arXiv:2301.03111v1 [math.PR] 8 Jan 2023

随机水库计算

Steven Finch

2023年1月8日

Abstract. Prabhu（1958年）获得了有限库容 v水库中蓄水量 Z_t 的平稳分布，其中给定流入量 X_t 和流出量Y_t。时间 t 假定为离散的， $X_t \sim$ 伽马分布(p, μ)相互独立，且 p 为正整数。平均流入量为 p/μ；目标流出量为m（常数）。我们通过分析几个示例，尝试阐明文献中经常省略的复杂细节。特别关注的是枯竭（$Z_t = 0$）和溢流（$Z_t = v$）的概率。对于给定的$\{v, p, \mu\}$，m 取何值时能使这两者同时最小?

令 $v > 0$, p 为正整数， $\mu > 0$ 且 $m > 0$。在每个时刻 $t = 1$、2、3、.....，一个库容为 v 的水库吸收流入量 $X_t \sim$ 伽马分布(p, μ)，并同时释放流出量 $0 \le Y_t \le m$，具体取决于可用水量。更准确地说，

$$Y_t = \min\{X_t + Z_t, m\}$$

其中， $0 \le Z_t \le v$ 为蓄水量。假设时间上的独立性成立。我们关注的是当 $t \to \infty$ 时 Z_t 的概率密度函数的极限。无需再明确提及 Y_t ，因为 Z_{t+1} 可以递归定义为:

$$Z_{t+1} = \max\{0, \min\{X_t + Z_t - m, v\}\}, \qquad Z_1 = v/2.$$

设 $n = \lfloor v/m \rfloor$ 和 $\delta = v - m\,n$。换言之，当且仅当 v 是 m的整数倍时， δ 为 0；否则 δ 为 > 0。令

$$\lambda = (-1)^{p-1}\mu^p \exp(-\mu\, m).$$

Z_t的概率密度函数图像是分段光滑的，最多包含 $n+1$ 条弧，并且在 $z = 0$ 和 $z = v$处有点质量。这些弧从左到右由 $j = 0$、1、2、.....、 n标识，并对应于开子区间

$$\max\{(j-1)m + \delta, 0\} < z < \min\{j\,m + \delta, v\}$$

$0 < z < v$。Prabhu [1] 出色地求得了累积分布函数

$$F(z) = 1 - \exp[\mu(v - z)] \sum_{r=0}^{p-1} \alpha_r \sum_{q=0}^{n-j} (-\lambda)^q \frac{(v - q\,m - z)^{q\,p+r}}{(q\,p + r)!}$$

[0]版权所有 © 2023年 Steven R. Finch。保留所有权利。

这将是本文接下来讨论的内容。通过求解系数为 d_{rs}、对应于 $r, s = 0, 1, \ldots, p-1$ 的 p 线性方程组，可以求得 α_r 系数。这些内容将在稍后定义。

端点需特别处理。令 $\kappa = n - 1$ if $\delta = 0$ and $\kappa = n$otherwise。耗尽概率，即水库干涸的可能性，为

$$F(0) = 1 - \exp(\mu\, v) \sum_{r=0}^{p-1} \alpha_r \sum_{q=0}^{\kappa} (-\lambda)^q \frac{(v - q\, m)^{q\, p+r}}{(q\, p + r)!}.$$

相　　比之下，溢出概率，即水库蓄满的可能性，则为

$$1 - F(v) = \alpha_0.$$

显然，尽量降低供水为零（有害）和供水过剩（浪费）的可能性非常重要。其他值得关注的量包括指定时段内的总缺水量，即未满足的需求；以及总盈余，即不需要的供水（因为 $v < \infty$），它必然会流入环境。

对于 $r = 0$、1、.....、$p - 1$，线性方程组

$$\alpha_r - \lambda \sum_{s=0}^{p-1} d_{rs}\, \alpha_s = (-\mu)^r \exp\left[-\mu(v + m)\right] \sum_{s=0}^{p-r-1} \frac{[\mu(v + m)]^s}{s!}$$

