arXiv:2301.03123v1 [math.AG] 9 Jan 2023

带结构层的偏序集的松弛余极限：在下降理论中的应用

Javier Sánchez González萨拉曼卡大学，数学系javier14sg@usal.es

2023年1月10日

摘要

我们考虑任意范畴 $\mathfrak{C}$ 上的、取值于 $\mathfrak{C}$的结构层的偏序集范畴，并考察它们如何具有偏序集索引的松弛余极限：这类余极限既易于描述，又在某种意义上与普通余极限“弱等价”。我们利用这一构造研究概形空间上的下降问题——概形空间是一种特殊的类概形环化偏序集——并证明了一个关于其 étale 基本群的一般性 Seifert-Van Kampen 定理，该定理恢复并推广了概形情形下的同名结果，将其拓展至平坦单射拓扑。这些技巧具有足够的普适性，还可应用于许多其他框架。

1 引言

在几何领域中，范畴余极限可视为表达空间粘合的一种通用方式。例如，任意概形都是其任一仿射覆盖中的各个分量在局部环化空间范畴中的余极限。此外，对于任意合理的概形，我们可以假设这些余极限由偏序集索引：即去除冗余后相应仿射覆盖的神经 。这个想法不过是将拓扑空间有限模型的构造推广到局部环化空间；McCord 曾采用这项古老技术来研究同伦类型 [2]。

为了更好地理解这一情形，可以将这些概形的粘合数据视为从某个偏序集 X（将其理解为一个范畴）到含单位元的交换环范畴的函子；在对原概形 S 作适度紧致性假设的情况下，我们可以假设该偏序集是有限的。也就是说，

$X \to$ 交换环范畴。众所周知，这类函子组成的范畴与偏序集 X（将其理解为一个拓扑空间）上的环层范畴一致，因此我们可以将这些数据集视为（非局部）环化空间来研究。这一观点的一大优势在于，许多层论概念都有简单的描述，例如拟凝聚模或阿贝尔层的切赫分解；而且在许多情况下，它们与其在 S 上的概形论类比一致。基于这些观察，Sancho 首先在 [6] 中公理化定义了有限环化偏序集的一个非满子范畴，它在拟凝聚模方面表现良好，而且不仅包含所有（拟紧且拟分离）概形的有限模型，还对这些概形作了实质性的推广：有限概形空间范畴 SchFin。接触这些对象一段时间后，人们很容易相信，相较于单纯概形等具有类似用途的构造，它们具有几何上的研究价值。第 2 节将简要概述这一非标准方法。

回顾前面的讨论，我们还注意到，在概形范畴中计算余极限——或者仅仅判断它们是否存在——是一个非常一般且困难的问题：即使存在性有保证——例如，通过开浸入得到的余极限——，要获得它们的显式表达式也并非易事。若尝试计算上一段所述的概形空间的余极限，情况也好不了多少；不过，得益于其组合性质，我们还有一种替代方法：给定一个由偏序集索引的 “数据” $\mathcal{U}\colon\ P \to \mathrm{SchFin}^{\mathrm{op}}$，我们可以构造一个空间，称为 $\mathcal{U}$ 的柱体，具体做法是将集合 $\coprod_{p\in P} |\mathcal{U}(p)|$ 转化为一个偏序集，其结构继承自每个 $|\mathcal{U}(p)|$ 的底层偏序集以及转移态射 $|\mathcal{U}(p)| \to |\mathcal{U}(q)|$（其中 $q \leq p$）。若再赋予所得偏序集一个由各个 $\mathcal{U}(p)$ 的结构层诱导的结构层——它实际上只是一个函子——，便得到一个环化偏序集——在某些条件下，它也是一个概形空间——，该环化偏序集在精确意义上表示所需的余极限（即与之弱等价），而且这一构造无需对交换环或偏序集进行任何复杂的范畴论运算。

本文将以最一般的形式研究这一圆柱空间，将交换环范畴替换为任意范畴 $\mathfrak{C}$。我们将构造带有有限偏序集及 $\mathfrak{C}$ 值结构层的范畴，并将其称为 $\mathfrak{C}$ 数据范畴，记作 $\mathfrak{C}$-data。若 $\mathfrak{C} = \mathrm{pos}$ 是偏序集范畴，那么圆柱空间实际上就是以偏序集为指标的松余极限的一种体现，其中将 pos 自然地视为严格 2-范畴。我们将证明这一点，并探讨它如何推广到允许配备结构层的偏序集。

其值取于 $\mathfrak{C}$，详细阐述可以考虑的不同 2-范畴结构，以及它们之间如何相互作用。为此，我们需要考虑 $\mathfrak{D}$-data，其中 $\mathfrak{D}$ 是一个严格 2-范畴；这在其他应用中也很有用。我们选择的表述方式将与环化偏序集范畴保持类比，并以此作为参照。

这些关于 $\mathfrak{C}$-数据及其上的松弛余极限的构造，具有足够的普适性，能够对许多自然出现且具有函子性的下降问题进行建模。为使讨论集中，我们将所有内容专门限定在前文讨论过的概形空间情形：我们将刻画概形空间的柱体何时仍为概形空间，并运用这一刻画，给出一个关于概形空间上数据的非常一般的下降定理；该定理甚至还具有一种拓扑斯论解释——由于篇幅所限，这里仅作概述。我们将介绍一些例子，其中最主要的是 [4] 中构造的概形空间的 étale 基本群的 Seifert-Van Kampen 定理。值得注意的是，对于概形及其平坦单态射拓扑（而非 Zariski 拓扑或 étale 拓扑），同名结果的一个变体可以仅凭本文建立的形式下降结果和经典情形推出。这说明，这些技术会自动将任何“合理的”Zariski 局部命题推广到上述拓扑。

2 动机：概形空间

让我们对这些应用所研究的对象作一个相当非正式的介绍。这些对象正是最初促使人们发展$\mathfrak{C}$-数据理论的动机，我们将在接下来的各节中介绍这一理论。概括而言，概形空间是环化有限偏序集范畴的最大子范畴；就拟凝聚层范畴而言，它的行为“类似于拟紧且拟分离（qc-qs）”概形。其基本例子来自概形有限模型的构造，参见 [7], ，这是对较早的一种拓扑技术的推广，参见 [2]: 给定一个 qc-qs 概形 S 及其有限覆盖 $\{U_i\}$，可以将覆盖所生成的拓扑作 T_0-化，从而定义一个偏序集 X。具体而言，若对任意 $s \in S$，记作$U^s = \cap_{s\in U_i} U_i$，则定义 $X = S/\sim$；当且仅当 $U^s = U^{s'}$时有 $s \sim s'$，并且当且仅当 $U^{s'} \subseteq U^s$时有$[s] \leq [s']$。所得结果是一个环化空间态射

$$\pi\colon S \to (X, \pi_*\mathcal{O}_S).$$

如果选择覆盖使得 U^s 是仿射的，那么 π 会诱导一个伴随等价 $(\pi^* \dashv \pi_*)$: $\mathrm{Qcoh}(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Qcoh}(X)$，因此可以从 X研究 S。

概形空间最初在 [6] 中引入，并在 [5], [8] 或 [4]中得到研究。在 [9] 中可以找到对各种刻画的详尽汇编，而本文作者在其博士论文中对此作了进一步拓展，并全面探讨了它们在代数几何中的作用；该论文包含本文的内容，后续还将有更多成果。从本质上说，我们建议将概形空间 X 视为局部仿射局部环化空间 $\mathrm{Spec}(X) = \mathrm{colim}_{x\in X}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$的一种模型，或其“结构化下降数据”；但概形条件要求这种离散体现 X “足够良好”，从而能在一定程度上反映 $\mathrm{Spec}(X)$的几何。可以证明，这些 $\mathrm{Spec}(X)$ 必须在仿射概形的平坦单射拓扑下局部仿射，因此包含所有准紧准分离概形；然而，概形空间并不能为例如代数空间建模，因为与之相关联的局部环化空间未能保留足够有用的代数信息。此外，还有一些“几何”方面的论据支持将环化偏序集作为组合模型的基底，而非单纯概形等更经典的替代方案。

虽然这或许不是最能启发思考的方法，但为便于讨论，我们采用以下定义。为简单起见，假设这些环化偏序集的所有茎环都是诺特的。

定义 2.1. 有限环化偏序集 X 若满足以下条件，则称为（有限）概形空间

- For any $x \le y$, the morphism $r_{xy}\colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,y}$ is flat.
- 对于任意 $t \le x$、y，态射

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,t}} \mathcal{O}_{X,y} \to \prod_{z\ge x,y} \mathcal{O}_{X,z}$$

是忠实平坦的。

概形空间之间的态射 $f\colon X \to Y$若满足以下条件，则称为概形的

- 对于任意 $x \in X$ 和 $y \ge f(x)$，态射

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{Y,y} \to \prod_{z\in U_x\cap f^{-1}(U_y)} \mathcal{O}_{X,z}$$

在素谱之间诱导出一个满射。

注记 2.2。 对忠实平坦态射应用简单的下降论证可得，对于所有 $t \le x, y$，$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} \mathcal{O}_{X,y} \simeq \mathcal{O}_X(U_x \cap U_y)$。若 $x = y$，则此条件意味着任意概形空间的限制态射 r_{xy} 都是平坦环满态射，因而是局部同构。

