arXiv:2301.03122v2 [physics.flu-dyn] 8 Jun 2023

# 水平对流中的努塞尔数标度

**Navid C. Constantinou[1]†, Cesar B. Rocha[2], Stefan G. Llewellyn Smith[3,4], 和 William R. Young[4]**

[1]地球科学研究学院 与 ARC气候极端卓越中心，澳大利亚国立大学，堪培拉，ACT 2601，澳大利亚

[2]圣保罗大学海洋研究所，圣保罗，SP 05508-120，巴西

[3]加利福尼亚大学圣迭戈分校机械与航空航天工程系，拉霍亚，CA 92093-0411，美国

[4]加利福尼亚大学圣迭戈分校斯克里普斯海洋研究所，拉霍亚，CA 92093-0213，美国

（2023年1月收到）

我们报告了普朗特数$Pr = 1$条件下水平对流（HC）的数值研究，分别采用无滑移和自由滑移边界条件。我们获得了二维和三维解，并确定了瑞利数$Ra$与努塞尔数$Nu$之间的关系。在二维情况下，我们将$Ra$从0变化到$10^{14}$。在范围$10^6 \lesssim Ra \lesssim 10^{10}$内，$Nu$–$Ra$关系为$Nu \sim Ra^{1/5}$。当$Ra$大于约$10^{11}$时，我们发现一个二维流态，其中$Nu \sim Ra^{1/4}$在三个数量级范围内成立，直至二维$Ra$的最高值。在三维情况下，最大$Ra = 10^{11.5}$时，我们仅发现$Nu \sim Ra^{1/5}$。这些结果适用于自由滑移和无滑移边界条件。$Nu \sim Ra^{1/4}$流态具有双边界层（BL）：较薄的边界层（厚度为$\sim Ra^{-1/4}$）嵌套在较厚的边界层（厚度为$\sim Ra^{-1/5}$）之内。决定$Nu$的$Ra^{-1/4}$边界层厚度与水平对流中的科尔莫戈洛夫尺度和巴切勒尺度一致。

数值和理论结果表明，三维水平对流在定性和定量上都与二维水平对流相似。在相同的瑞利数下，三维努塞尔数 比二维努塞尔数 高不到 20%，也就是说，三维对热输运的增强作用很小。边界条件比维数更为重要：二维自由滑移解的努塞尔数 高于三维无滑移解。利用水平对流的机械能功率积分，我们证明在相同瑞利数下，三维水平对流的涡量均方值几乎与二维水平对流相等。因此，应变介导的涡旋拉伸不会在三维水平对流中引起涡量放大。

## 1. 引言

水平对流（HC）是指通过沿单一水平表面（例如矩形腔体的顶部）施加非均匀加热和冷却而驱动的对流。其他边界均无热通量（Hughes & Griffiths 2008）。海洋学是研究水平对流的重要动机之一（Sandstr¨om 1908；Rossby 1965年；Coman 等2006），在这一背景下，水平热输运对施加于海洋表面的浮力强迫强度的依赖关系是一个核心问题。浮力强迫通过水平对流瑞利数 瑞利数量化，而水平热输运则通过适当定义的努塞尔数 努塞尔数 （Rocha等 2020*b*）。

水平对流（HC）与瑞利-贝纳德对流形成了有趣的对照，因为在水平对流中，区域内部的浮力输运无法轻易解释为热羽流的垂直运动。相反，在水平对流中，当非均匀加热的表面温度高于平均值时，热量进入流体；当其温度低于平均值时，热量则离开流体。这种水平输运与非均匀表面附近显著的边界层（BL）有关。

† 通信邮箱：navid.constantinou@anu.edu.au

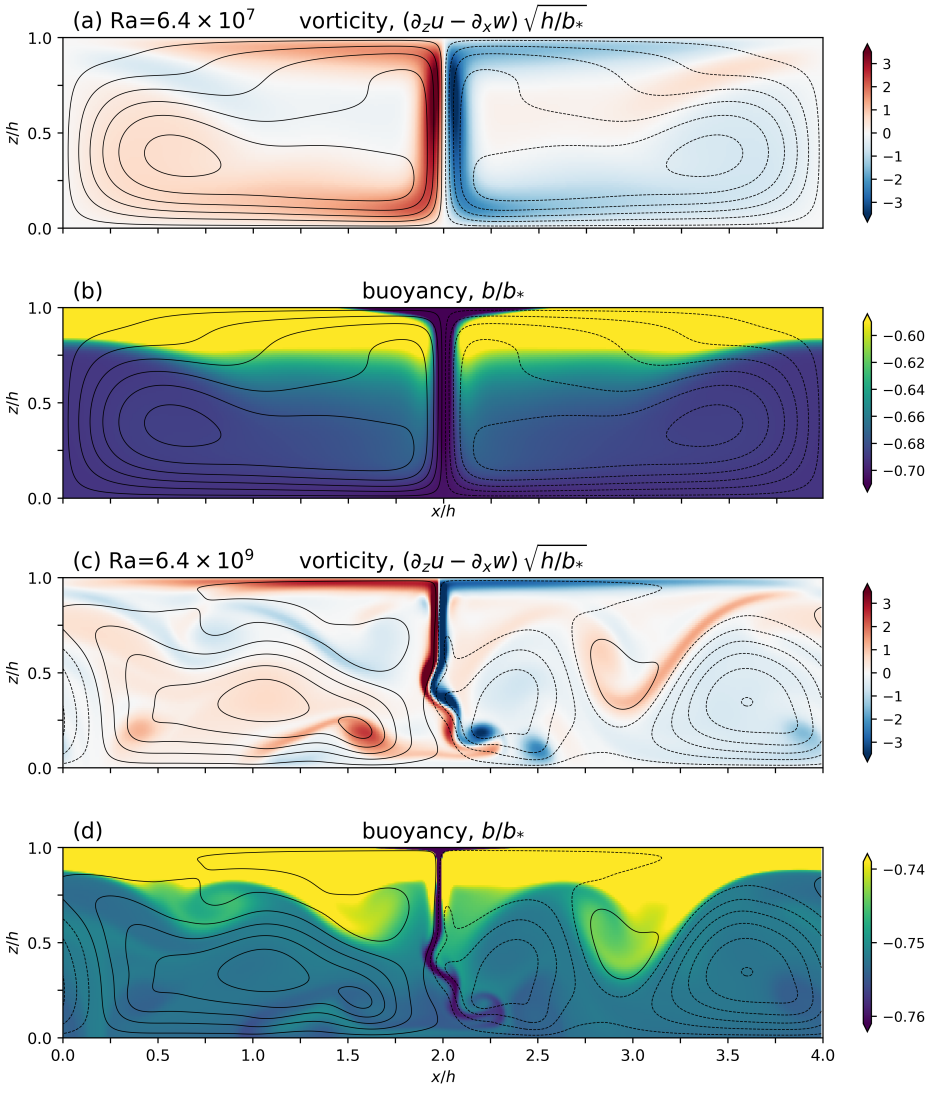


图 1：二维自由滑移（2DFS）水平对流的快照（$Ra = 6。4 \times 10^7$ 面板 (a) 和 (b) 中，以及$Ra = 6。4 \times 10^9$ 面板 (c) 和 (d) 中；$Pr = 1。$等值线表示流线。顶面处 $-1 \leqslant b/b_\star \leqslant +1。$（b）和（d）中较窄的浮力色标范围使极小的内部区域浮力变化清晰可见。（2.4）中的正弦形表面浮力定义了浮力标度 $b_\star$；$h$ 为层深。

### 1.1. 罗斯贝标度

关于高瑞利数 变化下水平对流努塞尔数 的最早研究结果是Rossby (1965年)，

$$Nu \sim Ra^{1/5}\, Pr^{0}\,, \tag{1.1}$$

其中普朗特数 为普朗特数。（参数瑞利数、普朗特数和努塞尔数 在第2节中定义。）Rossby 的研究受到使用五种普朗特数值（范围为 13 到 8500）的实验启发。Rossby 推导出（1.1）（第4节回顾）的推理假设黏性扩散边界层动力学，并以普朗特数 $\gg 1。$

“罗斯贝标度”通常指（$p = 1/5$）这一指数（见1.1），但未提及普朗特数$^0$ 和

| 引文 | $Pr$ | $\ell_x/h$ | 最大 瑞利数 | BC | 强迫 | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rossby (1998年) | 10 | 1 | $10^8$ | FS | 线性 | $\frac{1}{5}$ |
| Siggers等(2004) | $\{15, \cdots, 4\}$ | 1 | $\approx 10^9$ | FS | sin | $\frac{1}{5}$ |
| Chiu-Webster 等(2008) | $\infty$ | 1 | $10^{10}$ | 自由滑移, 无滑移 | 线性 | $\frac{1}{5}$ |
| Sheard 与 King(2011) | 6.14 | {1, 1.6, 6.25} | $10^{12}$ | NS | 线性 | $\frac{1}{5}$, $> \frac{1}{5}$? |
| Ramme 与 Hansen (2019) | $\infty$ | 1 | $10^{10}$ | FS | 线性 | $\frac{1}{5}$ |
| | $\infty$ | 1 | $10^{10}$ | FS | 各种 | $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$? |
| Tsai等人 （2020） | 6.14 | 6.25 | $10^{12.5}$ | NS | 线性 | $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ |
| | 6.14 | 6.25 | $10^{12.5}$ | NS | 各种 | $\frac{1}{5}$ |
| 本文 | 1 | 4 | $10^{13.8}$ | FS, NS | sin | $\frac{1}{5}$ , $\frac{1}{4}$ |

表1：使用二维直接数值模拟总结七项努塞尔数–瑞利数水平对流标度研究。普朗特数 Pr 固定为第2列中的值， $Ra$ 发生变化。在最后一列中， $p$ 是式（1.2）中的指数。“强迫”列指表面浮力分布 $bs(x)$：“线性”是 $bs(x) \propto x$；“sin”是正弦形；“各种”是其他 $bs(x)$分布。在边界条件（边界条件）列中，NS 表示无滑移，FS 表示自由滑移。Siggers 等（2004）使用了 0.2 至 4 之间的七个 $Pr$。Sheard 和 King（2011）声称，当 Ra $\gtrsim 10^{10}$时， $p$ 会升高至 1/5 以上。Ramme & Hansen（2019）表明，在 $10^8 \lesssim$ Ra $\leqslant 10^{10}$的范围内，取决于表面强迫分布， $p = 1/4$ 可能比 $p = 1/5$更为合适。

也没有提到 Rossby 的要求，即普朗特数 $\gg 1$。Rossby 知道普朗特数[0]：在Rossby(1998年)中，他证明了在以下范围内，努塞尔数对普朗特数的依赖较弱： $3 \leqslant$ 普朗特数 $\leqslant 100$ (固定瑞利数介于 $10^4$ 和 $10^8$之间）。鉴于下文讨论的其他标度律，它们的形式均为：

$$Nu \sim Ra^p\, Pr^q\,, \tag{1.2}$$

我们将“罗斯贝标度”一词专用于（$p$， $q$） $= (1/5, 0)$，且 普朗特数 $\gg 1$。

### 1.2. 指数为 $p = 1/5$ 的非 Rossby 标度

在瑞利数较大但尚属中等的情况下瑞利数，指数 $p = 1/5$ 得到了实验室研究和数值解的支持（ Rossby 1998年； Mullarney 等 2004； Siggers等 2004； Wang 与 Huang 2005； Chiu-Webster 等 2008； Sheard 与 King 2011； Ilicak &Vallis 2012）。表1 和2总结了基于水平对流二维和三维数值模拟而提出的各种努塞尔数–瑞利数 标度律： $p = 1/5$ 是最常见的瑞利数瑞利数指数。

指数 $p = 1/5$ 出现得如此频繁，且存在于如此不同的参数条件下，因此 Rossby 的普朗特数 $\gg 1$ 标度论证是否必要，值得怀疑。例如，图 1展示了两个普朗特数 $= 1$ 数值解，二者均处于相同的 $p = 1/5$ 标度区间（见第 3节）。图 2(a) 中的普朗特数 $= 0.1$ 个点（Reiter & Shishkina Reiter& Shishkina (2020）则是一个 $p = 1/5$ 标度的例子，其普朗特数 $\ll 1$。

Gayen 等人 （2014年）指出了一个重要观点，即指数 1/5 也会出现在表面边界层中惯性与浮力之间的非 Rossby 平衡下。这种平衡导致

| 引文 | $Pr$ | $l_x/h$ | $l_y/h$ | 最大瑞利数 | BC | 强迫 | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gayen等 （2014年） | 5 | $6\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $10^{11.8}$ | NS | pwc | $\frac{1}{5}$ |
| Reiter & Shishkina (2020) | $\{1, 10\}$ | 10 | 1 | $10^{12.5}$ | NS | pwc | $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \approx \frac{1}{4}$ |
| | $\frac{1}{10}$ | 10 | 1 | $\sim 10^{11.7}$ | NS | pwc | $\frac{1}{5}$ |
| 本研究 | 1 | 4 | 1 | $10^{11.5}$ | FS, NS | sin | $\frac{1}{5}$ |

表 2：使用三维直接数值模拟研究努塞尔数–瑞利数 水平对流标度的三项研究概要。普朗特数 $Pr$ 固定为第 2 列中的数值，而 $Ra$ 则变化。在最后一列中，$p$ 是（1.2）中的指数。“强迫”列指表面浮力分布 $b_s(x)$：“pwc”表示分段常数表面浮力分布，“sin”表示（2.4）中的正弦分布。

非 Rossby 标度

$$Nu \sim Ra^{1/5} Pr^{1/5} . \tag{1.3}$$

Shishkina 等 (2016) 提出了一种$Pr \ll 1$ 非 Rossby 标度论证，得出

$$Nu \sim Ra^{1/5} Pr^{1/10} . \tag{1.4}$$

导致（1.1）、（1.3）和（1.4）的标度论证将在第4 节回顾，并纳入统一的框架。（1.3）和（1.4）中的结果或有助于解释，在偏离 Rossby 的/5主要指数 $p$ 普朗特数$Pr \gg 1$ 情形时，1

### 1.3. 更高的瑞利数和 $p = 1/4$

在瑞利数适度较大的情况下，$10^8 \lesssim \mathrm{Ra} \lesssim 10^{10}$，Tsai 等人（2020）发现 $p = 1/5$。但在 $10^{10} \lesssim \mathrm{Ra} \lesssim 10^{14}$的范围内，且假设施加的表面浮力随水平坐标 $x$线性变化时，Tsai 等人（2020）报告了标度关系 $p = 1/4$。换言之，在普朗特数固定时，随着瑞利数增加，（1.2）中的主要指数 $p$ 从 1/5 增至 1/4。第 3 节中我们报告了相同结果：瑞利数增加且普朗特数 $= 1$ 时，会使 $p$ 从 1/5 增至 1/4。图1中的解处于 $p = 1/5$ 标度区间，而图2中的解则处于 $p = 1/4$ 的区间。随着瑞利数增加，$p$ 的增大伴随着水平对流结构的定性变化。比较图2和图1可以发现，流动结构发生了显著转变：图1中的层流转变为图2中的二维湍流。图2中的轴对称涡旋表明，内部动力学接近于涡旋气体的状态，这是自由演化的非分层二维湍流的典型特征（McWilliams 1984、1990；Benzi 等人 1987、1988；Carnevale 等人 1991；Dritschel 等人 2008）。

除一个例外外，表 1 和表 2 中的研究均报告称，当固定普朗特数 Pr（即使 $\mathrm{Pr} \leqslant 1$）并从较小值开始增大瑞利数 Ra 时，$p = 1/5$ 是观察到的第一个幂律标度。根据 Tsai 等人（2020）的研究以及第 3 节中的结果，人们或许可以推测，在足够高的 Ra 下，第一个指数 $p = 1/5$ 会被 $p = 1/4$ 取代。然而，例外是 Reiter 与 Shishkina（2020）报告的“复杂的标度依赖关系”。在 $\mathrm{Pr} = 1$ 和 10、且 Ra 相对较低时，Reiter 与 Shishkina（2020）首先报告了一个 $p = 1/4$ 的区间。随着 Ra 增大，系统转变至 $p = 1/5$；在 Ra 进一步增大后，又发生第二次转变，回到 $p \approx 1/4$。情况还因以下发现而更加复杂：当 $\mathrm{Pr} = 0.1$ 时，Reiter 与 Shishkina（2020）只发现了一个标度区间，其标度为 $p = 1/5$。

