arXiv:2301.03108v1 [hep-th] 8 Jan 2023

# 非交换 q 变形

# 空间

Poula Tadros，阿尔托大学理学院应用物理系，FI-00076 芬兰阿尔托。
邮箱：poulatadros9@gmail.com

摘要

我们研究非交换 q 变形空间上的标量场与弦理论。我们定义了函数非交换代数上的函数乘积，该乘积是 q 变形后得到的，类似于正则非交换空间上的 Moyal 乘积。随后，我们给出在上述空间上定义标量场理论和经典弦理论的一般步骤，并指出由此得到的理论将具有扩展的时空对称性与内部对称性，可用于研究 q 变形引起的引力效应。

## 1 引言

非交换几何在弦理论中的引入见 [1]，其中指出，在 Neveu-Schwartz 场存在时，D 膜上弦端点的坐标是非交换的。在场论中，这一概念出现得更早：在非交换环面上的杨-米尔斯理论已于 [2] 中提出。

[3,4] 解释了引入非交换时空作为场论的主要动机。在量子力学中，海森堡不确定性原理指出，在小尺度上，动量测量存在很大的不确定性，也就是说，能量可以在很小的空间距离内达到极高值（接近普朗克尺度）。然而，根据广义相对论，足够小尺度上的高能量会形成黑洞，使位置测量无法完全确定。也就是说，在小尺度上进行位置测量会存在不确定性；只有在时空中引入非交换性，才能实现这一点。请注意，这意味着理论具有非局域性。

自非交换性引入场论和弦理论以来，经典场论、量子场论、引力理论和弦理论等各个方向都取得了长足进展。然而，所采用的非交换性是正则非交换性，它未能体现给定场论或弦理论的数学结构，而且显然是人为施加的。本文采用另一种非交换性——q 变形，研究经典标量场论及其对弦理论的影响。第2节回顾时空上最常见的几种非交换性，并说明为何选择 q 变形作为所采用的非交换性。第3节定义 q 变形空间上的函数乘积，类似于正则非交换空间上的莫亚尔乘积，并

展示该方法在李型非交换性情况下行不通。第4节研究 q变形时空上的标量场论。第5节研究同一时空上的弦理论。第6节讨论非交换理论的对称性，并指出非交换理论所具有的对称性多于相应的交换理论；随后以此论证，我们可以通过量子化该理论的时空对称群，定义具有动力学时空的理论。

# 2 非交换性的类型

本节旨在回顾时空的三种非交换性类型

## 2.1 正则非交换性

这是最简单的一种类型，也是物理学文献中采用的类型；它由 [5]，引入，其定义是在时空上施加以下对易关系

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu},$$

其中 $x^\mu$ 是时空坐标， $\theta^{\mu\nu}$ 是一个常数反对称矩阵。

正则非交换性对应于时空的弥散；通过比较交换空间上的多项式方程与其非交换对应形式的解，可以轻易看出这一点。

举例来说，考虑坐标为 $x$ 和 $y$、满足对易关系 $[x, y] = k$ 的二维欧几里得空间，其中 $k$ 是正常数；再考虑多项式方程 $(x - y)^2 = 0$。在通常的交换空间中，上述方程的解为$x = y$，这是一条斜率为 $= 1$ 且经过原点的直线。然而，在相应的非交换空间中，方程可写为 $x^2 - 2yx + y^2 = k$，其解是两条平行直线，两者之间的距离与 $k$成正比；当 $k = 0$ 时，这两条直线重合，我们便得到交换空间中的解。

请注意，无论空间上是否存在其他数学结构，这一过程都有效，弥散的方式也相同。这就是我们在物理学中需要使用更复杂的非交换性之原因。

## 2.2 李型非交换性

在这种情况下，坐标具有李代数结构，也就是说，如果在空间

时空上定义，对易关系就能体现李代数结构，例如在场论中 [6]。对易关系为

$$[x^\mu, x^\nu] = i f_\rho^{\mu\nu} x^\rho,$$

其中 $f_\rho^{\mu\nu}$是所定义李代数的结构常数。然而，这种类型并无实用价值，因为李结构是刚性的，即李代数的任何微小变形都与该李代数同构。这使得难以在由此得到的非交换空间上定义函数的乘积，我们将在下一节看到这一点。