令 SchFin 表示概形空间及其态射构成的范畴。除非另有说明，所有环化偏序集及其态射都视为概形的。本节引言中概述的 Spec 构造定义了一个到局部环化空间范畴的函子，该函子既非满函子也非忠实函子：

$$\text{Spec} : \text{SchFin} \ \to \text{局部环化空间}\ X \mapsto \text{Spec}(X) := \text{colim}_{x \in X} \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}).$$

可以证明，概形范畴具有有限纤维积，并且这些纤维积在遗忘到 CRing-数据以及经由 Spec 映射时均得以保留。

注 2.3。 从直观上说， X 的限制映射是平坦满态射，这意味着可以从 Spec(X) 恢复 X 中的信息。可以证明，其他概形性条件等价于存在某个映射 π_X: Spec(X) $\to X$，也就是说，在拓扑意义上， X 本质上是 Spec(X) 的一个“有限模型”。

定义 2.4。 如果 Spec(f) 是一个同构，则称态射 f: $X \to Y$ 为拟紧同构 。

拟紧同构类是 SchFin 中一个按定义极大的箭头乘法系，因此，相应的局部化——Verdier 商——定义了一个忠实但不满的函子

$$\text{Spec}\colon \mathbf{SchFin}_{\text{qc}} \to \mathbf{LRS}.$$

为了研究概形空间的性质 P，我们要求满足两个条件：

- 一个“严格”的条件：P 必须通过局部化因子化；也就是说，空间或箭头的拟紧同构类中的任意代表元，都能判定整个同构类是否满足该性质。换言之，P 是几何的。

- 一个“理念上”的条件：无需应用 Spec 函子，就能通过有限模型来研究 P。换言之，P 是可离散化的。

在某些情况下，可以通过在 SchFin 的某些反射子范畴上研究表现不佳的性质，将其“刚化”；这些子范畴在对 qc-同构局部化后会诱导出等价。例如，参见 [4] 中关于连通性的讨论。本文将默认我们的所有定义都能以这种理想方式运作，但须说明，要完整阐述还需要更多技术性考量——这也是我们如此频繁地使用引号来标示看似普通的概念的原因。

最后， [4] 中的主要结果——只要付出足够的努力，就能用比文中所呈现的表述更具几何意味、也更优雅的方式来书写——关注的是：对于任意“连通”的概形空间 X，是否存在一个由“有限 étale 覆盖”构成的伽罗瓦范畴；当 X 是一个准紧准分离概形 S 的模型时，该范畴自然等价于 S 的同名伽罗瓦范畴。

定理 2.5. [4] 对于概形空间 X 以及一个概形态射 $\mathrm{x}\colon \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$（其中 Ω 是代数闭域，即一个几何点），存在一个范畴 $\mathbf{R\acute{E}t}(X)$ 和一个函子 $\mathrm{Fib}_{\overline{\mathrm{x}}}\colon \mathbf{R\acute{E}t}(X) \to \mathrm{FinSet}$，使得当 X “连通”时，偶对 $(\mathbf{R\acute{E}t}(X), \mathrm{Fib}_{\overline{\mathrm{x}}})$ 是一个伽罗瓦范畴。我们将其基本群记为 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X, \overline{x})$。若 $S = \mathrm{Spec}(X)$ 是一个概形，则 Spec 函子诱导出伽罗瓦范畴的等价 $(\mathbf{R\acute{E}t}(X), \mathrm{Fib}_{\overline{\mathrm{x}}}) \simeq (\mathrm{FEt}(S), \mathrm{Fib}^{\mathrm{Spec}(\overline{\mathrm{x}})})$，其中 $\mathrm{FEt}(S)$ 是 S 的有限 étale 覆盖范畴，因此 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X, \overline{x}) \simeq \pi_1^{\mathrm{et}}(S, \mathrm{Spec}(\overline{x}))$。

注记 2.6. 在 [4] 中，我们还证明了准紧同构空间的有限 étale 覆盖伽罗瓦范畴等价：这一构造是几何的。

当然，对于一般的概形空间 X，可以考虑其所有几何点组成的集合，并定义 étale 基本（Stone）群胚 $\Pi_1^{\mathrm{et}}(X)$。在一般版本中，伽罗瓦定理指出，纤维函子诱导出一个范畴等价

$$\mathbf{R\acute{E}t}(X) \simeq [\Pi_1^{\mathrm{et}}(X), \mathbf{FinSet}] \equiv \Pi_1^{\mathrm{et}}(X)\text{-}\mathbf{FinSet}$$

w 此处该群胚的作用是连续的。一如既往，这只是更一般的拓扑斯论结果的一个特例。

2.1 平坦浸入的拓扑

我们首先在 SchFin 上引入自然的（预）拓扑。

定义 2.7. 设 $f\colon X \to Y$ 是一个概形态射。若对所有 $x \in X$， f 的 $f_x^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ 都是平坦的，则称 f 是**平坦** 的。若此类平坦态射的对角态射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ 是拟紧同构，则称其为**平坦浸入** 。若平坦态射 f 满足 $\mathrm{Spec}(f)$ 是满射，则称其为**忠实平坦** 的。

这三类映射可以用拟凝聚层的伴随对 (f^*, f_*) 来刻画。我们指出，平坦浸入按定义是 $\mathrm{SchFin}_{\mathrm{qc}}$ 中的一个平坦单态射；而此类 f 的 $\mathrm{Spec}(f)$ 是局部环化空间的平坦单态射。可以证明，qc-同构恰好就是忠实平坦浸入。

注2.8。可以证明，态射 $U_x \to U_y$ 是平坦浸入，当且仅当 $\mathcal{O}_{Y,\ y} \to \mathcal{O}_{X,\ x}$ 是平坦环满态射。由于概形空间的限制映射是平坦环满态射，因此它们的基本开子集之间的限制态射是平坦浸入——实际上，它们所有开子集之间的限制态射都是平坦浸入。换言之，概形空间是通过平坦浸入取（某些）仿射概形空间的余极限。这类态射最早是在 [3]中的下降问题背景下被证明具有重要意义。

引理 2.9. 若 $f\colon X \to Y$是平坦浸入，则对于所有 $x \in X$， $f_x^\sharp\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,\ x}$ 都是平坦环满态射。

证明. 根据定义，它们都是平坦的，而对角态射上的条件显然等价于 $\mathcal{O}_{Y,\ f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ 是同构。 □

回想一下，概形之间的开浸入是有限表示的平坦单态射（局部地）。因此，平坦浸入类似于“开浸入”，但不要求有限表示。读者或许会注意到，这与概形的 étale 和 pro-étale 拓扑有类比。这便引出了以下记号：

定义 2.10. 设 X 是一个概形空间。我们将 X_{wZar} 定义为以 X为目标的平坦浸入的 site，其覆盖由有限个且联合忠实平坦的平坦浸入族给出。类似地，我们将 $\mathrm{SchFin}_{\mathrm{wZar}}$定义为平坦浸入的“大”site。

这些位点呈现出许多有趣的病态现象，我们将在后续论文中更详细地描述。下面列举其中几种：

- 范畴 X_{wZar} 不是小范畴，只有其局部化 $(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}$ 才是。每个开浸入的拟紧同构类都对应于 $\mathrm{Spec}(X)$ 的一个子集；但在局部化之前，其代表元的集合与所有有限偏序集一样大。

- 由于 qc-同构既是平坦浸入又是覆盖，却不是同构，标准的下降论证表明，层会将 *qc*-同构映射为同构——范畴论学家有时将具有此性质的态射称为局部同构——。特别地，点函子不是层，因为它们将空间确定到同构为止，所以位点 $X_{\mathbf{wZar}}$ 及其更大的类似位点不是

次典范。然而，可以证明，对于任意 $Y \in X_{\mathrm{wZar}}$ 和层 $\mathcal{F} \in X_{\mathrm{wZar}}$，存在自然双射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(X_{\mathrm{wZar}})}(\mathcal{F}, \mathrm{Hom}_{X_{\mathrm{wZar}}}(-, Y)) \simeq \\ \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X_{\mathrm{wZar}})}(\mathcal{F}, \mathrm{Hom}_{(X_{\mathrm{wZar}})_{\mathrm{qc}}}(-, Y))\end{aligned}$$

换句话说，局部化中的点函子满足层化的泛性质。

- 我们在前面的几点中避免讨论层化，因为由于可能存在大小问题，我们无法保证这样的函子在 X_{wZar} 中存在——这与无法为覆盖的细化找到界限有关，可能会导致病态现象，正如概形的 fpqc拓扑中所发生的那样，见 [12, 定理 5.5]——；但好消息是，它确实存在（X_{wZar}）$_{\mathrm{qc}}$。也就是说，我们可以对经过拟紧同构的预层进行层化，这足以应对所有自然情形。

- 给 X_{wZar} 赋予自然的环层后，可以证明 $\mathsf{Qcoh}(X_{\mathrm{wZar}}) \simeq \mathsf{Qcoh}(X)$。