三维性使Reiter & Shishkina (2020) 区别于表1中的二维研究。但 Gayen 等人(2014) 的可比三维研究仅发现 $p = 1/5$ 种状态。在

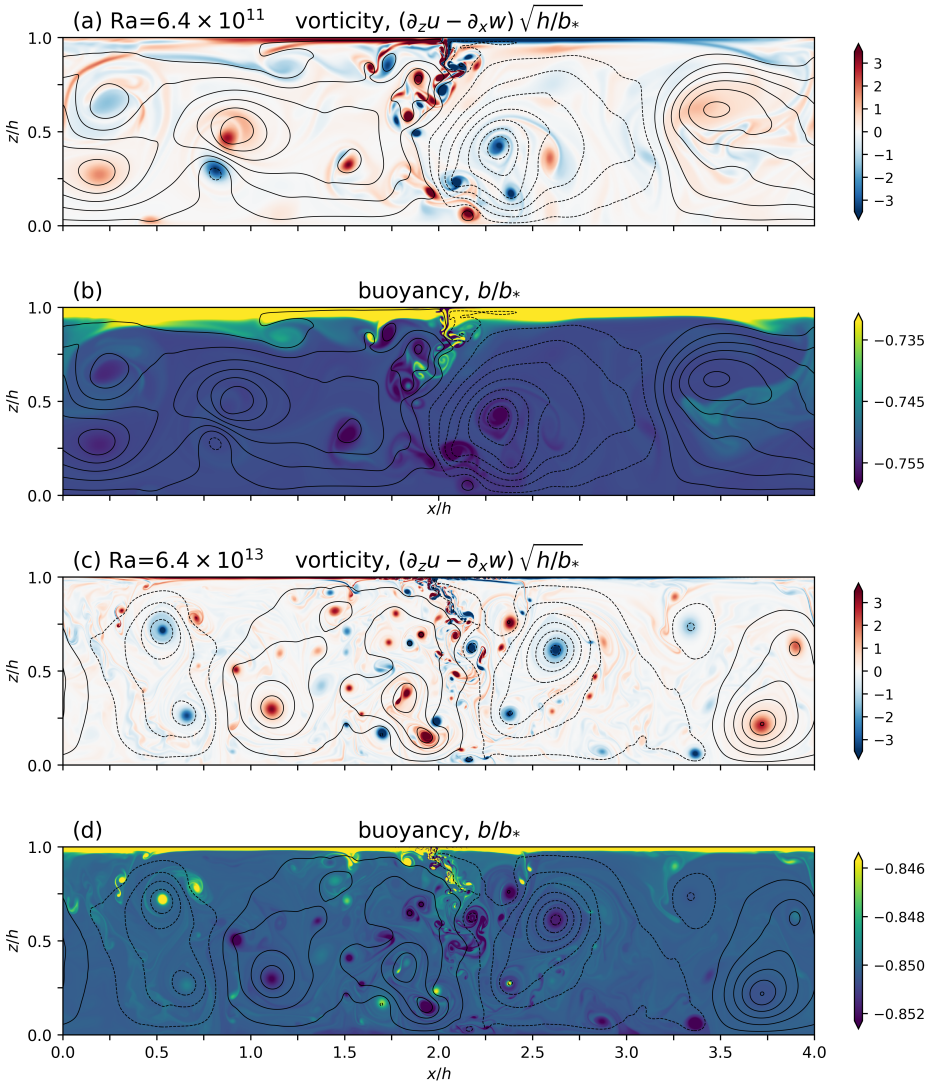


图2： 二维自由滑移 解在瑞利数 = 6。$4 \times 10^{11}$ 对应面板 (a) 和 (b)，以及瑞利数 = 6。$4 \times 10^{13}$ 对应面板 (c) 和 (d)；普朗特数 = 1。等值线表示流线。此图采用真实长宽比，因此轴对称涡旋看起来呈圆形。浮力色标范围较窄，以显示内部区域中微小的浮力变化；这些变化局限于轴对称涡旋的核心内。在图瑞利数 跨越六个数量级的范围内，在图1 和2中，涡量随$\sqrt{b_\star/h}$标度变化。

以下报告的三维解中，我们也只发现 $p = 1/5$ 种状态。 Reiter & Shishkina (2020) 的计算达到了文献报道的三维水平对流中最高的 瑞利数 。但上述差异出现在中等 瑞利数 下，此时与其他水平对流研究（包括本研究）的重叠范围有数个数量级。与表Reiter & Shishkina (2020) 的研究与表中其他工作最显著的差异在于，当 1和2的普朗特数 = 1 以及 10 时，指数 $p = 1/4$ 是瑞利数瑞利数 从较小值增大时遇到的第一个指数。用作表面边界条件的分段常数浮力剖面可能是 瑞利数–努塞尔数 标度与 Reiter & Shishkina (2020) 所报告结果不同的原因。我

支持 o f the hypothesis that th e 表面 face bound ary 对流 dition might aff ect $p$, t he 2D

普朗特数 $= \infty$ 对 Ramme 与 Hansen (2019) 的研究表明，随着瑞利数 $\approx 10^8$，流动会从稳态转变为非稳态。在分段常数浮力剖面的情况下（但线性表面浮力剖面时不会），这种转变伴随着 $p$ 从 1/5 增加到 $\approx 1/4$。然而，值得注意的是，与 Rossby (1965年) 的结论一致，并且与 Chiu-Webster 等人 (2008) 的结果相符，Ramme 与 Hansen (2019) 确实发现，随着 $p = 1/5$ 是瑞利数从较小值开始增加时首先出现的指数。瑞利数。

第 2 节阐述水平对流问题。第 3 节是关于水平对流的数值研究，其中我们在普朗特数为 $= 1$ 时改变瑞利数。所有解均采用式 (2.4) 中的正弦形表面浮力分布。解组分为四类，分别对应无滑移和自由滑移边界条件，以及二维和三维解。第 4 节回顾了各种导出 $p = 1/5$ 的瑞利数–努塞尔数标度论证。我们利用水平对流的机械能功率积分，将这些论证纳入统一框架。第 4 节还表明，$p = 1/4$ 标度区间具有“双边界层”特征：一层厚度为 $\sim \mathrm{Ra}^{-1/4}$ 的薄边界层，嵌套在一层厚度为 $\sim \mathrm{Ra}^{-1/5}$ 的较宽边界层内。第 5 节进一步刻画了 $p = 1/4$ 标度区间的双边界层结构。第 6 节表明，假设内边界层的厚度由水平对流的 Kolmogorov 和 Batchelor 长度尺度决定，即可得出指数 $p = 1/4$。第 7 节表明，应变介导的涡旋拉伸所导致的涡量放大在三维水平对流中并不起作用：当瑞利数 $\to \infty$ 时，二维和三维解中的均方涡量几乎相同。第 8 节为结论。

## 2. 水平对流问题的表述

我们考虑密度为 $\rho = \rho_0(1 - g^{-1}b)$ 的 Boussinesq 流体，其中 $\rho_0$ 是恒定的参考密度，$b$ 为“浮力”。例如，如果流体因温度变化而分层，则 $b = g\alpha(T - T_0)$，其中 $T_0$ 为参考温度，$\alpha$ 为热膨胀系数。Boussinesq 运动方程为

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}p = b\hat{\boldsymbol{z}} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}\,, \tag{2.1}$$

$$b_t + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}b = \kappa\nabla^2 b\,, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0\,. \tag{2.3}$$

运动黏度为 $\nu$，热扩散率为 $\kappa$。

### 2.1. 水平对流边界条件和控制参数

我们假设流体占据一个深度为 h、长度为 $\mathrm{l}_x$、宽度为 $\mathrm{l}_y$ 的区域；并假设在 $x$ 和 $y$ 方向上具有周期性。在底面（$z = 0$）和顶面（$z = \mathrm{h}$），速度 $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ 的主要边界条件为 $w = 0$；黏性边界条件可以是无滑移（NS），$u = v = 0$，也可以是自由滑移（FS），$u_z = v_z = 0$。在底部 $z = 0$，浮力边界条件为无通量，$\kappa b_z = 0$。在顶部 $z = \mathrm{h}$，边界条件为 $b = b_{\mathrm{s}}(x)$，其中顶面浮力 $b_{\mathrm{s}}$ 是 $x$ 的预设函数。我们采用以下表面浮力场

$$b_{\mathrm{s}}(x) = b_\star \cos kx\,, \tag{2.4}$$

其中 $k = 2\pi/l_x$。

作为海面条件的一种理想化处理，自由滑移 优于 无滑移。但考虑不同黏性边界条件的主要原因，是检验标度论证。我们发现，两种边界条件下努塞尔数–瑞利数标度之间仅存在细微的定量差异。在下文所述的数值解中，努塞尔数–瑞利数 标度关系的主要特征与黏性边界条件无关。

该问题由四个无量纲参数表征：瑞利数和普朗特数

$$Ra \overset{\text{def}}{=} \frac{\ell_x^3 b_\star}{\nu\kappa}, \qquad \text{and} \qquad Pr \overset{\text{def}}{=} \frac{\nu}{\kappa}, \tag{2.5}$$

以及长宽比$l_x/h$ 和 $l_y/h$。在 $y$ 采用周期性边界条件（无侧壁）时，二维水平对流是以下特殊情形$l_y/h = 0$。(2.5)中的瑞利数采用 $b_\star$ （2.4）中正弦函数的振幅定义。其他作者使用浮力的总差值（峰谷差）来定义瑞利数。为了便于比较，可以将第3节中的瑞利数数值乘以二。

## 2.2. 机械能耗散

我们用上横线表示对 $x$、 $y$和 $t$在任意固定 $z$ 处的平均，并用角括号$\langle\,\rangle$ 表示对 $x$、 $y$、 $z$和 $t$的总体积平均。采用这一记号，我们回顾Paparella 和 Young(2002)的一些结果，供下文使用。

水平对流方程（2.2）沿水平方向取平均，可得零通量约束

$$\overline{wb} - \kappa \bar{b}_z = 0\,. \tag{2.6}$$

取 $\langle \boldsymbol{u}\cdot$(2.1)$\rangle$，得到动能功率积分

$$\varepsilon = \langle wb \rangle\,, \tag{2.7}$$

其中 $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \nu|\boldsymbol{\nabla u}|^2$ 为动能耗散率， $wb$ 为势能与动能之间的转换率。

将（2.6）从 $z = 0$ 到 $h$进行垂直积分，并利用 $b_s(x) = \overline{0}$，可得到 $\langle wb\rangle$的另一种表达式。将其代入（2.7）

$$\varepsilon = -\frac{\kappa \bar{b}(0)}{h}\,. \tag{2.8}$$

¯在（2.8）中， $b(0)$ 表示底部浮力的 $(x, y, t)$平均值 $z = 0$。

## 2.3. *The Nusselt number of horizontal convection*

按照 Rocha等人 (2020*b*) 的做法，我们采用浮力方差耗散，

$$\chi \overset{\text{def}}{=} \kappa\langle|\boldsymbol{\nabla} b|^2\rangle\,, \tag{2.9}$$

将努塞尔数定义为

$$Nu \overset{\text{def}}{=} \chi \,/\, \chi_{\text{diff}}\,. \tag{2.10}$$

上式中， $\chi_{\text{diff}} \overset{\text{def}}{=} \kappa|\boldsymbol{\nabla} b_{\text{diff}}|^2$ 表示扩散解的浮力耗散，即$\kappa\nabla^2 b_{\text{diff}} = 0$ 其中 $b_{\text{diff}}$ 满足与 $b$相同的边界条件。

将变分方法应用于水平对流（Siggers 等 2004；Winters 和 Young 2009；Rocha 等 2020*a*）可得到的界，其形式为努塞尔数 $\lesssim$ 瑞利数$^{1/3}$。指数 1/3 明显大于数值研究（包括本文工作）中水平对流所报告的指数 1/5 和 1/4。

Rocha 等 （2020*b*）还表明，存在一个“表面努塞尔数”

$$Nu_s \overset{\text{def}}{=} \overline{b_s\, \kappa b_z(h)} \,\Big/\, \overline{b_s\, \kappa b_{\text{diff}\,z}(h)}\,. \tag{2.11}$$

上述， $\kappa b_z(h)$ 是通过顶面 $z = h$ 的浮力通量。在充分进行时间平均后，努塞尔数 = 努塞尔数$_s$。内部熵产生 $\chi$ 由熵通量

| | 自由滑移 努塞尔数 | | 无滑移 努塞尔数 | | 最高分辨率 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Ra$ | 2D ○ | 3D ● | 2D □ | 3D ■ | $n_x, n_z$ |
| 1.28e03 | 1.00 | 1.00† | 1.00 | 1.00† | 128, 32 |
| 3.20e03 | 1.02 | 1.02† | 1.00 | 1.00† | 128, 32 |
| 4.48e03 | 1.04 | 1.04† | 1.00 | 1.00† | 128, 32 |
| 6.40e03 | 1.08 | 1.08† | 1.01 | 1.01† | 128, 32 |
| 1.28e04 | 1.22 | 1.22† | 1.02 | 1.02† | 128, 32 |
| 1.92e04 | 1.38 | 1.38† | 1.04 | 1.04† | 128, 32 |
| 3.20e04 | 1.64 | 1.64† | 1.11 | 1.11† | 128, 32 |
| 6.40e04 | 2.07 | 2.07† | 1.28 | 1.28† | 128, 32 |
| 1.28e05 | 2.55 | 2.55† | 1.59 | 1.59† | 128, 32 |
| 2.56e05 | 3.04 | 3.04† | 1.96 | 1.96† | 128, 32 |
| 6.40e05 | 3.71 | 3.71† | 2.47 | 2.47† | 128, 32 |
| 1.60e06 | 4.50 | 4.50† | 3.01 | 3.01† | 256, 64 |
| 3.20e06 | 5.14 | 5.14† | 3.45 | 3.45† | 256, 64 |
| 6.40e06 | 5.80 | 5.80† | 3.93 | 3.93† | 256, 64 |
| 1.60e07 | 6.77 | 6.77† | 4.70 | 4.70† | 256, 64 |
| 3.20e07 | 7.61 | 7.61† | 5.38 | 5.44♯ | 256, 64 |
| 6.40e07 | 8.65 | 8.68* | 6.17 | 6.59♯ | 256, 64 |
| 1.60e08 | 10.48 | 10.57* | 7.41 | 8.46♯ | 256, 64 |
| 3.20e08 | 12.17* | 12.19* | 8.51 | 10.11♯ | 256, 64 |
| 6.40e08 | 14.01* | 14.09* | 9.69 | 11.97* | 256, 64 |
| 1.60e09 | 16.99* | 17.07* | 11.77* | 14.75* | 256, 64 |
| 3.20e09 | 19.60* | 20.32* | 13.53* | 17.20* | 512, 128 |
| 6.40e09 | 22.41* | 24.64* | 15.35* | 19.86* | 512, 128 |
| 1.60e10 | 27.32* | 31.38* | 18.83* | 23.67* | 512, 128 |
| 3.20e10 | 31.48* | 37.28* | 21.88* | 27.61* | 512, 128 |
| 6.40e10 | 36.08* | 43.94* | 25.50* | 30.68* | 512, 128 |
| 1.28e11 | 41.85* | 49.74* | 29.87* | 36.67* | 1024, 256 |
| 1.60e11 | 43.80* | | 32.02* | | 1024, 256 |
| 3.20e11 | 50.71* | 59.91* | 37.45* | 44.01* | 1024, 256 |
| 6.40e11 | 58.36* | | 44.23* | | 1024, 256 |
| 1.60e12 | 71.43* | | 55.65* | | 1024, 256 |
| 3.20e12 | 86.26* | | 66.97* | | 2048, 512 |
| 6.40e12 | 101.32* | | 78.86* | | 4096, 1024 |
| 1.60e13 | 128.44* | | 97.66* | | 4096, 1024 |
| 6.40e13 | 178.55* | | 133.16* | | 4096, 1024 |