需要求解，其中

$$d_{rs} = (-1)^{p+r-1} \sum_{q=0}^{n} (-\lambda)^q \int_{q\, m}^{v} \frac{(t - q\, m)^{q\, p+s} (t + m)^{p-r-1}}{(q\, p + s)!(p - r - 1)!}\, dt.$$

该积分可以轻松地表示为闭式。

对于伽马分布入流，Prabhu 的累积分布函数公式扩展了 Moran 早先在指数分布入流条件下发现的概率密度函数公式 [2], 。我们尚未深入研究 [2] 。关于 [1] 的更多讨论见于 [3, 4, 5, 6]。不过， [7, 8] 中的处理方法对我们的目的而言最为实用。

从现在起，我们固定 $v = 1$，并探讨所选 $\{p, \mu, m\}$ 的结果。令人惊讶的是，Prabhu 的著作出版五十多年后，这项研究 [7] 仍未受到更多关注。我们只能推想，理论概述中往往被忽略的复杂细节，阻碍了人们更深入地理解这项研究，也妨碍了它得到广泛认可。我们希望，通过探讨几个示例，情况能够有所改善。

1. $\{p, \mu, m\} = \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$

平均流入量为 $p/\mu = 1/2$ ，目标流出量为 $m = 1/2$。显然， $n = \lfloor 1/m \rfloor = 2$ 和 $\delta = 1 - m\,n = 0$，也就是说，没有偏移量。弧 $j = 0$、1、2 对应于区间

$$0 < z < 0, \quad 0 < z < 1/2, \quad 1/2 < z < 1$$

and 因此， $j = 0$ （为空）可以忽略。Prabhu公式给出 $F(z)$ a s

$$1 - \frac{1}{2}\exp\left[\mu(1-z)\right]\left[2 - (1-2z)\,\lambda\right]\alpha_0$$

对于 $j = 1$ 和

$$1 - \exp\left[\mu(1-z)\right]\alpha_0$$

对于 $j = 2$。线性方程

$$(1 - \lambda\, d_{00})\alpha_0 = \exp\left(-\frac{3}{2}\mu\right)$$

结合

$$d_{00} = 1 - \frac{1}{8}\lambda$$

以及 $\lambda = 2e^{-1}$，得到

$$\alpha_0 = \frac{8}{8 - 8\lambda + \lambda^2}\exp\left(-\frac{3}{2}\mu\right) = 0.15000227...$$

作为溢出概率。由于 $\kappa = n - 1 = 1$,

$$F(0) = 1 - \frac{1}{2}\exp(\mu)\,(2 - \lambda)\,\alpha_0 = 0.29937324...$$

是耗尽概率。人们可能会预期这两个概率几乎相等（因为 $1/\mu = 1/2 = m$ ，并且由于某种对称性），但事实并非如此。 $F(z)$ 的导数 $f(z)$ 绘制在图1中。

2. $\{p, \mu, m\} = \left\{1, 2, \frac{1}{3}\right\}$

平均流入量为 $p/\mu = 1/2$ ，目标流出量为 $m = 1/3$。显然 $n = \lfloor 1/m \rfloor = 3$ 且 $\delta = 1 - m\,n = 0$，也就是说，没有偏移量。弧 $j = 0$、1、2、3 对应于区间

$$0 < z < 0, \quad 0 < z < 1/3, \quad 1/3 < z < 2/3, \quad 2/3 < z < 1$$

因此可以忽略 $j=0$ （因为它为空）。Prabhu公式给出的 $F(z)$ 为

$$1-\frac{1}{18}\exp\left[\mu(1-z)\right]\left[18-6\,(2-3z)\,\lambda+(1-3z)^2\lambda^2\right]\alpha_0$$