与概形和开浸入的情形一样，显然，如果$\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$ 是概形空间的一个图表，且转移态射$X_i \to X_j$ （对任意 $i \to j$）都是平坦浸入，那么在环化偏序集范畴中取 $\mathsf{colim}_i X_i$ ，便有 $\mathsf{Spec}(\mathsf{colim}_i X_i) = \mathsf{colim}_i \mathsf{Spec}(X_i)$，所得空间是由仿射概形之间的平坦单态射粘合而成的。问题在于，一般而言，由于概形性的定义具有组合性质，且有限偏序集余极限的描述出乎意料地微妙，因此很难判断 $\mathsf{colim}_i X_i$ 是否为概形（见 [1, 命题 2.4]）。

我们的解决方案是定义一个在表示相同局部环化空间的意义下与 $\mathsf{colim}_i X_i$ “等价”的对象，但其组合性质却很简单。具体做法将在第5节和第6节中介绍。所得结果将称为圆柱空间，记作 $\mathsf{Cyl}(\mathcal{X})$。

这一构造在概形空间理论中至关重要，其应用范围超出了本文的讨论范畴；但本文旨在研究平坦浸入拓扑下的下降性质。例如，我们来考虑 étale 基本群胚的情形。它显然定义了一个函子

$$\Pi_1^{\text{ét}} : \mathbf{SchFin} \to \mathbf{Gpd}_{\mathrm{Stone}}$$

其取值于 Stone 群胚的严格 2-范畴。证明一般形式的 Seifert-Van Kampen 定理——针对平坦浸入拓扑——本质上相当于说明 $\Pi_1^{\text{ét}}$ 将余极限映为 2-余极限。这等价于说，$(\Pi_1^{\text{ét}})^{\text{op}}$ 是一个 *2-层*——因此它将 qc-同构映为等价——。根据这些位点的性质，这又等价于证明它将“与余极限 qc-等价”的对象——即我们的圆柱空间——映为 2-余极限。然而，我们关于平坦浸入拓扑与圆柱的抽象下降结果将表明，只需证明它在组合拓扑下是一个 2-层即可。这样的陈述相当于证明 $\Pi_1^{\text{ét}}$ 将一种非常特定的圆柱映为 2-余极限；在某些特殊情形下，这甚至可以形式化完成。

3 个 $\mathfrak{C}$-数据范畴

不再赘述，设 $\mathfrak{C}$ 为一个 1-范畴，且 pos 为有限偏序集的范畴——也可以是任意偏序集的范畴，但此时需注意集合论大小考量——。对于给定的偏序集 X 和 $x \in X$，记点 X的最小开邻域为 $U_x = \{x' \geq x\}$ 。以下结果众所周知：

引理 3.1. 若 $\mathfrak{C}$ 有有限极限且 $X \in$为 pos，则存在一个等价

$$\mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C}) \simeq [X, \mathfrak{C}]$$

介于 $\mathfrak{C}$-值层范畴与函子 $X \to \mathfrak{C}$之间。

证明。每个层都给出一个由其茎（即最小开邻域上的截面）和限制态射所定义的函子。反过来，由层条件以及 $\{U_x\}_{x \in X}$ 构成拓扑的一个基这一事实可知，对于任意开集 $U \subseteq X$ 和函子 $\mathcal{F}\colon X \to \mathfrak{C}$，可将其在 U上的“截面”定义为 $\mathcal{F}(U) = \lim_{x \in U} \mathcal{F}(x)$。 □

现在我们来考虑到范畴的 1-范畴的函子——它足够大，因此 $\mathfrak{C} \in$ Cat——

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}}\colon \mathbf{pos} &\to \mathbf{Cat} \\ X &\mapsto [X, \mathfrak{C}] \\ f &\mapsto f^{-1}. \end{aligned}$$

定义 3.2。 对于任意 $\mathfrak{C}$， $\mathfrak{C}$-数据的范畴是定义在 $\mathfrak{C}$ 上的纤维范畴，由将 Grothendieck 构造应用于前一个函子得到。具体来说：

- $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}\text{-数据}) = \{\mathcal{F} \overset{非}{\equiv} (X, \mathcal{F})\colon \ X \in \text{偏序集且 } \mathcal{F} \in [X, \mathfrak{C}]\}$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-数据}}((X,\mathcal{F}),(Y,\mathcal{G})) = \{f\colon X \to Y \text{和 } f^\sharp\colon f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}\}$;
- $|-|\colon \mathfrak{C}\text{-数据} \to \text{偏序集是“底层偏序集”结构函子}$ r.

记号 3.3. 我们通常将 $\mathcal{F}$ 记作 $\overset{记作}{\equiv}(X,\mathcal{F})$ 和 $X = |\mathcal{F}|$，除非 $\mathfrak{C} =$ 交换环范畴是交换环的范畴，在这种情况下，$\mathfrak{C}$-数据是环化偏序集的范畴，我们将保留传统记号 $(X, \mathcal{O}_X)$。此外，对于任意 $\mathcal{F}$ 和 $x \leq y \in |\mathcal{F}|$，我们将其“限制态射”记为 $\mathcal{F}_{xy}\colon \mathcal{F}(x) \to \mathcal{F}(y)$。

注记 3.4. 注意，$\mathfrak{C}$-数据的构造在范畴上是函子性的：若 $\Phi\colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 是一个函子，则由后合成诱导出 $\Phi_*\colon \mathfrak{C}\text{-数据} \to \mathfrak{D}\text{-数据}$。

这个范畴带有一个自然包含函子

$$i_{\mathfrak{C}}\colon \mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{C}\textbf{-data} \qquad c \mapsto (\star, c)$$

类似于固定形状的图表范畴中的“对角嵌入”。由于选择 $\star$ 作为偏序集 pos 中的终对象，我们有如下结论：

引理 3.5. 若 $\mathfrak{C}$ 有有限极限（分别为余极限），则函子 $i_{\mathfrak{C}}$ 有一个左伴随（分别为右伴随）$\Gamma \equiv \Gamma_{\mathfrak{C}}\colon \mathfrak{C}\text{-data} \to \mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$（分别为 L），称为截面（分别为余截面）函子。具体而言，$\Gamma(\mathcal{F}) = \lim \mathcal{F}$（分别为 $\Gamma(\mathcal{F}) = \mathrm{colim}\ \mathcal{F}$）。

注 3.6. 引理 3.5 中的术语源自引理 3.1 的等价。当然，也可以不对 $\mathfrak{C}$ 作任何假设，并在 $[\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$-data 层面通过 Yoneda 定义截面，然后逐一考察这些“截面层”是否可表。也可以通过投影到终端偏序集 π 来诠释截面：$X \to \star$ 通过构造 π^{-1} 的右伴随 π_*。

例 3.7（局部可表函子）。作为这些术语的一个简单应用，我们将对局部可表函子的概念给出一种“结构化”的解释。具体来说，设 $Y\colon \mathfrak{C} \to [\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 是针对 $\mathfrak{C}$ 的 Yoneda 嵌入，并设 $Y_*\colon \mathfrak{C}\text{-data} \to [\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]\text{-data}$ 是由此诱导的——忠实且充满——函子。可以将 Y_* 像中的对象看作“局部可表函子”。注意，如果 $\mathfrak{C}$ 有有限极限，那么此类对象的截面可由原始 $\mathfrak{C}$-datum 的截面表示。此外，我们还将考虑针对 $\mathfrak{C}$-data 的 Yoneda 嵌入，即 $Y'\colon \mathfrak{C}\text{-data} \to [\mathfrak{C}\text{-data}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$。此时，我们定义第三个函子

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\colon [\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]\textbf{-data} &\to [\mathfrak{C}\textbf{-data}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \\ \mathcal{X} &\mapsto \mathrm{Hom}_{[\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]\textbf{-data}}(Y_*(-), \mathcal{X}) \end{aligned}$$

使得 $\mathcal{D} \circ Y_* = Y'$——因为 Y_* 忠实且充满——。我们将验证 $\mathcal{D}$ 本身忠实且充满留作读者练习——请回想，预层范畴由其可表函子紧生成——。特别地，若 $\mathcal{X}$ 满足 $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ 可由某个 $\mathcal{F} \in \mathfrak{C}$-data 表示，则有 $Y_*(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{X}$；换言之，“对每个 $p \in |\mathcal{X}|$，以相容的方式将每个 $\mathcal{X}(p)$ 表示为某个 $\mathcal{F}_p \in \mathfrak{C}$，等价于将 $\mathcal{X}$ 表示为一个满足 $\mathcal{F}(p) = \mathcal{F}_p$ 的 $\mathfrak{C}$-datum $\mathcal{F}$”。

相较于固定形状的图表范畴，考虑 $\mathfrak{C}$-数据的一项主要优势在于，它继承了偏序集的自然 2-范畴结构。更确切地说，回顾一下，偏序集是一个严格 2-范畴，其 2-态射对于每个 $X, Y \in$ 偏序集，

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{pos}}(X,Y)}(f,g) = \begin{cases} \star \text{ if } f \leq g \\ \emptyset \text{ otherwise.} \end{cases}$$

若 $f, g\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是 $\mathfrak{C}$-数据中的态射，且 $|f| \leq |g|$ 属于偏序集，则存在一个自然变换 $r_{fg}\colon f^{-1}\mathcal{G} \to g^{-1}\mathcal{G}$，它在每个 $x \in |\mathcal{F}|$ 处由 $\mathcal{G}$ 的限制态射给出。我们只要求该箭头诱导一个交换三角形，即将 2-态射定义为：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}}(\mathcal{F},\mathcal{G})}(f,g) = \begin{cases} \star \text{ if } f \leq g \text{ and } g^\sharp = r_{fg} \circ f^\sharp \\ \emptyset \text{ otherwise.} \end{cases}$$

