arXiv:2301.03132v1 [math.AC] 9 Jan 2023

自由除子、雅可比理想的爆破代数与极大解析扩张度

RICARDO BURITY、CLETO B. MIRANDA-NETO 和 ZAQUEU RAMOS

Abstract. 自由除子构成了一类备受关注的超曲面，在过去十五年中得到了广泛研究。我们的主要目标是引入四类新的齐次自由除子，并研究其雅可比理想的爆破代数的核心性质。例如，我们证明了所有这些类的 Rees 代数及其特殊纤维都是 Cohen-Macaulay 的——这是爆破代数理论中一项值得期待的性质。此外，我们提出了这样一个问题：一个多项式（不一定是自由的）的雅可比理想何时具有极大解析扩张度？我们借助从上同调到渐近深度的各种工具刻画了这一性质。此外，作为一项应用，我们给出一个关于同伦因子的理想论同调判据；同伦因子即其极映射为双有理映射的超曲面。

谨以感激之情献给沃尔默·V.·瓦斯康塞洛斯教授，以纪念这位数代交换代数学家的导师。

Introduction

研究充分的自由除子理论——或自由超曲面理论——起源于 K. Saito 的奠基性工作 [35], 以及 H. Terao [43, 44, 45] 随后发表的论文，后者主要关注超平面配置情形。最初的研究环境是复解析情形，研究动机则是计算孤立奇点的通用展开所对应的 Gauss-Manin联络；例如，已有结果证明，通用展开的参数空间中的判别式是一个自由除子。随着时间推移，不同的方法、观点和研究兴趣不断涌现，其中包括代数（以及代数几何）方面的拓展，甚至还有各种推广；在过去十五年中，这些发展吸引了越来越多研究者的关注。相关参考文献数量极其庞大；例如可参见 Abe [1], Abe、Terao 和 Yoshinaga [2], Buchweitz 与 Conca [8], Buchweitz 与 Mond [9], Calder´ón-Moreno 与 Narv´áez-Macarro [12], Damon [15], Dimca [17, 18], Dimca 与 Sticlaru [20], Miranda-Neto [31, 32], Schenck [37], Schenck、Terao 与 Yoshinaga [38], Schenck 与 Toh˘aneanu [39], Simis 与 Toh˘aneanu [41], Toh˘aneanu [47], 以及 Yoshinaga [51]。特别值得一提的是，Dimca 的著作 [17] 和 Schenck 的综述 [37]是包含该主题有趣开放问题（包括著名的 Terao猜想）的优秀参考资料。

本文的总体目标是运用多种技术，展示这一主题在代数方面取得的进展。首先，我们明确描述了定义在域 k （其特征为 $k = 0$）上的标准分次多项式环中的四个新的齐次自由除子族。其次，在相同的分次设置下，我们转而研究多项式的雅可比理想的爆破代数。更确切地说，我们证明，对于这些族，Rees 代数是 Cohen-Macaulay 的——也就是说，从几何角度看，对其奇异轨迹进行膨胀会得到算术科恩-麦考利概形。此外，对于不再要求为自由的多项式，我们还通过从（局部）上同调到渐近深度等不同工具，以多种方式刻画其特殊纤维环维数达到最大值的情形。后者的重要性在于它与重要的

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14J70, 32S05, 13A30, 14E05, 14M05；次要分类：13C15, 13H10, 14E07, 32S22, 32S25。*Key words and phrases.* 自由除子，雅可比理想，爆破代数，Rees 代数，解析扩张度，同伦因子。*Corresponding author*：Cleto B. Miranda-Neto (cleto@mat.ufpb.br)。

同伦因子理论有关；也就是说，指齐次多项式 $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$（通常假设域 k 为代数闭域），其相应的极映射

$$\mathscr{P}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

是双有理的——即，$\mathscr{P}_f$ 是一个克雷莫纳变换。事实上，作为应用，我们给出了一个理想论（亦即同调论）的同构映射性判据。值得一提的是，这类多项式的现代理论始于 Ein 和 Shepherd-Barron [23], ，其中证明了例如正则预齐次复向量空间的相对不变量是同伦映射的。另一个经典参考文献是 Dolgachev [21]。