表3：努塞尔数–瑞利数水平对流直接数值模拟数据。所有计算均具有 $Pr = 1$ 和$l_x/h = 4$。三维计算具有$l_y/h = 1$ 和$n_y = n_z$。表面浮力采用式（2.4）中的正弦函数。非定常解用努塞尔数 $*$ 上的$Nu$上标表示；三维计算中严格的二维解（不依赖 $y$，且 $v = 0$）以†为上标标记†。四个带上标无滑移的计算 ♯ 为三维稳态计算。

通过表面 $z = h$ 得到平衡。努塞尔数$_s$ 是通过表面的无量纲熵通量。在下文所述的数值解中，时间平均是在有限时间区间内计算的，努塞尔数 $\approx$ 努塞尔数$_s$ 可用于检验估算的努塞尔数。

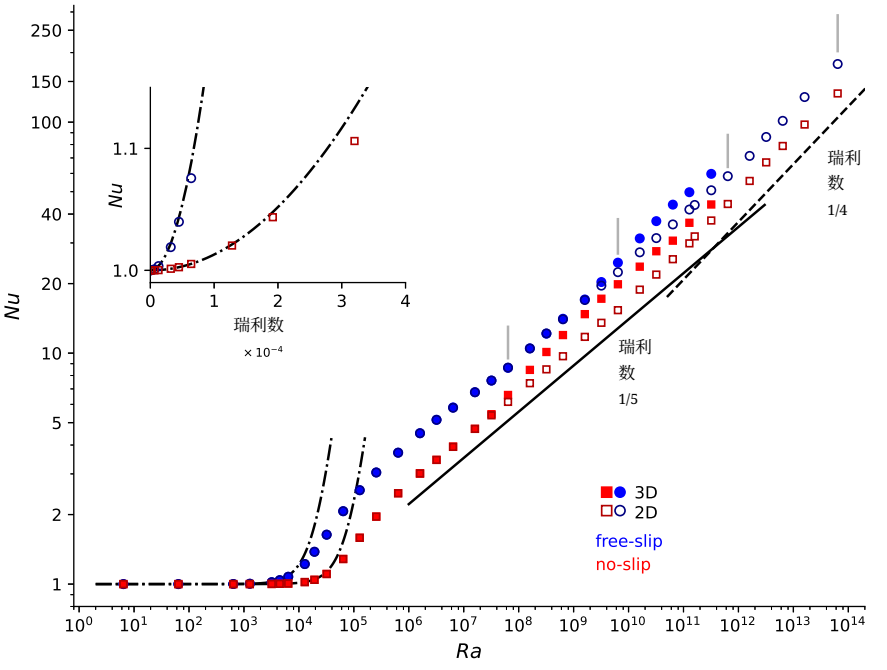


图 3：努塞尔数的变化 $Nu$ 随瑞利数 瑞利数 变化，数据取自表 3。插图对比了低-瑞利数 数值结果与低-瑞利数 解析结果（3.3）和（3.4）。一些实心标记与空心标记重叠，表明三维解演变为二维解，或者三维性较弱。四条灰色竖线段标出了图瑞利数中解对应的瑞利数，图 1 和 2。

## 3. 水平对流的数值研究（普朗特数 $= 1$

本节介绍数值研究的结果，旨在刻画努塞尔数 努塞尔数 在（2.10）中随 瑞利数 变化的情况。计算使用谱框架 Dedalus 进行，该框架用于求解偏微分方程（Burns 等 2020，www.dedalus-project.org）。水平方向的周期方向采用傅里叶基，垂直方向采用切比雪夫基；方程使用四阶隐式-显式龙格–库塔格式进行时间步进。

我们仅关注 普朗特数 $= 1$ 和正弦表面浮力强迫 $b_s(x)$ 在（2.4）中的情形。我们讨论无滑移 无滑移 和 自由滑移 边界条件，并考虑长宽比为.....的二维解

$$\ell_x/h = 4\,, \qquad \ell_y/h = 0\,, \tag{3.1}$$

以及.....的三维解

$$\ell_x/h = 4\,, \qquad \ell_y/h = 1\,. \tag{3.2}$$

因此，我们有四组解：2DFS、3DFS、二维数值模拟和三维直接数值模拟。努塞尔数的估算结果汇总于表3 和图3。

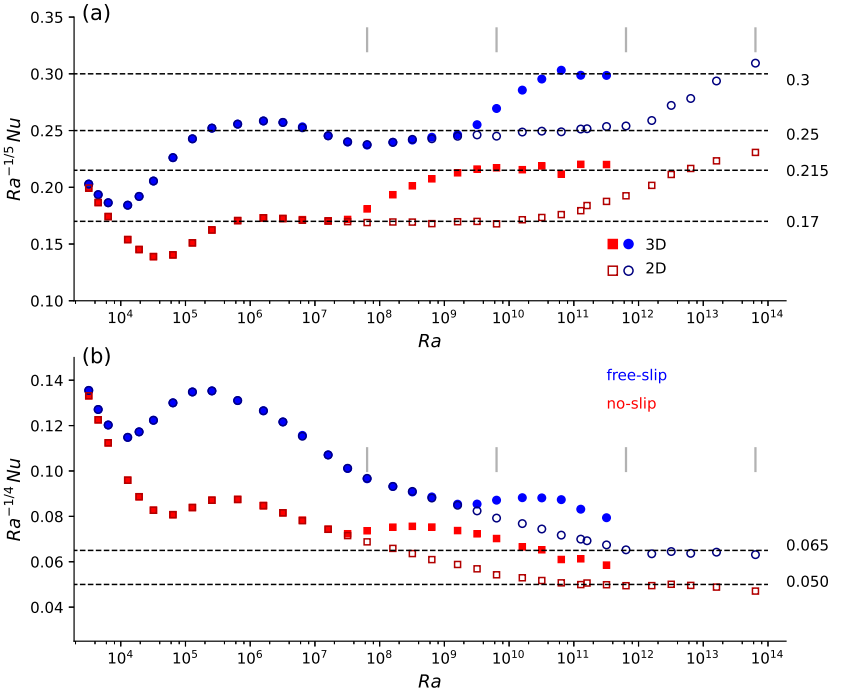


图 4：补偿努塞尔数的变化：(a)瑞利数$^{-1}/^{5}$努塞尔数 和 (b) 瑞利数$^{-1}/_{4}$努塞尔数 随瑞利数 瑞利数变化。四段灰色竖线标出了图 瑞利数1 和 2中的解所对应的数值。

### 3.1. 低瑞利数区间

附录瑞利数较低区间的分析A 表明，当$l_x/h = 4$ 时，努塞尔数偏离 1 的首个变化量为

$$Nu^{FS} = 1 + \left(\frac{Ra}{21\,567.5}\right)^2 + \mathrm{ord}\left(Ra^4\right), \tag{3.3}$$

and

$$Nu^{NS} = 1 + \left(\frac{Ra}{87\,789.8}\right)^2 + \mathrm{ord}\left(Ra^4\right). \tag{3.4}$$

低瑞利数区间意味着式（3.3）和（3.4）中的 $\mathrm{Ra}^2$ 项小于 1，即对流浮力输运仅使扩散输运略有增强。对于 FS，低瑞利数意味着 Ra 略小于约 $2.5 \times 10^3$；对于 NS，低瑞利数意味着 Ra 略小于约 $10^4$。图 3 插图中将这些解析结果与数值解进行了比较。例如，当 Ra 为 $= 6.4$ 时，二维有限差分谱解的 Nu 为 $-1 = 8.8 \times 10^{-8}$；当 Ra 为 $= 640$ 时，Nu 为 $-1 = 8.8 \times 10^{-4}$。当 Ra $< 10^3$ 时，式（3.3）和（3.4）中的近似非常准确。表3未包含这些极低瑞利数的结果。

### 3.2. 努塞尔数–瑞利数标度区间：$p = 1/5$和 $p = 1/4$

在 $Ra \sim 10^4$ 到 $10^5$ 之间，我们看不出 $Nu$ 与 $Ra$ 之间存在简单关系。但当 $Ra$ 大于约 $6.4 \times 10^5$ 时，我们发现了 $p = 1/5$ 标度，

$$Nu \sim K_{1/5} Ra^{1/5}, \tag{3.5}$$

在全部四组解中。从大约瑞利数 $\sim 10^{11}$ 开始，在 二维数值模拟 解组中，以及 $10^{12}$ 开始，在2DFS 解组中，标度区间从（3.5）转变为 $p = 1/4$ 标度

$$Nu \sim K_{1/4} Ra^{1/4}. \tag{3.6}$$

具有无滑移边界条件的 $p = 1/4$ 区间，此前已有报道，见 无滑移 边界条件，见 Tsai等人（(2020)）。

图 4 展示了图 3中的数据，并在重新绘制时采用了补偿后的努塞尔数 瑞利数 $^{-1/5}$努塞尔数 （a）和 瑞利数$^{-1/4}$努塞尔数 （b）。表 4 汇总了对选定范围内的 瑞利数–努塞尔数 数据进行最小二乘拟合得到的指数。最小二乘指数总体上与通过目视检查图 4 及其他补偿图确定的标度区间相符。我们采用最小二乘法，因为它客观且可复现。最小二乘法还可评估估计指数对假定标度范围起始点和终止点的敏感性。

### 3.3. 无滑移解的讨论

我们首先考察 二维数值模拟 解集。在表 $p = 1/5$ 标度（3.5）出现在表 4第 1 行所示的四个数量级范围内。这是图 $K_{1/5} = 0$。17 中的4(a) 所示的平台。指数和前因子 $K_{1/5}$ 的最小二乘估计对范围变化具有稳健性，例如表 4第 2 行所示。二维数值模拟 解集 在约 $p = 1/4$ 标度（3.6）处转变，瑞利数 $= 10^{11}$ 并形成图 $K_{1/4} = 0$。05 处的平台，见图 4(b)；参见表 4第 4 至 6 行。

三维直接数值模拟解集的情况更为复杂。在中等瑞利数下（表4第 7 至 9 行），三维直接数值模拟解与对应的二维数值模拟解一致，标度再次为（3.5），$K_{1/5} = 0.17$。当临界瑞利数约为 $3.2 \times 10^7$ 时，三维直接数值模拟解集对三维扰动变得不稳定。随着瑞利数进一步增大，三维直接数值模拟解的努塞尔数高于对应的二维数值模拟解：在 $3.20 \times 10^7 \leqslant \mathrm{Ra} \leqslant 3.20 \times 10^8$ 区间内的四个稳态三维直接数值模拟解即为此例。人们或许会认为，三维流动的发展（尽管是稳态三维流动）预示着一个新标度区间的开始，其指数 $p$ 大于 1/5。然而，遗憾的是，这正是 Gayen 等人（2014）发现的转变：在约 $\mathrm{Ra} = 1.60 \times 10^9$ 时，三维直接数值模拟解进入新的 $p = 1/5$ 标度区间：见表4第 10 至 12 行，以及图 4(a) 中 0.215 处的三维直接数值模拟平台。对于最大 $\mathrm{Ra} = 3.20 \times 10^{11}$，我们未能在三维直接数值模拟解集中找到令人信服的 $p = 1/4$ 标度证据。

Gayen 等人（2014年）的NS计算采用普朗特数 $= 5$ 和分段常值表面浮力。Gayen 等人（2014年）没有采用（2.10），而是根据穿过非均匀加热表面失稳部分的浮力通量定义努塞尔数。尽管存在这些差异，Gayen 等人（2014年）记录了类似的三维直接数值模拟行为，其中包含两个 $p = 1/5$ 标度区间：常数 $K_{1/5}$ 在平滑过渡的两侧取不同值。在第二个 $p = 1/5$ 标度区间中，Gayen 等人（2014年）的结果基于大涡模拟（LES）。但我们的直接数值解也重新进入 $p = 1/5$ 标度区间。重新进入 $p = 1/5$ 不能被斥为LES伪影。

### 3.4. 自由滑移解的讨论

转而来看2DFS 解，最宽泛地将 $p = 1/5$ 标度区间（3.5）认定为表4第20行中的五个数量级范围，是最宽松的解释。这18个点对应于图$K_{1/5} = 04$ (a)中的平台.25。然而，我们关注的是该范围前半段的9个点，即表4第21行中的数据。这9个点围绕 $K_{1/5} = 0.25$平台起伏，振幅约为

| row | 区间 | 范围 | 点最小二乘 | 努塞尔数 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2DNS | $6.40\times10^{5}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 6.40\times10^{9}$ | 13 | 0。177 瑞利数$^{0}$。198 |
| 2 | 2DNS | $1.60\times10^{6}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{9}$ | 11 | 0.178 瑞利数$^{0}$.197 |
| 4 | 二维数值模拟 | $6.40\times10^{10}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 6.40\times10^{13}$ | 10 | 0.062 瑞利数$^{0}$.242 |
| 5 | 二维数值模拟 | $6.40\times10^{10}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 1.60\times10^{13}$ | 9 | 0.056 瑞利数$^{0}$.246 |
| 6 | 二维数值模拟 | $1.28\times10^{11}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 1.60\times10^{13}$ | 8 | 0.055 瑞利数$^{0}$.246 |
| 7 | 3DNS | $6.40\times10^{5}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{7}$ | 6 | 0.173 瑞利数$^{0}$.199 |
| 8 | 3DNS | $6.40\times10^{5}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 6.40\times10^{6}$ | 4 | 0.167 瑞利数$^{0}$.202 |
| 9 | 3DNS | $3.20\times10^{6}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{7}$ | 4 | 0.179 瑞利数$^{0}$.197 |
| 10 | 三维直接数值模拟 | $1.60\times10^{9}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{11}$ | 8 | 0.195 瑞利数$^{0}$.204 |
| 11 | 三维直接数值模拟 | $1.60\times10^{9}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 1.60\times10^{10}$ | 4 | 0.191 瑞利数$^{0}$.205 |
| 12 | 三维直接数值模拟 | $3.20\times10^{10}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{11}$ | 4 | 0.180 瑞利数$^{0}$.208 |
| 20 | 2DFS | $6.40\times10^{5}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 1.60\times10^{11}$ | 18 | 0.253 瑞利数$^{0}$.199 |
| 21 | 2DFS | $6.40\times10^{5}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{8}$ | 9 | 0.312 瑞利数$^{0}$.186 |
| 22 | 2DFS | $6.40\times10^{8}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 1.60\times10^{11}$ | 9 | 0.215 瑞利数$^{0}$.206 |
| 23 | 2DFS | $6.40\times10^{11}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 6.40\times10^{13}$ | 6 | 0.074 瑞利数$^{0}$.245 |
| 24 | 2DFS | $6.40\times10^{11}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{12}$ | 3 | 0.082 瑞利数$^{0}$.241 |
| 25 | 2DFS | $6.40\times10^{12}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 6.40\times10^{13}$ | 3 | 0.073 瑞利数$^{0}$.245 |
| 26 | 3DFS | $6.40\times10^{5}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{8}$ | 9 | 0.308 瑞利数$^{0}$.187 |
| 27 | 3DFS | $6.40\times10^{10}\leqslant$ 瑞利数 $\leqslant 3.20\times10^{11}$ | 3 | 0.358 瑞利数$^{0}$.193 |

表4：各种标度区间最小二乘拟合的汇总。在可能的情况下，我们通过改变范围来评估指数的敏感性。

±0.01，最小二乘指数0.186与1/5相差甚远，令人不安。这些偏离趋势的点对应的瑞利数 Ra 仅属中等偏大，其解要么是稳态，要么只有微弱的时间依赖性。因此，努塞尔数 Nu 估计中的时间平均不足并非问题。此外，在这个范围内，二维和三维解重合。我们通过改变空间分辨率进行了多项测试，发现努塞尔数 Nu 的数值估计没有显著变化。如果将指数0.186视为接近1/5，那么这些偏离趋势的点就是五个数量级的2DFS标度区间的低端：前半段的起伏是该区间中的前渐近缺陷。更谨慎的解释是，2DFS$p$ = 1/5标度区间仅在 Ra $= 6.40\times10^{8}$ 左右才开始，并由表4第22行的9个点构成。2DFS 解集在 Ra $= 10^{12}$ 左右转变为 $p$ = 1/4标度（3.6），并形成图4(b)中 $K_{1/4} = 0.065$的平台；参见表4第23至25行。