容易验证，这一结构推广了 [7] 中定义的偏序，该偏序用于研究环化偏序集的朴素同伦类型。我们还要指出，$\mathfrak{C}$-数据实际上是一个偏序富集范畴。

容易验证，若 $\mathfrak{C}$ 具有有限极限（分别地，余极限），则 $\mathfrak{C}$-数据具有有限余极限（分别地，极限），其描述方式与环化偏序集（或空间）的范畴中的方式类似。为了处理下降问题，我们感兴趣的是计算 $\mathfrak{C}$-数据的余极限，换言之，描述嵌入的截面函子

$$i_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{op}}}\colon \mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data} \to (\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data})^{\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{data};$$

但事实证明，我们可以得到这些余极限的一种更明确的描述，只需引入某种弱等价概念，而无须对偏序集或 $\mathfrak{C}$ 执行任何 1-范畴运算。我们将这一构造称为“圆柱函子”。它自然出现的背景运用了 $\mathfrak{C}$-数据的 2-范畴结构，因此，出于这一及其他原因，我们将在下一节简要介绍$\mathfrak{D}$-数据，其中 $\mathfrak{D}$ 是一个严格 2-范畴。

4 二2-范畴情形

设 $\mathfrak{D}$ 是一个严格 2-范畴，并赋予偏序集平凡的 2-范畴结构。除其他可能性外，我们还将考虑以下范畴：

- 伪函子 $X \to \mathfrak{D}$ 和伪自然变换， $[X, \mathfrak{D}]$;
- 伪函子 $X \to \mathfrak{D}$ 和松弛自然变换，$[X, \mathfrak{D}]_{\text{松弛}}$。

每种情形下的 Grothendieck 构造现在都会像定义 3.2 那样，得到两个不同的 1-范畴，为强调起见，分别记作$\mathfrak{D}$-数据和 $\mathfrak{D}$-数据$^{\mathrm{Lax}}$ 。在这两种情形下，其对象都是一对 $(X, \mathcal{F})$，由一个有限偏序集和一个伪函子构成；唯一的区别在于，态射 $(f, f^\sharp)\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$在 $\mathfrak{D}$-数据中由一个伪自然变换定义，而在 $\mathfrak{D}$-数据中则由一个松弛自然变换定义$^{\mathrm{Lax}}$。注意，若 $\mathfrak{D}$ 是 pos-富集的——例如，当 1-范畴 $\mathfrak{C}$的 $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$-数据就是如此——，定义这样的松弛自然变换就相当于对每个 $p \le q \in |\mathcal{F}|$给出 1-态射$\alpha_p\colon \mathcal{F}(p) \to \mathcal{G}(f(p))$，使得

$$\mathcal{G}_{f(p)f(q)} \circ \alpha_p \le \alpha_q \circ \mathcal{F}_{pq},$$

而不是要求严格相等。

此外，为了将包含函子

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{D}} &\colon \mathfrak{D}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{D}\text{-}\mathbf{data}, \\ i_{\mathfrak{D}}^{\mathrm{Lax}} &\colon \mathfrak{D}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{D}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{Lax}}, \\ \mathfrak{D}\text{-}\mathbf{data} &\to \mathfrak{D}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{Lax}} \end{aligned}$$

变为伪函子，我们需要为这两个数据范畴赋予相同的松 *2*-范畴结构，其 2-态射如下：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}\text{-}\mathbf{data}}(\mathcal{F},\mathcal{G})}(f, g) = \begin{cases} \eta\colon r_{fg} \circ g^\sharp \to f^\sharp \text{ when } |f| \le |g| \\ \emptyset \text{ otherwise.} \end{cases}$$

同样，如果 $\mathfrak{D}$ 是偏序富集的，那么给出这个松弛自然变换相当于要求对于 $|f| \le |g|$，我们只有

$$r_{fg} \circ f^\sharp \le g^\sharp.$$

在此结构下， $i_{\mathfrak{D}}$ 和 $i_{\mathfrak{D}}^{\mathrm{Lax}}$是伪函子，它们将 $\mathfrak{D}$ 中的任意 2-态射$\eta\colon s \to t$ 映射为由自然变换 η定义的 2-态射，因为 $r_{i_{\mathfrak{D}}(s)i_{\mathfrak{D}}(t)}$ 是恒等映射，并且底层偏序集是单元素集。

最后，与 1-范畴情形一样，几乎根据定义，我们有：

命题 4.1. $i_{\mathfrak{D}}$ （分别为 $i^{\mathrm{Lax}}_{\mathfrak{D}}$）的左 2-伴随若存在，则为结构伪函子的伪极限（分别为松弛极限）。我们称其为截面 （分别为 松弛截面）函子，并记作 $\Gamma \equiv \Gamma_{\mathfrak{D}}$ （分别为 LaxΓ）。

5 柱体函子

现在，我们为带有 $\mathfrak{C}$ 个 1-范畴的 $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}$-数据$^{\mathrm{op}}$ 2-范畴构造松弛截面函子，也就是 $\mathfrak{C}$-数据中的松弛余极限函子。我们先给出其显式描述：

定义 5.1. 对于任意 $\mathcal{X} \in (\mathfrak{C}$-数据$)^{\mathrm{op}}$-数据，我们将……的柱体$\mathcal{X}$ 定义为 $\mathfrak{C}$-数据 $\mathsf{Cyl}(\mathcal{X})$，满足：

- 作为集合， $|\mathsf{Cyl}(\mathcal{X})| = \coprod_{p\in|\mathcal{X}} |\mathcal{X}(p)|$。我们赋予它由 $|\mathcal{X}(p)|$ 上的偏序所诱导的偏序，并规定：当 $x_p \le y_q$——其中 $x_p \in |\mathcal{X}(p)|$ 且 $y_q \in |\mathcal{X}(q)|$——时， $x_p \le \mathcal{X}_{pq}(y_q)$。
- 结构函子在对象上的取值为 $\mathsf{Cyl}(\mathcal{X})(x_p) = \mathcal{X}(p)(x_p)$，其限制态射在每个 $\mathcal{X}(p)$ 中由 $\mathcal{X}(p)^{x_p x'_p}$ 给出，并且

$$(\mathcal{X}_{pq})^{\sharp}_{y_q} \colon \mathrm{Cyl}(\mathcal{X})(y_q) \to \mathrm{Cyl}(\mathcal{X})(\mathcal{X}_{pq}(y_q))$$

  当 $p \le q$。

容易验证，这一构造是函子性的，因此我们有

$$\mathrm{Cyl} \colon (\mathfrak{C}\textbf{-data})^{\mathrm{op}}\textbf{-data} \to \mathfrak{C}\textbf{-data}\,.$$

引理 5.2。 若 $\mathfrak{C} = \star$，则 $\mathfrak{C}$-数据 $=$ 偏序集，函子 Cyl 与嵌入 $i_{\star\text{-数据}^{\mathrm{op}}}$的松弛截面函子自然同构。换言之，偏序集具有由 Cyl 描述的 pos-指标的松弛余极限。

证明。 我们将验证，对于任意 $Y \in \mathfrak{C}$-数据以及 $\mathcal{X} \in (\mathfrak{C}$-数据$)^{\mathrm{op}}$-数据，都存在函子性的同构 范畴

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{pos}}(\mathrm{Cyl}(\mathcal{X}), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{pos}^{\mathrm{op}}\textbf{-data}^{\mathrm{Lax}}}(\mathcal{X}, Y).$$

由于 $Y \equiv i_{\mathfrak{C}\text{-数据}^{\mathrm{op}}}(Y)$ 的底层偏序集是终端范畴 $\star$，因此存在同构 $\mathsf{Hom}_{\mathbf{pos}^{\mathrm{op}}\text{-数据}^{\mathrm{Lax}}}(\mathcal{X}, Y) \simeq \mathsf{Hom}^{[X,\mathbf{pos}]_{\mathrm{Lax}}}(\mathcal{X}, Y)$，其中$X \equiv |\mathcal{X}|$。现在，给定一个态射 f: $\mathsf{Cyl}(\mathcal{X}) \to Y$，根据构造，我们有一族态射 $\{f_p \colon \mathcal{X}(p) \to Y\}_{p\in X}$，它们满足 $f_p \circ \mathcal{X}_{pq} \le f_q$（对 $p \ge q$）。这正是定义松弛自然变换$\mathcal{X} \to Y$所需的信息：对每个 $p \in X$，给出偏序集 pos 中的一个箭头 $\mathcal{X}(p) \to Y(p) = Y$，并且，

对每个 $p \leq q$，在相应图表上给出一个 2-态射，这相当于要求前述不等式成立。反向结论可由同样的论证得到：给定 $g\colon \mathcal{X} \to Y$， $g^\sharp_p$ 恰好就是这些态射 f_p。

最后，说两个态射 $f, g\colon \mathrm{Cyl}(\mathcal{X}) \to Y$ 满足 $f \leq g$，就是说 $f_p \leq g_q$ 对所有 $p \in X$ 都成立——沿用前面的记号。这正是 $\mathbf{pos}^{\mathrm{op}}$-$\mathbf{data}^{\mathrm{Lax}}$ 中 2-态射的概念。 □