为介绍本文关注的其他主要概念，令 k 表示一个特征零域，并给定 $n \geq 3$，令 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 为 k上的标准分次多项式环。令 $R_+ = (x_1, \ldots, x_n)$ 为无关理想。给定一个非零约化齐次多项式 $f \in R_+^2$（为避免病态情形，我们假定其偏导数 k线性无关），众所周知，f 为自由除子的性质可以转述为：相应的雅可比理想 $J_f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_1) \subset R$ 是余维为 2 的完美理想——特别是，自由 f必定高度奇异，即无论 n如何，均有 codim Sing $V(f) = 2$。因此，J_f 在该理论中的作用（自然地）至关重要；此外，这还使得它与爆破代数的研究建立了有趣的联系，尤其是描述那些使相应环为 Cohen-Macaulay 的理想这一传统问题。本文尤其关注 Rees 代数

$$\mathscr{R}(J_f) = R\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}t, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}t\right] \subset R[t]$$

以及其特殊纤维环 $\mathscr{F}(J_f) = \mathscr{R}(J_f) \otimes_R k$；众所周知，根据膨胀理论，它们编码了相关的几何信息。回顾一下，J_f的解析扩张度记为 $\ell(J_f)$，它是 $\mathscr{F}(J_f)$的克鲁尔维数，且不超过 n。称 J_f具有极大解析扩张度，意味着 $\ell(J_f) = n$。

接下来，我们简要介绍本文各节的内容。

第1节引入了本文的核心定义，例如自由除子的概念以及理想的爆破代数，并给出若干将在本文部分内容中用到的辅助事实。此外，本节还约定了一些记号。

在第2节中，我们介绍复数域 R上、具有 $n \geq 4$的第一族自由除子。它们是可约的，而且实际上是线性的，具体而言，其雅可比理想 J_f 是线性表示的，即相应的希尔伯特–伯奇矩阵的元素均为（可能为零的）线性形式。我们还确定了 $\mathscr{F}(J_f)$的定义方程，并计算了 J_f的解析扩张度和约化数。此外，我们证明 $\mathscr{R}(J_f)$和 $\mathscr{F}(J_f)$是 Cohen-Macaulay。

第3节介绍我们的第二族自由除子，它们涉及至少 4 个变量且变量数为偶数，并且按照上述意义仍然是可约的、线性的。我们展示了 J_f 的关系模的一组结构良好的极小生成元。此外，与前一族一样——但采用了不同的方法——我们证明 $\mathscr{R}(J_f)$ 和 $\mathscr{F}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay 环（后者实际上被证明是一般行列式环），并确定了 J_f 的解析扩张度和约化数。

在第 4 节中，我们将第三族表示为一个二参数族，其中包含 3 个变量、次数为 $\alpha\beta$ 的（不再是线性的）自由除子 $f = f_{\alpha,\beta}$，其中 $\alpha, \beta \geq 2$。对于满足 $\beta = 2$ 的单参数族（对于 $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ 也如此），我们证明 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay 环，并推导出 $\mathscr{F}(J_f)$ 同构于 k 上的多项式环（因此 J_f 的约化数为零）。我们还证明，若 $k = \mathbb{C}$，则 f 可约；而在 $k \subseteq \mathbb{R}$ 的情形下，我们验证了若 β 为奇数，则 f 可约，否则不可约。此外，若 $\beta \geq 3$ 为奇数，我们说明如何从 $f_{\alpha,\beta}$ 导出另一个由次数为 $\alpha\beta - \alpha$ 的自由除子 $g = g_{\alpha,\beta}$ 构成的二参数族；对于满足 $\beta = 3$ 的单参数族，我们推导出 $\mathscr{R}(J_g)$ 是 Cohen-Macaulay 环。

在第5节中，我们介绍第四族自由除子，它们具有 3 个变量。这类（可约）除子具有线性性质——与前两个族一样——其构造方式是：取我们与给定的 3 个适当线性形式相关联的一组二次型的雅可比矩阵，并求其行列式。事实上，这一族的部分内容是新的，因为若 $k = \mathbb{C}$ ，则其成员可由至多 4 个变量中的线性自由除子的著名分类得到；另一方面，我们的（始终）假设是 k 的 char $k = 0$。此外，我们证明 J_f 是线性型的——即从 J_f 的对称代数到 $\mathscr{R}(J_f)$ 的典范满同态是同构——并由此推导出 $\mathscr{R}(J_f)$ 是完全交环。