## 2.3 q 变形

这种类型旨在解决李代数的刚性问题。其主要思路是用一种灵活的结构取代李群，这种结构称为量子群。有关量子群理论的更多详情，请参见 [7,8]。

对易关系如下:

$$x^\mu x^\nu = \frac{1}{q} R_{\sigma\tau}^{\mu\nu} x^\sigma x^\tau,$$

其中 $q$ 是一个参数， $R_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$ 是定义在该空间上的量子群的 R 矩阵。

在这个空间中，李代数被一个带有变形参数 q 的非交换 Hopf代数所取代。Hopf代数被视为李群泛包络代数的变形。由此得到的空间根据该空间上的李群以及参数 q 进行变形；这是在保留空间完整结构的同时对时空进行变形的最简单方法。也可以研究更复杂的方法，例如使用多个参数进行变形 [9,10] ，但这超出了本文的讨论范围。

# 3 q 变形空间上的 Moyal类乘积

在此，我们定义 q 变形空间上的函数非交换乘积，即 R矩阵形式中的非交换空间上的乘积。

## 3.1 典范非交换空间上的莫亚尔乘积

我们先回顾原始的莫亚尔乘积。在正则非交换空间上，函数代数被非交换的 $C*$ 代数取代，莫亚尔乘积就是非交换代数上的函数乘积。其公式可推导如下：考虑两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，它们的傅里叶变换为

$$f(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f(\bar{k}) e^{i k_i x^i},$$

$$g(x)=\int\frac{d^Dk'}{(2\pi)^D}g(\bar{k})e^{ik_jx^j},$$

非交换空间上的乘积为

$$f(x)\star g(x)=\int\frac{d^Dkd^Dk'}{(2\pi)^{2D}}f(\bar{k})g(\bar{k})e^{ik_ix^i}e^{ik_jx^j}.$$

利用贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式，我们得到

$$f(x)\star g(x)=\int\frac{d^Dkd^Dk'}{(2\pi)^{2D}}f(\bar{k})g(\bar{k})e^{ik_ix^i}e^{ik_jx^j}e^{i/2k_ik_j\theta^{ij}}$$

$$=\int\frac{d^Dkd^Dk'}{(2\pi)^{2D}}f(\bar{k})g(\bar{k})e^{ik_ix^i}e^{ik_jx^j}(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{i}{2})^n\frac{1}{n!}(k_ik_j\theta^{ij})^n)$$

$$=f(x)g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{i}{2})^n\frac{1}{n!}\theta^{i_1j_1}...\theta^{i_nj_n}\partial_{i_1}\partial_{i_2}...\partial_{i_n}f\partial_{j_1}...\partial_{j_n}g.$$

## 3.2 q 变形空间上的函数乘积

我们沿用相同的步骤来定义变形空间上的乘积。非交换性由下式给出

$$x^\mu x^\nu=\frac{1}{q}R^{\mu\nu}_{\sigma\tau}x^\sigma x^\tau.$$

它可以写成如下对易关系

$$[x^\mu,x^\nu]=Q^{\mu\nu}_{\sigma\tau}x^\sigma x^\tau,$$

其中 $Q^{\mu\nu}_{\sigma\tau}=\frac{1}{q}R^{\mu\nu}_{\sigma\tau}-\delta^\mu_\tau\delta^\nu_\sigma$. 注意，在 $q=1$ 时，我们有 $Q^{\mu\nu}_{\sigma\tau}=0$，此时交换性得以恢复。

