，其中包括有理链环、交替椒盐链环，或更一般地说，交替蒙特西诺斯链环（见图 1）。因此，我们将在定理 3 中证明猜想1中的不等式对这一族成立。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 52C26, 57K10, 11D72.*Key words and phrases.* 阿波罗尼球填充，球数，结，链环，丢番图方程。

† 部分经费由 IEA-CNRS 项目资助

* 部分经费由奥地利科学基金（FWF）项目 F-5503 和 P-34763 及 CNRS 资助。

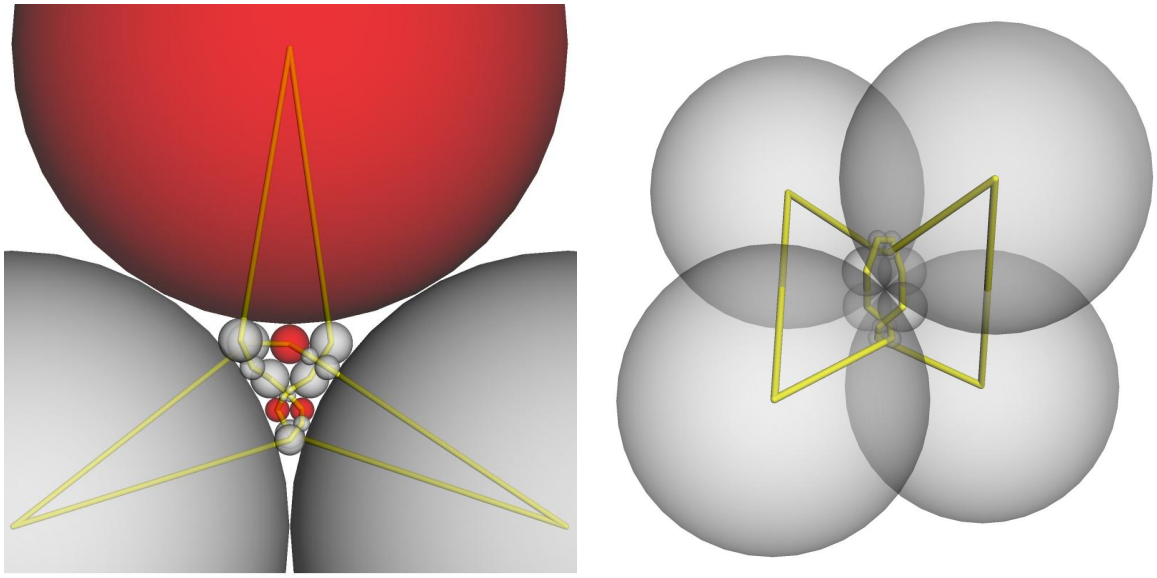


FIGURE 1. （左）使用 RR21b]，中的方法构造的“八字”结的项链表示，包含 20 个球面 4_1，其中有 4 个连接球（以红色标出）；（右）同一结的正交立方表示，包含 16 个球面，不含连接球。

此外，我们能够构造出包含由两个交叉共享的交叉球的正交立方表示（见图 24）。这会使球的总数严格少于 4cr(*L*)。然而，这种现象似乎会破坏交叉之间的交替性。这启发了猜想1中的等式，类似于其他关于相似几何结不变量的猜想，例如绳长 [Dia22]，，其中交替性成为一种几何约束。因此，我们认为，某些著名的非交替族（如环面链环 $T(p,q)$，其中 $p > q > 2$）的球数应严格小于其交叉数的 4 倍。值得注意的是，目前关于球数还没有非平凡的下界。

1.1.2. 有理缠结斜率的新可视化方法。 有理缠结与 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 之间的对应关系众所周知。正交立方表示提供了一种新颖的视角，可用来凸显这种对应关系。具体而言，我们证明，有理缠结的斜率 ——即对应的有理数——可以由该有理缠结的正交立方表示的交点坐标，以及立方圆堆积中特定圆的位置推导出来（见定理4）。

1.1.3. 丢番图方程的本原解。 通过综合上述交点的坐标与球面的反演坐标，我们将发现该丢番图方程的一组无限本原解 $x^4 + y^4 + z^4 = 2t^2$ （推论 5.1）。

1.2. **论文结构**。本文结构如下：

第2节介绍球堆积和有理缠结所需的背景知识 s.

第3节探讨如何在所有正则晶体球堆积的相切图中实现链环。我们还讨论正交多胞形情形下所用球的数量是否达到最优。

第4节介绍并考察有理链环的正交立方表示，并证明代数链环存在此类表示。

最后，第5节深入探讨有理缠结的几何可视化，以及它们与丢番图方程解之间的联系。

1.3. **致谢**。 我们衷心感谢 Alex Kontorovich 就阿波罗尼奥斯堆积展开深入讨论。我们也感谢各位审稿人提出宝贵见解和建设性批评，这些意见大大改善了本文的呈现效果。

2. General background

2.1. 反演坐标。 一个定向超球面，或简称球面，其 $\mathbb{R}^d := \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$是球冠在 $\mathbb{S}^d$ 下经立体投影所得的像。每个球面 S 均由其中心 $c \in \mathbb{R}^d$ 和弯曲 $b \in \mathbb{R}$ （即定向半径的倒数）唯一确定。如果 S 是半空间，则它由其法向量 $\widehat{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$（指向内部）以及其边界与原点之间的有向距离 $\delta \in \mathbb{R}$ 确定。 S 的反演坐标由一个（$d+2$）维实向量表示

$$\mathbf{i}(S) = \begin{cases} \left(bc, \dfrac{\overline{b}-b}{2}, \dfrac{\overline{b}+b}{2}\right)^T & \text{if } b \neq 0, \\ (\widehat{n}, \delta, \delta)^T & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\overline{b} = b\|c\|^2 - \frac{1}{b}$ 是 S的共弯曲度。共弯曲度是 S 经过单位球面反演后的弯曲。点 $P \in \mathbb{R}^d$ 可视为弯曲度无限大的球面。取极限后，我们可以将其反演坐标定义为

$$\mathbf{i}(P) \quad = \quad \begin{cases} \left(P, \dfrac{\|P\|^2-1}{2}, \dfrac{\|P\|^2+1}{2}\right)^T & \text{if } P \neq \infty, \\ (\mathbf{0}_d, 1, 1)^T & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

点的反演坐标是齐次的，也就是说，对每个 $\lambda \neq 0$， $\lambda\mathbf{i}(P)$都是同一点 [Wil81]的有效反演坐标。两个球面或点 S, S' of$\mathbb{R}^d$ 的反演积是实数

$$\langle S, S' \rangle = \mathbf{i}(S)^T \mathbf{Q}_{d+2} \mathbf{i}(S) \tag{3}$$

其中$\mathbf{Q}_{d+2}$是大小为 $d+2$的对角矩阵$\mathsf{diag}(1, \ldots, 1, -1)$。两个球面的反演积编码了它们的相对位置 [RR21b]。此外，对于 $\mathbb{R}^d$中的每个球面 S 或点 P，我们有

$$\langle S, S \rangle = 1 \quad \text{and} \quad \langle P, P \rangle = 0. \tag{4}$$

球体在 $\mathbb{R}^d$中的排列（可能是无限的）若任意两个球的内部彼此不相交，则称为堆积。M¨obius 变换群保持反演积，并在反演坐标上以线性方式作用；相对于$\mathbf{Q}_{d+2}$，它是 $\mathsf{SL}_{d+2}(\mathbb{R})$ 的一个正交子群。特别地，关于球面 S 的反演[1] s 通过左乘矩阵来变换反演坐标

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}_{d+2} - 2\mathbf{i}(S)^T \mathbf{i}(S) \mathbf{Q}_{d+2} \tag{5}$$

其中$\mathbf{I}_{d+2}$ 是大小为 $d+2$的单位矩阵。

2.2. 多胞体球堆积。 子集 $X \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 的极集是子集 $X^* = \{u \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \langle u, v \rangle \leq 1 \text{ 对所有 } v \in X\}$成立。点 $v \in \mathbb{R}^{d+1}$ 位于单位球 $\mathbb{S}^d$之外（即 $\|v\| > 1$）时，其立体球面是通过对球冠$\{-v\}^* \cap \mathbb{S}^d$进行立体投影得到的外部球面 S_v，其 $\mathbb{R}^d$。顶点位于 $\mathbb{S}^d$ 之外的多胞体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 的配置投影，定义为由其顶点 $\mathcal{P}$ 的立体球面构成的排列。

如果一个多胞体的边与单位球面相切，则称其为边切；如果它存在边切实现，则称其为可边切。若一个边切多胞体与单位球面的接触点的重心位于原点，则称其为典范。在维数为 $d \geq 3$ 时，任意可边切 d-多胞体 $\mathcal{P}$ 的边切实现，都在 M¨obius 变换意义下等价于唯一的典范实现 $\mathcal{P}_0$。

边切多胞体的配置投影是一个堆积。反过来，如果存在一个可边切的（$d+1$）维多胞体 $\mathcal{P}$ 和一个莫比乌斯变换 μ，使得 $\mathcal{S}_\mathcal{P} = \mu \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{P}_0}$，其中 $\mathcal{S}_{\mathcal{P}_0}$ 是典范实现的配置投影，那么我们称带有 $d \geq 2$的 $\mathbb{R}^d$ 中的球面堆积 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 为多胞体的。 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 的组合结构由相应的可边切多胞体$\mathcal{P}$编码。 $\mathcal{P}$ 的顶点和边分别与 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$的球和相切关系一一对应。 $\mathcal{P}$的面与 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$的对偶球相对应，它们构成对偶排列 $\mathcal{S}^*_\mathcal{P} := \mu \cdot \mathcal{S}_{\mathcal{P}_0^*}$。

[1]通过 在全文中，我们用大写字母表示球面，用小写字母表示反演。

$\mathcal{S}_\mathcal{P}$的阿波罗尼奥斯排列定义为轨道空间 $\mathscr{P}(\mathcal{S}_\mathcal{P}) := \langle \mathcal{S}_\mathcal{P}^* \rangle \cdot \mathcal{S}_\mathcal{P}$，其中 $\langle \mathcal{S}_\mathcal{P}^* \rangle$表示由关于对偶球反演生成的群。多胞体球面堆积及其附带结构在莫比乌斯变换意义下唯一（更多详情参见 [RR21a] ）。