这些三维解与其2DFS对应解的显著差异最早出现在约瑞利数 =3。$20\times10^{9}$。没有证据表明 $p$ = 1/4标度存在于三维系列中。相反，表三维第27行中的三个解4表明存在第二个 $p$ = 1/5区间，例如图.4中的0.3平台(a)。我们推测，三维系列重现了三维直接数值模拟系列中观察到的现象：两个 $p$ = 1/5标度区间，中间由平滑过渡隔开。这一推测基于第27行中的三个解；它们所覆盖的瑞利数变化范围不足一个数量级。

## 4. 对努塞尔数 ~ 瑞利数$^{1/5}$ 标度论证的回顾

Rossby (1965年)提出边界层中的黏性-扩散平衡，该边界层毗邻非均匀加热表面，因此得出了式（3.5）中的五分之一标度。Rossby确定了长度尺度

$$\delta_{1/5} \stackrel{\text{def}}{=} Ra^{-1/5} h \tag{4.1}$$

作为表面边界层的厚度。在接下来的讨论中，我们还需要长度

$$\delta_{1/4} \stackrel{\text{def}}{=} Ra^{-1/4} h\,. \tag{4.2}$$

在瑞利数 $= 6。4 \times 10^{13}$时，这两个边界层尺度之比为 $\delta_{1/5}/\delta_{1/4} \approx 5。$

Rossby 的普朗特数 $\gg 1$ 论证的核心假设是，边界层浮力由黏性平衡，而边界层惯性可忽略。在瑞利数相当大时，指数 1/5 得到了后续实验室研究和数值研究的支持（Rossby 1998年；Mullarney 等 2004；Siggers 等 2004；Wang 与 Huang 2005；Chiu-Webster 等2008；Sheard 与 King 2011；Ilicak 与 Vallis 2012）。

我们强调，$p = 1/5$ 标度（3.5）及其对应的边界层厚度 $\delta_{1/5}$，似乎并不要求 普朗特数 $\gg 1。$图 1 所示的二维解——包括 (c) 和 (d) 面板中的非定常解——完全处于图 $K_{1/5} = 0.25$ 所示的区间内（图 4(a)）。我们的非定常 2DFS 解在至少三个数量级的瑞利数范围内呈现五分之一标度（3.5）。所有这些 $p = 1/5$ 解均有普朗特数 $= 1。$

更复杂的是，在 $p = 1/4$ 标度区间（3.6）中，二维解仍然表现出边界层尺度 $\delta_{1/5}。$图 5 逐步放大展示了上表面附近水平对流的结构。该二维数值模拟解处于 非-Rossby $p = 1/4$ 标度区间（3.6）。尽管如此，图 5 的 (d) 图表明，$\delta_{1/5}$ 是一个有用的边界层长度尺度。我们得出结论，在足够高的瑞利数下，存在双层边界层：一个薄的$\delta_{1/4}$ 层嵌套在一个较厚的$\delta_{1/5}$-层之中。我们将在第 5节进一步讨论这一双层边界层。

（图 5中的二维数值模拟(a) 解表现出此前在图 2DFS 解中提到的涡旋气体现象，见图 2。在高瑞利数下，无论黏性边界条件如何，二维水平对流的内部区域都呈现涡旋气体特征。）

作为罗斯贝标度的替代方案，Shishkina 等人（2016）提出了一组标度论证，并将其概括在（Ra,Pr）平面相图中。该图显示了以 $\mathrm{I}^*_\ell$、$\mathrm{I}_\infty$ 和 $\mathrm{III}_\infty$ 表示的高 Pr 区域；这三个高 Pr 区域均满足 $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Ra}^p$，其中 $\mathrm{I}^*_\ell$ 和 $\mathrm{III}_\infty$ 中为 $p = 1/4$，$\mathrm{I}_\infty$ 中为 $p = 1/6。$这一三分区方案无法与 Rossby（1965）、Chiu-Webster 等人（2008）和 Ramme & Hansen（2019）关于 $\mathrm{Pr} \gg 1$ 的结果相协调。在 Shishkina 等人（2016）的相图中，$p = 1/5$ 标度仅出现在 $\mathrm{Pr} \ll 1$ 区域 $\mathrm{I}_\ell。$下文将更详细地讨论区域 $\mathrm{I}_\ell。$

### 4.1. 展向平均

为识别边界层中的各种过程，我们首先对运动方程进行展向 $y$ 平均。用带帽符号表示展向平均，因此

$$b(x,y,z,t) = \underbrace{\frac{1}{\ell_y}\int_0^{\ell_y} b(x,y,z,t)\,\mathrm{d}y}_{\stackrel{\text{def}}{=}\hat{b}(x,z,t)} + b'(x,y,z,t)\,. \tag{4.3}$$

上文中，$b'(x,\ y,\ z,\ t)$ 表示相对于展向平均的三维偏差。对三维连续性方程（2.3）取展向平均，可得二维“翻转流函数” $\psi(x,\ z,\ t)$，使得$(\hat{u}\,,\ \hat{w}) = (-\psi_z\,,\ \psi_x)。$采用这一记号，三维速度可

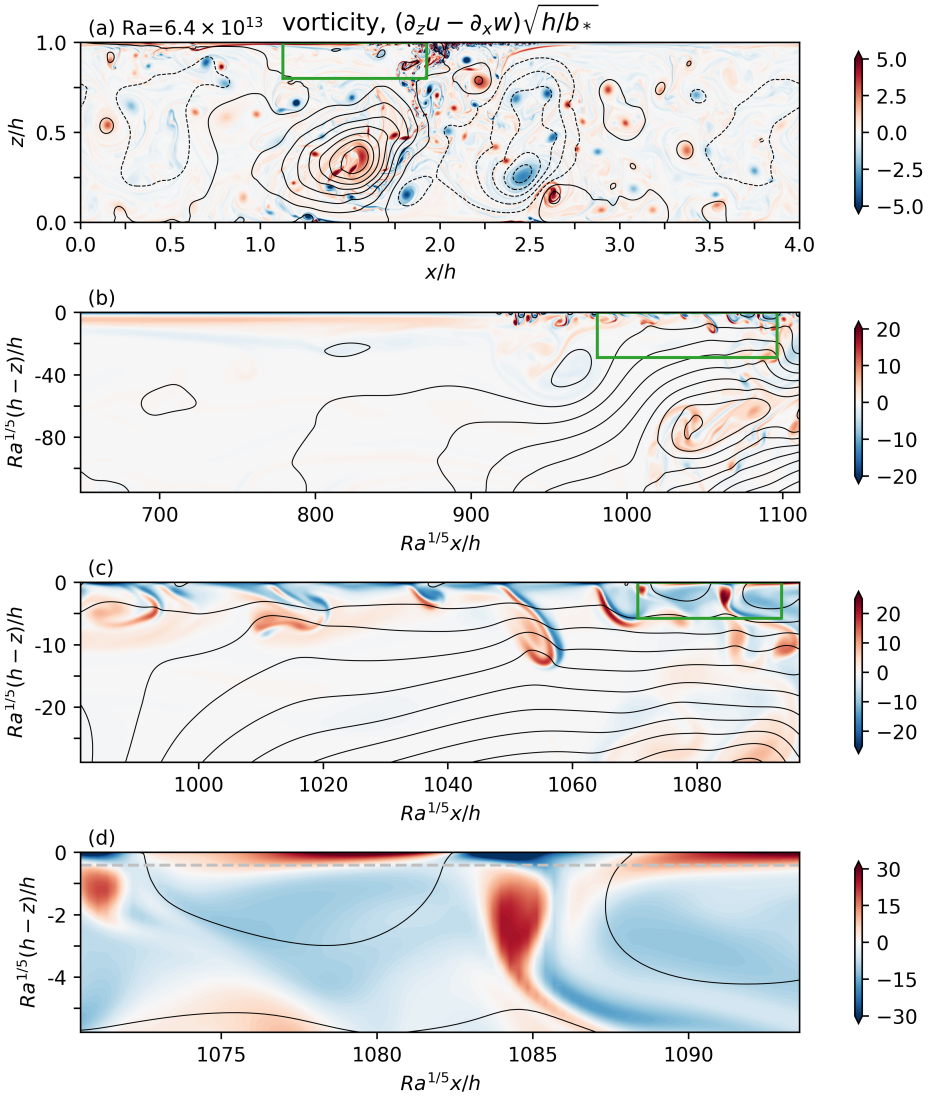


图 5：(a) 二维数值模拟解中涡量的快照，参数为 瑞利数 $= 6_{\text{。}} 4 \times 10^{13}$；该解处于非 Rossby 努塞尔数 $\sim$ 瑞利数$^{1}/4$ 标度区间。面板 (b)–(d) 通过逐步放大顶面区域来展示边界层结构。面板 (a)、(b) 和 (c) 中的绿色矩形分别标示面板 (b)、(c) 和 (d) 所示区域。在面板 (b)、(c) 和 (d) 中，两条坐标轴的单位均为 $\delta_{1/5}$。面板 (d) 中的灰色虚线表示距顶面 $z = h$ 以下 $2\delta_{1/4}$ 的位置。所有面板中的等值线均为流线。

写作

$$(u, v, w) = (-\psi_z\,, 0, \psi_x) + (u', v', w')\,. \tag{4.4}$$

浮力方程的展向平均为

$$\hat{b}_t + \psi_x \hat{b}_z - \psi_z \hat{b}_x + \partial_x \widehat{u'b'} + \partial_z \widehat{w'b'} = \kappa \nabla^2 \hat{b}\,, \tag{4.5}$$

展向涡量方程的展向平均为

$$\underbrace{\zeta_t + \psi_x\zeta_z - \psi_z\zeta_x}_{\text{inertia}} + \underbrace{\hat{b}_x}_{\substack{\text{buoyancy}\\ \text{torque}}} + \underbrace{(\partial_z^2 - \partial_x^2)\,\widehat{u'w'} + \partial_x\partial_z\big(\widehat{u'^2} - \widehat{w'^2}\big)}_{\text{Reynolds stress torque (RST)}} = \underbrace{\nu\nabla^2\zeta}_{\text{viscosity}}\,. \tag{4.6}$$

上式中 $\zeta$ 定义为$= -\nabla^2\psi$ 展向平均涡量。功率积分（2.8）变为

$$\varepsilon = \nu\left\langle\zeta^2\right\rangle + \nu\langle|\boldsymbol{\nabla u}'|^2\rangle \tag{4.7}$$

$$= -\kappa\bar{b}(0)/h\,. \tag{4.8}$$

通过在（4.5）、（4.6）和（4.7）中忽略二次涨落的展向平均值，即可恢复二维运动方程。例如，二维涡量方程为不含 RST 的（4.6）。

### 4.2. *A review of $Nu \sim Ra^{1/5}$ scaling arguments*

继 Shishkina 等人 （2016）之后，我们假设在浮力作用下存在厚度为 $\delta_b$ 的边界层，在动量和涡量作用下存在厚度为 $\delta_u$ 的边界层。雷诺数为

$$Re \overset{\text{def}}{=} \frac{Uh}{\nu}\,, \tag{4.9}$$

其中

$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle|\boldsymbol{u}|^2\rangle} \tag{4.10}$$

这是典型的流速。区域长度尺度$l_x$、$l_y$ 和$h$ 大致相当。我们采用深度$h$ 作为区域长度尺度的代表。

对（2.11）中的表面努塞尔数进行尺度分析，例如 $\hat{}\, b_z(h) \sim b_\star/\delta_b$，可得

$$Nu \sim \frac{h}{\delta_b}\,. \tag{4.11}$$

通过对（$\chi$2.9）中的 $|\boldsymbol{\nabla}b|^2 \sim b_\star^2/\delta_b^2$，也可以得出相同结论：尽管 $\chi$-边界层仅占区域的一小部分 $\delta_b/h$，但（4.11）由体积平均值 $\langle\,\rangle$ 得出。

$\hat{}$现在对浮力方程（ 4 5 $\psi_x b_z \sim Ub_\star$ $\kappa\nabla^2 b \sim \kappa b_\star$ $\delta_b^2$ $\psi_z b_x \sim$.）进行尺度分析。利用诸如 $\hat{}/h$ 和 $\hat{}/$等结果，可得

$$U \sim \frac{\kappa h}{\delta_b^2}\,, \qquad \text{or in non-dimensional form} \qquad Nu \sim (RePr)^{1/2}\,. \tag{4.12}$$

为估算功率积分（$\varepsilon$4.7）右侧的黏性耗散 $\varepsilon$，假设 $\varepsilon$ 中数量级为一的部分集中在边界层内，而该边界层占区域的比例为$\delta_u/h$。可以忽略 $\nu\langle|\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}'|^2\rangle$，也可以假设（4.7）右侧两项的尺度相同，即为 $\nu\zeta^2 \sim \nu(U/\delta_u)^2$。无论哪种情况，均有

$$\varepsilon \sim \frac{\nu U^2}{\delta_u h}\,. \tag{4.13}$$

¯对右侧进行尺度分析（4.8）时，假设底部浮力 $b(0)$是顶面上最小浮力 $-b_\star$的一个数量级为一的比例。（更强的结论¯即 $b(0) \to -b_\star$ 随 瑞利数 $\to\infty$变化，可能是正确的。）因此

$$\varepsilon \sim \frac{\kappa b_\star}{h}\,. \tag{4.14}$$

结合（4.13）和（4.14）

$$U^2 \sim \frac{\kappa}{\nu}\delta_u b_\star\,, \qquad \text{or in non-dimensional form} \qquad (RePr)^2 \sim \frac{\delta_u}{h}Ra\,. \tag{4.15}$$

消去 $g$$RePr$ 在（4.12）和（4.15）之间，然后利用（4.11）消去 $h$，得到 s

$$Nu^5 \sim \frac{\delta_u}{\delta_b}Ra\,. \tag{4.16}$$

要得到 $Nu$ 对 $Ra$ 和 $Pr$ 的依赖关系，最后一步是将（$\delta_u/\delta_b$）右侧的比值表示为4.16）中的 $Ra$ 和 $Pr$。文献中有三种论证方法。

**Rossby（1965）的标度**。取 $\delta_u = \delta_b$，由（4.16）可得

$$Nu \sim Pr^0\, Ra^{1/5} \qquad \text{and} \qquad Re \sim Pr^{-1}Ra^{2/5}\,. \tag{4.17}$$

Rossby（1965）的论证未使用功率积分及其推论（4.16）。相反，Rossby 从一开始就假设先验地，$\delta_b = \delta_u$ 并在（4.6）中平衡浮力力矩与黏性，得到 $U \sim b_\star\delta_u^3/l\nu$。结合这些结果与（4.11）和（4.12），再次得到（4.17）。Rossby 关于浮力力矩与黏性之间的平衡适用于自由滑移^和 无滑移两种情况。在自由滑移 情况下，速度边界层由（$b_x$）中的涡量源 4.6产生：这也为 Rossby 关于 $\delta_u = \delta_b$ 的假设提供了合理解释，且同样适用于 无滑移。

**Gayen、Griffith 和 Hughes（2014年）的标度**。在涡量方程（4.6）中，将浮力力矩与惯性或雷诺应力力矩平衡，得到 $U^2 \sim \delta_u b_\star$，并通过假设 $\delta_b = \delta_u$，遵循 Rossby 的做法。将这些结果与（4.11）和（4.12）结合，可得

$$Nu \sim Pr^{1/5}Ra^{1/5} \qquad \text{and} \qquad Re \sim Pr^{-3/5}Ra^{2/5}\,. \tag{4.18}$$

这一论证没有用到功率积分，并且除非 4.16中的 $Pr$ 为数量级为 1，否则该论证与（$\varepsilon$ 在（4.7）和（4.8）中，利用上述标度假设进行估算，可得

$$\nu\left\langle\zeta^2\right\rangle \sim Ra\,(\kappa\nu^2/h^4) \qquad \text{and} \qquad -\kappa\bar{b}(0)/h \sim Ra\,(\kappa^2\nu/h^4)\,. \tag{4.19}$$

（4.19）中的两项相差一个 $Pr$倍数：如果 $Pr$ 非常大或非常小，这就会造成问题。但当 $Pr$ 为数量级为 1 时——这里我们考虑 $Pr = 1$ ——机械能收支便不存在闭合问题，因此 Gayen 等人（2014年）的标度是 Rossby 标度的一种有效替代方案。