命题 5.3. 对于任意范畴 $\mathfrak{C}$，函子 Cyl 与嵌入 $i_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}^{op}}$ 的松弛截面函子自然同构。也就是说， $\mathfrak{C}$-data 存在 pos-指标的松弛余极限，且这些余极限由 Cyl 描述。

证明。 同样，对于 $Y \in \mathfrak{C}$-data 和 $X \in (\mathfrak{C}\text{-data})^{\mathrm{op}}$-data，我们验证存在范畴的函子性同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}}(\mathrm{Cyl}(\mathcal{X}), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data})^{\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{Lax}}}(\mathcal{X}, Y).$$

证明中的拓扑部分已在引理 5.2 中处理，因此我们只需验证这样的同构可扩展到 $\mathfrak{C}$-值函子的层面。

给定 $f\colon \mathrm{Cyl}(\mathcal{X}) \to Y$，沿用上述引理中的记号，我们有态射 f_p，使得 $f_p \circ \mathcal{X}_{pq} \leq f_q\colon \mathcal{X}(q) \to Y$ 在拓扑上成立。这是 $\mathfrak{C}$-data 的一个 2-态射，因为对于每个 $y_q \in |\mathcal{X}(q)|$,

$$Y_{(f_p \circ \mathcal{X}_{pq})(y_q)} \circ (f_p \circ \mathcal{X}_{pq})^\sharp_{y_q} = Y_{(f_p \circ \mathcal{X}_{pq})(y_q)} \circ (\mathcal{X}_{pq})^\sharp_{y_q} \circ (f_p)^\sharp_{\mathcal{X}_{pq}(y_q)} = (f_q)^\sharp_{y_q};$$

但根据 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})$ 和 f 的定义，对于所有 $p \leq q$ 和 $x_p = \mathcal{X}_{pq}(y_q)$,

$$\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})_{x_p y_q} \circ (f_p)^\sharp_{x_p} = (f_q)^\sharp_{y_q}, \tag{5.1}$$

其中 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})^{x_p y_q} = (\mathcal{X}_{pq})^\sharp_{y_q}$，正如所需。反向蕴含可由相同的关系得出。

在态射层面，若我们在 $\mathfrak{C}$-数据中有箭头 $f, g\colon \mathrm{Cyl}(\mathcal{X}) \to Y$ with $f \leq g$，则它们满足偏序集中的 $|f| \leq |g|$，并且对于所有 $x_p \in \mathrm{Cyl}(\mathcal{X})$,

$$g^\sharp_{x_p} \circ Y_{f(x_p) g(x_p)} = f^\sharp_{x_p}. \tag{5.2}$$

如果 $\{f_q\colon \mathcal{X}(p) \to Y\}$ 和 $\{g_p\colon \mathcal{X}(p) \to Y\}$ 是 $[X, (\mathfrak{C}\text{-数据})^{\mathrm{op}}]_{\mathrm{Lax}}$ 中各自对应的态射族，那么只需检查 $f_p \leq g_p$ 对所有 $p \in X$ 成立即可。再次根据引理 5.2，有 $|f_p| \leq |g_p|$，因此只需指出：对于每个 $x_p \in |\mathcal{X}(p)|$，方程 5.2 成立这一事实等价于 $f_p \leq g_p$ 在 $\mathfrak{C}$-数据中，即可完成证明。 □

注意， $\mathfrak{C}$-数据实际上是一个偏序富集范畴，因此 Cyl 的泛性质必然由范畴的一个同构 给出，而不是一个等价。这意味着，只要 $\mathfrak{C}$-数据的余极限也存在，就有一个自然变换指向 1-范畴截面：

$$\mathrm{Cyl} \to \Gamma_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{op}}}.$$

可以认为，对于某些针对由给定的一组 $\mathfrak{C}$-数据所编码信息的下降问题而言，这个自然变换是一个“弱等价”。这里我们不引入完整的术语，因为那将是一项远超本文目标的技术工作；不过，第 2 节和第 6 节会讨论一个特例，体现这一思路。

例 5.4. 一个非常重要的观察是，不仅 $\mathrm{Cyl} \circ i_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{op}}}$ 显然就是恒等函子，而且每个 $\mathfrak{C}$-数据都是“其点的圆柱”。更准确地说，对于任意 $\mathfrak{C}$，都有另一个“显然的”包含函子，由与$i_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}}$ 后合成给出：

$$(i_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}})_* \colon \mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data} \to (\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data})^{\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{data};$$

使得 $(i_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}})_*(\mathcal{F})$ 与 $\mathcal{F}$ 具有相同的底层偏序集，但我们将每个 $\mathcal{F}(p)$“替换”为常值数据 $(\star, \mathcal{F}(p))$。显然，$\mathrm{Cyl} \circ (i_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}})_*$ 也是恒等函子。此外，还存在一个自然变换

$$\eta_{\mathfrak{C}} \colon (i_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}})_* \to i_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{op}}}$$

由到终端偏序集的自然投影以及 $\mathfrak{C}$ 中的恒等映射给出，这在处理下降问题时会用到。

命题 5.5。 函子 Cyl 与有限纤维积可交换。

证明。 留给读者作为练习：这可由显式构造推出。 □

6 概形柱体

第 2 节引入的概形范畴是 CRing-数据的非满子范畴，其中 CRing 表示含单位元的交换环范畴。特别地，圆柱函子限制为

$$\mathrm{Cyl} \colon \mathbf{SchFin}^{\mathrm{op}}\text{-}\mathbf{data} \to \mathbf{CRing}\text{-}\mathbf{data}.$$

接下来的几页将致力于刻画其圆柱空间为概形的 $\mathrm{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据。首先，此类松余极限在“拟紧同构”意义下（参见下一个引理后的讨论）表示同一个局部环化空间：

引理 6.1. 给定 $\mathcal{X} \in \mathrm{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据，环化空间的自然态射 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{X}) \to \Gamma(\mathcal{X})$ 诱导出一个同构 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\Gamma(\mathcal{X}))$。

证明。 这源于余极限与余极限交换这一事实。 □

我们想说 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{X}) \to \Gamma(\mathcal{X})$ 是一个 qc-同构，但请注意，我们尚未检查——也不会检查—— $\Gamma(\mathcal{X})$ 是否为概形。然而，对于我们的应用而言，检查 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})$ 的图式性就足够了——而且这是至关重要的，因为否则我们将无法保证我们所关注的性质和构造在 qc-同构下的稳定性——。

定义 6.2。 如果一个环化偏序集 X 以平坦环满态射作为限制映射，则称其为伪概形。

定义 6.3。 如果 X 满足 Mod-仿射条件，即 $\pi\colon X \to (\star, \mathcal{O}_X(X))$ 诱导出一个伴随等价 $(\pi^* \dashv \pi_*)\colon \mathrm{Qcoh}(X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X(X))$，则称其为 Mod-仿射。若 X 为概形且为 Mod-仿射，则称其为仿射。

例 6.4。 任何具有最小元 $X = U_x$ 的环化偏序集都是模仿射的。

注 6.5。 若 X 是伪概形，则 $\mathrm{Qcoh}(X)$ 是格罗滕迪克阿贝尔范畴。特别地，若 X 也是模仿射的，则 π_* 是正合的。

引理 6.6。 若 X 是伪概形且模仿射，则自然态射 $\mathcal{O}_X(X) \to \prod_{x \in X} \mathcal{O}_{X,\,x}$ 是忠实平坦的。

证明。 只需证明 $\coprod_{x \in X} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\,x}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ 是满射。给定一个素理想 $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_X(X)$，其剩余域 $\kappa(\mathfrak{p})$ 非零，由等价可得一个非零模 $\pi^*\kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$，因此存在某个 $x \in X$，使得 $(\pi^*\kappa(\mathfrak{p}))_x \simeq \kappa(p) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,\,x} \neq 0$。从几何上看，这意味着经由 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\,x}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ 的 $\mathfrak{p}$ 的纤维非空，故得证。

□

定义 6.7。 伪概形空间之间的环化空间态射 $f\colon X \to Y$ 称为拟紧同构，如果对于所有 $y \in Y$， $f^{-1}(U_y)$ 都是模仿射的，并且 $f_\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ 是同构。

例 6.8。 任何具有最小元 $X = U_x$ 的环化偏序集都通过自然投影与 $(\star, \mathcal{O}_{X,\,x})$ 拟紧同构。

在概形范畴中，定义 6.7 归结为通常的定义。在如此一般的情形下，我们甚至无法保证这一概念在复合和基变换下保持稳定，因此读者应将其视为一种简略的信息记录方式，其目的很快就会显现。我们

不过，我们想指出，Mod-仿射性这一概念及其产生的拟紧同构，都是针对 $\mathfrak{C}$-数据的更抽象构造的特例。

引理 6.9. 给定限制态射为平坦浸入的 $\mathcal{X} \in \mathrm{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据，$\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})$ 是伪概形。