对于 $j=1$,

$$1-\frac{1}{3}\exp\left[\mu(1-z)\right]\left[3-(2-3z)\,\lambda\right]\alpha_0$$

对于 $j=2$ 和

$$1-\exp\left[\mu(1-z)\right]\alpha_0$$

对于 $j=3$。线性方程

$$(1-\lambda\,d_{00})\alpha_0=\exp\left(-\frac{4}{3}\mu\right)$$

与.....耦合

$$d_{00}=1-\frac{2}{9}\lambda+\frac{1}{162}\lambda^2$$

和 $\lambda=2e^{-2/3}$ 得出

$$\alpha_0=\frac{162}{162-162\lambda+36\lambda^2-\lambda^3}\exp\left(-\frac{4}{3}\mu\right)=0.34604845...$$

作为溢出概率。由于 $\kappa=n-1=1$,

$$F(0)=1-\frac{1}{18}\exp(\mu)\left(18-12\lambda+\lambda^2\right)\alpha_0=0.04363903...$$

是耗尽概率。虽然第1节中 $\alpha_0<F(0)$，但这里有 $\alpha_0>F(0)$。这一结果表明，应考察介于 $1/3$ 和 $1/2$ 之间的 m 值。图2绘出了 $F(z)$ 的导数 $f(z)$。

3. $\{p,\mu,m\}=\left\{1,2,\frac{2}{5}\right\}$

平均流入量为 $p/\mu=1/2$，目标流出量为 $m=2/5$。显然 $n=\lfloor 1/m\rfloor=2$ 且 $\delta=1-m\,n=1/5$，即偏移量非零。弧 $j=0$、1、2 对应区间

$$0<z<1/5,\qquad 1/5<z<3/5,\qquad 3/5<z<1;$$

请注意，$j=0$ 的长度仅为 $1/5$。Prabhu公式给出的 $F(z)$为

$$1-\frac{1}{50}\exp\left[\mu(1-z)\right]\left[50-10\,(3-5z)\,\lambda+(1-5z)^2\lambda^2\right]\alpha_0$$

对于 $j = 0$,

$$1 - \frac{1}{5}\exp\left[\mu(1-z)\right]\left[5 - (3-5z)\,\lambda\right]\alpha_0$$

对于 $j = 1$ 和

$$1 - \exp\left[\mu(1-z)\right]\alpha_0$$

对于 $j = 2$。线性方程

$$(1 - \lambda\, d_{00})\alpha_0 = \exp\left(-\frac{7}{5}\mu\right)$$

与.....耦合

$$d_{00} = 1 - \frac{9}{50}\lambda + \frac{1}{750}\lambda^2$$

和 $\lambda = 2e^{-4/5}$ 给出

$$\alpha_0 = \frac{750}{750 - 750\lambda + 135\lambda^2 - \lambda^3}\exp\left(-\frac{7}{5}\mu\right) = 0.24745701...$$

作为溢出概率。因为 $\kappa = n = 2$,

$$F(0) = 1 - \frac{1}{50}\exp(\mu)\left(50 - 30\lambda + \lambda^2\right)\alpha_0 = 0.12789671...$$

是耗尽概率。 α_0 和 $F(0)$的值比前两节中的值更接近；选择一个介于 $2/5$ 和 $1/2$ 之间的 m ，应能使二者相等。我们估计 $m = 0.44276$ 符合这一目标（共同概率为 0.199）。另一方面，如果我们的目标是最小化非加权组合 $\alpha_0 + F(0)$，那么 $m = 0.38$ 便能实现这一目标（总和为 0.372）。 $F(z)$的导数 $f(z)$绘于图3中。