现在再考虑两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$。它们的傅里叶变换的乘积为

$$f(x)\star g(x)=\int\frac{d^Dkd^Dk'}{(2\pi)^{2D}}f(\bar{k})g(\bar{k})e^{ik_ix^i}e^{ik_jx^j},$$

并利用贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式，我们得到

$$f(x)\star g(x)=\int\frac{d^Dkd^Dk'}{(2\pi)^{2D}}f(\bar{k})g(\bar{k})e^{ik_ix^i}e^{ik_jx^j}$$

$$e^{x^i+x^j+1/2[x^i,x^j]+1/12[x^i,[x^i,x^j]]-1/12[x^j,[x^i,x^j]]+\dots},$$

经过一些计算，我们得到

$$[x^i,[x^i,x^j]]=(Q^{ij}_{nl}Q^{il}_{ab}+Q^{ij}_{cb}Q^{im}_{na})x^nx^ax^b,$$

$$[x^i,[x^i,x^j]]=(Q^{ij}_{nl}Q^{jl}_{ab}+Q^{ij}_{cb}Q^{jm}_{na})x^nx^ax^b,$$

代入后得到

$$f(x)\star g(x)=\int\frac{d^Dkd^Dk'}{(2\pi)^{2D}}f(\bar{k})g(\bar{k})e^{ik_ix^i}e^{ik_jx^j}$$

$e^{x^i k_i + x^j k'_j + 1/2 Q^{ij}_{mn} x^m x^n k_i k'_j + 1/12 k_i k'_j (Q^{ij}_{nl} Q^{il}_{ab} - Q^{ij}_{cb} Q^{im}_{na} - Q^{ij}_{nl} Q^{jl}_{ab} + Q^{ij}_{cb} Q^{jm}_{na}) x^n x^a x^b + \cdots}$.

在弦理论中，假设参数 $q$ 接近 1 是合理的，因为算符 $Q$ 与弦长有关，而弦长被认为非常小。在场论中，这一假设同样合理，因为此时 $Q$ 与广义相对论失效处的时空面积有关，也就是量子引力尺度，而该尺度被认为非常小。因此，级数收敛，所有指数函数都有良好定义。若忽略最后一个指数中的高阶项，就得到一个类似于莫亚尔乘积的公式：

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{d^D k d^D k'}{(2\pi)^{2D}} f(\bar{k}) g(\bar{k'}) e^{ik_i x^i} e^{ik'_j x^j} e^{1/2 Q^{ij}_{mn} x^m x^n k_i k'_j}$$

$$= \int \frac{d^D k d^D k'}{(2\pi)^{2D}} f(\bar{k}) g(\bar{k}) e^{ik_i x^i} e^{ik'_j x^j} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n \frac{1}{n!} (Q^{ij}_{mn} x^m x^n k_i k'_j)^n)$$

$$= f(x)g(x) + \sum_{p=1}^{\infty} (1/2)^p \frac{1}{p!} x^{m_1} x^{l_1} Q^{i_1 j_1}_{m_1 l_1} ... x^{m_p} x^{l_p} Q^{i_p j_p}_{m_p l_p} \partial_{i_1} \partial_{i_2} ... \partial_{i_p} f(x) \partial_{j_1} ... \partial_{j_p} g(x).$$

该公式通过 $Q$ 算符的形式，刻画了时空上的数学结构；随后，变形被转换为这些结构，从而至少在弦理论中带来额外的对称性。

通过这一过程可以看出，李型非交换性给乘积的定义带来了困难，因为该乘积的形式应为

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{d^D k d^D k'}{(2\pi)^{2D}} f(\bar{k}) g(\bar{k}) e^{ik_i x^i} e^{ik_j x^j}$$

$$e^{1/2(f^{ij}_m x^m k_i k'_j) + 1/12 k_i k'_j (f^{ij}_{nl} f^{il}_{ab} - f^{ij}_{cb} f^{im}_{na}) + \cdots}.$$