**Shishkina、Grossman 和 Lohse（2016）的标度**。在涡量方程（4.6）中，使惯性与黏性达到平衡，得到 $U \sim \nu h/\delta_u^2$。利用（$U$ 4.12）消去后，可得 $\delta_u = Pr^{1/2}\,\delta_b$，再代入功率积分（4.16）

$$Nu \sim Pr^{1/10}\, Ra^{1/5}\,, \qquad \text{and} \qquad Re \sim Pr^{-4/5}Ra^{2/5}\,. \tag{4.20}$$

^ 这一标度论证的一个显著特点是，方程（$b_x$ 4.6）中的浮力力矩在边界层涡量平衡的主导阶中并未出现。只要要求 $Pr \ll 1$，这一点便有合理依据，因此 $\delta_u = Pr^{1/2}\,\delta_b \ll \delta_b$。换言之，这种黏性—惯性边界层非常薄，以至于黏性和惯性都远大于浮力力矩 ^ $b_x \sim b_\star/h$。

尽管物理假设各不相同，上文总结的三种论证都认为 $Nu \sim Ra^{1/5}$。它们的所有差异都在于对 $Nu$ 关于 $Pr$的依赖关系所作的预测。此外，三个研究团队都提出了数值证据，以支持各自提出的$Pr$指数（Rossby 1998年；Gayen 等，2014年；Shishkina和Wagner 2016）。三个团队所采用的不同表面浮力剖面或许很重要？在此进一步探讨$Pr$指数及表面浮力剖面可能产生的影响，超出了本文的范围。

我们在此综述的结尾指出，用于指称标度的术语（4.20）——

对应于 Shishkina 等人（2016）相图中的区域 $I_\ell$，需要进一步澄清。Shishkina 等人（2016）将 $Pr \ll 1$ 的区域 $I_\ell$称为“罗斯贝标度”。尽管$p = 1/5$ 与 Rossby 相同，但（4.20）中对 Pr 的依赖关系不同于（4.17）中 Rossby 标度的依赖关系。此外，Rossby 研究的是 $Pr \gg 1$，而标度（4.20）表面上适用于 $Pr \ll 1$。将 $I_\ell$ 称为罗斯贝标度并不恰当：Shishkina 等人（2016）的相图中并没有与（4.17）中原始的 $Pr \gg 1$罗斯贝标度相对应的区域。

### 4.3. 涡量方程中的边界层项平衡(4.6)

本文中的所有解均满足 $Pr = 1$，因此我们无法对式 (4.17)、(4.18) 和 (4.20) 中不同的普朗特数指数作出解释。不过，我们可以考察展向平均涡量方程 (4.6) 中各项的平衡，从而评估上述三种标度论证所依据的假设。为简洁地呈现这些结果，我们进一步在固定 $z$ 的条件下，对 $0 < x/h < 1.85$ 区间内的 (4.6) 作展向平均。将展向平均的范围截止于 $x/h = 1.85$，可避开羽流的移动附着点。（请注意，区域的中点，也就是表面密度最大的所在位置，位于 $x = 2h$。）对 (4.6) 作展向平均，也能消除小尺度波动；在瑞利数最高时，这些波动会主导边界层，例如参见图 5(c) 和 (d)。这里没有进行时间平均：这种局部展向平均是针对单个快照进行的。

在以下讨论中，我们将主边界层（以下简称 MBL）名义上定义为顶面以下 $2\delta_{1/5}$ 范围内的区域：

$$h - 2\delta_{1/5} \leqslant z \leqslant h, \tag{4.21}$$

以及内 边界层（以下简称 IBL），定义为顶面以下 $2\delta_{1/4}$ 范围内的区域：

$$h - 2\delta_{1/4} \leqslant z \leqslant h. \tag{4.22}$$

#### 4.3.1. 二维解

图 6 展示了式（4.6）的二维版本中各项之间的平衡。二维情况下不存在雷诺应力张量（RST）力矩。

图 6（a）和（b）中的 MBL 是浮力力矩与黏性之间两项罗斯贝平衡的典型例子。事实上，图 6 顶排中的 2DFS解具有非常简单的特征：在 2DFS*MBL* 中，惯性处于次要地位。这甚至适用于图 $6 = 6$（c）中的 解，该解处于 $p = 1/4$ 标度区间，其中图 $K_{1/4} = 04$（b）中为 0.065。MBL 以下的情况更为复杂：在图 6（c）中，黏性与惯性相互抵消。在 MBL 以下的这一区域，浮力力矩不可忽略：在 2DFS 涡量方程中，浮力力矩、黏性和惯性三者达到平衡。2DFS解的显著特点是，在最高 $Ra = 6$时$4 \times 10^{13}$，罗斯贝平衡始终适用于整个 MBL；也就是说，即使在 $p = 1/4$ 非罗斯贝标度区间内，罗斯贝平衡仍然成立。

对于二维数值模拟图6底排中的解而言，情况更加复杂。式（4.22）中 IBL 的底部由图6中的灰色水平线表示。值得注意的是，在图6（e）和（f）中，惯性在 IBL 内最大，并且二维数值模拟的涡量方程中存在三项平衡。

对在表面 4.6 处求值的涡量方程（$z = h$，可以合理解释惯性在2DFS 与 二维数值模拟中的不同作用。在 $z = h$ 处，惯性项

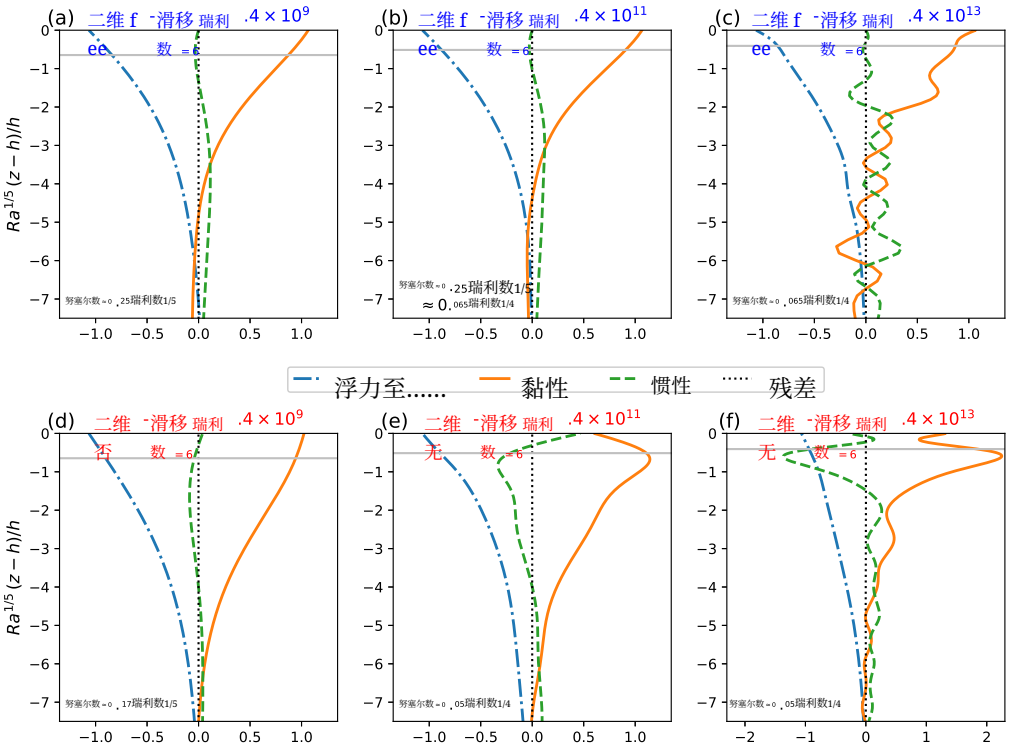


图 6：二维版本涡量方程（4.6）中的三个项。顶行显示 2DFS 解，底行显示 二维数值模拟 解。（f）中的横坐标范围有所扩大。上方各解所处的标度区间标注在每个面板的左下角；（b）中的解处于五分之一标度与四分之一标度之间的转变区间。所有项均使用 $b_\star/h$进行无量纲化，例如浮力力矩为 $h/b_\star$。水平灰线表示距顶面 $2\delta_{1/4}$ 的距离 $z = h$。

在（4.6）中为

$$\text{inertia} \overset{\text{def}}{=} \zeta_t + \psi_x\zeta_z - \psi_z\zeta_x\,, \tag{4.23}$$

$$= \begin{cases} 0\,, & \text{with FS boundary conditions } (\zeta = 0); \\ \zeta_t\,, & \text{with NS boundary conditions } (\psi_x = \psi_z = 0). \end{cases} \tag{4.24}$$

在 2DFS 情况下，表面处的惯性恒为零，因此二维版本的（4.6）中其余两项必须达到平衡，即在 $z = h$ 处，黏性必须与浮力力矩平衡。事实上，这种罗斯贝平衡适用于整个 2DFS MBL。

在 二维数值模拟情况下，如果存在时间波动，式（4.6）中的惯性可能不为零，因此 $\zeta_t \neq 0$。图 6（d）中这些 $\zeta_t$ 波动很小，因此惯性也很小。随着瑞利数 $Ra$ 增大，例如图 6（e）和（f）中所示，时间波动增大，表面处的惯性 $z = h$ 变得与浮力力矩和黏性相当。

上述论证在分段常数这一特殊但常见的情形下需要加以限定 $b_s(x)$，例如 $b_s(x) = \pm b_\star$，其在区域中部存在不连续跳跃。ˆ 虽然（4.24）成立，但在表面处，除不连续点外，浮力力矩 $b_x$ 均为零。在这种情况下，在壁面处取值时，（4.6）的二维版本在除不连续点外的所有位置都化简为 $\zeta_t = \nu\nabla^2\zeta$，因此无法得出任何结论。这一观察或许

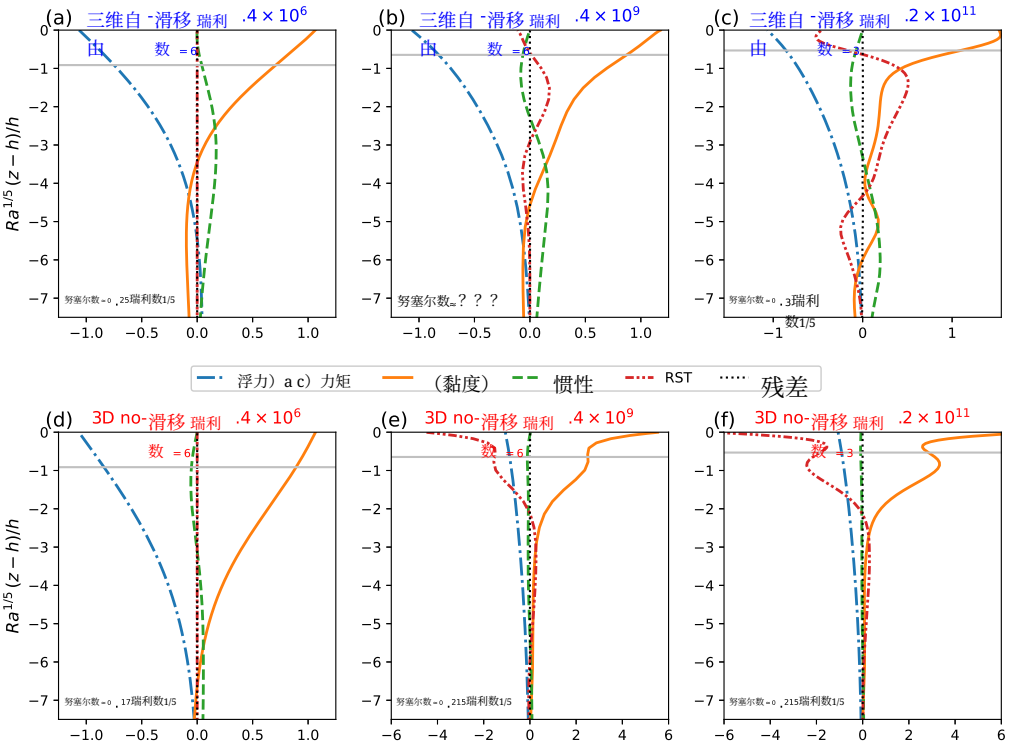


图 7：涡量方程中的四项（4.6），在 $0 \leqslant x/h \leqslant 1$。85 上取平均，并根据三维解的快照计算得出。上排显示 3DFS 解，下排显示 3DNS 解。各图中的横坐标尺度不同。上方的解属于各图左下角所示的标度区间。图 (b) 中的 $Nu$ =??? 表示该解处于 (a) 和 (c) 中两个 $p = 1/5$ 区间之间的转变过程中。所有项均使用 $b_\star/h$进行无量纲化，例如浮力力矩为 $b_x\, h/b_\star$。水平灰线表示距表面下方 $2\delta_{1/4}$ 的距离。

表明分段常数浮力剖面在性质上可能不同于平滑变化的浮力剖面。

### 4.3.2. 三维解

在图 7 中，我们转而讨论三维解，并分析展向平均涡量方程（4.6）中各项的平衡。在三维情况下，式（4.6）中的雷诺应力张量项可能不为零。

我们采用上一节所述的部分 $x$平均方法。首先，我们指出一个简单的结果：在图7所示的 MBL 内，三维涡度方程（4.6）中的惯性始终小于其他三项。图无滑移解中 MBL 惯性微不足道，这一点在图7 底排的解中尤为显著；不过，对于顶排的自由滑移解，这一近似也相当不错。

图3DFS 中的解7（a）对应较低的瑞利数 6。$4 \times 10^6$，并且实际上是二维且稳态的。该解位于一个四个数量级区间的中段 $p = 1/5$ 区间，其中$K_{1/5} = 0$。25；它呈现出黏性与浮力力矩之间的双项罗斯贝平衡。在 MBL 下方不远处，惯性增大到与黏性相当。

图 7(d) 展示了第一段标度区间中部的一个 无滑移 解 $p = 1/5$ 标度区间——其中$K_{1/5} = 0$。图 4(a) 中为 17。图 7(e,f) 展示了第二段标度区间中的解 $p = 1/5$，其中 $K_{1/5} = 0$。图 7(d) 中，黏性与

浮力力矩之间存在罗斯贝平衡，而在图7(e,f) 中，情况较为复杂：靠近顶面、位于内边界层内时，雷诺应力张量与黏性之间存在双项平衡。离表面较远、但仍位于 MBL 内时，则存在涉及黏性、浮力力矩和雷诺应力张量的三项平衡。

这些三维直接数值模拟 解（见图7 底排）证实了Gayen 等人（2014年）的结果：两种三维直接数值模拟 $p = 1/5$ 状态之间的差异，源于从图 (a) 中低瑞利数 下的罗斯贝平衡转变为图 (e) 和 (f) 中涉及较大雷诺应力张量的非定常三维边界层流动。

#### 4.3.3. 基于边界层项平衡的总结与结论

图6 和7 中的十二个面板总结了十二组解的结果，涵盖自由滑移和无滑移边界条件，以及二维和三维构型。主要结论如下：

*(i)* 在十二种情形中，浮力力矩的结构相同；

*(ii)* 在 $p = 1/5$ 和 $p = 1/4$ 状态下，浮力力矩边界层的厚度为 $\delta_{1/5}$；

*(iii)* 浮力力矩在十二种情况中的十种情况下占主导地位，并且在其中七种情况下，罗斯贝双项平衡，即浮力力矩与黏性之间的平衡，贯穿整个 MBL；

*(iv)* 浮力力矩仅在最高 3DNS $Ra$值下的解中处于次要地位，从而形成黏性与 RST 之间的双项平衡；

*(v)* 在高 $Ra$ NS 解中，较厚的 $\delta_{1/4}$-MBL 内嵌有一个薄的 $\delta_{1/5}$-IBL。

要点*(i)* 和 *(ii)* 表明，浮力场的主要特征与涡量方程中各项的平衡、黏性边界条件以及维数无关。要点 *(iii)* 表明，罗斯贝的 $Pr \gg 1$ 项平衡可以适用于中等较大的 $Ra$，即使 $Pr = 1$。