证明. 这由构造、引理 2.9 和注 2.2 得出。 □

现在，给定 $\mathcal{X} \in \mathrm{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据和 $p \in |\mathcal{X}|$，记 U_p 为开子集 $U_p \subseteq |\mathcal{X}|$ 上诱导的数据。我们有环化空间之间的 *qc*-同构

$$\pi_p \colon \mathrm{Cyl}(U_p) \to \mathcal{X}(p).$$

一般而言，给定开子集 $U \subset |\mathcal{X}|$ 并赋予其诱导结构函子，我们有开子集

$$i_U \colon \mathrm{Cyl}(U) \hookrightarrow \mathrm{Cyl}(\mathcal{X});$$

因此，对于每个 p、$q \in |\mathcal{X}|$ 以及固定的 $t \leq p$、q，我们有自然态射

$$i^p_{pq} \colon \mathrm{Cyl}(U_p \cap U_q) \to \mathrm{Cyl}(U_p), \qquad i^q_{pq} \colon \mathrm{Cyl}(U_p \cap U_q) \to \mathrm{Cyl}(U_q);$$

将其与前述投影复合后，便诱导出

$$\pi^t_{pq} \colon \mathrm{Cyl}(U_p \cap U_q) \to \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{X}(t)} \mathcal{X}(q).$$

注意，右侧的空间总是概形的，并且对于每个 $(x_p, y_q) \in |\mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{X}(t)} \mathcal{X}(q)|$，我们有

$$(\pi^t_{pq})^{-1}(U_{(x_p,y_q)}) = U_{x_p} \cap U_{y_q} \subseteq |\mathrm{Cyl}(U_p \cap U_q)| \subseteq |\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})|.$$

定理 6.10。 给定限制态射为平坦浸入的 $\mathcal{X} \in \mathrm{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据，$\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})$ 是概形的，当且仅当对于每个 $t \leq p, q \,\mathrm{in}\, |\mathcal{X}|$，自然态射 π^t_{pq} 是拟紧同构（先验地 是环化偏序集之间的拟紧同构，事后 则是概形空间之间的拟紧同构）。

证明。 借助本文引入的技术，我们只能证明“若”这一部分，而这正是我们在应用中会用到的部分。事实上，若 π^t_{pq} 是一个拟紧同构，那么对于如前所述的每个 (x_p, y_q)，$U_{x_p} \cap U_{y_q}$ 都是模仿射的，且其整体截面同构于 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}(p),\, x_p} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}(t),\, z_t}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}(q),\, y_q}$，其中 z_t 是 x_p 和 y_q 的共同像。现在，引理 6.6 恰好转化为定义 2.1 中的条件。 □

对于 $\mathbf{SchFin}^{\mathrm{op}}$-data 中的态射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，我们可以修改前面的构造，从而对每个 $p \in |\mathcal{X}|$ 和 $q \geq f(p)$，得到

$$\rho^f_{pq}\colon \mathrm{Cyl}(U_p \cap f^{-1}(U_q)) \to \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{Y}(f(p))} \mathcal{Y}(q).$$

定理 6.11. 给定一个态射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ in $\mathbf{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据，且 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{X})$ 和 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{Y})$ 都是概形，则 $\mathrm{Cyl}(f)$ 是概形，当且仅当对每个 $p, q \geq f(p)$，映射 ρ^f_{pq} 是拟紧同构。

证明. 我们只证明“若”这一方向，这可由与定理 6.10 相同的结果以及以下事实推出：对于 $(x_p, y_q) \in \mathcal{X}(p) \times_{\mathcal{Y}(f(p))} \mathcal{Y}(q)$，有 $\rho^{-1}_{pq}(U_{(x_p,y_q)}) = U_{x_p} \cap \mathrm{Cyl}(f)^{-1}(U_{y_q})$. □

注 6.12. 注意，对于一个数据 $\mathcal{X}$，若对所有 p 都有 $\mathcal{X}(p) = (\star, A_p)$，则定理 6.10 和定理 6.11 归结为通常的图式性定义。参见例 5.4。

定义 6.13. 给定一族有限的平坦浸入 $\{U_i \to X\}_{i\in I}$，我们将与之关联的神经数据 定义为 $\mathcal{U} \in \mathbf{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据，其底层偏序集为 $|\mathcal{U}| = \mathcal{P}^*(I)$—— I 的非空部分——，且 $\mathcal{U}(\Delta) = \prod_{i\in\Delta} U_i$——在 X 上的纤维积——。

请注意， $\mathcal{U}$ 自带一个态射 $\mathcal{U} \to X \equiv i_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}}(X)$。

推论 6.14. 若 $\{U_i \to X\}$ 是一族有限的平坦浸入，则 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{U})$ 是概形的，且态射 $\mathrm{Cyl}(\mathcal{U}) \to X$ 是一个概形的平坦浸入；当且仅当该族是一个覆盖时，它才是拟紧同构。

证明. 首先，我们检验定理 6.10 的条件：对于 $\Delta_1, \Delta_2 \in |\mathcal{U}|, U_{\Delta_1} \cap U_{\Delta_2} = U_{\Delta_1\cup\Delta_2}$；但 $\mathrm{Cyl}(U_{\Delta_1\cup\Delta_2}) \to \mathcal{U}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ 是一个拟紧同构，其中 $\mathcal{U}(\Delta_1 \cup \Delta_2) \simeq \mathcal{U}(\Delta_1) \times_{\mathcal{U}(\Delta_1\cap\Delta_2)} \mathcal{U}(\Delta_2)$，这是由定义得出的。根据定理 6.11 和类似的论证，$\mathrm{Cyl}(f)$ 具有图式性。

态射 $\mathrm{Cyl}(f)$ 由局部构造可知是平坦的，其对角态射是拟紧同构，因为根据命题 5.5，

$$\mathrm{Cyl}(\mathcal{U}) \to \mathrm{Cyl}(\mathcal{U}) \times_X \mathrm{Cyl}(\mathcal{U}) \simeq \mathrm{Cyl}(\mathcal{U} \times_X \mathcal{U}),$$

一个在拓扑上为恒等且在每一点处都是拟紧同构的 $\mathbf{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据态射，会在圆柱空间之间诱导出一个拟紧同构（如简单计算所示）。

最后，$\mathrm{Cyl}(f)$ 忠实平坦（因而是拟紧同构）显然等价于 $\{f_\Delta\colon U(\Delta) \to X\}_\Delta$ 是一个覆盖族，而这当且仅当原覆盖族是覆盖。 □

7 下降与平坦浸入的拓扑斯

现在我们运用上一节的技术，以层论的方式描述余极限。在下述定义中——如果适用的话——应将 SchFin 视为具有平凡2-范畴结构的 1-范畴。

定义 7.1。设 $\mathfrak{C}$ 是一个 1-范畴（分别地，严格 2-范畴）。几何数据 是一个函子（分别地，伪函子） $\mathfrak{Dat}\colon \mathrm{SchFin} \to \mathfrak{C}$，它将 qc-同构映为同构（分别地，等价）；换言之，它经由 $\mathrm{SchFin}_{\mathrm{qc}}$分解。

例 7.2。函子 $\mathrm{Spec} : \mathrm{SchFin} \to \mathrm{LRS}$、$\mathrm{Qcoh} : \mathrm{SchFin} \to \mathrm{Cat}^{\mathrm{op}}$（其值位于范畴的 2-范畴中），以及 $\Pi_1^{\text{ét}}\colon \mathrm{SchFin} \to \mathrm{Gpd}_{\mathrm{Stone}}$（其值位于 Stone 群胚的 2-范畴中），都是几何数据。

在接下来的讨论中，假设 $\mathfrak{C}$是一个 1-范畴；将同构替换为等价后，论证对 2-范畴也成立。在例 5.4 中，我们看到，任意一个 $\mathfrak{C}$-数据范畴都自然浸入其 $(\mathfrak{C}\text{-数据})^{\mathrm{op}}$ -数据范畴中，且有两种这样的浸入。在这种情况下，函子 $[\mathrm{SchFin}、\mathrm{SchFin}_{\mathrm{qc}}^{\mathrm{op}}\text{-数据}]$之间存在一个自然变换：

$$\eta_{\mathfrak{C}}\colon (i_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}})_* \to i_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{op}}}.$$

注记 7.3. 对于一般的环化偏序集，这个自然变换由态射 $(\star,\mathcal{O}_{X,x}) \to X$ 诱导，而这些态射并非概形态射。这也是考虑局部化范畴的原因之一；在该范畴中，自然变换由三角形 $(\star,\mathcal{O}_{X,x}) \leftarrow U_x \to X$ 诱导。

现在，给定一个几何数据 $\mathfrak{Dat}\colon \mathrm{SchFin}_{\mathrm{qc}} \to \mathfrak{C}$，我们定义

$$\underline{\mathfrak{Dat}} := \mathfrak{Dat}_* \circ (i_{\mathfrak{C}}^{\mathrm{op}})_* \qquad\qquad \mathfrak{Dat} \equiv \mathfrak{Dat} \circ i_{\mathfrak{C}\text{-}\mathbf{data}^{\mathrm{op}}};$$