4. $\{p, \mu, m\} = \left\{2, 4, \frac{1}{2}\right\}$

平均流入量为 $p/\mu = 1/2$ ，目标流出量为 $m = 1/2$。显然 $n = \lfloor 1/m \rfloor = 2$ 且 $\delta = 1 - m\,n = 0$，也就是说，没有偏移量。弧 $j = 0$、1、2 对应于区间

$$0 < z < 0, \qquad 0 < z < 1/2, \qquad 1/2 < z < 1$$

因此可以忽略 $j = 0$ （因为它为空）。Prabhu公式给出的 F（z）为

$$1 - \frac{1}{48}\exp\left[\mu(1-z)\right]\left\{\left[48 - 6\,(1-2z)^2\,\lambda\right]\alpha_0 + \left[48 - 48z - (1-2z)^3\,\lambda\right]\alpha_1\right\}$$

对于 $j = 1$ 和

$$1 - \exp\left[\mu(1-z)\right]\left\{\alpha_0 + (1-z)\alpha_1\right\}$$

对于 $j = 2$。线性方程组

$$(1 - \lambda\, d_{00})\alpha_0 - \lambda\, d_{01}\alpha_1 = \exp\left(-\frac{3}{2}\mu\right)\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right),$$

$$\lambda\, d_{10}\alpha_0 - (1 - \lambda\, d_{11})\alpha_1 = \exp\left(-\frac{3}{2}\mu\right)\mu$$

与.....耦合

$$d_{00} = -1 + \frac{11}{384}\lambda, \qquad d_{01} = -\frac{7}{12} + \frac{7}{1920}\lambda,$$

$$d_{10} = 1 - \frac{1}{48}\lambda, \qquad d_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{384}\lambda$$

并且 $\lambda = -16e^{-2}$ 给出

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\frac{2 + 3\mu - 2\lambda\,\mu\, d_{01} - \lambda\,(2 + 3\mu)\, d_{11}}{1 - \lambda\,(d_{00} + d_{11}) + \lambda^2\,(d_{00}d_{11} - d_{01}d_{10})}\exp\left(-\frac{3}{2}\mu\right),$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\frac{-2\mu + 2\lambda\,\mu\, d_{00} + \lambda\,(2 + 3\mu)\, d_{10}}{1 - \lambda\,(d_{00} + d_{11}) + \lambda^2\,(d_{00}d_{11} - d_{01}d_{10})}\exp\left(-\frac{3}{2}\mu\right);$$

因此，溢出概率为 $\alpha_0 = 0.13554701...$。由于 $\kappa = n - 1 = 1$,

$$F(0) = 1 - \frac{1}{48}\exp(\mu)\left[(48 - 6\lambda)\,\alpha_0 + (48 - \lambda)\alpha_1\right] = 0.22163253...$$

是耗尽概率。Gamma(2, μ) 的众数为 $1/\mu > 0$，而 Gamma(1, μ) 的众数为 0；对于 $p = 2$，小流入量比对于 $p = 1$更不可能，因此 $F(0)$ 明显小于第1节中的值。Gamma(2, μ) 的尾部比 Gamma(1, μ) 的尾部更肥厚；对于 $p = 2$，大流入量比对于 $p = 1$更有可能，但α_0 却反常地小于第1节中的值（不过只小了一点）。图4绘出了 $F(z)$ 的导数 $f(z)$。

5. INVARIANCE

验证 Prabhu公式的一种方法基于模拟（由于 Z_t 的递推关系很简单，因此很容易编程实现）。另一种验证方法则更为特别：确认该公式在变换下保持不变

$$\left\{v, \frac{p}{\mu}, m\right\} \longmapsto \left\{\tilde{v}, \frac{p}{\tilde{\mu}}, \tilde{m}\right\} = \left\{\frac{v}{m}, \frac{p}{m\,\mu}, 1\right\}$$