所有解都呈现相同的努塞尔数–瑞利数标度现象，尽管涡量方程中各项的平衡会随黏性边界条件和维数而变化。例如，在图6的二维结果中，惯性在上排（自由滑移）与下排（无滑移）所起的作用不同。然而，从 $p = 1/5$ 到 $p = 1/4$ 的转变，在两种黏性边界条件下定性上相同。

## 5. 嵌套边界层

Tsai 等人（2020）研究了 $\mathrm{Pr} = 6.14$ 的二维无滑移水平对流。在 $\mathrm{Ra} > 10^{10}$，且施加的表面浮力随水平坐标 $x$ 线性变化时，Tsai 等人（2020）报告称，$p = 1/4$ 标度在四个数量级的 Ra 范围内成立。这里我们也在二维自由滑移和二维数值模拟解组中发现了$p = 1/4$。Tsai 等人（2020）推测，$p = 1/4$ 标度可能对应于 Shishkina 等人（2016）在 (Ra, Pr) 参数平面相图中提出的某个状态。在这一方案中，(Ra, Pr) 平面被划分为七个区域，指数 1/4 位于标记为 $\mathrm{III}_\infty$、$\mathrm{IV}_u$ 和 $\mathrm{I}^*_\ell$ 的区域中。但我们现在表明，$\mathrm{III}_\infty$、$\mathrm{IV}_u$ 和 $\mathrm{I}^*_\ell$ 的定义特征与数值解并不相符。我们得出结论，此处发现的 $p = 1/4$，以及很可能 Tsai 等人（2020）所发现的 $p = 1/4$，均不符合 Shishkina 等人（2016）相图中的任何区域。

### 5.1. 浮力耗散的分配 $\chi$ 在边界层与内部区域之间

区分不同流态的一个主要特征是Shishkina 等人(2016) 对动能耗散 $\varepsilon$ 和浮力方差耗散 $\chi$ 在边界层和区域内部之间的分配。为量化 $\chi$ 的分配，我们引入函数

$$F_\chi(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\kappa}{h\chi} \int_0^z \overline{|\boldsymbol{\nabla} b|^2}\, \mathrm{d}z' , \tag{5.1}$$

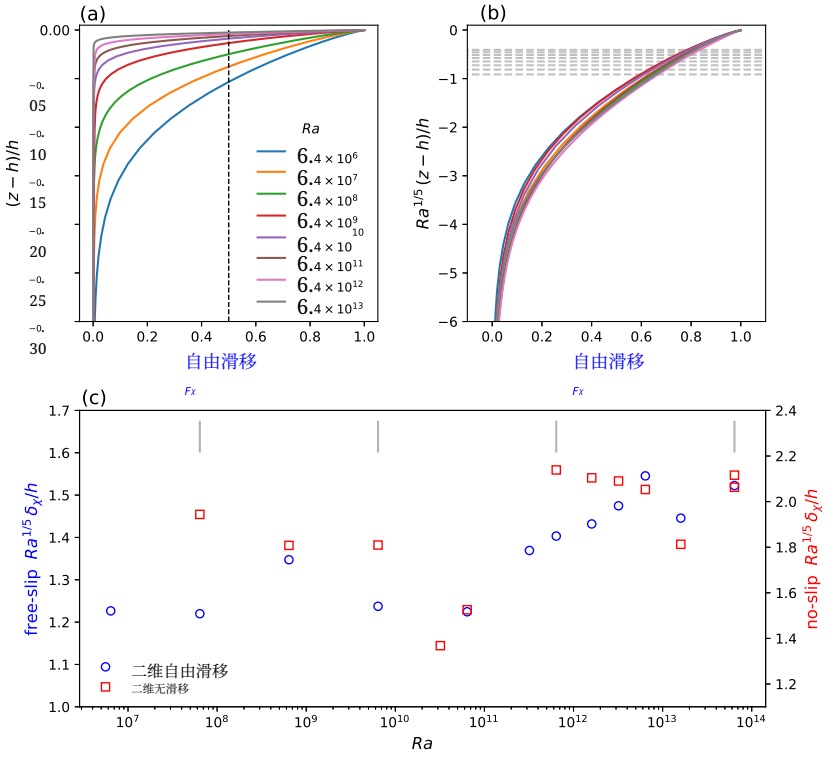


图8：(a) 式 (5.1) 中定义的函数 $F_\chi(z)$，对应二维自由滑移解。边界层厚度 $\delta_\chi$ 定义为从顶面到满足 $F_\chi(z) = 1/2$ 位置的距离（面板 (a) 中的竖直虚线）。(b) 与 (a) 相同，但纵轴按 $\mathrm{Ra}^{1/5}$ 重新缩放。水平灰色虚线表示距顶面 $2\delta_{1/4}$ 以下的距离 $z = \mathrm{h}$。(c) 和 (d) 分别与 (a) 和 (b) 相同，但对应二维数值模拟解。(e) 补偿边界层厚度 $\mathrm{Ra}^{1/5}\delta_\chi/\mathrm{h}$ 随 Ra 的变化，展示二维自由滑移解和二维数值模拟解。四段灰色竖线标出了图 1 和图 2 中各解对应的 Ra 值。

其中，上横线表示$(x,\ y,\ t)$平均值。图 $F_\chi(z)$ 中的8随 $z/h$ 单调地从 0 增至 1，表示低于高度 $z$的浮力方差耗散所占比例。图 8(a) 和 (c) 表明，$\chi$ 随着$Ra \to \infty$增大，越来越集中于边界层内。

Shishkina 等人（2016）相图中区域 $\mathrm{III}_\infty$ 和 $\mathrm{IV}_u$ 的一个主要特征是，$\chi$ 在区域内部占主导。因此，图 8(a) 和 (c) 排除了区域 $\mathrm{III}_\infty$ 和 $\mathrm{IV}_u$。指数为 1/4 的剩余可能性是 $\mathrm{Pr} \gg 1$ 区域 $\mathrm{I}^*_\ell$，其特征是动量边界层远厚于浮力扩散边界层。但相图中的区域 $\mathrm{I}^*_\ell$ 位于中等 Ra 值范围，因此，如果固定 Pr 并从较小值开始增大 Ra，首先遇到的指数是 1/4。然而，在我们的二维解中，首先发现的是 $p = 1/5$ 标度（3.5），在更高 Ra 下则由式 (3.6) 中的 $p = 1/4$ 取代。Tsai 等人（2020）的研究也出现了这种情况：先是 1/5，然后在更高 Ra 下变为 1/4。我们得出结论，二维解组中的 $p = 1/4$ 与 Shishkina 等人（2016）相图的区域 $\mathrm{III}_\infty$、$\mathrm{IV}_u$ 和 $\mathrm{I}^*_\ell$ 无关。在第 6 节中，我们将为图 4(b) 中的 $p = 1/4$ 区域寻求另一种解释。

为了从 $F_\chi(z)$中提取更多信息，我们对 $z$轴按 $\delta_{1/5}$进行缩放，并重新绘制图 8(b) 和 (d) 中的结果。现在，各条曲线大体重合，表明函数 $F_\chi(z)$ 表示边界层厚度 $\delta_{1/5}$，即使 努塞尔数 $\sim$ 瑞利数$^{1/4}$。为对此进行定量分析，我们通过确定 $\delta_\chi$达到 $F_\chi(z) = 1/2$ 时所对应的水平，定义边界层厚度

垂直 图 8(a) 和 (c) 中的虚线。随后，图 8(e) 中的补偿图显示 th at

$$\delta_\chi \approx K_\chi \delta_{1/5}\,. \tag{5.2}$$

该常 量 $K_\chi$ （5.2）约为 1。5，适用于自由滑移解，而无滑移解为 1。8无滑移解 .

（5.2）中的标度适用于两个 $p = 1/5$ 区间（3.5）以及 $p = 1/4$ 区间（3.6）。然而，第4节中的推理导出了

$$Nu \sim \frac{h}{\delta_b}\,, \tag{5.3}$$

构成所有标度论证的基础，似乎无可避免。必然是，在 $p = 1/4$ 区间（3.6）中，浮力边界层具有双层结构：存在一个薄边界层，其厚度为$\delta_b = \delta_{1/4}$，嵌在（ $\delta_\chi$-边界层）中较厚的边界层内（5.2）。下一节将证明这种双层边界层的存在。

（ $K_\chi$ 在图 8（c）中的散布可能会被认为大得令人不适。然而请注意，$Ra$ 跨越了七个数量级。这个很大的范围涵盖了从稳态到强时变二维流动的转变。在 $Ra = 6。4 \times 10^{13}$，$Ra^{-1/4}$ 比 $Ra^{-1/5}$ 小 5 倍，这远大于图 ±208（c）中的% 散布。）

## 5.2. $\delta_{1/4}$边界层

为了识别解中的 $\delta_{1/4}$-边界层，并展示其与 5.3）中 $p = 1/4$ 区域的一致性，我们注意到，对于（2.4）中的正弦形表面浮力，表面努塞尔数（2.11）为

$$Nu_s = b_1'(h) \Big/ b'_{\text{diff1}}(h)\,, \tag{5.4}$$

其中撇号表示对 $z$ 求导，并且

$$b_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} 2\,\overline{\cos kx\, b(x,y,z,t)}\,. \tag{5.5}$$

利用（5.4）可得到 $\delta_b$的另一种表达式：

$$\delta_b \stackrel{\text{def}}{=} b_\star / b_1'(h)\,, \tag{5.6}$$

其中， $b_\star$ 是（2.4）中正弦形表面浮力的振幅。（5.6）中的分子是合适的，因为 $b_\star = b_1$（$h$） $= b_{\text{diff1}}$（$h$）。

图9展示了 $b_1(z)$ 以及 $b_1(z)$ 的前两阶导数。式（5.5）中的上划线表示水平平均和时间平均。图9基于最终时刻浮力场单个快照的水平平均。厚度为 $\delta_{1/4}$ 的内边界层在图9(a)中的 $b_1(z)$ 中不可见。但面板(b)和(c)中 $b_1(z)$ 的高阶导数揭示了尺度 $\delta_{1/4}$。特别是， $p = 1/4$ 标度（3.6）源于 $b_1'$(h) 的增加，这一点在图9(b)中随着 Ra 增大而显现。图9(c)中 $b_1''(z)$ 的最大值仅出现在 $p = 1/4$ 区间（3.6）。

图10(a)显示了由 (5.6) 得出的 $\delta_b$，并以 $\text{Ra}^{1/5}$ 进行补偿。对于对应于 $p = 1/5$ 标度的 Ra 值，这一补偿后的 $\delta_b$ 处于 2.6 到 2.9 的狭窄范围内。因此，在 $p = 1/5$ 标度下， $\delta_b$ 和 $\delta_\chi$ 都随 $\delta_{1/5}$变化。图10(b)显示，在 Ra 的最高四五个取值处（对应于 $p = 1/4$ 标度），经 $\text{Ra}^{1/4}$ 补偿的 $\delta_b$ 在约 10.5 到 11.4 之间变化。我们由此得出结论：在 $p = 1/4$ 区间内， $\delta_b \sim \delta_{1/4}$，但$\delta_\chi \sim \delta_{1/5}$。

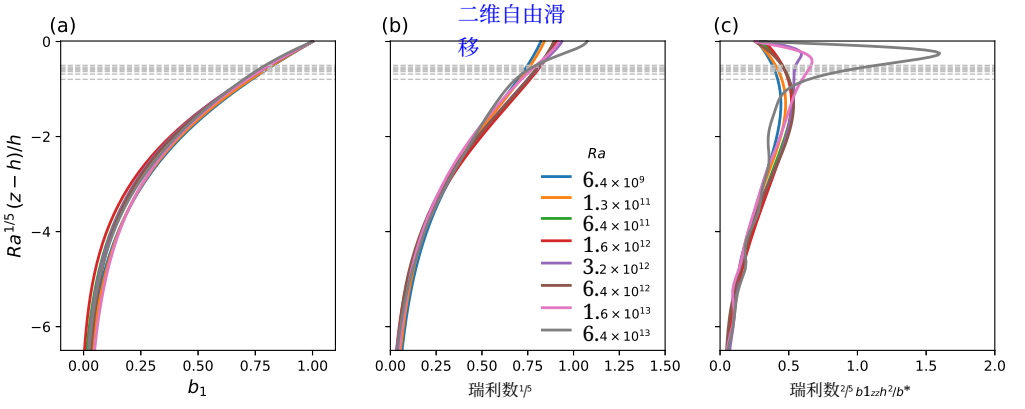


图9：(a) $b_1(z)$、(b) $b_{\prime1}(z)$和 (c) $b_{\prime\prime1}(z)$ 在不同 Ra 下的 2DFS 解的结构。这里的 $Ra$。$b_1(z)$ 取自最终快照，未进行时间平均。水平灰色虚线表示距顶面 $2\delta_{1/4}$ 的距离 $z=h$。

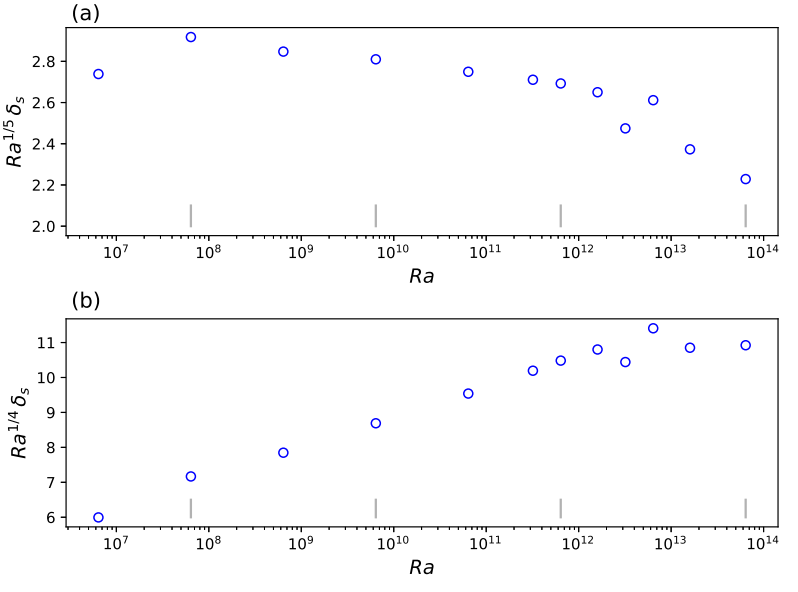


图10：2DFS $\delta_b$ 中补偿后的表面边界层厚度 （5.6），适用于。在面板 (a) 中 $\delta_b$ 以 $Ra^{-1}/^5$ 进行补偿，在 (b) 中则以 $Ra^{-1}/4$进行补偿。 $p=1/5$ 标度（3.5）与 $p=1/4$ 标度（3.6）之间的转变发生在约 $Ra=10^{12}$。垂直灰色线段标出图 $Ra$ 中与解对应的数值 1 和 2。

**6. 关于努塞尔数 瑞利数的1/4次方的标度论证**

本节提出一种适用于水平对流 $p=1/4$ 区间的标度论证。尽管我们的数值解仅在二维情形中发现了 $p=1/4$ 标度，但我们仍希望在足够高的 $Ra$ 下，三维情形中也可能出现 $p=1/4$。考虑到三维情形，我们提出一种适用于 $p=1/4$ 标度的总体解释——它独立于边界条件、维数和二维涡旋气体现象学。

该 $p = 1/4$ 标度区需要一个厚度为 $\delta_b \sim \delta_{1/4}$ 的内浮力边界层。讨论这个内边界层时，不妨牢记图 5(d)：虚线灰线标出了 $\delta_{1/4}$-边界层。可以把这个内边界层视为层流底层，它受到厚得多的外部 $\delta_{1/5}$-边界层的搅动。上文提到的总体解释是，层流底层的厚度与 Kolmogorov 长度尺度和 Batchelor 长度尺度有关

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \qquad \text{and} \qquad \eta_B = \left(\frac{\kappa^2\nu}{\varepsilon}\right)^{1/4} . \tag{6.1}$$

这些长度尺度对应于动量和浮力涨落中能够存续的最小尺度；再小的话，黏性 $\nu$ 和扩散 $\kappa$ 的阻尼就会变得过强。类比而言，厚度为 $\delta_b$ 的水平对流层流底层，是水平对流流动中能够存续的最薄边界层；这种流动以速率 $\varepsilon$ 获得动能。