对于属于四个（或五个）族中任意一个的 $f \in R$ ，我们运用 Miranda-Neto [31]的一项结果，轻松确定由环 $R/(f)$的 k导子构成的分次模 $\mathrm{Der}_k(R/(f))$ 的 Castelnuovo-Mumford 正则性。毋庸置疑，正则性是一项重要不变量，它控制着模的复杂程度（与关系次数的界限相关）；而导子模则是一个经典对象，因为它汇集了定义在超曲面 $V(f) \subset \mathbb{P}^{n-1}_k$ 上的切向量场。

本文最后讨论第6节中的问题：对于（不一定自由的）多项式 $f \in R$，何时理想 J_f 具有极大解析扩张度——这项研究的意义在于它与前文提到的合度除子理论之间的联系。我们给出了若干种刻画此类极大性的方式，包括关于适当辅助模的上同调条件，以及与 J_f的幂理想滤过和整闭包滤过相关的渐近深度。我们还指出，本文提出的主要问题都出现在这一节中。其中包括一个猜想：若 f 是满足 $\ell(J_f) = n$ 的线性自由除子，则 J_f 为线性型（我们感兴趣的情形是 $n \geq 5$）；另一个问题是，合度多项式的约化海森行列式是否必然是一个（线性）自由除子。对于所有这些问题，我们都受到若干实例的启发和指引，相关计算借助 Bayer 和 Stillman 的 Macaulay 程序完成 [5]。

1. Preliminaries: Free divisors and blowup algebras

我们首先引入一些定义和辅助事实。首先约定，在全文中， k 均表示一个特征零域。本节还将给出其他一些约定（包括记号）。设 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 是由 k上的 $n \geq 3$ 个不定元 $x_1, \ldots, x_n$ 生成的标准分次多项式环，并令 $R_+ = (x_1, \ldots, x_n)$ 表示 R的齐次极大理想。

1.1. 自由除子。固定一个非零齐次多项式 $f \in R^2_+$。f的对数导子是一个算子 $\theta = \sum_{i=1}^n g_i \partial/\partial x_i$，其中 $g_1, \ldots, g_n \in R$ 为齐次多项式，且满足

$$\theta(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in (f).$$

从几何上看， θ 可以解释为定义在 $\mathbb{P}^{n-1}_k$ 上的向量场，它沿着超曲面 $V(f)$（的光滑部分）相切。从现在起，我们假设 f按通常意义是约化的，即 $f_{\mathrm{red}} = f$，也就是说， f 至多是若干互不相同的不可约因子的乘积。此外，为避免 f 成为锥，我们始终假设（不再另行说明） f 的偏导数在 k上线性无关（回顾一下，如果经过某种线性坐标变换后，齐次多项式 $g \in R$ 至多依赖于 $n-1$ 个变量，则称其为锥）。用 $T_{R/k}(f)$ 表示由 f的对数导子构成的 R-模，它也称为 f的切向理想化子（或 Saito-Terao 模），通常记作 $\mathrm{Derlog}(-V(f))$。容易看出， $T_{R/k}(f)$作为 R-模的（一般）秩为 n 。

定义 1.1. 若 f 是自由除子，则 $T_{R/k}(f)$ 是自由的 R-模。

这一概念源于 [35], , 已被证明对数学的多个分支都具有重要意义。我们再回顾另一个经典对象。

定义 1.2. 若 $f_{x_i} := \partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, 则 f 的雅可比理想（也称为 f 的梯度理想）定义为

$$J_f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}) \subset R.$$

注意，由于 f 不是锥，理想 J_f 由 f 的 n 个偏导数极小生成。另请回忆，欧拉导子

$$\varepsilon_n := \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

根据众所周知的欧拉恒等式 $\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i} = (\deg f) f$，它对齐次多项式 f 是对数的。现在我们指出，由于 $T_{R/k}(f)$ 分解为 J_f 的关系模与循环模 $R\varepsilon_n$ 的直和（见 [31, 引理 2.2]），若 f 是自由除子，则 $T_{R/k}(f)$ 的一个自由基由对应于 $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ 的极小 syzygy 矩阵各列的导子以及 ε_n 组成。

接下来我们回顾一个有用的刻画。有些作者甚至将其直接作为自由除子的定义；此外，它还凸显了交换代数在自由除子理论中的核心作用。

引理 1.3.（[31, 引理 4.1]） $f \in R$ 是自由除子，当且仅当 J_f 是余维 2 完美理想（等价地，理想 J_f 的投射维数为 1）。

换言之， f 是自由除子，当且仅当 R/J_f 是 Cohen-Macaulay 环，且 $\operatorname{ht} J_f = 2$；这里以及全文中，$\operatorname{ht} I$ 表示理想 $I \subset R$的高度。由此可见，经典的希尔伯特-伯奇定理在自由除子理论的代数方面发挥着重要作用。还值得一提的是，这种富有成效的交互在更一般的情形下也成立（见 [32]）。