2.3. 正则晶体球堆积。在二维中，多胞体圆堆积的阿波罗尼奥斯排列也是堆积，但一般而言并非如此 [RR21a]。在更高维数中，作为堆积的阿波罗尼奥斯排列属于 Kontorovich 和 Nakamura 在 [KN19]中引入的晶体学球填充这一族。这些是稠密的无限球堆积 $\tilde{\mathcal{S}}$，由轨道空间 $\mathscr{P} = \langle \tilde{\mathcal{S}} \rangle \cdot \mathcal{S}$得到，其中 $\mathcal{S}$ 是一个称为簇的有限球堆积，$\langle \tilde{\mathcal{S}} \rangle$ 是由穿过一个$\tilde{\mathcal{S}}$有限球面排列 $\mathcal{S}$的反演生成的 Möbius 变换群的几何有限子群，称为余簇。它满足： $\mathcal{S}$ 中的每个球面都与 $\mathcal{S}$中的每个球面不相交、相切或正交。晶体学球填充仅存在于维数$2 \le d \le 18$ [KK23]中。在 [Ras21], 中，第二作者给出了所有正则晶体球堆积的如下枚举 $\mathscr{P}_{\{p_1,\dots,p_d\}} := \langle \mathcal{S}_\mathcal{P}^* \rangle \cdot \mathcal{S}_\mathcal{P}$，其中 $\mathcal{P}$ 是具有 Schl¨afli 符号 $\{p_1, \dots, p_d\}$的正多胞体。

($d = 2$) $\mathscr{P}_{\{3,3\}}$, $\mathscr{P}_{\{3,4\}}$, $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$, $\mathscr{P}_{\{3,5\}}$, $\mathscr{P}_{\{5,3\}}$, (
$d = 3$) $\mathscr{P}_{\{3,3,3\}}$, $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$, $\mathscr{P}_{\{4,3,3\}}$, $\mathscr{P}_{\{3,4,3\}}$, $\mathscr{P}_{\{5,3,3\}}$,
($d = 5$) $\mathscr{P}_{\{3,3,3,3,4\}}$。

在上述十一种正则晶体学堆积中，有两种与本文特别相关：立方阿波罗尼奥斯圆堆积 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$ [Sta 15], 以及正交多胞体阿波罗尼奥斯球堆积 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$ [Nak14]。它们分别对应于立方圆堆积$\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 和正交多胞体球堆积 $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$的阿波罗尼奥斯排列。

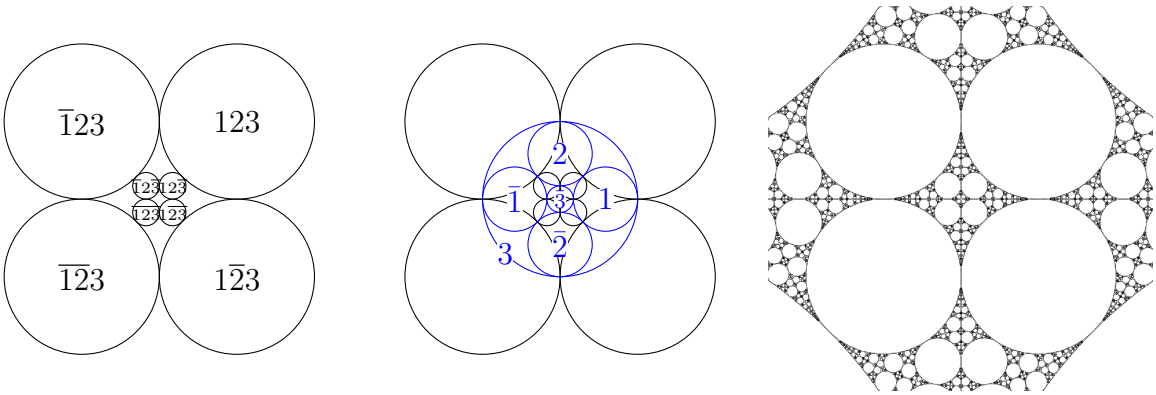


FIGURE 2. （左） $\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 带有对跖标记；（中） $\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 其蓝色对偶 $\mathcal{C}_{\{4,3\}}^*$ ；（右）相应的立方阿波罗尼奥斯堆积 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$。

值得注意的是，对偶排列 $\mathcal{C}_{\{4,3\}}^*$ 是一个棱切八面体的配置投影，因此是一个堆积。然而， $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}^*$ 是一个超立方体的配置投影，它并非棱切，而是脊切 [CP17]。这意味着 $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}^*$ 不是一个堆积，因为其球面的内部相互重叠（见图2）。

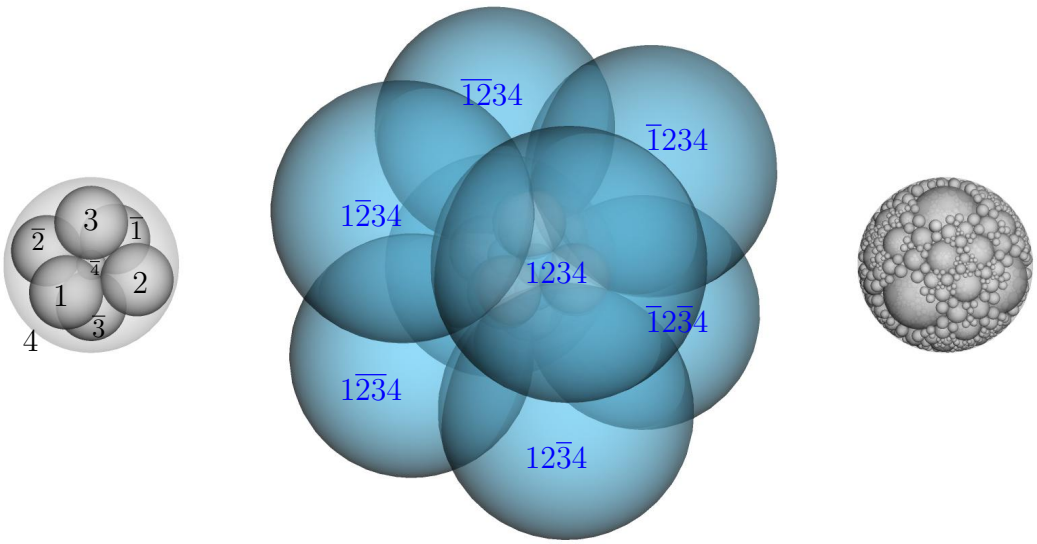
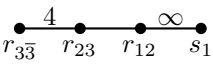


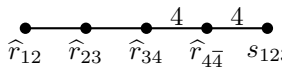
FIGURE 3. （左） $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$ 采用对跖标记；（中） $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$ 及其对偶 $\mathcal{S}^*_{\{3,3,4\}}$以蓝色标出；（右）相应的正交多胞形阿波罗尼奥斯堆积 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$。

如图2和图3所示，我们将使用对跖标记 [MRR22]为堆积 $\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 或 $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$ 及其对偶配置中的圆/球和反演编索引。在这些标记方案中，标签 i 和 $i := -i$ 对应于相应多胞体中的一对对跖顶点。 d-交叉多胞体（对于 $d = 3,\ 4$，分别为八面体和正交多胞体）的顶点将标记为 $\{1,\dots,d,1,\dots,d\}$。 d-立方体的顶点将以与对偶体中相应面的顶点相连的标签依次拼接而成。

多胞体球堆积的对称群 $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_\mathcal{P})$ 是 M¨obius 变换群中关于 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 的稳定子子群。该群与 $\mathcal{P}$ （或其对偶）的对称群同构。 d-交叉多胞体的对称群是有限考克斯特群 B_d ；在对跖标记下，它作为 $\{1,\dots,d,1,\dots,d\}$的带符号置换群作用。我们将把与带符号置换 $-(ij)$ $-(ij)$ 相对应的八面体（分别为正交多胞体）的对称变换记为 r_{ij} （分别为$\widehat{r}_{ij}$）。

不同的群作用可能产生相同的晶体学堆积。例如，正则晶体学球填充 $\mathscr{P}_{\{p_1,\dots,p_d\}} = \langle\mathcal{S}^*_\mathcal{P}\rangle\cdot\mathcal{S}_\mathcal{P}$ 也可以同样表示为轨道空间$\Gamma_{\{p_1,\dots,p_d\}}\cdot\{S_v\}$，其中 $\Gamma_{\{p_1,\dots,p_d\}} := \mathfrak{G}(\mathcal{S}_\mathcal{P}) \rtimes \langle\mathcal{S}^*_\mathcal{P}\rangle$，而 S_v是 $\mathcal{S}_\mathcal{P}$中的任意球面。群 $\Gamma_{\{p_1,\dots,p_d\}}$称为 $\mathscr{P}_{\{p_1,\dots,p_d\}}$ 的 全对称群，也是保持 $\mathscr{P}_{\{p_1,\dots,p_d\}}$不变的 M¨obius 变换群的稳定子子群。它由一组生成 $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_\mathcal{P})$ 的基本对称变换 以及关于一个对偶球面的反演生成。于是，$\mathscr{P}_{\{4,3\}} = \Gamma_{\{4,3\}}\cdot\{C_{123}\}$ 和 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}} = \Gamma_{\{3,3,4\}}\cdot\{S_1\}$，其中 $\Gamma_{\{4,3\}}$ 和 $\Gamma_{\{3,3,4\}}$ 是以下双曲考克斯特群 [Ras21]。

(6) $\Gamma_{\{4,3\}} =$ 

$\Gamma_{\{3,3,4\}} =$ 

2.4. 阿波罗尼奥斯截面。 给定一个球体排列 $\mathscr{P} := \Gamma\cdot\mathcal{S}$（不一定是堆积），阿波罗尼奥斯截面 是一个子集 $\mathscr{S} := \Gamma'\cdot\mathcal{S}' \subset \mathscr{P}$，其中 $\Gamma' < \Gamma$ 且 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$。若存在一个球面 Σ（称为切割球 （或平面）），在 Γ' 的作用下保持不变，并与 $\mathscr{S}$中的所有球相交，则称 $\mathscr{S}$是几何的 。若存在一个关于各自群作用的等变双射，使 $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}$与 $\mathscr{S}' \subset \mathscr{P}'$ 对应，则称两个阿波罗尼奥斯截面代数等价 。