（在 Kolmogorov 和 Batchelor 的论证中，黏性耗散率 $\varepsilon$ 也是三维惯性区间中的能量级联率。对二维水平对流而言，这种对 $\varepsilon$ 的解释并不适用：二维流动中不存在涡旋拉伸，因此也不存在能量正向级联。我们认为，层流底层厚度由 $\varepsilon$ 决定，因为它是衡量强迫强度最基本的量，同时也取决于分子参数 $\nu$和 $\kappa$。因此，$\delta_b \sim (\nu^p\kappa^q/\varepsilon)^{1/4}$（其中$p+q=3$）在量纲上是合理的；$\eta_K$ 和 $\eta_B$ 是这一族关系中最显著的成员。若要进一步讨论，就需要改变普朗特数，这超出了本文的范围。）

根据第 4 节回顾的标度论证，我们假设 $b(0) \approx -b_\star$。于是，能量功率积分（2.8）再次意味着

$$\varepsilon \sim \frac{\kappa b_\star}{h} . \tag{6.2}$$

令 $\varepsilon$ 代入（6.2），则 $\eta_K$ 和 $\eta_B$ 在（6.1）中可写为

$$\frac{\eta_K}{h} = Pr^{1/2}Ra^{-1/4} \qquad \text{and} \qquad \frac{\eta_B}{h} = Pr^{0}Ra^{-1/4} . \tag{6.3}$$

因此，如果层流底层的厚度为 $\delta_b \sim \eta_K$，或者可能为 $\delta_b \sim \eta_B$，那么根据（4.11）努塞尔数 ~瑞利数$^{1/4}$。

## 7. 维数与涡量均方值

在展向具有周期性时，二维解也是三维解。当瑞利数足够高且$l_y$足够大时，这些二维解会受到展向扰动而失稳（Gayen 等 2014年；Tsai 等 2016；Passaggia 等 2017）。除（4.6）中可能存在非零雷诺应力张量外，第4 节总结的标度论证并未涉及三维流动的发展。为了了解标度论证的局限性，将相同瑞利数下的二维解与三维解进行比较颇有意义。比较三维解与二维解也有助于认识水平对流中的湍流特性（Paparella 和 Young 2002；Scotti& White2011；Shishkina 等 2016），例如，二维流动中不会发生湍流通过涡旋拉伸对涡量的放大。

一旦不稳定性激发了三维运动，便预期会开始发生涡旋拉伸，并产生二维与三维水平对流之间其他相关的定性差异。但水平对流中不会发生这种情况：本节中，我们将利用机械能功率积分（2.8）证明，在 $Ra \to \infty$ 的极限下，三维水平对流中不会发生涡量放大。为引出这一证明，我们首先指出，在 $Ra = 3$ 时，二维与三维水平对流之间的定量差异相当小。$2 \times 10^{11}$。

在表1 中，值得注意的是，在相同努塞尔数下，三维解的瑞利数比二维解高不到 20%。很难相信，这种有限的

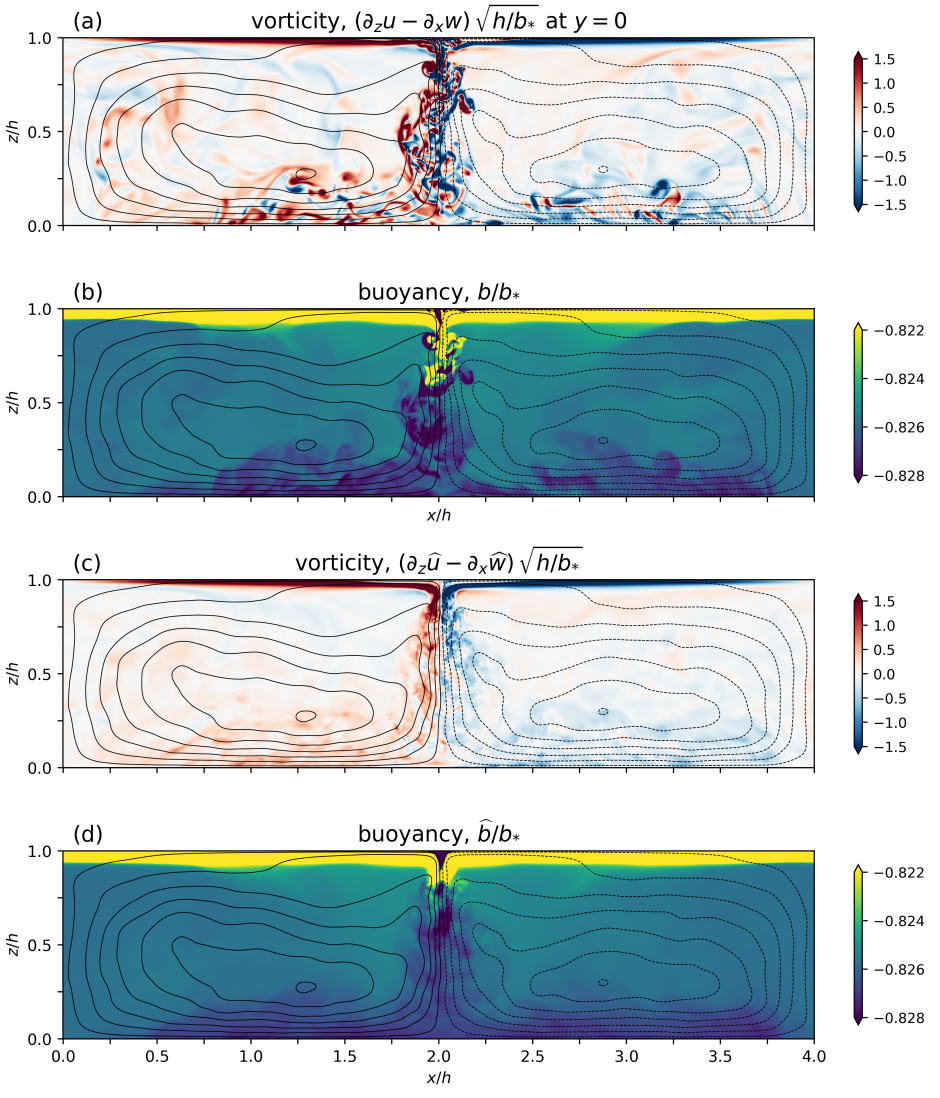


图 11：面板 (a) 和 (b) 展示了 $y$-切片中的 3DFS 解的快照，瑞利数 $= 3_{\text{。}}$ $20 \times 10^{11}$。面板 (c) 和 (d) 展示了快照中涡量和浮力的展向平均值。所有面板中的等值线均为流线，由最终时刻快照的展向平均值计算得到。在顶面 $-1 \leqslant b/b_\star \leqslant +1$；较窄的浮力色标范围使内部区域的微小变化清晰可见。

20% 的提升能够延伸至地球物理瑞利数，其值可能超过表瑞利数中最大的瑞利数1约 $10^{12}$。如果三维情况下努塞尔数的增幅仍为 20%，那么成本相对较低的二维数值解就能为三维热输运提供有用的估算。

（很可能二维努塞尔数始终小于三维努塞尔数，即三维运动的出现不可能伴随着热输运减少。若能证明这一猜想，将会很有价值。）

为进一步强调 努塞尔数中三维情况下的微小增幅，请注意，边界条件对热输运的定量影响大于维数：在图 4 中，2DFS 解的努塞尔数大于努塞尔数，而三维直接数值模拟 解则小于前者。

表5s 概述了偏离二维展向平均环流的总体量度 d

| | $\lvert\hat{\boldsymbol{u}}\rvert^2/\lvert\boldsymbol{u}\rvert^2$ | $v^2/\lvert\boldsymbol{u}\rvert^2$ | $\kappa b_y^2/\chi$ | $\nu\zeta^2/\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 3DFS | 0.662 | 0.112 | 0.013 | 0.187 |
| 3DNS | 0.690 | 0.092 | 0.019 | 0.342 |

表 5：瑞利数 $Ra = 3。20 \times 10^{11}$ 下三维解的统计数据。上述比值由最终时刻的单个快照计算得出，即未进行时间平均。
随着瑞利数 降低至
三维运动的起始临界值。在第一列中，$\hat{\boldsymbol{u}} = (-\psi_z, 0, \psi_x)$是展向平均速度
在（4.4）中，而最后一列中的 $\zeta = -\nabla^2\psi$ 是展向平均流的涡量。

环流定义见（4.3）。对于我们的最高瑞利数 三维直接数值模拟 和 3DFS 解，约三分之二的动能存在于展向平均流中。第三列中，浮力梯度在展向上的分量（$b_y$）对浮力耗散 $\chi$的贡献不到 2%。第四列中的机械能耗散 $\varepsilon$是唯一由偏离展向平均的部分主导的统计量。因此，表 5——尤其是第三列——支持这样的观点：三维 $Nu$ 在 瑞利数 $= 3。20 \times 10^{11}$ 主要由二维展向平均环流决定。

图11（a）显示，在3DFS 解的内部区域不存在惯性级联。惯性级联的特征是动能谱 $\sim \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$或涡量谱 $\sim \varepsilon^{2/3}k^{+1/3}$。紫外涡量发散在量级为 $\eta_K^{-1}$的波数处被截断，其中 $\eta_K \sim \delta_{1/4}$ 是柯尔莫哥洛夫长度。但图11（a）中的快照显示，内部区域的涡量集中在远大于 $\eta_K$的长度尺度上。与其寻找三维湍流的特征，不如将图11 与相应的 2DFS算例进行比较，见图12。

图 12(a) 中的二维涡旋长度尺度更大、强度也高于图11(a) 和 (c) 中的三维涡量涨落。二维涡旋的尺度更大，可能是中央羽流解体过程中发生涡旋合并所致。这些合并会保留涡量极值（Carnevale 等人 1991），因此边界层中的强涡量——图 5 (c) 和 (d) 中清晰可见——会被带入内部区域。

比较图 11 与 12 可知，三维解的内部区域中涡量并未显著放大。事实上，二维解内部区域的涡量强于三维解。也许 瑞利数 $= 3。2 \times 10^{11}$ 太小，因而不足以在水平对流内部激发湍流并引发涡旋拉伸？但我们现在将证明，即使 瑞利数 $\to \infty$，水平对流中也不可能发生显著的三维涡量放大。换言之，即使 $\langle|\omega|^2\rangle_{3D}$ 也几乎等于 $\langle|\omega|^2\rangle_{2D}$，即使 瑞利数 $\to \infty$。

利用一个众所周知的恒等式，动能耗散可写为 $\varepsilon = \nu\langle|\omega|^2\rangle$其中 $\omega = \nabla\times\boldsymbol{u}$ 为涡量。于是，机械能功率积分（2.8）可改写为

$$\frac{\langle|\omega|^2\rangle}{b_\star/h} = -\frac{\kappa}{\nu}\frac{\bar{b}(0)}{b_\star}, \tag{7.1}$$

（7.1）左端是无量纲平均涡量平方。结果（7.1）与$l_y/h$ 无关，因此可以将三维流动与在相同$Ra$下数值上可处理的二维“对比流”进行比较。这种比较得到不等式

$$\frac{\langle|\omega|^2\rangle_{2D}}{b_\star/h} \leqslant \frac{\langle|\omega|^2\rangle_{3D}}{b_\star/h} \leqslant \frac{\kappa}{\nu}. \tag{7.2}$$

第一个 $\leqslant$ （7.2）是因为，若反过来假设$\langle|\omega|^2\rangle_{2D} > \langle|\omega|^2\rangle_{3D}$ 那么就不存在三维

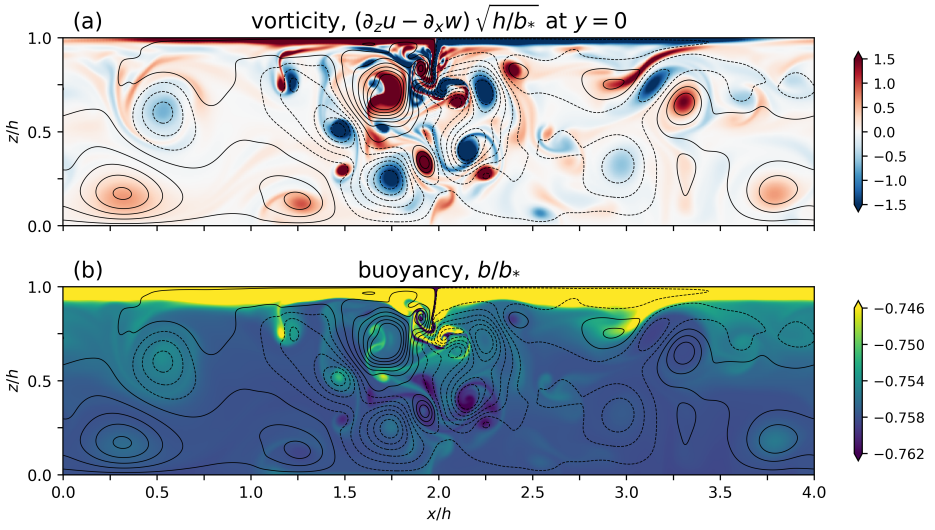


图 12：在 2DFS 解的快照，瑞利数 $= 3。20 \times 10^{11}$。等值线表示流线。浮力色标的范围较窄，因此可以看清内部区域的微小变化。

涡量放大，证明即告完成。第二个 $\leqslant$ （7.2）来自浮力极值原理 $b$（0） $\geqslant -b_\star$。

此处求得的二维高 瑞利数 解已非常接近达到浮力极值界。因此，(7.2) 对 $\langle|\omega|^2\rangle_{3D}$ 的范围作出了严格限制。例如，考虑以图 7.2中的 瑞利数 $= 6。4 \times 10^{13}$ 2DFS 解（图 2(c) 和 (d)）作为对比流时，式 (7.2) 的含义。在 瑞利数 $= 6。4 \times 10^{13}$ 下，三维流动无法通过直接数值求解获得。但二维对比解的 $b_{2D}(0)/b_\star \approx -0。85$，因此式 (7.2) 变为

$$0.85\frac{\kappa}{\nu} \leqslant \frac{\langle|\omega|^2\rangle_{3D}}{b_\star/h} \leqslant \frac{\kappa}{\nu}, \qquad \text{at } Ra = 6.4 \times 10^{13}. \tag{7.3}$$

因此，在 瑞利数 $= 6。4 \times 10^{13}$ 下，三维流动的涡量均方值至多比图 2(d) 中二维对比流动高 18%。

根据上述论证，可以利用从二维直接数值解中获得的$|\omega|^2$和底部浮力 $b(0)/b_\star$，来约束相同瑞利数下三维水平对流的$|\omega|^2$。此外，随着瑞利数 $\to \infty$，二维解很可能会越来越接近满足极值界。在这种情况下，随着瑞利数 $\to \infty$，(7.2)中的$|\omega|^2_{3D}$ 被限制在越来越窄的范围内，并且对于$l_y/h$的所有取值，$|\omega|^2 \to \kappa b_\star/\nu h$。

鉴于将湍流的零定律应用于水平对流存在争议（Paparella 和 Young 2002；Scotti & White 2011；Shishkina 等 2016），三维水平对流中涡旋拉伸的效能受到微弱机械能供给限制这一点颇为有趣。

作为对 $\langle|\omega|^2\rangle \approx \kappa b_\star/\nu h$ 的总结性说明，请注意，在图 1 和 2 中，涡量均以 $\sqrt{b_\star/h}$ 为尺度，即使 瑞利数 变化了 $10^6$倍。事实上，这一对涡量均方根的简单估算适用于本文报告的所有二维和三维解，例如，也适用于图5中边界层的放大视图。

## 8. 结论

我们对瑞利数–努塞尔数 关系进行了数值研究，考察了普朗特数 $= 1$ 以及对应于无滑移或自由滑移边界条件的四种情况，涵盖二维（$l_y/h = 0$）和三维

（$l_y/h = 1$）几何。在全部四种情况下，当瑞利数 处于 $10^6$ 至 $10^{10}$,范围内时，我们发现努塞尔数 ~ 瑞利数$^{1/5}$。在二维情况下，当瑞利数的最大值约为 $10^{14}$, 时，我们发现一个标度区间，其中 努塞尔数 ~ 瑞利数$^{1/4}$；另见 Tsai 等人（2020）。