下面我们将用到一个众所周知且非常有用的自由性判据。Saito 在 $k = \mathbb{C}$的情形下发现了这一判据，但它已知对任意特征零域都成立（见 [8, 定理 2.4]）。

引理 1.4.（[35, 定理 1.8(ii)], 亦见 [17, 定理 8.1]） $f \in R$ 是自由除子，当且仅当存在 n 向量场 $\theta_1, \ldots, \theta_n \in T_{R/k}(f)$，使得

$$\det [\theta_j(x_i)]_{i,j=1,\ldots,n} = \lambda f$$

for 某个非零的 $\lambda \in k$。此时，集合 $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ 是 $T_{R/k}(f$的自由基).

如前所述，对 J_f的 $n \times (n-1)$协同矩阵 φ的列进行初等变换后，上述自由基中的导子 θ_j对应于 φ的各列以及欧拉向量场 ε_n。

此外， [9]中还引入了以下重要的子类。

定义 1.5. 若 f 是自由除子，且理想 J_f 是线性表示的，则称 f 为线性自由除子。

换言之， f 是线性自由除子，当且仅当 J_f 存在如下形式的极小分次 R-自由解

$$0 \longrightarrow R(-n)^{n-1} \longrightarrow R(-n+1)^n \longrightarrow J_f \longrightarrow 0.$$

特别地，线性自由除子的次数必然等于 n （因此次数最小，因为可以证明任何自由除子的次数至少为 n）。

现在我们暂且考虑一个更一般的情形。设 S 是一个包含 k 的诺特交换环。 S 的 k-导子定义为一个加法映射 $\vartheta\colon S \to S$ ，它在 k 上取值为零，并满足莱布尼茨法则： $\vartheta(uv) = u\vartheta(v) + v\vartheta(u)$，对所有 u 、 $v \in S$ 均成立。所有这类对象构成一个 S- 模，记作 $\operatorname{Der}_k(S)$。特别地，若仍有 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$，则得到 R-模 $\operatorname{Der}_k(R)$，它以 $\partial/\partial x_i$ 为自由基底。现在，若 $f \in R_+^2$ 如上所述，我们还可以考虑

导子模 $\mathrm{Der}_k(R/(f))$，它可以按如下方式分次。首先，假设 $\mathrm{Der}_k(R)$ 具有从 R 的韦尔代数的自然 $\mathbb{Z}$-分次继承而来的分次，因此每个 $\partial/\partial x_i$ 的次数为 -1。我们赋予 $T_{R/k}(f)$ 从 $\mathrm{Der}_k(R)$ 诱导而来的分次；也就是说，若 g_1、……、$g_n \in R$ 的次数为 $\delta+1$，则对数导子 $\sum_{i=1}^n g_i\partial/\partial x_i \in T_{R/k}(f)$ 的次数为 δ。例如，$\varepsilon_n \in [T_{R/k}(f)]_0$。最后回顾一下，有如下同一关系（例如，参见 [31, 引理 2.1]）

$$\mathrm{Der}_k(R/(f)) = T_{R/k}(f)/f\mathrm{Der}_k(R).$$

然后我们令 $\mathrm{Der}_k(R/(f))$ 按照由此商从 $T_{R/k}(f)$ 诱导的分次结构赋予分次 t.

下一个辅助引理涉及分次模 $\mathrm{Der}_k(R/(f))$。首先回顾有限生成分次模 E 在分次多项式环 R 上的 Castelnuovo-Mumford 正则性的概念。设 $0 \to F_p \to \ldots \to F_0 \to E \to 0$ 是 E 的一个极小分次 R-自由解，其中 $F_i := \bigoplus_{j=1}^{b_i} R(-a_{i,\ j})$，$i = 0, \ldots, p$。注意，$p$ 是 E 的投射维数。

定义 1.6. 若 $m_i := \max\{a_{i,j} \mid 1 \le j \le b_i\}$，$i = 0, \ldots, p$，则将 E 的 Castelnuovo-Mumford 正则性定义为 $\mathrm{reg}\ E = \max\{m_i - i \mid 0 \le i \le p\}$。

