arXiv:2301.03106v1 [hep-th] 8 Jan 2023

(1+1) 维 q 变形空间上的标量场论

Poula Tadros，阿尔托大学理学院应用物理系，FI-00076 Aalto，芬兰。
邮箱：poulatadros9@gmail.com

摘要

我们研究静态背景下 q 变形空间中一维空间和一维时间上的标量场论。我们写出拉格朗日量和运动方程，并将其求解至 $q-1$ 的一阶，其中 q 是该空间的变形参数。

1 引言

非交换几何最初是在弦理论中提出的，见参考文献 [1], ，其中指出，在存在 Neveu-Schwartz 场时，D 膜上弦的端点坐标是非交换的。非交换场论也已得到定义，因为它们可以从弦理论推导出来，并具有一些有趣的特性，详见参考文献 [2] 和 [3]。

在场论中引入非对易时空，动机源于量子力学中的海森堡不确定性原理。该原理指出，在极小的距离尺度上，动量测量会有很大的不确定性。这意味着能量可能在很短的空间距离内达到极高的数值，接近普朗克尺度。然而，根据广义相对论，在很短的空间距离内具有高能量会形成黑洞，从而使位置无法完全确定。为调和这两种现象，有必要在时空中引入非对易性，这意味着该理论具有非局域性。相关解释见参考文献 [4]和 [5]。

本文研究 q 变形空间上具有静态时空的（1+1）维经典标量场论，并对由此得到的理论进行解析和数值分析。第 2 节回顾时空上的几种非交换性类型，并阐述为何选择 q-变形非交换性作为研究对象。第 3 节研究 q 变形时空上的标量场论，写出拉格朗日量并推导运动方程；我们还将运动方程截断至 $q-1$ 的线性阶，并求解所得方程。第 4 节研究截断后运动方程的数值解，结果表明，解会随 x 和 t 指数增长，这意味着该方程是刚性的，且理论中存在不稳定性。第 5 节总结本研究，并提出进一步研究的课题。

2 非交换性的类型

这里，我们简要回顾三种最流行的非交换关系类型，并说明我们选择 q-变形类型的理由。

1. 典范非交换性 这是物理学文献中使用的最简单类型，于 [6], 中引入，其定义是施加以下对易关系

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu},$$

其中 x^μ 是时空坐标， $\theta^{\mu\nu}$ 是一个常数反对称矩阵。

典范非交换性的思想是以特定方式模糊时空的结构，而不考虑空间的具体数学细节。为了纳入能够捕捉流形上数学结构的非交换几何，有必要考虑超越这一基本形式的更复杂的非交换性形式。

2. 李型非交换性
在这种情况下，坐标具有李代数结构，即对易关系可以刻画李代数结构 [7]。对易关系如下:

$$[x^\mu, x^\nu] = if_\rho^{\mu\nu} x^\rho,$$

其中 $f_\rho^{\mu\nu}$是所定义李代数的结构常数。然而，这种类型并无实用价值，因为李代数结构是刚性的，也就是说，李代数的任意微小形变都与原李代数同构。

3. q-变形
李代数刚性问题的一种解法是用一种灵活的结构——量子群 [8-10]——来取代李群。此处所说的量子群，指的是给定群的普遍包络代数的形变；这些对象具有霍普夫代数结构，这种结构不同于李群和李代数，具有灵活性。

对易关系为

$$x^\mu x^\nu = \frac{1}{q} R_{\sigma\tau}^{\mu\nu} x^\sigma x^\tau,$$

其中 q 是一个参数， $R_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$ 是定义在该空间上的量子群的 R矩阵。

在这个空间中，李代数被变形参数 q 对应的非交换霍普夫代数所取代。由此得到的空间按照该空间上的李群以及参数 q 进行形变，这是使时空发生形变，同时保留该空间完整代数结构的最简单方式。

3 拉格朗日量与运动方程

我们从交换流形上的标量场拉格朗日量开始，然后通过用 Jackson 导数替换导数来引入非交换性。由于对称群是 $U(1)$，其普遍包络代数的形变会得到一个交换代数。因此，我们无需担心如何在新空间上定义函数乘积。拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \to \mathcal{L}_q = D_{\mu q}\phi D_q^{\mu}\phi - m^2\phi^2,$$

其中 $\mu = 0,1$，其中 $x^0 = t$ 且 $x^1 = x$.