该$Nu \sim Ra^{1/4}$ 标度区间具有双边界层结构。其中，主边界层的厚度为 $\sim Ra^{-1/5}$ ，内边界层的厚度为 $\sim Ra^{-1/4}$。内边界层的厚度对应于式（6.3）中 HC 的 Kolmogorov–Batchelor 尺度。

第$Nu$–$Ra$ 关系的标度论证在第4 节中进行了综述，这些论证几乎不依赖，甚至完全不依赖于二维与三维 HC 之间的区别。这些论证也没有指出展向纵横比$l_y/h$ 是一个重要参数。因此，对二维和三维 HC 开展平行数值研究，并比较相应的$Nu$值，是很有意义的。将二维 HC 与三维 HC 进行比较，并将范围扩展至$Ra = 3。2 \times 10^{11}$ 结果表明，与非湍流二维 HC 相比，三维 HC 的热输运仅增强了约 10% 或 20%。边界条件比维数更为重要：在相同的$Nu$下，二维自由滑移解的$Ra$大于三维无滑移解。

上述结论基于以下三维计算：瑞利数 $\leqslant 3。2\times10^{11}$而地球物理瑞利数则大了 $10^{10}$ 或 $10^{12}$。然而，利用不等式（7.2），我们可以利用二维数值解的结果，约束相同瑞利数下三维水平对流的涡量均方值。再假设二维解中的底部浮力趋近于最稠密表层流体的浮力这一合理条件，不等式（7.2）便意味着，二维和三维水平对流的涡量均方值均趋于 $\kappa b_\star/\nu h$ ，当 瑞利数 $\to \infty$时。因此，三维水平对流中不存在涡旋拉伸和涡量放大。这些结果进一步支持了这样的观点：三维水平对流并未体现湍流的全部特征。

**致谢**

我们感谢Basile Gallet和Ross Griffiths就水平对流展开讨论，但这并不意味着他们认可本文观点。计算资源由澳大利亚国立大学的澳大利亚国家计算基础设施提供，该基础设施由澳大利亚联邦支持。NCC 获澳大利亚研究理事会 DECRA 奖学金 DE210100749 资助。CBR 获美国国家航空航天局奖项 NNX16AO5OH 资助。SGLS 部分获美国国家科学基金会奖项 OCE-1829919 资助。WRY 获美国国家科学基金会奖项 OCE-1657041 和 OCE-2048583 资助。

**利益声明**

作者声明不存在利益冲突。

**附录 A. 低瑞利数区间**

如果瑞利数足够小，则可以对$Ra$ 进行简单的幂级数展开，从而得到努塞尔数为

$$Nu = 1 + C_2 Ra^2 + \mathrm{ord}\left(Ra^4\right). \tag{A 1}$$

在展开式（A1）中， $C_2$ 是长宽比 $A_x = l_x/h$的函数，但与普朗特数$Pr$无关。本附录概述了 $C_2$ 在由式（ $b_s$ 2.4）中的正弦形驱动的水平对流中的计算。这个计算比预想的更有意思，因为 $C_2$ 结果表明，对于所有长宽比 $A_x$，它都是一个非常小的数。

因此，对于本研究采用的长宽比 $A_x = 4$，“足够小”意味着瑞利数约为 $10^4$（见图4中的插图）。

采用流函数表述，其中 $(u, w) = (-\psi_z, \psi_x)$，并以深度 $h$ 作为长度标度、以 $h^2/\kappa$ 作为时间标度，稳态布oussinesq方程为

$$\psi_x \nabla^2 \psi_z - \psi_z \nabla^2 \psi_x = b_x + Pr\, \nabla^4 \psi\,, \tag{A 2}$$

$$\psi_x b_z - \psi_z b_x = \nabla^2 b\,, \tag{A 3}$$

其中，$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_z^2$ 为二维拉普拉斯算子；展向涡量为$u_z - w_x = -\nabla^2 \psi$。表面边界条件为 $b(x, 1) = \epsilon \cos mx$，其中

$$m \stackrel{\text{def}}{=} kh = 2\pi/A_x\,, \qquad \text{and} \qquad \epsilon \stackrel{\text{def}}{=} PrRa/A_x^3 = PrRa\,(m/2\pi)^3\,. \tag{A 4}$$

我们将所有变量按小参数 $\epsilon$的幂次展开

$$(b, \psi) = \epsilon(b_1, \psi_1) + \epsilon^2 (b_2, \psi_2) + \cdots\,. \tag{A 5}$$

一阶方程为

$$Pr \nabla^4 \psi_1 = -b_{1x}\,, \qquad \text{and} \qquad \nabla^2 b_1 = 0\,. \tag{A 6}$$

解（A6）为

$$\psi_1 = \sin mx\, P(z)\,, \qquad \text{and} \qquad b_1 = \cos mx\, B(z)\,, \tag{A 7}$$

其中 $B(z)$ def $=$sech $m$cosh $mz$。在 $\psi_1(x,\ z)$ 中，我们有自由滑移函数

$$P^{FS}(z) = \frac{B(z)}{8m^2 Pr}\left[(m \coth m + 1 - z)\tanh mz - mz(2 - z)\right], \tag{A 8}$$

以及无滑移函数

$$P^{NS}(z) = \frac{1}{8mPr\,(\sinh^2 m - m^2)}\Big[(\sinh^2 m - m^2)(z^2 - z)B(z) + (\tanh m - m)\, z \sinh m(1 - z) + (\sinh m - m \operatorname{sech} m)\,(1 - z)\sinh mz\Big]. \tag{A 9}$$

在 $\epsilon$ 的二阶项中，我们必须求解

$$\nabla^2 b_2 = \psi_{1x} b_{1z} - \psi_{1z} b_{1x}\,, \tag{A 10}$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2} m (PB)'}_{J_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m (PB' - P'B)}_{J_2} \cos 2mx\,. \tag{A 11}$$

(A11的解具有如下形式

$$b_2 = B_{20}(z) + B_{22}(z) \cos 2mx\,, \tag{A 12}$$

其中 $B_{20}$ 和 $B_{22}$ 通过求解以下方程确定

$$B_{20}'' = J_0\,, \tag{A 13}$$

$$B_{22}'' - 4m^2 B_{22} = J_2\,. \tag{A 14}$$

构造 $\langle B_{22}$(A 14)$\rangle$ 后，我们可以得到从 (A 16) 到 (A17) 时所用的捷径:

$$\left\langle {B_{22}'}^2 + 4m^2 B_{22}^2 \right\rangle = -\langle B_{22} J_2 \rangle\,. \tag{A 15}$$

利用 Mathematica 得到的 $B_{22}$ 和 $B_{20}$的表达式十分复杂，因此没有明确列出。所幸，要得到 (A1) 中的系数 $C_2$，我们并不需要 $\psi_2$。

将 $\nabla^2 b_1 = 0$ 乘以 $b_n$，其中 $n \geqslant 2$，并注意到所有这些 $b_n$ 在 $z = 0$ 和 1 处都满足齐次边界条件，可知 $\boldsymbol{\nabla} b_n \cdot \boldsymbol{\nabla} b_1 = 0$。因此，浮力方差耗散的展开式为

$$\chi = \epsilon^2 \underbrace{\langle |\boldsymbol{\nabla} b_1|^2 \rangle}_{\chi_2 = \frac{1}{2} m \tanh m} + \epsilon^4 \underbrace{\langle |\boldsymbol{\nabla} b_2|^2 \rangle}_{\chi_4} + \mathrm{ord}\left(\epsilon^6\right). \tag{A 16}$$

回顾 $\epsilon$ 在（A4）中的定义，努塞尔数为

$$Nu = 1 + \underbrace{\frac{m^2 \left\langle (PB)^2 \right\rangle - 2\langle B_{22} J_2 \rangle}{2m \tanh m}}_{\chi_4/\chi_2} \left(\frac{m^3 Pr}{8\pi^3}\right)^2 Ra^2 + \cdots . \tag{A 17}$$

由于 $P$、$B_{22}$ 和 $J_2$ 都与 普朗特数$^{-1}$ 成正比，普朗特数 $Pr$ 会从（瑞利数$^2$ 的系数中约去，见（A17）。

在 自由滑移 边界条件下，（$C_2$）中的表达式（A1）为

$$\begin{aligned} C_2^{FS} = \Big[ & 690 - 1920 m^4 \operatorname{cosech}^2 m + 20(3 + 4m^2)^2 \operatorname{sech} 2m \\ & + m(1024 m^4 - 80 m^2 - 6195) \operatorname{cosech} m \operatorname{sech}^3 m \\ & + 5(352 m^4 - 624 m^2 + 1065) \operatorname{sech}^2 m \Big] \Big/ 41\,943\,040\,\pi^6 . \end{aligned} \tag{A 18}$$

自由滑移情况下的极限值为

$$\lim_{m \to 0} C_2^{FS} = \frac{31\, m^8}{30\,965\,760 \pi^6} + \mathrm{ord}\left(m^{10}\right), \tag{A 19}$$

and

$$\lim_{m \to \infty} C_2^{FS} = \frac{69}{4\,194\,304\,\pi^6} . \tag{A 20}$$

我们很欣赏上述和下述公式中频繁出现的整数 $4\,194\,304 = 2^{22}$。在采用无滑移边界条件时，我们发现

$$C_2^{NS} = \frac{1}{41\,943\,040\,\pi^6} \frac{\Xi(m)}{\left(\cosh 2m - 2m^2 - 1\right)^2}, \tag{A 21}$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi(m) = {} & 85 \cosh 4m - 320 m (33 + 8m^2) \sinh 2m + 10\left(845 + 716 m^2\right) \cosh 2m \\ & - 5(5123 + 18304 m^2 + 13720 m^4 + 2912 m^6) \\ & - 4 m^5 (7215 + 100 m^2 - 64 m^4) \coth m \\ & + 20(829 + 4402 m^2 + 5289 m^4 + 836 m^6 - 64 m^8) \operatorname{sech}^2 m \\ & - 4m(4785 + 8010 m^2 + 1549 m^4 - 212 m^6 + 64 m^8) \tanh m \operatorname{sech}^2 m \\ & + 20(25 - 184 m^2 - 80 m^4 - 16 m^6) \operatorname{sech} 2m \\ & + 4m(8865 + 21640 m^2 + 17719 m^4 + 740 m^6 - 64 m^8) \tanh m \\ & + 160 m (15 - 7 m^2 - 4 m^4) \tanh 2m . \end{aligned} \tag{A 22}$$

无滑移无滑移情形下的极限值为

$$\lim_{m\to 0} C_2^{NS} = \frac{m^8}{30\,965\,760\pi^6} + \mathrm{ord}\left(m^{10}\right), \tag{A 23}$$

and

$$\lim_{m\to \infty} C_2^{NS} = \frac{17}{4\,194\,304\pi^6}. \tag{A 24}$$

值得注意的是，$m$ $C_2^{NS}$（A 23）中的值恰好比 $C_2^{FS}$（A19）中的值小 31 倍。

对于所有纵横比，两个 $C_2$的值都远小于 1。在图4所汇总的数值解中，纵横比为 $A_x = 4$，对应于 $m = kh = \pi/2$。通过令 $m = \pi/2$，并对公式（3.3）和（3.4），可得到结果（A 18）至（A22）。

参考文献

Benzi, R, Patarnello, S & Santangelo, P 1987 关于二维衰减湍流统计性质的研究。《Europhys. Lett.》3 (7), 811。Benzi, R, Patarnello, S & Santangelo, P 1988 二维衰减湍流中的自相似相干结构。《J. Phys. A》21 (5), 1221。Burns, K. J., Vasil, G. M., Oishi, J. S., Lecoanet, D. & Brown, B. P. 2020 Dedalus：一种灵活的谱方法数值模拟框架。《Phys. Rev. Res.》2, 023068。Carnevale, G. F., McWilliams, J. C., Pomeau, Y., Weiss, J. B. & Young, W. R. 1991 二维湍流中涡旋统计的演变。《Phys. Rev. Lett.》66 (21), 2735。Chiu-Webster, S., Hinch, E. J. & Lister, J. R. 2008 高黏度水平对流。《流体力学杂志》611, 395–426。Coman, M. A., Griffiths, R. W. & Hughes, G. O. 2006 重新审视 Sandstr¨om 的实验。《J. Mar. Res.》64 (6), 783–796(14)。Dritschel, D. G., Scott, R. K., Macaskill, C., Gottwald, G. A. & Tran, C. V. 2008 统一二维湍流涡旋动力学的标度理论。《Phys. Rev. Lett.》101 (9), 094501。Gayen, B., Griffiths, R. W. & Hughes, G. O. 2014 水平对流中的稳定性转变与湍流。《流体力学杂志》751, 698–724。Hughes, G. O. & Griffiths, R. W. 2008 水平对流。《Annu. Rev. Fluid Mech.》40, 185–208。Ilicak, M. & Vallis, G. K. 2012 水平对流的数值模拟与标度。《Tellus A》64 (1), 18377。McWilliams, J. C 1984 146, 21 43 湍流中孤立相干涡旋的形成。《流体力学杂志》–。McWilliams, J. C 1990 二维湍流中的涡旋。《流体力学杂志》219, 361–385。Mullarney, J. C., Griffiths, R. W. & Hughes, G. O. 2004 由水平边界上的差异加热驱动的对流。《流体力学杂志》516, 181–209。Paparella, F. & Young, W. R. 2002 水平对流并非湍流。《流体力学杂志》466, 205–214。Passaggia, Pierre-Yves, Scotti, Alberto & White, Brian 2017 水平对流中的转变与湍流：线性稳定性分析。《流体力学杂志》821, 31–58。Ramme, Lennart & Hansen, Ulrich 2019 高黏度水平对流向时变流动的转变。《Physical Review Fluids》4 (9), 093501。Reiter, Philipp & Shishkina, Olga 2020 经典与对称水平对流：脱落羽流与振荡。《流体力学杂志》892。Rocha, C. B., Bossy, T., Llewellyn Smith, S. G. & Young, W. R. 2020a 改进的水平对流界限。《流体力学杂志》883, A41。Rocha, C. B., Constantinou, N. C., Llewellyn Smith, S. G. & Young, W. R. 2020b 水平对流的努塞尔数。《流体力学杂志》894, A24。Rossby, H. T.1965 关于由底部非均匀加热驱动的热对流：一项实验研究。《Deep Sea Res.》12 (1), 9–10, IN9–IN14, 11–16。Rossby, H. T. 1998 流体从底部接受非均匀加热的数值实验。《Tellus A》50 (2), 242–257。

Sandstr¨om, J. W. 1908 海水动力学实验。《水动力海洋气象年刊》36, 6–23。Scotti, A. & White, B. 2011 水平对流真的“非湍流”吗？《Geophys. Res. Lett.》38 (21), L21609。Sheard, G. J. & King, M. P. 2011 水平对流：长宽比对瑞利数标度关系与稳定性的影响。《Appl. Math. Modelling》35 (4), 1647–1655。Shishkina, O., Grossmann, S. & Lohse, D. 2016 水平对流中的热输运与动量输运标度关系。《Geophys. Res. Lett.》43 (3), 1219–1225。Shishkina, Olga & Wagner, Sebastian 2016 层流水平对流中热输运对普朗特数的依赖性。《物理评论快报》116 (2), 024302。Siggers, J. H., Kerswell, R. R. & Balmforth, N. J. 2004 水平对流界限。《流体力学杂志》517, 55–70。Tsai, T., Hussam, W. K, Fouras, A. & Sheard, G. J. 2016 封闭水平驱动对流中不稳定性的起源。《Int. J. Heat and Mass Transfer》94, 509–515。Tsai, T., Hussam, W. K., King, M. P. & Sheard, G. J. 2020 不同温度剖面驱动的水平对流中的转变与标度。《Int. J. Thermal Sci.》148, 106166。Wang, W. & Huang, R. X. 2005 水平差异加热驱动热对流的实验研究。《流体力学杂志》540, 49–73。Winters, K. B. & Young, W. R. 2009 水平对流中的可用位能与浮力方差。《流体力学杂志》629, 221–230。