指数中的级数通常会发散，因此无法定义该乘积。

# 4 q 变形空间上的标量场论

本节研究平坦、非动力学的 q 变形非交换时空上的有质量标量场论。尽管已有一些尝试旨在定义变形空间上的场论，但所采用的非交换性通常为正则型；或者，量子群仅被用于定义某些特定空间示例的微分结构 [11-14], 。人们也研究了变形空间上的共形场论 [15], ，然而，所考虑的变形是人为引入的，并未引入非交换性；也就是说，变形后的流形只是另一个流形，没有任何附加结构。

该理论的拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2,$$

其中 $\phi$ 是我们假设为无限可微的标量场，而 $m$ 是质量。

现在我们进行变形量子化：
第一步是对本例中的对称群 $U(1)$ 进行 q 量子化。为此，我们写出它的泛包络代数，它是一个由函数 $z \in \mathcal{U}(U(1))$ $e^{(iz)} \in$ $\rightarrow$ C 生成的 $C*$ 函数代数。我们注意到该代数是交换的，因此它的变形与自身等价，即对称群不会对非交换性产生贡献，且非交换空间上的乘积等价于原流形上的乘积。

第二步是将定义场论的流形替换为非交换局部紧拓扑空间。在这个流形上，导数经 q 变形后成为 Jackson导数。

新的 q变形拉格朗日量为

$$\mathcal{L}_q = D_{q\mu}\phi D_q^\mu \phi - m^2\phi^2,$$

现在我们使用公式，将非交换拓扑空间上的理论与交换流形上的理论联系起来（即将非交换理论变换回交换流形）：

$$D_{q\mu}(f(x)) = \partial_\mu f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q-1)^k}{(k+1)!} x_\mu^k f^{(k+1)}(x),$$

其中， $f^{(k)}$ 是 f 的第 k 阶普通导数。

交换流形上的拉格朗日量为

$$\mathcal{L}_q = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 + 2\partial_\mu\phi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q-1)^k}{(k+1)!} x^{\mu k}\phi^{(k+1)}$$

$$+ \sum_{l,m=1}^{\infty} \frac{(q-1)^{(l+m)}}{(m+1)!(l+1)!} \phi^{(l+1)} x_\mu^k x^{\mu l} \phi^{(m+1)}.$$

拉格朗日量的前两项是非交换的原始理论，其余项则是将非交换拓扑空间替换为原始交换流形所带来的非交换性贡献。该理论是 q 变形的，即如果 $q = 1$ ，我们就能恢复原始理论。

正如预期，附加项是非局域的，并且包含场 $\phi$ 的高阶（普通）导数的无穷级数。

# 5 q 变形空间上的弦理论

弦理论遵循与场论相同的 q 量子化过程，但由于其基本对象是一维的，因此几何结构更加丰富。

在这里，我们建立上文定义的 $Q$ 算符与弦长之间的联系，然后给出在 q 变形空间上定义弦理论的一般过程。

在 q 变形空间中，位置的不确定性可计算为

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{1}{2} < x^\mu Q^{ij}_{\mu\nu} x^\nu >,$$

其中， $< x^\mu Q^{ij}_{\mu\nu} x^\nu >$ 是算符 $Q$ 的二次型的期望值。

按照与 [2]，相同的推理，我们发现弦长的平方与上述期望值成正比

$$< x^\mu Q^{ij}_{\mu\nu} x^\nu > \ \propto l_s^2.$$

这意味着弦的长度取决于非交换空间的几何，也就是说，取决于所讨论的弦理论，并由量子化群的 R 矩阵决定。

静态时空中的处理步骤如下：

1. 确定理论的对称群，并找到相应的量子群。2. 使用第3节中介绍的乘积代替通常的乘积，并使用 Jackson 导数代替通常的导数。3. 使用相应的公式，如第4节所示，将结果映射回原流形；这通常会导致拉格朗日量中出现高阶导数的无穷级数。