我们用 $\mathscr{S}^{\{p,q\}}_{\{r,s,t\}}$ 表示 $\mathscr{P}_{\{r,s,t\}}$ 的一个几何阿波罗尼奥斯截面，它与五种柏拉图晶体学堆积 $\mathscr{P}_{\{p,q\}}$ 之一代数等价。在图4中，我们展示了 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 这一立方阿波罗尼奥斯截面，它在 Ras21], 的 [中有所描述，可由态射诱导的等变双射 $\phi^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$: $\mathscr{P}_{\{4,3\}} \to \mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 的像得到。

(7) $r_{12} \mapsto \widehat{r}_{12}$ $r_{23} \mapsto \widehat{r}_{23}$ $r_{3\overline{3}} \mapsto \widehat{r}_{1\overline{2}}\widehat{r}_{3\overline{4}}$ $s_1 \mapsto s_{1\overline{2}34}$ $C_{123} \mapsto S_4$

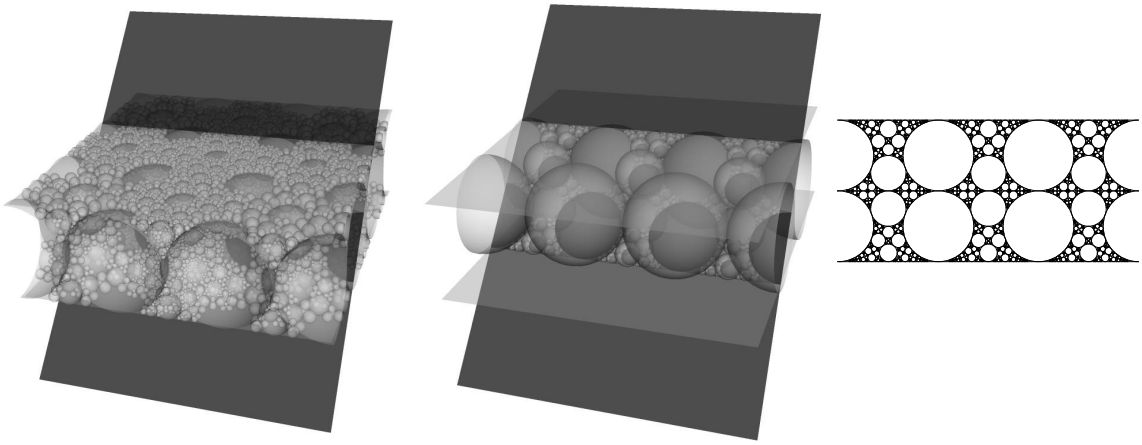


FIGURE 4. （左） $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$ 与 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ （中心）的截平面，以及由 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 与截平面相交得到的三次阿波罗圆堆积 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$。

2.5. 代数链环。缠结是一个二元组 (S,t)，其中 S 是一个与三维球同胚的紧致 $\mathbb{R}^3$，而 t 是由包含在 S中的 $m \geq 2$ 条两两不相交的弧 $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ 组成的集合。这些弧 γ_1 和 γ_2 是开弧，其端点位于 S的边界上，其余弧则是闭弧。若存在 $\mathbb{R}^3$ 的同伦，将 S 映至 S'、将 t 映至 t'，并将(S,t)的端点映至(S',t')的端点，则称两个缠结(S,t)和(S',t')等价。我们用 $t \simeq t'$表示这种等价关系。在等价意义下，可以假设 S 是一个正则三维球，且 t 的端点沿着 S的赤道 C等间距排列。(S,t)的缠结图是将 t 和 C 正则投影到包含 C的平面上，并附上交叉信息所得的图示。在缠结图中，我们用方位点 NE、NW、SE 和 SW 表示端点，如图5所示。除非另有说明，我们将缠结(S,t)简称为 t。下面将介绍构造代数缠结的基本构件。

（$\mathcal{T}_0$）初等缠结见图5。

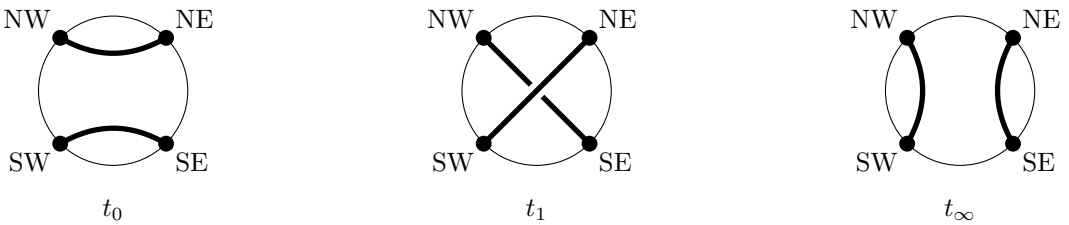


FIGURE 5. 初等缠结。

($\mathcal{T}_1$) t 的镜像是缠结 $-t$，它由 t 关于包含赤道的平面的反射得到。($\mathcal{T}_2$) t 的翻转是缠结 $F(t)$，它由 t 关于与赤道正交且经过西南端点和东北端点的平面的反射得到。

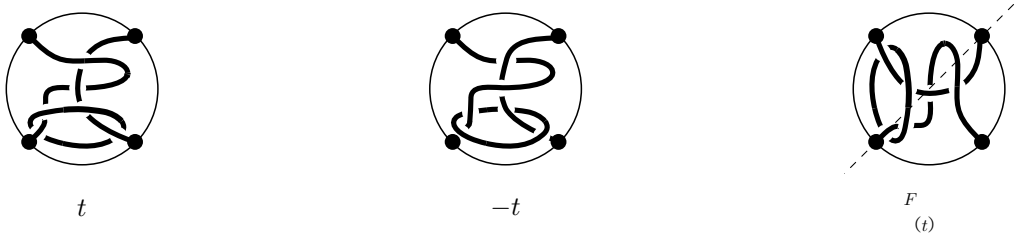


FIGURE 6. 缠结的镜像与翻转。

($\mathcal{T}_3$) 两个缠结 t 和 t' 的加法是缠结 $t+t'$，通过将 t 的东端点与 t'的西端点连接而得到。($\mathcal{T}_4$) 缠结 t 的正（分别为负）半扭转是 $H^+(t)$：$=t_1+t$（分别为 $H^-(t)$：$=-t_1+t$）。

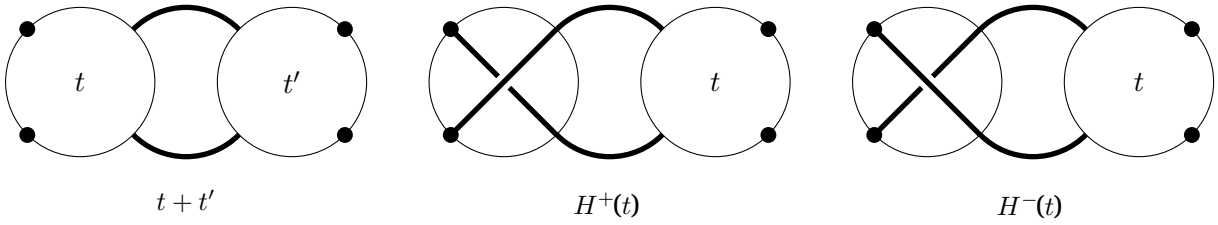


FIGURE 7. 缠结的加法与半扭转。

($\mathcal{T}_5$) 缠结的闭包 (S，t)是通过在 S外部用两条不相交且不相连的路径连接端点而形成的链环。在同伦意义下，有两种可能的闭包：分子闭包 $N(t)$，即分别连接北端点和南端点；以及分母闭包 $D(t)$，即连接西端点和东端点（见图 8）。

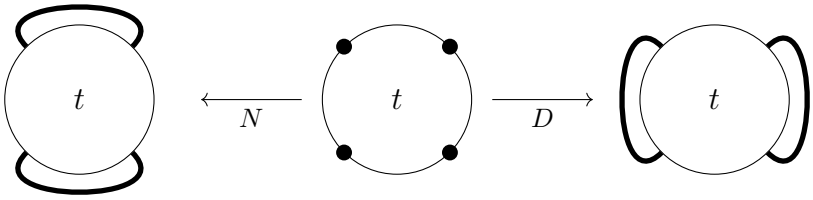


FIGURE 8. 缠结的闭包。

Conway 在其关于枚举和分类结与链环的工作中引入了有理缠结 [Con70]。对于给定的整数序列 a_1，.....，a_n（除 a_1外均非零），我们用$t(a_1, \cdots, a_n)$表示由以下 Conway 算法 [Cro04] 给出的有理缠结 （见图 9）。

$$t(a_1, \cdots, a_n) := H^{a_1} F \cdots H^{a_n} F(t_\infty). \tag{8}$$

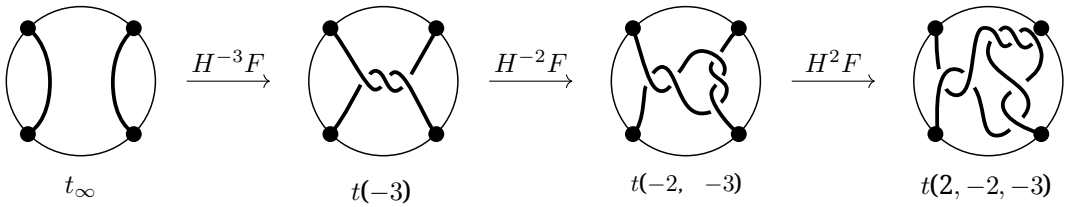


FIGURE 9. 由 Conway 算法得到的有理缠结 $t(2, -2, -3)$。

有理缠结 $t(a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 的斜率 是由连分数展开得到的有理数 p/q

$$[a_1, \ldots, a_n] := a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}} = \frac{p}{q}. \tag{9}$$

“有理缠结 ”一词源自 Conway [Con70], 建立的联系，该联系将 Conway 算法生成的缠结族与有理数联系起来。Conway 定理指出，两个有理缠结等价，当且仅当它们具有相同的斜率。我们用 $t_{p/q}$ 表示斜率为 p/q 的有理缠结在同伦意义下的等价类。有理链环 是有理缠结的闭包。代数缠结 是通过对有理缠结进行加法和翻转得到的 [Cro04]。等价地，由代数缠结闭包得到的链环