也就是说，溢流和耗尽概率应保持不变，而存储水平累积分布函数的自变量只需按 m 缩放。首先,

$$\tilde{n} = \left\lfloor \frac{\tilde{v}}{\tilde{m}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{v}{m} \right\rfloor = n,$$

$$\tilde{\lambda} = (-1)^{p-1}\tilde{\mu}^p \exp[-\tilde{\mu}\,\tilde{m}] = (-1)^{p-1}(m\,\mu)^p \exp[-m\,\mu\cdot 1] = m^p\lambda$$

and

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{rs} &= (-1)^{p+r-1}\sum_{q=0}^{n}(-\tilde{\lambda})^q \int_{q\,\tilde{m}}^{\tilde{v}} \frac{(t-q\,\tilde{m})^{q\,p+s}(t+\tilde{m})^{p-r-1}}{(q\,p+s)!(p-r-1)!}\,dt \\
&= (-1)^{p+r-1}\sum_{q=0}^{n} m^{p\,q}(-\lambda)^q \int_{q}^{v/m} \frac{(t-q)^{q\,p+s}(t+1)^{p-r-1}}{(q\,p+s)!(p-r-1)!}\,dt \\
&= (-1)^{p+r-1}\sum_{q=0}^{n} m^{p\,q}(-\lambda)^q \int_{q\,m}^{v} \frac{(\frac{u}{m}-q)^{q\,p+s}(\frac{u}{m}+1)^{p-r-1}}{(q\,p+s)!(p-r-1)!}\,\frac{du}{m}
\end{aligned}$$

令 $u = m\,t$, $du = m\,dt$; 因此

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{rs} &= (-1)^{p+r-1}\sum_{q=0}^{n}\frac{m^{p\,q}(-\lambda)^q}{m^{p\,q+s+p-r-1+1}} \int_{q\,m}^{v} \frac{(u-q\,m)^{q\,p+s}(u+m)^{p-r-1}}{(q\,p+s)!(p-r-1)!}\,du \\
&= m^{-(p-r+s)} d_{rs}.
\end{aligned}$$

其次,

$$\tilde{\alpha}_r - \tilde{\lambda}\sum_{s=0}^{p-1}\tilde{d}_{rs}\,\tilde{\alpha}_s = (-\tilde{\mu})^r \exp\left[-\tilde{\mu}(\tilde{v}+\tilde{m})\right] \sum_{s=0}^{p-r-1}\frac{[\tilde{\mu}(\tilde{v}+\tilde{m})]^s}{s!}$$

意味着

$$\tilde{\alpha}_r - m^p\lambda\sum_{s=0}^{p-1} m^{-(p-r+s)} d_{rs}\,\tilde{\alpha}_s = m^r(-\mu)^r \exp\left[-\mu(v+m)\right] \sum_{s=0}^{p-r-1}\frac{[\mu(v+m)]^s}{s!}$$

因为 $\tilde{\mu}(\tilde{v}+\tilde{m}) = m\,\mu\left(\frac{v}{m}+1\right) = \mu(v+m)$; 因此

$$m^{-r}\tilde{\alpha}_r - \lambda\sum_{s=0}^{p-1} m^{-s} d_{rs}\,\tilde{\alpha}_s = (-\mu)^r \exp\left[-\mu(v+m)\right] \sum_{s=0}^{p-r-1}\frac{[\mu(v+m)]^s}{s!}$$

whic $\tilde{\alpha}_r = m^r\alpha_r$ 立即满足 $\mathbf{h}_\circ$ 具体而言, $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_{0\circ}$ 第三,

$$\tilde{\delta} = \tilde{v} - \tilde{m}\,n = \frac{v - m\,n}{m} = \frac{\delta}{m}.$$