其中 $\underline{\mathfrak{Dat}}(X)$ 是带有 $|\underline{\mathfrak{Dat}}(X)| = |X|$ 和结构函子$\underline{\mathfrak{Dat}}(X)(x) = \mathfrak{Dat}(\star,\mathcal{O}_{X,x})$ 的 $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$- 数据。这些诱导出一个自然变换

$$\eta_{\mathfrak{Dat}}\colon \underline{\mathfrak{Dat}} \to \mathfrak{Dat}$$

它介于 $[\mathrm{SchFin}$ $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$ -数据中的函子之间，在拓扑层面由到顶点的投影给出，而在 $\mathfrak{C}$ 中由态射给出

$$\mathfrak{Dat}(\star, \mathcal{O}_{X,x}) \xleftarrow{\sim} \mathfrak{Dat}(U_x) \to \mathfrak{Dat}(X).$$

与截面函子 Γ 复合： $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$ -数据 $\to \mathfrak{C}$——始终假设 $\mathfrak{C}$ 有足够的极限——，便得到如下定义：

定义 7.4. 我们称几何数据 $\mathfrak{Dat}$ 满足内部下降，如果 $\Gamma(\eta_{\mathfrak{Dat}})$: $\Gamma_* \circ \underline{\mathfrak{Dat}} \to \Gamma_* \circ \mathfrak{Dat} \equiv \mathfrak{Dat}$ 在 $[\mathsf{SchFin}\ \mathfrak{C}]$ 中是一个同构。

例 7.5. 数据 $\mathsf{Qcoh}\colon \mathsf{SchFin} \to \mathsf{Cat}^{\mathrm{op}}$ 满足内部下降。事实上，由于 $\mathsf{Qcoh}(\star, \mathcal{O}_{X,x}) = \mathsf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x})$，这相当于证明自然函子

$$\mathbf{Qcoh}(X) \to 2\text{-}\lim_{x \in X} \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x})$$

是范畴等价。这是因为环化偏序集上的拟凝聚模是由若干个 $\{M_x\}_{x \in X}$ 组成的，其中 M_x 是一个 $\mathcal{O}_{X,x}$-模，并且对所有 $x \leq y$，自然态射 $M_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,y} \to M_y$ 都是同构；这与 Cat 中该伪极限的描述一致。读者或许会注意到，这一结果对任意环化偏序集都成立，但它隐含地要求模的张量-Hom 伴随成立。若要将此结果推广到拟凝聚代数层，就必须假设 X 至少是伪概形。这是因为沿平坦环满态射的基变换满足上述伴随关系（留作读者的代数练习）。

命题 7.6（神经的外部下降）。若 X 是一个概形空间，$\{f_i\colon U_i \to X\}$ 是由平坦浸入构成的覆盖，其关联的神经数据为$\mathcal{U}$，且 $\mathfrak{Dat}$是满足内部下降的几何数据，则存在一个自然同构

$$\mathrm{colim}_{\Delta \in |\mathcal{U}|} \mathfrak{Dat}(\mathcal{U}(\Delta)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Dat}(X).$$

证明。由推论 6.14，$\mathsf{Cyl}(\mathcal{U}) \to X$ 是一个拟紧同构；又由于 $\mathfrak{Dat}$ 是几何的，因此有 $\mathfrak{Dat}(\mathsf{Cyl}(\mathcal{U})) \simeq \mathfrak{Dat}(X)$。由于 $\mathfrak{Dat}$ 满足内部下降——在每个 $\mathcal{U}(\Delta)$处应用——且余极限与余极限可交换，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{Dat}(\mathrm{Cyl}(\mathcal{U})) \simeq \mathrm{colim}_{x_\Delta \in \mathrm{Cyl}(\mathcal{U})} \mathfrak{Dat}(\star, \mathcal{O}_{\mathcal{U}(\Delta), x_\Delta}) \simeq \\ &\simeq \mathrm{colim}_{\Delta \in |\mathcal{U}|} \mathrm{colim}_{x_\Delta \in |\mathcal{U}(\Delta)|} \mathcal{O}_{\mathcal{U}(\Delta), x_\Delta}) \simeq \mathrm{colim}_{\Delta \in |\mathcal{U}|} \mathfrak{Dat}(\mathcal{U}(\Delta)),\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

例 7.7。在命题 7.6 的情形下，并利用例 7.5，我们得到 $\mathsf{Qcoh}(X) \simeq 2\text{-}\lim^{\Delta \in |\mathcal{U}|} \mathsf{Qcoh}(\mathcal{U}(\Delta))$。特别地，拟凝聚性 在平坦浸入拓扑中是局部性质。

定理 7.8（拓扑斯的外部下降）。如果 SchFin_τ 表示带有组合拓扑的概形空间（大）位点，而 $\mathsf{SchFin}_{\mathrm{wZar}}$

表示平坦浸入的（大）位点，那么自然包含定义了拓扑斯之间的等价

$$\mathbf{Sh}((\mathbf{SchFin}_{\mathrm{qc}})_{\tau}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathbf{SchFin}_{\mathrm{wZar}}).$$

同样，对于任何具有有限偏序集指标余极限的 1-范畴（分别为 2-范畴），它会在相应的 $\mathfrak{C}$值层（分别为叠）范畴之间诱导等价。

证明。 这只是用第 2.1 节的语言重新表述命题 7.6：$\mathrm{Sh}(\mathrm{SchFin}_{\mathrm{wZar}})$ 中的层将 qc-同构映为同构，因此它们是本节意义下的几何数据。我们要指出，小拓扑斯之间的类似等价——先验地——并不成立，因为圆柱会改变基空间。 □

备注 7.9。 由层条件可知，$\mathrm{Sh}(\mathrm{SchFin}_{\tau})$ 中的层 $\mathcal{F}$ 将 qc-同构映为同构，当且仅当对于每个仿射 概形空间 X，自然态射 $\mathcal{F}(\star, \mathcal{O}_X(X)) \to F(X)$ 是同构。

换言之，要证明概形范畴中的预层在平坦浸入拓扑下是层，只需验证它将拟紧同构映为同构，并且它对每个偏序集都是组合拓扑下的层。这与概形范畴中集合论拓扑和 Zariski 位点的情形类似。对于准紧准分离概形，以下**口号**是一个推论：

> 在准紧准分离概形范畴中，任何可以通过有限模型研究的 *Zariski* 层，都是概形的平坦单态射拓扑和有限覆盖拓扑下的层。

定理 7.8 精确说明了“可以通过……研究”的含义：这样的层 $\mathcal{F}$ 必须在概形范畴上诱导出一个几何数据，且该数据是组合拓扑下的层。

8 例：Seifert-Van Kampen 定理

正如所承诺的，一个不那么平凡的应用来自 étale 基本群胚——以及基本群——。考虑伪函子

$$\Pi_1^{\text{ét}} : \mathbf{SchFin} \to \mathbf{Gpd}_{\mathrm{Stone}}$$

到 Stone 群胚的 2-范畴。根据注 2.6，它是一个几何数据，因此，要应用上一节的结果，只需证明它是组合拓扑中的一个层。这一点分两步即可轻松得到。在此之前，我们先指出，定理 2.5 中未作任何细节说明而定义的有限 étale 覆盖范畴，可以用拟凝聚代数层来描述，正如 [4] 中所做的；更准确地说：

$$\mathbf{R\acute{E}t}(X) = \begin{cases} \text{"opposite category of quasi-coherent algebras } \mathcal{A} \\ \text{such that } \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{A}_x \text{ is a finite étale ring map"}. \end{cases} \tag{8.1}$$

引理 8.1。 在对象上定义为$\mathbf{R\acute{E}t}(X)$ 的伪函子 $\mathbf{R\acute{E}t}\colon \mathrm{SchFin}_{\mathrm{qc}} \to \mathrm{Cat}$ 满足内部下降。

证明。 我们需要证明 $\mathbf{R\acute{E}t}(X) \simeq 2\text{-}\lim_{x\in X} \mathbf{R\acute{E}t}(\star, \mathcal{O}_{X,x})$。由于它是拟凝聚代数范畴的子范畴，因此由例 7.5（请注意末尾的注释）以及茎上的有限 étale 这一性质显然在此意义下是局部性质可知，结论成立。 □

命题 8.2。 伪函子 $\Pi_1^{\text{ét}}\colon \mathrm{SchFin} \to \mathrm{Gpd}_{\mathrm{Stone}}$ 满足内部下降。

证明。 沿用第 7 节的记号。由引理 8.1 可知，自然变换 $\eta_{\mathbf{R\acute{E}t}}\colon \mathbf{R\acute{E}t} \to \mathbf{R\acute{E}t}$ 在取截面后诱导出一个等价。将 $\Pi_1^{\text{ét}}$ 与 2-函子 $\Phi\colon \mathrm{Gpd}_{\mathrm{Stone}} \to \mathrm{Cat}^{\mathrm{op}}$ 复合，其中 $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$-FinSet—带连续作用—，可得到一个函子的交换方块 [SchFin,$\mathrm{Cat}^{\mathrm{op}}$]

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{R\acute{E}t}} & \longrightarrow & \mathbf{R\acute{E}t} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\Pi_1^{\text{ét}}\text{-有限集}} & \xrightarrow{\eta_{\Phi\circ\Pi_1^{\text{ét}}}} & \Pi_1^{\text{ét}}\text{-有限集}; \end{array}$$