称为代数链环 或树状链环 [GT86]。椒盐链环$P(q_1,\dots,q_n) := N(t_{1/q_1}+\cdots+t_{1/q_n})$是代数链环的一个特例，如图 10 所示。

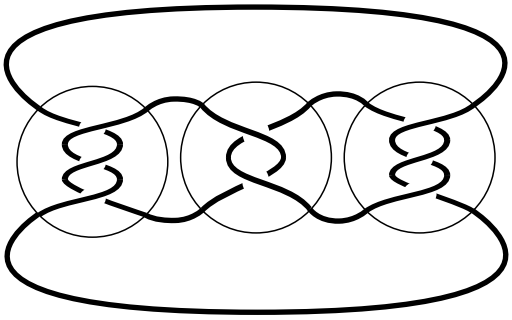


FIGURE 10. 椒盐结 $P(3,-2,3)$，对应于 Alexander-Briggs 记号中的结 8_{19}。

3. NECKLACE REPRESENTATIONS IN THE REGULAR CRYSTALLOGRAPHIC SPHERE PACKINGS

本节将探讨以下问题：给定一个链环 L 和一个三维晶体学球堆积 $\mathscr{P}$，我们能否找到一个包含于 $\mathscr{P}$ 中的 L 的项链表示？在正则情形下，我们对这个问题给出肯定的回答。

首先，我们引入证明所需的一个概念。对于任意正则晶体学球堆积$\mathscr{P}_{\{p,q,r\}}$ 以及对应正则四维多胞体的任意面 f，我们将 $\mathscr{P}_{\{p,q,r\}}$的 f-截面定义为阿波罗尼奥斯截面 $\Gamma^f_{\{p,q,r\}}\cdot\mathcal{S}^f_{\{p,q,r\}}\subset\mathscr{P}_{\{p,q,r\}}$。这里，$\Gamma^f_{\{p,q,r\}}$是 $\Gamma_{\{p,q,r\}}$关于 $\{S_v\}_{v\in f}$的稳定子子群，而 $\mathcal{S}^f_{\{p,q,r\}}:=\mathcal{S}_{\{p,q,r\}}\setminus\{S_v\}_{v\in f}$。

定理1. 在所有三维正则晶体球堆积中，每个链环都存在一种项链表示。

证明。 设 L 是一个链环。我们首先在正交多胞形阿波罗尼奥斯堆积 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$中构造 L 的项链表示；该堆积包含条带正交多面体堆积 $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$，后者由以 S_1 和 S_2的接触点为中心的球面反演得到。我们考察边 (1，2) 的边截面$\Gamma^{12}_{\{3,3,4\}}\cdot\mathcal{S}^{12}_{\{3,3,4\}}\subset\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$。有 $\Gamma^{12}_{\{3,3,4\}}=\langle\widehat{r}_{34},\ \widehat{r}_{44},\ s_{1234}\rangle<\Gamma_{\{3,3,4\}}$，以及 $\mathcal{S}^{12}_{\{3,3,4\}}=\{S_3,S_4,S_1,S_2,S_3,S_4\}\setminus\{S_3,S_4,S_3,S_4\}$ 的轨道在边截面的相切图中构成一个无限方格网，而$\{S_1,S_2\}$ 的轨道则在每个方格的上方和下方增加顶点（见图 11）。

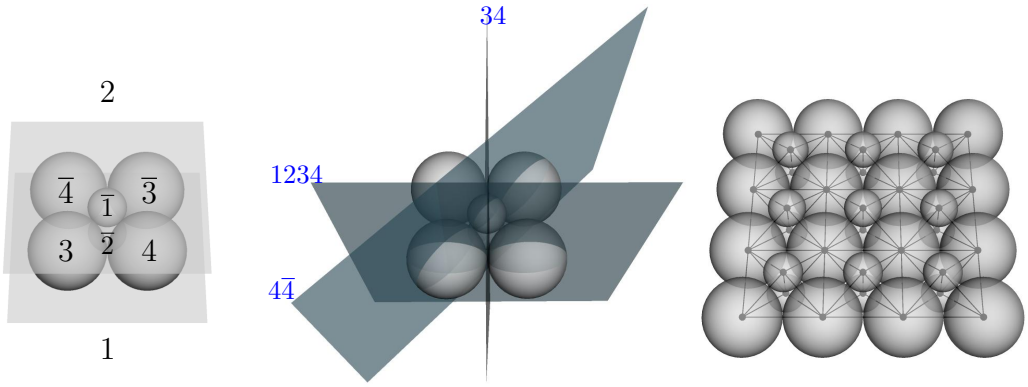


FIGURE 11. （左）条带正交多胞体球堆积 $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$；（中）子集 $\mathcal{S}^{12}_{\{3,3,4\}}$及生成元 $\Gamma^{12}_{\{3,3,4\}}$ 的墙；（右） $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$ 的边截面及其相切图。

根据著名的亚历山大定理 [Ale23], ，对于每个链环 L ，都存在一个辫子 γ ，使其闭包与 L同痕等价。我们总能在规则方格网中画出 γ 的图示，其中交叉位于方格对角线的交点处，其余的弧沿着网格的边延伸。这个辫子网格图 在边截面的相切图中诱导出一条多边形闭路径，从而为我们提供了 L 在 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$中的项链表示，如图12所示。

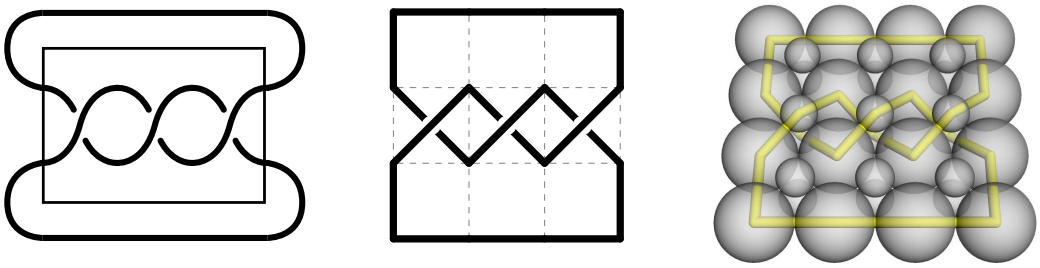


FIGURE 12. （左）三叶结的图示，由辫子的闭包得到；（中）同一闭合辫子的辫子网格图；（右）三叶结在 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$的边截面中的相应项链表示。

我们采用类似的策略，为包含在 $\mathscr{P}_{\{4,3,3\}}$、 $\mathscr{P}_{\{3,4,3\}}$ 和 $\mathscr{P}_{\{5,3,3\}}$的边截面中的任意链环构造项链表示。这三个截面的相切图包含的是三角网格，而不是方格网。在这个三角网格中，两个相切三角形组成的菱形可以发挥与辫子网格图中的方格相同的作用。此外，对于这三种情况中的每一种以及每种交叉类型，我们都可以找到两条不相交的球链，连接菱形的相对顶点，从而构造出交叉。最后，对于堆积 $\mathscr{P}_{\{3,3,3\}}$，所采用的策略与前面三种情况几乎相同，但我们必须使用顶点截面而不是边截面，来构造交叉所需的球链（见图13）。□

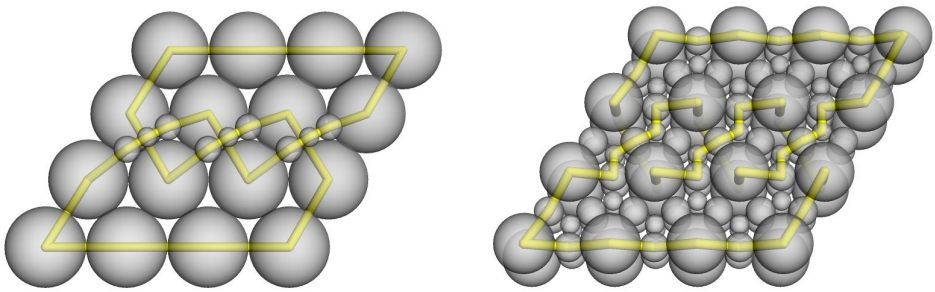


FIGURE 13. 三叶结的两种项链表示：一种包含在 $\mathscr{P}_{\{3,3,3\}}$ 的顶点截面中（左），另一种包含在 $\mathscr{P}_{\{4,3,3\}}$ 的边截面中（右）。

我们注意到，无需借助亚历山大定理也能证明定理1，只需使用网格图 （这是一种与证明中所述辫子网格图略有不同的概念，其中交叉也投影到网格上）。事实上，Cromwell 在 [Cro95]中证明，每个链环都有网格图。然而，这些图示所诱导的项链通常在球的数量方面并非最优。原因在于，距离较远的交叉之间的连接球链会增加球的总数，使其超过 [RR21b]给出的上界。对于股数超过3股的辫子，其辫子网格图闭包所诱导的项链也会出现类似现象。不过，对于2-辫子链环这一特殊情形，我们可以通过修改 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$边截面中包含的项链表示来减少球的数量。

推论3.1. 对于任意 2-辫子链环 L，球$(L) \leq 4cr(L)$。

证明。 由具有 n 个交叉的交错二辫的辫子网格图在 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$ 的边截面中诱导出的项链表示由 $4n+2$ 个球组成。随后，我们可以通过将最后 4 个球替换为 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$ 的两个半空间来构造闭包（见图 14 ）。由于该链环是交替的， $n = \mathrm{cr}(L)$。□

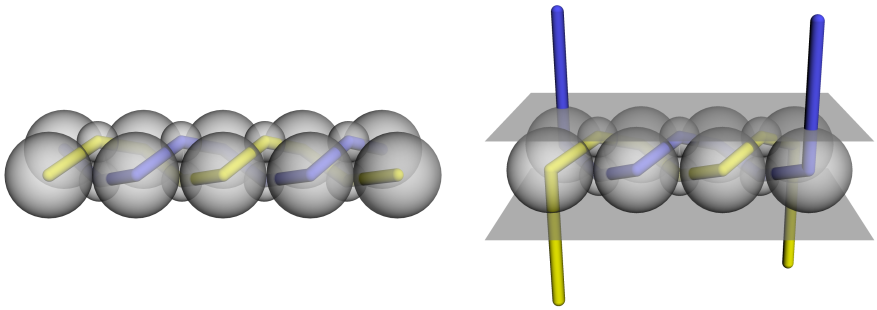


FIGURE 14. （左）在 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$的辫格截面中，四个交叉的交替2辫链的项链表示；（右）利用闭包对应的半空间，在 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$中得到的含16个球的诱导项链。