假设场处处有定义且无限可微，并且形变量很小，即 $q \approx 1$，我们可以使用以下公式，将非交换拓扑空间上的理论与交换流形上的理论联系起来（即将非交换理论变换回交换流形）：

$$D_{xq}(f(x)) = \partial_x f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q-1)^k}{(k+1)!} x^k f^{(k+1)}(x),$$

其中 $f^{(k)}$ 是 f 关于 x 的第 k 阶普通导数。

$$D_{tq}(f(x)) = \partial_t f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q-1)^k}{(k+1)!} x^k f^{(k+1)}(x),$$

其中 $f^{[k]}$ 是 f 关于 t 的第 k 阶普通导数。

交换流形上的拉格朗日量为

$$\mathcal{L}_q = \frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + 2\partial\phi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q-1)^k}{(k+1)!} x^k \phi^{(k+1)}$$

$$+ \sum_{l,m=1}^{\infty} \frac{(q-1)^{(l+m)}}{(m+1)!(l+1)!} x^{k+l} \phi^{(l+1)}\phi^{(m+1)} + (x \to t).$$

其中，$(x \to t)$表示相同的项，只是将 x 替换为 t ，包括导数中的替换。

拉格朗日量含有导数的无穷级数，在这种情况下，欧拉-拉格朗日方程将为

$$\frac{\partial\mathcal{L}_q}{\partial\phi} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_q}{\partial\phi^{(k)}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_q}{\partial\phi^{[k]}}\right) = 0, \qquad (1)$$

其中 $k = 2$，3，.....。

显然，拉格朗日量是非局域的，这正如非对易理论所预期的那样。

拉格朗日量的导数为

$$\frac{\partial\mathcal{L}_q}{\partial\phi} = -m\phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial(\partial\phi)} = \partial_x\phi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q-1)^n}{(n+1)!}x^n\phi^{(n+1)} \tag{2}$$

$$\to \frac{d}{dx}(\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial(\partial_x\phi)})$$

$$= \partial_x\partial_x\phi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n(q-1)^n}{(n+1)!}x^{n-1}\phi^{(n+1)}) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(q-1)^n}{(n+1)!}x^n\phi^{(n+2)}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial(\phi^{(k)})} = \frac{2(q-1)^{k-1}x^{k-1}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n}{(n+1)!}x^n\phi^{(n+1)}$$

$$\to \frac{d}{dx}(\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial(\phi^{(k)})})$$

$$= \frac{2(q-1)^{k-1}x^{2k-1}}{k!}\sum_{m,n=0}^{\infty}\binom{k}{m}\frac{(q-1)^n}{(n+1)!}\frac{(n+k+1)!}{(n+2k-m-1)!}x^{n-m}\phi^{(n+k+1)}, \tag{4}$$

关于 t 的导数也有类似的公式。

将 (2)、(3)、(4) 代入 (1)，综合可得

$$-\partial_\mu\partial^\mu\phi - m^2\phi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(q-1)^n}{(n+1)!}x^{n-1}\phi^{(n+1)} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q-1)^n}{(n+1)!}x^n\phi^{(n+2)}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{2(q-1)^{k-1}x^{2k-1}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\frac{(q-1)^n(n+k-1)!}{(n+1)!(n+2k-m-1)!}x^{n-m}\phi^{(n+k+1)}$$

$$+(x\to t) = 0. \tag{5}$$

这是一个变系数的无限阶偏微分方程。

如果我们只考虑小形变，即 $q \approx 1$，那么只保留关于 $q-1$ 的线性阶项，一阶方程为

$$-\partial_\mu\partial^\mu\phi - m^2\phi - (q-1)[\phi^{(2)} + x\phi^{(3)} - \frac{x^3}{6}\phi^{(3)} - x^2\phi^{(3)} - x\phi^3 + (x\to t)] = 0.$$