其中垂直箭头在通过基本群胚的伽罗瓦定理取截面后是同构，因此 $\Gamma(\eta_{\Phi\circ\Pi_1^{\text{ét}}})$是一个同构。

最后，由于 Φ 众所周知与伪余极限相容，因此有 $\Gamma(\eta_{\Phi\circ\Pi_1^{\text{ét}}}) \simeq \Phi\circ\Gamma(\eta_{\Pi_1^{\text{ét}}})$；又由于此映射是一个等价，且根据 [10, 3.11]，Φ 是（2-）保守的，所以 $\Gamma(\eta_{\Pi_1^{\text{ét}}})$ 是一个等价，这就证明了该结论。 □

[1]对于 1-态射，我们将每个 $f\colon X \to Y$ 映射到逆像函子；由于 SchFin 被视为一个 1-范畴，我们只需指定 Cat 中可逆的等价，使所有适当的图表交换。不过，我们可以且确实选择由张量积的泛性质给出的那些等价。

例 8.3。 若概形空间 X 满足：对于所有 $x \in X$， $\Pi_1^{\text{ét}}((\star, \mathcal{O}_{X,\,x})) = \{\star\}$——平凡2-范畴，则命题 8.2 得出

$$\Pi_1^{\text{ét}}(X) \simeq 2\text{-colim}_{x \in |X|}\{\star\} \simeq \widehat{\Pi_1(|X|)},$$

其中帽号表示有限型完备化。

定理 8.4. 设 X 是一个概形空间，且 $\{U_i \to X\}$ 是由平坦浸入构成的覆盖，其对应的神经数据为 $\mathcal{U}$。那么，自然态射

$$2\text{-colim}_{\Delta \in |\mathcal{U}|}\, \Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta)) \to \Pi_1^{\text{ét}}(X)$$

是拓扑群胚的一个等价。换言之，函子 $\Pi_1^{\text{ét}}$ 是平坦浸入拓扑中的一个（余）层栈。

证明。 这由 8.2 和定理 7.8 得出。 □

注 8.5。 注意， $|\mathcal{U}|$ 的拓扑基本群胚总是平凡的，因为任何部件空间都有泛点，因而可缩至一点。对于任何使 $\mathsf{Cyl}(\mathcal{X})$ 为概形空间的 $\mathcal{X} \in \mathsf{SchFin}^{\mathrm{op}}$-数据，都可以给出更一般的定理陈述；在这种情况下， $|\mathcal{X}|$ 的拓扑基本群胚将发挥作用。

推论 8.6. 若 S 是一个准紧准分离概形，且 $\{V_j \to S\}_{j \in J}$ 是由平坦单态射构成的有限覆盖，其对应的神经余数据为 $\mathcal{V}\colon\ \mathcal{P}^*(J) \to \mathsf{Sch}^{\mathrm{op}}$——其中 Sch 是概形范畴——则自然态射

$$2\text{-colim}_{\Delta \in |\mathcal{V}|}\, \Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{V}(\Delta)) \to \Pi_1^{\text{ét}}(S)$$

是 Stone 群胚的等价；也就是说，概形的 étale 基本群胚在平坦单态射和有限覆盖的拓扑下是一个余层栈。

最后，我们可以很容易地将这一结果特化到基本群上；我们认为，相较于 [11] 的表述，这种表述更自然。

定义 8.7。 给定一个概形空间 X，以及一个由平坦浸入构成的覆盖，其关联的神经数据 $\mathcal{U}$ 通过 $\mathcal{U}(\emptyset) = X$ 扩张到 $\mathcal{P}(I)$，一个**基点系** $\mathbf{x}_\star$ 是一个对象

$$\overline{\mathbf{x}}_\star \in \mathrm{Ob}(2\text{-lim}_{\Delta \in |\mathcal{U}|}(\Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta)))).$$

换言之：$\mathbf{x}_\star$ 由一组几何点 $\mathbf{x}_\Delta$ 组成，对每个 Δ，它们属于 $\mathcal{U}(\Delta)$；此外还包括一组 *Tannaka* 路径

$$\varphi_{\Delta\Delta'}\colon\ \mathrm{Fib}_{\overline{\mathbf{x}}_\Delta} \circ \mathbf{R\acute{E}t}(X)(\Delta \to \Delta') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_{\overline{\mathbf{x}}_{\Delta'}}$$

对每个 $\Delta \leq \Delta'$。我们将由这一组数据给出的 X 的几何点记为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\emptyset$。

定理 8.8. 设 X 是概形且连通的，$\mathcal{U}$ 是与某个平坦浸入覆盖相关联的神经余数据，使得 $\mathcal{U}(\Delta)$ 连通，并且 $\mathbf{x}_\star$ 是一个基点系。那么存在一个拓扑群同构

$$\operatorname{colim}_{\Delta\in|\mathcal{U}|}\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta),\overline{\mathbf{x}}_\Delta)\xrightarrow{\sim}\pi_1^{\text{ét}}(X,\mathbf{x})$$

由与 $\varphi_{\Delta\Delta'}$ 的共轭所诱导。

证明。 由于 X 连通，自然包含 $\pi_1^{\text{ét}}(X,\mathbf{x})\to\Pi_1^{\text{ét}}(X)$ 是一个等价。令 $\mathbf{Gr}_{\text{Stone}}\subseteq\mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}$ 为有限群范畴，可以从集合论的角度或作为拓扑丰化范畴来理解。定义数据

$$\pi_1^{\text{ét}}(-,\overline{\mathbf{x}}_\star)\colon|\mathcal{U}|\to\mathbf{Gr}_{\text{Stone}}^{\text{op}}\qquad\qquad\Delta\to\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta),\overline{\mathbf{x}}_\Delta)$$

其限制态射由与 $\varphi_{\Delta\Delta'}$ 的共轭给出。由于对于每个 Δ，$\mathcal{U}(\Delta)$ 都是连通的，自然变换

$$\pi_1^{\text{ét}}(-,\overline{\mathbf{x}}_\star)\to\Pi_1^{\text{ét}}\circ\mathcal{U}$$

是一个 $\mathbf{Gpd}_{\text{Stone}}$-值伪函子的同构，因此取截面后会诱导出一个同构。由此以及定理 8.4，可得等价

$$2\text{-}\operatorname{colim}_{\Delta\in|\mathcal{U}|}\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta),\overline{\mathbf{x}}_\Delta)\xrightarrow{\sim}2\text{-}\operatorname{colim}_{\Delta\in|\mathcal{U}|}\Pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta))\simeq\Pi_1^{\text{ét}}(X);$$

其中，第一个群胚被识别为抽象有限群的 1-余极限 $\operatorname{colim}_{\Delta\in|\mathcal{U}|}\pi_1^{\text{ét}}(\mathcal{U}(\Delta),\mathbf{x}_\Delta)$，而最后一个如前所述等价于 $\overline{\pi}_1^{\text{ét}}(X,\mathbf{x})$。由于单对象范畴之间的任何等价都是同构，证明至此完成。 □

注记 8.9. 注意，拓扑塞弗特–范坎彭定理可以用 $\mathfrak{C}$-数据来表述：若 S 是一个拟紧拓扑空间，并且

$$\pi\colon S\to X$$

是一个有限模型，我们可以将 X 转化为一个 $\mathbf{Top}^{\text{op}}$-数据——其中 Top 表示拓扑空间范畴——方法是令 $X(x)=\pi^{-1}(U_x)$。如果这些纤维都单连通，并且我们假设其具有连通性，便可得到 McCord 关于 π_1的经典结果。对于高阶同伦群，我们确信这应当是基本同伦群胚的 Seifert-Van Kampen 定理的推论，其中基本同伦群胚被视为严格的 n-范畴。

参考文献

[1]Codara, P. 博士论文：偏序集划分理论；O.M. D’Antona, V. Marra. 米兰：米兰大学。数学系、信息与通信系，2008年11月21日。第20周期，2006/2007学年。[2] McCord, M. C. 有限拓扑空间的奇异同调群与同伦群，《杜克数学杂志》33 (1966), 465-474。[3] Raynaud, M. 下降有效性判据。载于：Samuel 研讨班，《交换代数》，第2卷，第1-22页（1967-1967）。[4] Sánchez González, J.; Tejero Prieto, C. 概形有限空间的 *étale* 覆盖与基本群。《地中海数学杂志》19 (2022), 第5期，229。[5] Sancho de Salas, F.; Sancho de Salas, P. 仿射环化空间与 *Serre* 判据。《落基山数学杂志》**47** (2017), 第6期，2051–2081。[6] Sancho de Salas, F. 有限空间与概形。《几何与物理杂志》**122**(2017), 3–27。[7] Sancho de Salas, F. 有限环化空间的同伦。《同伦相关结构杂志》13 (2018), 第3期，481–501。[8] Sancho de Salas, F.; Torres Sancho, J.F. 有限空间的导出范畴与 *Grothendieck* 对偶。《地中海数学杂志》**17** (2020), 第3期，论文编号80，共22页。[9] Sancho de Salas, F.; Sancho de Salas, P. 概形有限空间札记。arXiv:2102.09263v1 [math.AG].[10] Pirashvili, I. *étale* 基本群胚作为 *2*-终端余层栈。《京都数学杂志》**60** (2020), 第1期，379–403。[11]Stix, J. 代数基本群的一般 *Seifert-Van Kampen* 定理。《数学科学研究所出版物》**42** (2006), 第3期，763–786。[12] Waterhourse, W.C. 基本有界函子与平坦层。《太平洋数学杂志》**57** (1975), 第2期，597-610。