在正则晶体学球堆积所包含的项链表示中，正交多胞形情形下生成的表示在球的数量方面似乎更为理想。不过，我们认为其他情形也可能有其他用途，例如构造其图中包含给定链环的 4维多胞体 [Epp 14] ，或构造带有 hor球的项链表示，如 [Gab+21]。

4. THE ORTHOCUBIC REPRESENTATIONS OF ALGEBRAIC LINKS

在定理1中，我们证明了每个链环都包含在三维正则晶体球堆积的相切图中，其中包括正交多胞形阿波罗尼奥斯堆积 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$。本节旨在通过证明代数链环族包含于立方阿波罗尼奥斯截面 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}} \subset \mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$中，进一步细化这一结果。证明所需的构造使我们能够为一个无限族的交替代数链环建立猜想1中的不等式。

下面，我们将通过将 $\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 定义为图2所示的立方圆堆积，并将 $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$ 定义为图15所描述的 z-交替正交多胞体球堆积，来建立多胞体堆积的实现。值得注意的是，在后一个堆积中，若球 S_i 的中心位于平面 $\{z=0\}$ 上方，则该球具有正标签；若其中心位于下方，则具有负标签。立方 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$ 和正交多胞体 $\mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$ 晶体学堆积将分别由 $\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 和 $\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$ 张成。

球面	Bend	中心	反演坐标
S_1	$1+1/\sqrt{2}$	$(-1+\sqrt{2})\,(\ 1\ -1\ \ 1)$	$1/\sqrt{2}\,(\ 1\ -1\ 1\ -1\ \sqrt{2})$
S_2	$1+1/\sqrt{2}$	$(-1+\sqrt{2})\,(-1\ \ 1\ \ 1)$	$1/\sqrt{2}(-1\ \ 1\ \ 1\ -1\ \sqrt{2})$
S_3	$1-1/\sqrt{2}$	$(\ 1+\sqrt{2})\,(-1\ -1\ \ 1)$	$1/\sqrt{2}(-1\ -1\ \ 1\ \ 1\ \sqrt{2})$
S_4	$1-1/\sqrt{2}$	$(\ 1+\sqrt{2})\,(\ 1\ \ 1\ \ 1)$	$1/\sqrt{2}(\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \sqrt{2})$
$S_{\overline{1}}$	$1-1/\sqrt{2}$	$(\ 1+\sqrt{2})\,(-1\ \ 1\ -1)$	$1/\sqrt{2}(-1\ \ 1\ -1\ \ 1\ \sqrt{2})$
$S_{\overline{2}}$	$1-1/\sqrt{2}$	$(\ 1+\sqrt{2})\,(\ 1\ -1\ -1)$	$1/\sqrt{2}\,(\ 1\ -1\ -1\ \ 1\ \sqrt{2})$
$S_{\overline{3}}$	$1+1/\sqrt{2}$	$(-1+\sqrt{2})\,(\ 1\ \ 1\ -1)$	$1/\sqrt{2}(\ 1\ \ 1\ -1\ -1\ \sqrt{2})$
$S_{\overline{4}}$	$1+1/\sqrt{2}$	$(-1+\sqrt{2})\,(-1\ -1\ -1)$	$1/\sqrt{2}(-1\ -1\ -1\ -1\ \sqrt{2})$

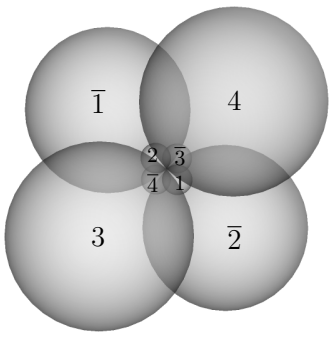


FIGURE 15. z-交替正交多胞体球堆积。

本节的几何框架是立方阿波罗尼奥斯截面 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}} \subset \mathscr{P}_{\{3,3,4\}}$，其截平面记为 Σ ，即平面 $\{z=0\}$。注意，根据上文的固定记号以及式 (7) 中描述的同构 $\phi^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$，我们有 $\mathscr{P}_{\{4,3\}} = \mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}} \cap \Sigma$。 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 中的球相对于 Σ 的位置，为 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$ 带来了双色着色：若一个圆对应的球的中心位于 Σ上方，则将该圆涂黑；否则涂白（见图16）。这种着色称为z双色着色，我们还将把它扩展到 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$的相切图的顶点上。

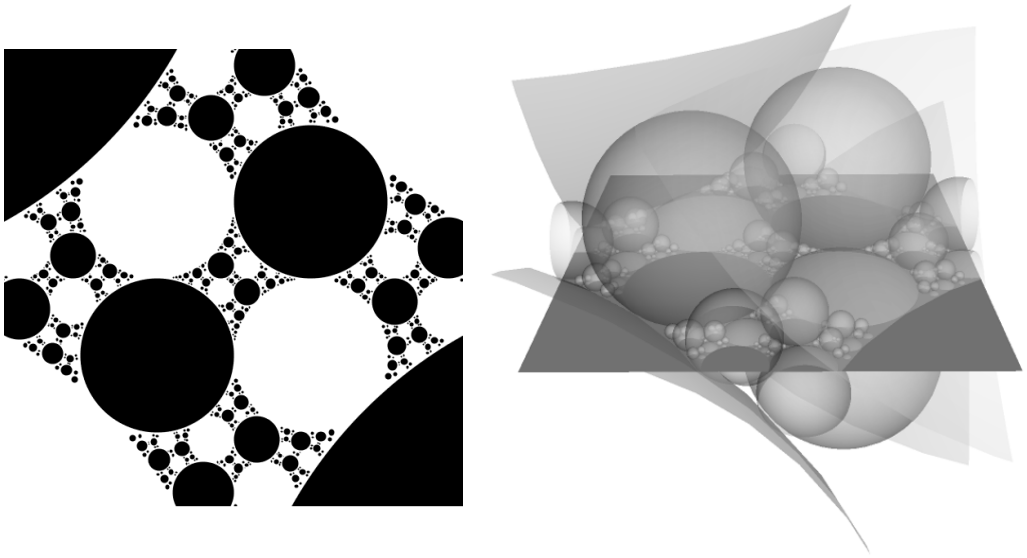


FIGURE 16. （左） $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$ 带有 z着色，（右） $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 带有其截平面 Σ。

4.1. 正交立方平移。 我们将以下抛物元素定义为立方平移：

$$\mu_+ = s_1 r_{13}, \qquad \mu_- = s_{\overline{1}} r_{\overline{1}3} \qquad \text{and} \qquad \nu := s_3 r_{3\overline{3}}, \tag{10}$$

其中 r_{13}， $r_{\overline{1}3}$， $r_{3\overline{3}}$， $s_{\overline{1}}$， s_1， s_3 是图17中描绘的 $\Gamma_{\{4,3\}}$ 的对称。在图18中，我们展示了立方平移对 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$ 的相切图及其 z-着色的作用。注意， μ_+ 和μ_- 保留 z-着色，而 ν 则将其反转。我们将正交立方平移 定义为 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 的对称 $\widehat{\mu_+}$、$\widehat{\mu_-}$ 和 $\widehat{\nu}$，它们是通过用（7）诱导的态射对立方平移进行共轭而得到的。