# 6 动力学时空上的对称性与理论

q 量子化的第一步是用量子群取代对称群，而量子群是其泛包络代数的一种变形。根据定义，这比交换理论具有更多对称性。

在场论和弦理论中，对称性分为时空对称性和内部对称性。时空对称性与场论或弦理论所定义其上的背景流形直接相关，而内部对称性则是流形上的附加结构。对于静态时空（不考虑引力），只有内部对称群需要进行 q 变形；若要研究动态时空，时空对称群则必须纳入 R 矩阵。时空对称性的变形应会对理论的引力方面产生影响，例如曲率和奇点的变化等。 [] 中也有关于非交换性的引力效应的类似研究，但采用的是典范非交换性；利用 q 变形研究引力则是未来的研究课题。

# 7 结论与展望

本文的结果表明，至少对于较小的变形，q 变形空间上的函数乘积是存在且定义良好的。我们在文中给出了一个明确公式。我们还表明，可以在 q 变形流形上定义场论和弦理论，但这会带来更大的对称性集合，以及取决于相关理论和流形的其他特征。

未来研究的一个可能方向，是探讨 q 变形所带来的更大对称性集合，以及其数学意义和唯象学意义。另一个方向是研究更复杂的场论/弦理论，并寻找在此类空间上定义高自旋场的方法。

# 致谢

我们感谢 Ivan Kolar 博士就这一主题展开的有益讨论。

# 参考文献

[1] Seiberg, N. 和 Witten, E.（1999）“弦理论与非交换几何”，《高能物理学杂志》，1999(09)，第 032–032 页。[2] Szabo, R.（2003）“非交换空间上的量子场论”，《物理学报告》，378(4)，第 207–299 页。[3] Doplicher, S.、Fredenhagen, K. 和 Roberts, J.E.（1995）“普朗克尺度下时空与量子场的量子结构”，《数学物理通讯》，172(1)，第 187–220 页。[4] Ahluwalia, D.V.（1994）“量子测量、引力与定域性”，《物理学快报 B》，339(4)，第 301–303 页。[5] C. S. Chu 和 P. M. Ho，非交换开弦与 D 膜，《核物理 B》550，151（1999） [hep-th/9812219].[6] B. Jurco、S. Schraml、P. Schupp 和 J. Wess，非交换空间上非阿贝尔规范群的包络代数值规范变换，《欧洲物理学杂志 C》17，521（2000） [hep-th/0006246].[7] Chaichian, M. 和 Demichev, A.P.《量子群导论》。新加坡：World Scientific（1996）。[8] A. Klimyk 和 K. Schmudgen，《量子群及其表示》，Springer（1997）。[9] Hu, N.H. 和 Pei, Y.F.（2008）“关于双参数量子群的笔记 I”，《中国科学：数学辑》51(6)，第 1101–111

0.

[10] Hu, N. 和 Pei, Y.（2012）“关于双参数量子群的札记（II）”，《代数通讯》，40(9)，第 3202–3220 页。

[11] Wulkenhaar, R.（2006）“变形空间上的场论”，几何与物理学杂志，56(1)，第 108–141 页。[12] Grosse, H.、Madore, J. 和 Steinacker, H.（2001）“Q变形模糊球面上的场论 I”，几何与物理学杂志，38(3-4)，第 308–342 页。[13] Grosse, H.、Madore, J. 和 Steinacker, H.（2002）“Q变形模糊球面上的场论 II：量子化”，几何与物理学杂志，43(2-3)，第 205–240 页。[14] BARDEK, V.、DORE˘SI ´C, M. 和 MELJANAC, S.（1994）“Q变形场论的一个例子”，《国际现代物理学杂志A》，09(23)，第 4185–4194 页。[15] Minahan, J. 、 Naseer, U. 和 Thull, C.（2021）“变形球面上的共形场论、反常与超对称性”，SciPost Physics，10(3)。