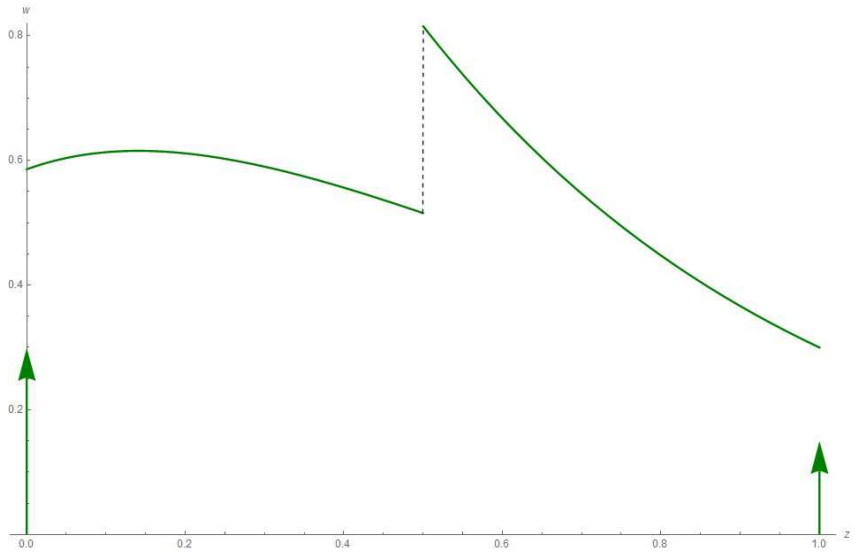


图1：$\{p, \mu, m\} = \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$的储存水位密度 $w = f(z)$图。

最后，给定 j,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(z) &= 1 - \exp\left[\tilde{\mu}(\tilde{v} - z)\right] \sum_{r=0}^{p-1} \tilde{\alpha}_r \sum_{q=0}^{n-j} (-\tilde{\lambda})^q \frac{(\tilde{v} - q\,\tilde{m} - z)^{q\,p+r}}{(q\,p+r)!} \\
&= 1 - \exp\left[(m\,\mu)\left(\frac{v}{m} - z\right)\right] \sum_{r=0}^{p-1} m^r \alpha_r \sum_{q=0}^{n-j} m^{p\,q} (-\lambda)^q \frac{(\frac{v}{m} - q - z)^{q\,p+r}}{(q\,p+r)!} \\
&= 1 - \exp\left[\mu(v - m\,z)\right] \sum_{r=0}^{p-1} m^r \alpha_r \sum_{q=0}^{n-j} \frac{m^{p\,q}(-\lambda)^q}{m^{p\,q+r}} \frac{(v - q\,m - m\,z)^{q\,p+r}}{(q\,p+r)!} \\
&= F(m\,z)
\end{aligned}$$

对于 $(j-1)\ \tilde{m} + \delta < z < j\,\tilde{m} + \delta$，即 $(j-1)\ m + \delta < m\,z < j\,m + \delta$。同理，$\tilde{F}(0) = F(0)$，其中将求和上限 $n - j$ 替换为 $\tilde{\kappa} = \kappa$。

6. Inquiry

Moran [9, 10] 为无限库容水库提出了另一种连续时间模型。令 $X(t) \sim \text{Gamma}(t, 1/\rho)$表示区间$(0, t]$内的总流入量，该过程假设为具有平稳独立增量的非负随机过程，其中 $0 < \rho < 1$ 为常数。特别地，$\mathbb{E}(X(T)) = \rho\,t$。令