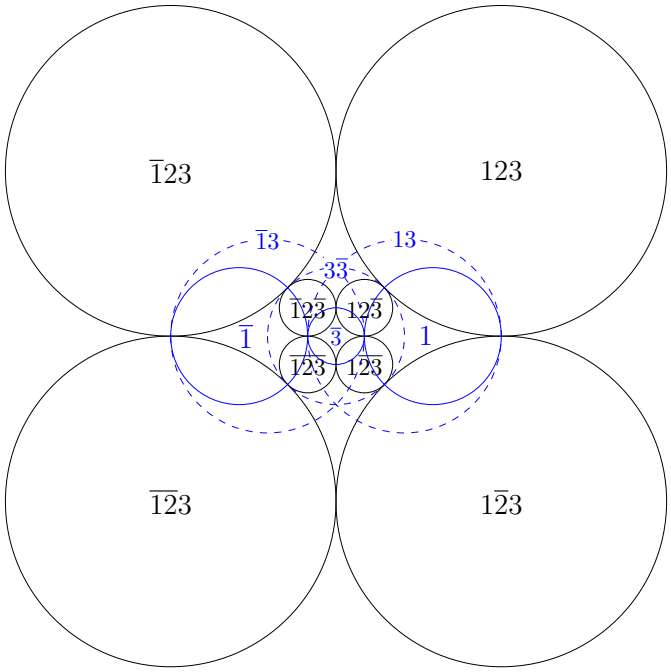


FIGURE 17. $\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 带有立方平移生成元的墙。

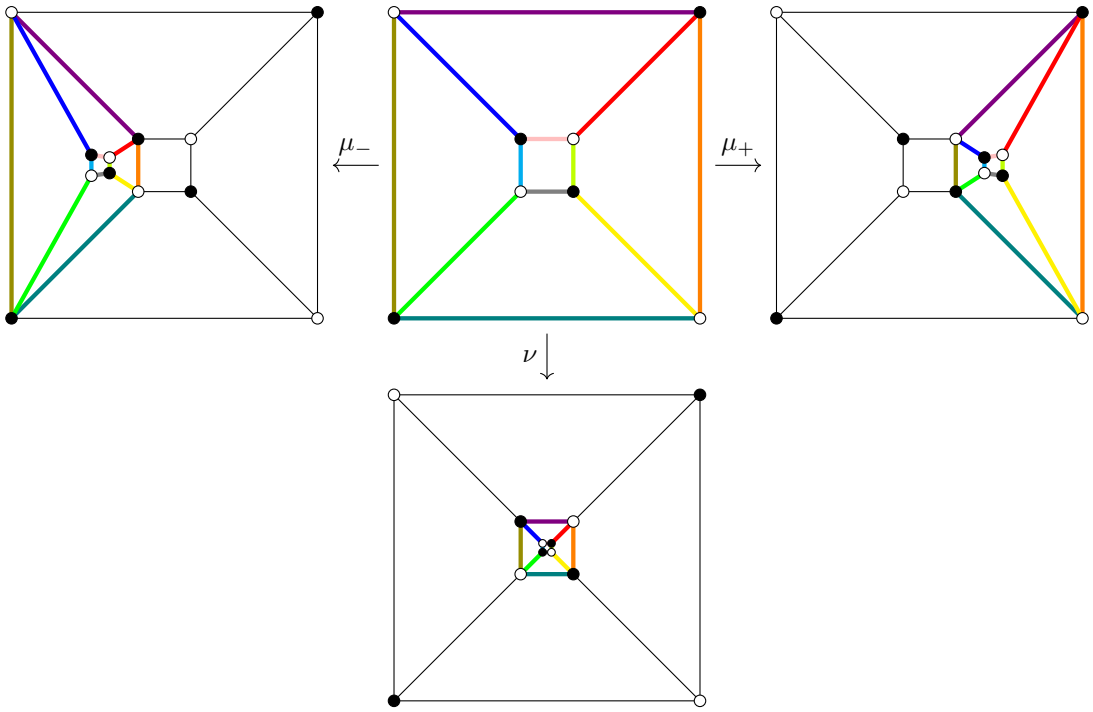


FIGURE 18. 立方平移对 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$ 的相切图的作用。

4.2. 正交立方表示。 我们将正交立方路径 γ 定义为 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$的相切图中的一条多边形曲线。$\gamma$ 的立方图示 是其在 Σ上的正交投影。 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 的相切图在 Σ上的正交投影，是 $\mathscr{P}_{\{4,3\}}$ 的相切图再加上每个正方形面的对角边；这些对角边连接在 z-着色下颜色相同的两个顶点。注意，每条对角边都对应于 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 的一个切点，该切点位于 Σ之上或之下，而每条非对角边都对应于 Σ上的一个切点。任何立方图示中的交叉，都是由同一正方形面上的两条对角边相交而形成的。根据 z-着色所提供的信息，可以从对角边顶点的颜色推断上下交叉信息（黑色=在上／白色=在下）。

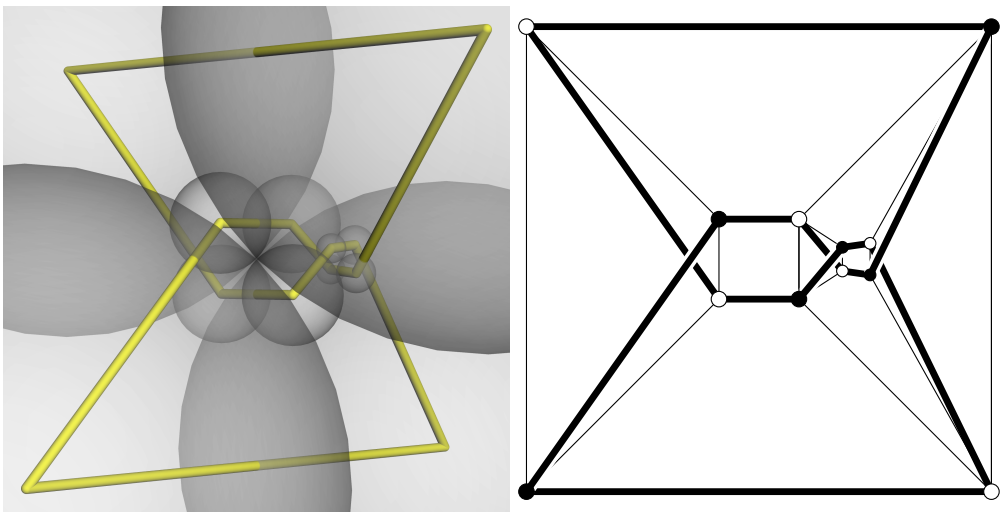


FIGURE 19. （左）三叶结的正交立方表示及其对应的立方图（右）。 g

我们将链环 L 的正交立方表示 定义为一组两两不相交的闭合正交立方路径，其在同伦意义下等价于 L。每个正交立方表示都会导出 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 中的项链表示。

在图19中，我们展示了三叶结的正交立方表示及其对应的立方图。令 T 为顶点是球 $\{S_1, S_2, S_3, S_4\} \subset \mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$ 的中心的四面体。我们将正交立方缠结 定义为缠结 (T, τ)，其中 t 是由 $m \geq 2$ 条两两不相交的正交立方路径组成的集合 $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$，这些路径包含于 T 中，并满足：γ_1 和 γ_2 的端点位于 T 的角上，其余正交立方路径均为闭合路径。至此，我们已具备证明本节主要结果所需的全部框架。

定理2. 每个代数链环都存在一种包含于 $\mathscr{S}^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$ 中的项链表示。

证明. 我们先构造第2节定义的代数缠结的构件 $(\mathcal{T}_0) - (\mathcal{T}_5)$ 的正交立方对应物。

$(\mathcal{O}_0)$ 正交立方初等缠结如图20所示。

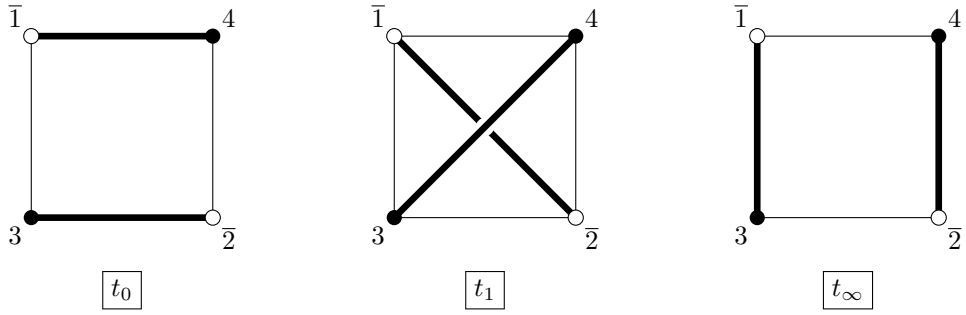


FIGURE 20. 正交立方初等缠结。

$(\mathcal{O}_1)$ 正交立方翻转 $F_{\mathcal{O}}\, t := \hat{r}_{12}\, t$，其中 $\hat{r}_{12} \in \Gamma_{\{3,3,4\}}$ 是平面 $\{y = x\}$上的反射。$(\mathcal{O}_2)$ 正交立方镜像 $-t := \hat{\nu}\, t$ 加上边 $\{(1,2), (\bar{1},\bar{2}), (3,\bar{4}), (\bar{3},4)\}$。

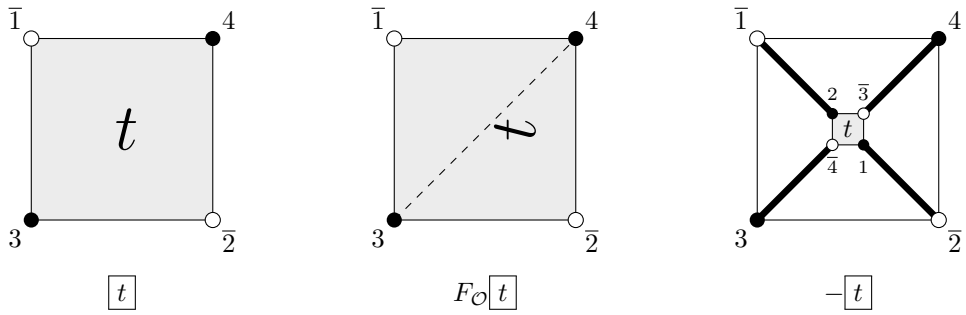


FIGURE 21. 正交立方翻转与正交立方镜像。

$(\mathcal{O}_3)$ 正交立方加法 $t' + t := \hat{\mu}_+\, t' \cup \hat{\mu}_+\, t$ 加上边 $\{(1, \bar{4}), (2, \bar{3})\}$. $(\mathcal{O}_4)$ 正交立方半扭转 $H^+_{\mathcal{O}}\, t := t_1 + t$ 和 $H^-_{\mathcal{O}}\, t := -t_1 + t$.

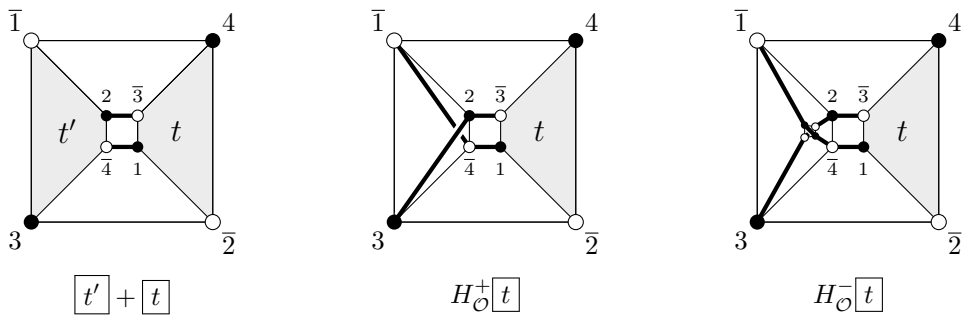


FIGURE 22. 正交立方加法与正交立方半扭转。

($\mathcal{O}_5$) 定理　正交立方缠结闭包如图所示　　23。

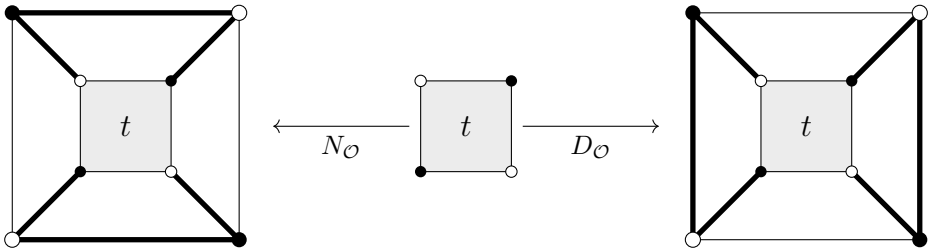


FIGURE 23. 正交立方纽结闭合。

对于每个 $i = 0, \ldots, 5$，正交立方构件 ($\mathcal{O}_i$) 与代数缠结的构件 ($\mathcal{T}_i$) 同痕等价。因此，我们可以仿照 Conway 算法，定义一个与 $t[a_1, \cdots, a_n]$ 同痕等价的正交立方有理缠结

$$t_{\mathcal{O}}[a_1, \cdots, a_n] := H_{\mathcal{O}}^{a_1} F_{\mathcal{O}} \cdots H_{\mathcal{O}}^{a_n} F_{\mathcal{O}} \boxed{t_\infty} \tag{11}$$