这个方程是刚性方程，也就是说它在数值上不稳定。这可能表明，由于采用了线性近似，该理论存在不稳定性；但从完整的运动方程可以看出，完整理论是稳定的。

解为 $\phi = F(t)G(x)$，其中

$$F(t) = c_1e^{iAt/\sqrt{q}} + c_2e^{-iAt/\sqrt{q}} + (q-1)\frac{e^{iAt/\sqrt{q}}}{2iA\sqrt{q}}[\frac{iA}{24q}t^4 + (\frac{iA^3}{3} - \frac{1}{12\sqrt{q}} - \frac{i}{8A})t^3$$

$$+(\frac{A+q}{2q} - \frac{A\sqrt{q}}{2} - \frac{i}{8A})t^2 + (\frac{i(A+q)}{2A\sqrt{q}} - \frac{iqA}{4} + \frac{\sqrt{q}}{8A^2})t$$

$$+(\frac{A+q}{4A^2}+\frac{q\sqrt{A}}{4}+\frac{iq}{16A^3})]+O((q-1)^2),$$

$$G(x)=c_3e^{ikx/\sqrt{q}}+c_4e^{-ikx/\sqrt{q}}+(q-1)\frac{e^{ikx/\sqrt{q}}}{2ik\sqrt{q}}[\frac{ik}{24q}x^4+(\frac{ik^3}{3}-\frac{1}{12\sqrt{q}}-\frac{i}{8A})x^3$$

$$+(\frac{k+q}{2q}-\frac{k\sqrt{q}}{2}-\frac{i}{8k})x^2+(\frac{i(k+q)}{2k\sqrt{q}}-\frac{iqk}{4}+\frac{\sqrt{q}}{8k^2})x$$

$$+(\frac{k+q}{4k^2}+\frac{q\sqrt{k}}{4}+\frac{iq}{16k^3})]+O((q-1)^2),$$

其中 c_1，c_2，c_3，c_4，A 是归一化常数，且 $k=\pm\sqrt{A^2+m^2}$。当 $q=1$时，它就化为预期的克莱因-戈尔登方程的解。

4 数值结果

这里，我们给出运动方程关于 $q-1$ 的一阶数值解；由于其余部分类似，我们只关注 $G(x)$。解随时间呈指数增长，这表明该运动方程是刚性的。

我们设定 $c_3=c_4=k=1$, $A^2=\frac{1}{2}$，并绘制参数 q 取不同值时的解。

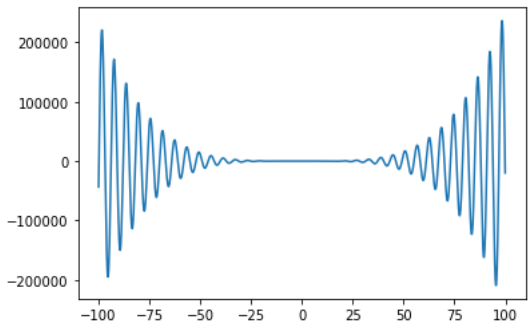


图1：在 $q-1=0.1$ 处，解随 $|x|$ 呈指数增长。这是刚性方程具有不稳定数值解的特征。在 $x=0$ 附近，它与通常的克莱因-戈登解接近，但随着距离增大，它会变得越来越远。