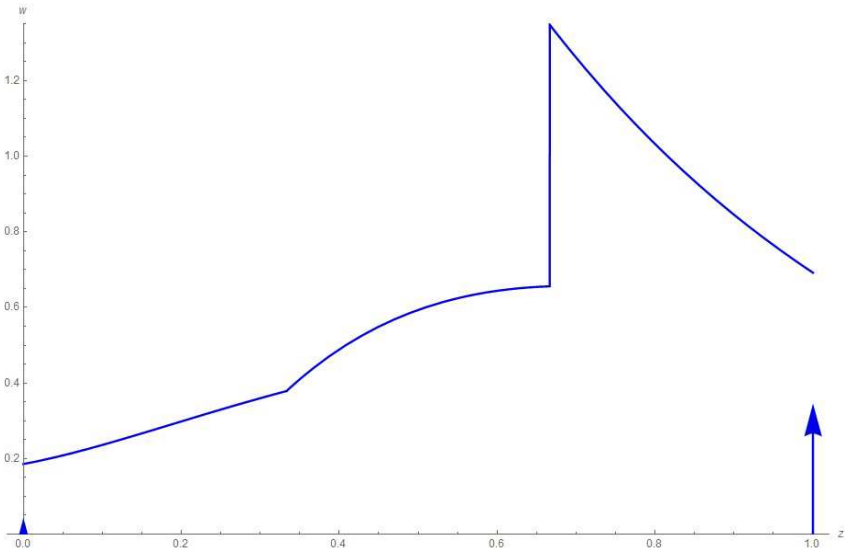


图2： $\{p, \mu, m\} = \{1, 2, \frac{1}{3}\}$的储存水位密度 $w = f(z)$图。

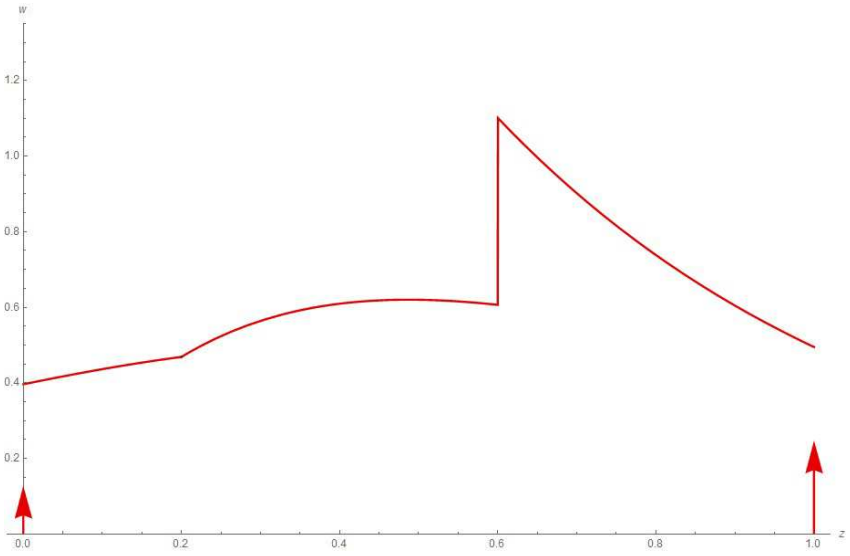


图3： $\{p, \mu, m\} = \{1, 2, \frac{2}{5}\}$的储存水位密度 $w = f(z)$图 .