通过对正交立方有理缠结进行正交立方加法、翻转和闭包，我们可以得到每个代数链环的正交立方表示。□

4.3. 球数上界的改进。正交立方Conway算法可以稍作调整，以达到定理 3 的上界。对于每个 $a_1 \geq 0$, $a_2, \ldots, a_n > 0$，我们定义约化的正交立方Conway算法 $\widetilde{t}_{\mathcal{O}}[a_1, \cdots, a_n]$

$$\widetilde{t}_{\mathcal{O}}[a_1, \cdots, a_n] := H_{\mathcal{O}}^{a_1} F_{\mathcal{O}} \cdots H_{\mathcal{O}}^{a_n - 1} \boxed{t_1} \tag{12}$$

~显然，对于每个 $a_1 \geq 0, a_2, \ldots, a_n > 0$，都有 $t_{\mathcal{O}}[a_1, \cdots, a_n] \simeq t_{\mathcal{O}}[a_1, \cdots, a_n]$。

定理 3. 设 L 是由代数缠结 $t_{p_1/q_1} + \cdots + t_{p_m/q_m}$的闭包得到的代数链环，其中所有 p_i/q_i 的符号都相同。那么，球(L) $\leq$ 4交叉(L)。

证明。设 L是由闭包 $N(t)$ 构成的代数链环，其中 $t = t_{p_1/q_1} + \cdots + t_{p_m/q_m}$.所有 p_i/q_i 的符号都相同这一条件意味着，我们得到由 t的闭包所诱导的 L 的交替图。因此， L 的交叉数等于各个 t_{p_i/q_i}的交叉数之和。不失一般性，我们可以认为所有 p_i/q_i 都是正的。

~对于每个 p_i/q_i，其正连分数为 $[a_1, \cdots, a_n]$，令 $t_{p_i/q_i} := t_{\mathcal{O}}[a_1, \cdots, a_n]$。由于 $F_{\mathcal{O}}$不会改变相应项链中球的数量，而 $H_{\mathcal{O}}^{+}$ 会使其增加 4，因此 t_{p_i/q_i} 中的球的数量等于 4($a_1 + \ldots + a_n$) $= 4\text{cr}(t_{p_i/q_i})$。

现在，令 t 为由正交立方加法 $t_{p_1/q_1} + \cdots + t_{p_m/q_m}$ 构成的正交立方缠结。根据正交立方运算与缠结运算之间的等价关系，我们有 $t \simeq t_{\diamond}$。由于计算球数量的函数对于正交立方加法具有可加性，因此 t 中的球的数量等于 $4\text{cr}(t_{p_1/q_1}) + \cdots + 4\text{cr}(t_{p_m/q_m}) = 4\text{cr}(L)$。

最后，由于外部边 (1,4) 和 (2, 3) 不属于应用正交立方加法后得到的任何正交立方缠结，我们可以利用这些边闭合 t，从而得到一个由 4cr(L) 个球面构成的 L 项链表示。□

4.4. 非交替链环不具紧性。 定理 3 中考察的代数链环族包含所有有理链环以及其他著名链环族，例如具有正系数的蒙特西诺斯链环。这些链环由 $t_{p_1/q_1} + \cdots + t_{p_n/q_n} + t_r$ 与 $p_i/q_i > 0$ 和 $r \geq 0$ 的闭包得到。如果 $r = 0$ 且每个 $p_i = 1$，那么我们得到椒盐链环 $P(q_1, \ldots, q_n)$。

在非交替情形下，可以构造正交立方代数缠结，使其球的总数严格小于交叉数的 4 倍。我们发现，满足这一性质的首个非平凡例子是椒盐结 $P(3, -2, 3)$，它对应于亚历山大–布里格斯–罗尔夫森记号中的结 8_{19}。这个结不是交替结 [Cro04]，并且它有一个包含 28 个球的正交立方项链表示（$= \frac{7}{2}$ cr(8_{19})，见图 24）。然而，要

在非交替情形下建立与交叉数的关系则更为棘手，因为一般而言，交叉数并不等于其有理因子的交叉数之和。

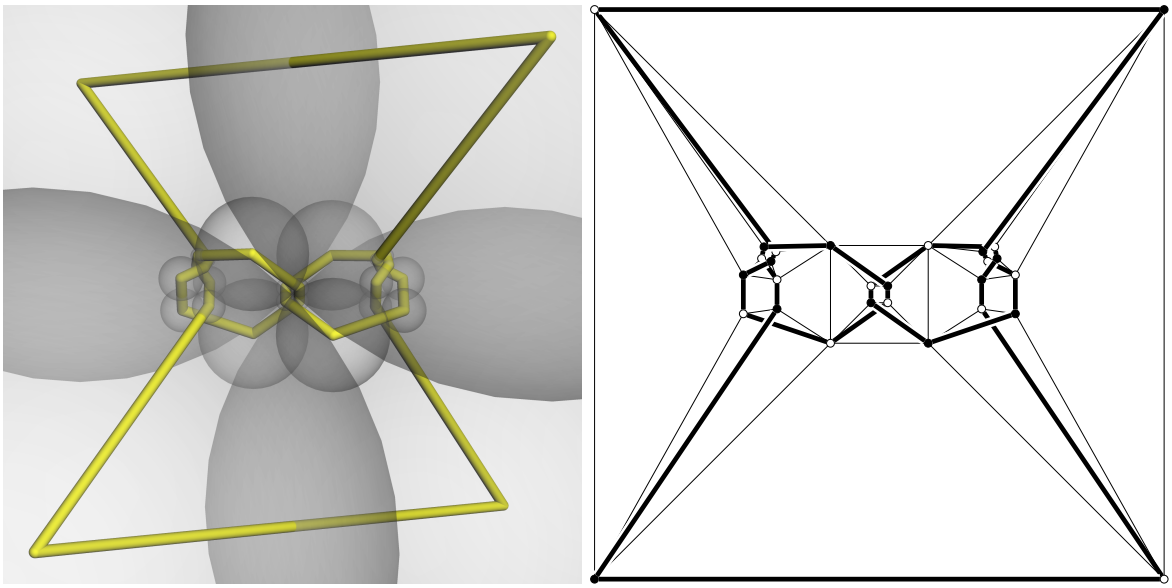


FIGURE 24. 一个包含28个球的结的正交立方表示（左）及其立方图（右）。

5. A NEW VISUALIZATION OF THE SLOPE OF RATIONAL TANGLES

有理缠结 $t_{p/q}$ 的斜率 p/q 有几种几何解释。例如，它可以视为实心环面的子午线斜率；该实心环面是有理缠结 [Cro04]的分支二重覆盖。在最后这一节中，我们将介绍有理缠结与有理数之间对应关系的另一种几何解释。具体来说，我们将缠结的斜率与经过原点和正交立方 Conway 构造中第一个切点的直线斜率联系起来。令人惊讶的是，这种方法有助于找到丢番图方程 $x^4+y^4+z^4=2t^2$的无穷多个本原解。

设 p/q是一个正分数，其正连分数展开为 $[a_1,\cdots,a_n]$。我们将有理缠结 $t_{p/q}$ 的正交立方点 $O_{p/q}$ 定义为立方图中与正交立方缠结的第一条边 对应的两个圆的切点，其中立方图为 $t_{\mathcal{O}}(a_1,\cdots,a_n)$。所谓第一条边，是指连接右上角圆 $C_{123}\in\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 的那条边（见图25）。需要指出的是，这个圆对应于球 $S_4\in\mathcal{S}_{\{3,3,4\}}$，该球在正交立方 Conway 算法下保持不变。另一方面，第一条边是边(2,4)的像的投影，而这是一条非对角边。由于正交立方 Conway 算法保持 z-着色，第一条边始终是非对角边，因此每个正分数对应的正交立方点都有明确定义。通过对整个构形施以关于平面 $\{x=0\}$ 的反射，我们可以自然地将正交立方点的概念扩展到负分数缠结。

定理4。对于每个 $p/q\in\mathbb{Q}^{\pm}\cup\{\infty\}$，$O_{p/q}$ 都是直线$y=\pm(p/q)^{-2}x$ 与圆 $C_{\pm123}\in\mathcal{C}_{\{4,3\}}$的交点中离原点最近的那个。

证明。只需证明正数情形。设 $p\geq0$ 和 $q\geq1$ 是两个互素整数。我们断言：

$$\mathbf{i}(O_{p/q})=\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\\ (p-q)^2\\ \sqrt{2}(p^2-pq+q^2)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

这将意味着 $O_{p/q}=(\sqrt{2}(p^2-pq+q^2)-(p-q)^2)^{-1}(p^2,\ q^2)$。可以验证，这是直线 $\{y=(p/q)^{-2}x\}$ 与圆心为 $(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$、半径为 $(1+\sqrt{2})$ 的圆的交点中距离原点最近的一个，该圆是圆 $C_{123}\in\mathcal{C}_{\{4,3\}}$ 的边界。

下面证明等式 (13)。 p 和 q 的正性意味着，对于每个 $1 < i \le n$，我们都可以找到一个正的连分数展开 $[a_1, \cdots, a_n] = p/q$，其中 $a_1 \ge 0$ 且 $a_i \ge 1$。令$t_{p/q}$为正交立方缠结 $t_{\mathcal{O}}[a_1, \ldots, a_n]$。令 $O_{p/q}$和 O_∞分别为 $t_{p/q}$和 t_∞的正交立方点。现在，结合正交立方运算 $H_{\mathcal{O}}$ 和 $F_{\mathcal{O}}$的定义、由等变双射 $\phi^{\{4,3\}}_{\{3,3,4\}}$诱导的群态射 $\Gamma_{\{4,3\}} \longrightarrow \Gamma_{\{3,3,4\}}$，以及式 (11) 中给出的正交立方有理缠结的定义，我们得到

$$\begin{aligned} t_{p/q} = H_{\mathcal{O}}^{a_1} F_{\mathcal{O}} \cdots H_{\mathcal{O}}^{a_n} F_{\mathcal{O}} t_\infty \Rightarrow O_{p/q} &= \mu_1^{a_1} r_{12} \cdots \mu_x^{a_n} r_{12}(O_\infty) \\ &= (s_1 r_{13})^{a_1} r_{12} \cdots (s_1 r_{13})^{a_n} r_{12}(O_\infty) \end{aligned}$$