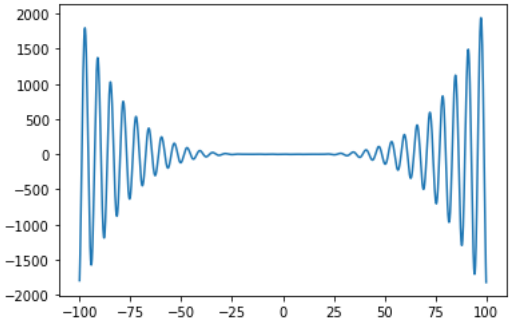


图 2：在 $q-1=0.001$ 处，解仍呈指数增长，但速度较慢。

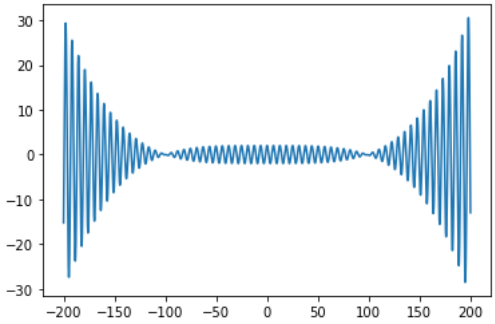


图 3：在 $q-1=10^{-6}$ 处，解在 $|x|=50$ 之前与克莱因-戈登解相似，随后短暂衰减，但最终发散。

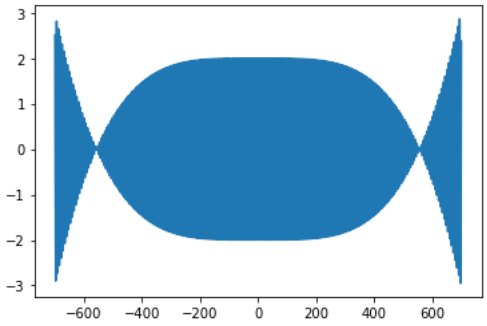


图 4：在 $q-1=10^{-9}$ 处，解的行为与前一幅图相同，但衰减发生在较大的 $|x|$ 处；所有较小的 $q-1$ 值都遵循这一模式。

上述结果表明，该理论存在不稳定性，会导致运动方程的解在 $x \to \infty$ 处发散。要消除这种不稳定性，我们必须加入无穷多项，对应于高阶导数的无穷级数，也就是说，必须考虑完整理论。然而，这种近似让我们得以直观了解 q-变形如何影响空间：小幅 q-变形除了会产生非局域效应外，似乎还会不规则地影响空间，而局部效应很小。

5 结论与展望

总之，我们表明，即使在静态背景下，在 q 变形空间上定义场论，也会在拉格朗日量中产生高阶导数的无穷级数。在所讨论的情形中，代数是可交换的，因此不需要引入新的函数乘积。我们还证明，对该理论作任何近似或截断，都会因理论中的不稳定性而导致运动方程变得僵硬。

尽管我们在这一领域取得了一些进展，但仍有许多问题有待研究。未来沿这一方向的研究应着重于在具有非交换函数代数的 q 变形空间和动力学时空上定义更复杂的理论，同时也应在此类空间上定义高自旋场，并研究这些理论的新对称性，以及截断拉格朗日量后会出现何种不稳定性。

致谢

我们感谢 Ivan Kolar 博士就这一主题进行了有益的讨论。

参考文献

[1] Seiberg, N. 和 Witten, E.（1999）“弦理论与非交换几何”，《高能物理学杂志》，1999(09)，第 032–032 页。[2] Szabo, R.（2003）“非交换空间上的量子场论”，《物理报告》，378(4)，第 207–299 页。[3] Sheikh-Jabbari, M.M.（1999）“开弦相互作用所产生的非交换环面上的超杨-米尔斯理论”，《物理快报B》，450(1-3)，第 119–125 页。[4] Doplicher, S.、Fredenhagen, K. 和 Roberts, J.E.（1995）“普朗克尺度下时空的量子结构与量子场”，《数学物理通讯》，172(1)，第 187–220 页。[5] Ahluwalia, D.V.（1994）“量子测量、引力与局域性”，《物理快报B》，339(4)，第 301–303 页。[6] C. S. Chu 和 P. M. Ho，非交换开弦与 D膜，《核物理B》550，151（1999） [hep-th/9812219]。

[7] B. Jurco、S. Schraml、P. Schupp 和 J. Wess，非交换空间上非阿贝尔规范群的包络代数值规范变换，Eur. Phys. J. C17，521（2000） [hep-th/0006246]。[8] Chaichian, M. 和 Demichev, A.P.，《量子群导论》。新加坡：世界科学出版社（1996年）。[9] Bonneau, P. 等（2004年）“量子群与变形量子化：显式方法与隐含方面”，《数学物理杂志》，45(10)，第 3703–3741 页。[10] A. Klimyk 和 K. Schmudgen，《量子群及其表示》，施普林格（1997年）。