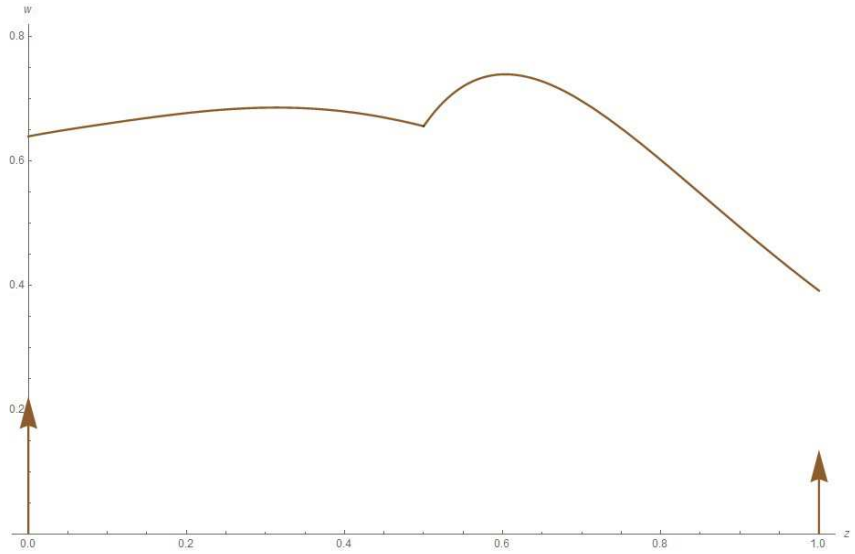


图4: $\{p, \mu, m\} = \left\{2, 4, \frac{1}{2}\right\}$ 的储存水位密度 $w = f(z)$ 图。

流出量是连续的，且速率为单位速率，但水库为空时除外。我们有

$$Z(t) = Z(0) + X(t) - t + \int_0^t 1_{\{Z(\tau)=0\}}\, d\tau$$

其中， 1_Ω 是 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ 的指示函数。通过极限论证（从离散到连续）， $t \to \infty$ 时 $Z(t)$ 的概率密度函数的拉普拉斯变换为 [11]

$$\frac{(1-\rho)\theta}{\theta - \ln(1+\rho\,\theta)}, \qquad \mathrm{Re}(\theta) > 0$$

Daniels [12] 对其进行反演，得到

$$f(z) = -(1-\rho)\int_0^\infty \frac{d}{dz}\frac{(z+w)^{w-1}\exp\left[-(z+w)/\rho\right]}{\rho^w \Gamma(w)}\, dw, \qquad z > 0$$

在 $z = 0$ 处有一个点质量 $1-\rho$。我们希望找到一种实验方法来验证这个概率密度函数。对于足够大的 t，如何高效地模拟 $Z(t)$? 如能提供帮助，我们将不胜感激。我们也想知道，是否可以重新调整 Prabhu公式，使其在这项研究中发挥作用。一个问题是， $v < \infty$ 在前文出现过，但此处为 $v = \infty$；另一个问题是， X_t 是时刻 t 的精确流入量，而 $X(t)$ 则是区间 $(0, t]$ 内的累计流入量。

7. Acknowledgements

Khaled Hamed 非常热心地回答了我的几个问题；若没有他那些极有帮助的文章 [7, 8]，这篇论文便不可能完成。尤其是，他似乎是首位明确指出当 v 不是 m 的整数倍时，偏移量 δ 所起作用的作者。我由衷感谢无数软件开发者。此处介绍的符号运算是专为 Mathematica 量身定制的，而用于检验预测的模拟则非常适合用 R 进行。

References

[1] N. U. Prabhu，《有限水坝的积分方程》，《数学季刊》9（1958年）183–188；MR0099726。[2] P. A. P. Moran，《水坝与蓄水系统的概率论：对泄放规则的修订》，《澳大利亚应用科学杂志》6（1955年）117–130；MR0077807。[3] P. A. P. Moran，《蓄水理论》，Wiley，1959年，第39–51页；MR0114254。[4] N. U. Prabhu，《排队与库存》，Wiley，1965年，第209–213页；MR0211494。[5] P. Lochert 和 R. M. Phatarfod，《水坝理论中的离散化问题》，《水资源研究》15（1979年）1593–1597。[6] E. H. Lloyd，《随机水库：蓄水分布的精确与近似评估》，《水文学杂志》151（1993年）65–107。[7] K. H. Hamed，《随机水库方程的 Prabhu 精确解的实现》，《水资源进展》32（2009年）594–606。[8] K. H. Hamed，《随机水库分析》，载于《工程水文学手册》，S. Eslamian 编，CRC Press，2014年，第531–548页。[9] P. A. P. Moran，《具有连续泄放的水坝概率论》，《数学季刊》7（1956年）130–137；MR0101573。[10] J. Gani，《蓄水系统概率论中的问题》，《皇家统计学会杂志 B辑》19（1957年）181–206；MR0092289。[11] D. G. Kendall，《水坝理论中的若干问题》，《皇家统计学会杂志 B辑》19（1957年）207–212。[12] H. E. Daniels，《关于 Gani 博士和 Kendall 先生论文的讨论》，《皇家统计学会杂志 B辑》19（1957年）224–225。

Steven Finch 麻省理工学院斯隆
管理学院 美国马萨诸塞州剑桥市
steven finch@harvard.edu