其中， s_1、 r_{13} 和 r_{12} 是第 4.1 节所述的 $\Gamma_{\{4,3\}}$ 的对称。表示这些对称的 $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ 中的矩阵$\mathbf{S}_1$, $\mathbf{R}_{12}$, 和 $\mathbf{R}_{13}$，以及 O_∞ 的反演坐标，可利用方程 (2)（其中$\lambda = \sqrt{2} - 1$）和 (5) 计算得出:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}(O_\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

令$\mathbf{M}(k) := (\mathbf{S}_1 \mathbf{R}_{13})^k \mathbf{R}_{12}$。对 k应用归纳法可得:

$$\mathbf{M}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1-k^2 & -k(k+2) & \sqrt{2}k(k+1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k(k-2) & 1-k^2 & \sqrt{2}k(k-1) \\ 0 & -\sqrt{2}k(k-1) & -\sqrt{2}k(k+1) & 2k^2+1 \end{pmatrix}$$

我们通过归 纳法证明等式 (13)，归纳变量为 $p/$的连分数展开中系数 n 的个数。 q.
对于 $n = 1$（也就是说， $p = a_1$ 和 $q = 1$），我们有

$$\mathbf{i}(O_{a_1}) = \mathbf{M}(a_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ 1 \\ (a_1-1)^2 \\ \sqrt{2}(a_1^2 - a_1 + 1) \end{pmatrix}.$$

我们假设等式 (13) 对 $n - 1 \ge 1$ 成立。令 $r/s = a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}$。于是，

$$\mathbf{i}(O_{p/q}) = \mathbf{M}(a_1) \cdots \mathbf{M}(a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}(a_1) \begin{pmatrix} r^2 \\ s^2 \\ (r-s)^2 \\ \sqrt{2}(r^2 - rs + s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ra_1+s)^2 \\ r^2 \\ (ra_1+s-r)^2 \\ \sqrt{2}((ra_1+s)^2 - r(ra_1+s) + r^2) \end{pmatrix}$$

最后我们注意到 $\cfrac{ra_1+s}{r} = a_1 + \cfrac{1}{r/s} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}} = p/q$，因此等式 (13) 成立。 □

推论 5.1。 丢番图方程 $x^4 + y^4 + z^4 = 2t^2$ 有无穷多个本原解。

证明。 将方程（3）、（4）与式（13）给出的每个有理缠结 $t_{p/q}$ 的正交立方点的反演坐标结合起来，我们得到以下参数化，从而生成无限多个本原解

$$(14) \qquad x = p, \qquad y = q, \qquad z = p - q, \qquad t = p^2 - pq + q^2.$$

□

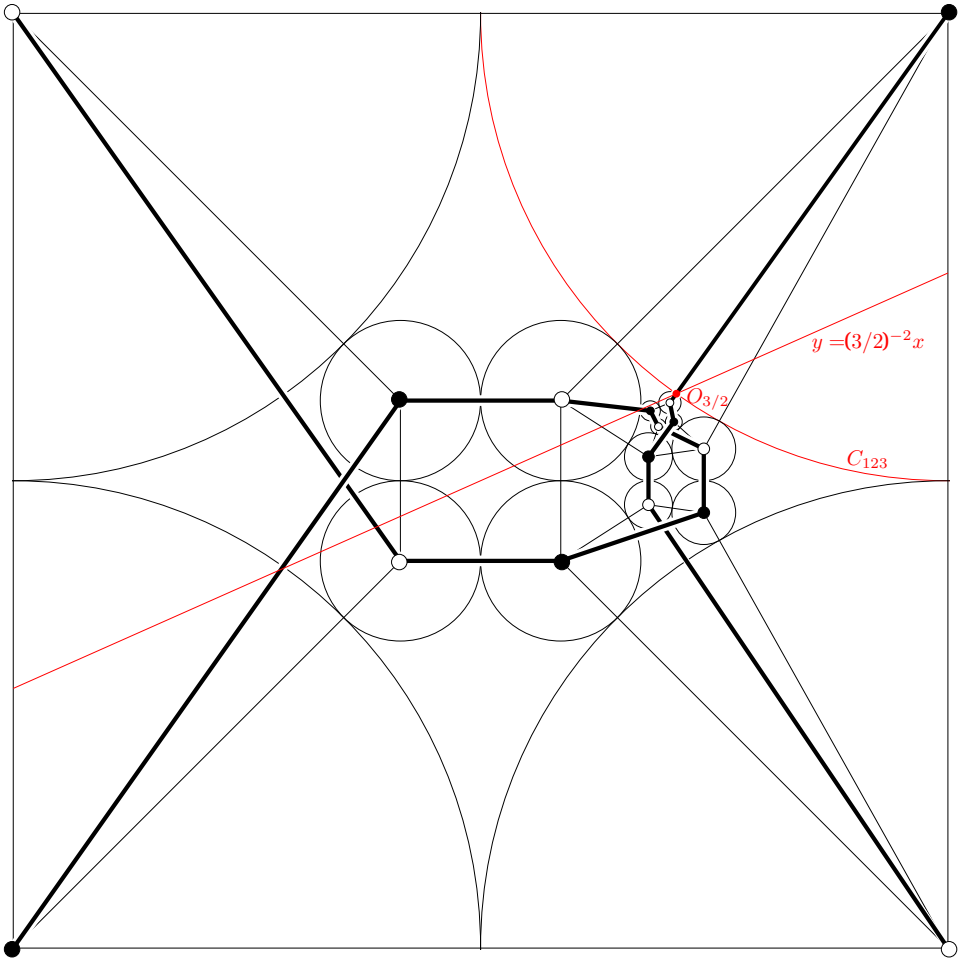


FIGURE 25. 对应于本原解 $3^4 + 2^4 + 1^4 = 2 \times 7^2$ 的有理缠结 $t_{3/2}$ 的正交立方点（红色）。

上述本原解的参数化也可以通过其他经典方法得到。不过，我们认为，将其几何地解释为正交立方缠结构造中的切点（见图25）很有意思。这种联系源于这样一个事实：生成立方晶体堆积的全对称群 $\Gamma_{\{4,3\}}$，是二次型 $x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2$ [的正交群的一个整数算术子群 Sta15；KN19]。该堆积中的切点对应于这个二次型的整数各向同性点。根据定理4，与正分数对应的正交立方点族提供了一个无限的切点族，其中 x、 y、 z 均为平方数。我们希望并相信，这种方法将有助于求解其他类型的丢番图方程。

REFERENCES

[Ale23] J. W. Alexander. 关于纽结曲线系统的一个引理。《美国国家科学院院刊》**9**.(3) (1923), 93.[AM95] S. V. Anishchik and N. N. Medvedev. 作为致密颗粒系统模型的三维阿波罗堆积。*Phys. Rev. Lett.* **75** (23 1995), 4314–4317.[CP17] H. Chen and A. Padrol. 多胞体的可刻画性问题。*European Journal of Combina-torics* **64** (2017), 1–26.[Con70] J. H. Conway. “纽结与链环及其部分代数性质的枚举”。抽象代数中的计算问题。Elsevier. 1970, 329–358.[Cro04] P. R. Cromwell. 《纽结与链环》。剑桥大学出版社，2004年。[Cro95] P. R. Cromwell. 在开书中嵌入纽结与链环 I：基本性质。《拓扑学及其应用》**64**.(1) (1995), 37–58.[Dia22] Y. Diao. 交替纽结的绳长猜想。*arXiv:2208.00123* (2022).[Epp14] D. Eppstein. 四维多胞体图中的链环与纽结。*https://11011110.github.io/blog/2014/12/13/links-and-knots.html* (2014).

[Gab+21] D. Gabai, R. Haraway, R. Meyerhoff, N. Thurston, and A. Yarmola. 尖点体积较小的双曲三维流形。2021年。arXiv: 2109.14570 [math.GT].[GT86] D. Gabai and W. P. Thurston. 树枝状链环的亏格：1986年。第339卷。美国数学会，1986年。[Gra+03] R. Graham, J. C. Lagarias, C. L. Mallows, A. R. Wilks, and C. H. Yan. 阿波罗尼奥斯圆填充：数论。《数论杂志》100.(1) (2003), 1–45.[KK23] M. Kapovich and A. Kontorovich. 关于超整克莱因球填充、虫与算术群。克雷尔数学杂志 (0) (2023).[KN19] A. Kontorovich and K. Nakamura. 晶体球填充的几何与算术。《美国国家科学院院刊》116.(2) (2019), 436–441.[Kwo+20] S. Kwok, R. Botet, L. Sharpnack, and B. Cabane. 多分散乳液中的阿波罗尼奥斯填充。《软物质》16 (10 2020), 2426–2430.[Mae07] H. Maehara. 三维空间中实心球的构形：色数与打结圈。《图与组合》23.(1) (2007), 307–320.[MRR22] L. Montejano, J. L. Ram´ırez Alfons´ın, and I. Rasskin. 自对偶映射 I：对跖性。《SIAM离散数学杂志》36.(3) (2022), 1551–1566.[Nak14] K. Nakamura. 正交多面体阿波罗尼奥斯球填充中整数弯曲量的局部-整体原理。2014年。arXiv: 1401.2980 [math.NT].[RR21a] J. L. Ram´ırez Alfons´ın and I. Rasskin. 阿波罗尼奥斯堆积与笛卡尔定理的多胞体推广（2021年）。arXiv: 2107.09432 [math.CO].[RR21b] J. L. Ram´ırez Alfons´ın and I. Rasskin. 链环的球填充。《欧洲组合学杂志》96 (2021), 103351.[Ras21] I. Rasskin. 正多胞体、球堆积与阿波罗尼奥斯截面（2021年）。arXiv: 2109. 00655.[Sta15] K. E. Stange. 比安基群的阿波罗尼奥斯结构。《美国数学会汇刊》370 (2015).[Wil81] J. B. Wilker. 反演几何（1981年）。由 C. Davis、B. Gr¨unbaum 和 F. A. Sherk 编，379–442。

IMAG, Univ. Montpellier, CNRS, Montpellier, France
Email address: jorge.ramirez-alfonsin@umontpellier.fr

LIS, Aix-Marseille Université, CNRS, Marseille, France
Email address: ivan.rasskin@lis-lab.fr