这在某种意义上为模的复杂性提供了一个数值度量。还有一些以层和局部上同调（两者彼此相关）来定义的更一般的定义，但本文的目的用上述定义已经足够。参见例如 [4] 和 [7, 第 15]章。

引理 1.7.（[31, 推论 2.5(i)]）若 $f \in R$ 是次数为 d的自由除子，则 $\mathrm{reg}\ \mathrm{Der}_k(R/(f)) = d-2$。特别地，若 $f \in R$ 是线性自由除子，则 $\mathrm{reg}\ \mathrm{Der}_k(R/(f)) = n-2$。

值得一提的是，一些作者研究了其他同样与 f存在“微分相关性”的对象的 Castelnuovo-Mumford 正则性，例如米尔诺代数 R/J_f（见 [11]）以及模 $T_{R/k}(f)$本身（见 [16, 定理 5.5] 和 [36, 第 3]节）。

1.2. 膨胀代数。我们以简要回顾膨胀代数及几个密切相关的概念来结束本节。固定复数域 R 中的齐次真理想 I。

定义 1.8。I 的 Rees 代数是分次环

$$\mathscr{R}(I) = \bigoplus_{i\ge 0} I^i t^i \subset R[t],$$

其中 t 是 R 上的不定元。这个 R-代数定义了沿对应于 I 的子概形进行的膨胀。I 的特殊纤维环有时称为 I 的纤维锥，它是 $\mathscr{R}(I)$ 的特殊纤维，即（标准）分次 k-代数

$$\mathscr{F}(I) = \mathscr{R}(I) \otimes_R k \cong \bigoplus_{i\ge 0} I^i/R_+I^i.$$

I 的解析扩张度为 $\ell(I) = \dim \mathscr{F}(I)$。其界为 $\mathrm{ht}\ I \le \ell(I) \le n$。

或者，$\mathscr{R}(I)$ 可以实现为对称代数 $\mathrm{Sym}_R I$（代数中的一个基本构造）除以其 R-挠子模所得的商；事实上，该子模是一个理想。因此存在一个自然的 R-代数满同态 $\mathrm{Sym}_R I \to \mathscr{R}(I)$。若此映射是同构，则称 I 为线性型。由于 R 尤其是一个整环，这等价于说 $\mathrm{Sym}_R I$ 也是一个整环。例如，任何由正则序列生成的理想都是线性型。

接下来，我们给出一个利用雅可比矩阵计算解析扩张度的实用公式（我们一直假设处于特征零的情形）。为此，我们对 Rees 代数（因而也对其特殊纤维）作一个更具体的描述：也就是说，若固定生成元 $I = (f_1, \ldots, f_\nu) \subset R = k[x_1, \ldots, x_n]$，则 $\mathscr{R}(I)$ 就是由 $f_1 t, \ldots, f_\nu t \in R[t]$ 生成的 R-子代数。特别地，当 f_i 都是次数相同的齐次多项式时——例如，某个齐次多项式的偏导数——我们可以将特殊纤维写作 $\mathscr{F}(I) \cong k[f_1, \ldots, f_\nu]$，它是 R 的一个 k-子代数。

引理 1.9。（[40, 命题 1.1]）设 $I = (f_1, \dots, f_\nu)$，并假设所有 f_i 都是次数相同的齐次多项式。令 $\Theta := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $1 \le i \le \nu$, $1 \le j \le n$。则 $\ell(I) =$ 的秩为 Θ。

最后回顾一下，子理想 $K \subset I$ 是 I 的约化，当且仅当由此诱导的 Rees 代数扩张 $\mathscr{R}(K) \subset \mathscr{R}(I)$ 是整扩张；等价地，存在 $r \ge 0$ 使得 $I^{r+1} = KI^r$。满足条件的最小 r 记作 $\mathrm{r}_K(I)$。若约化 K 关于包含关系是极小的，则称其为极小约化。现在， I 的约化数定义为

$$\mathrm{r}(I) = \min\{\mathrm{r}_K(I) \mid K \text{ is a minimal reduction of } I\}.$$

例如，一个标准事实是（因为 k 是无限的），$\mathrm{r}(I) = 0$ 当且仅当 I 可由 $\ell(I)$ 个元素生成；例如，当 I 是线性型时，这一条件就成立。更一般地，下面的基本结果给出了在标准分次 k-代数 $\mathscr{F}(I)$ 满足适当条件时计算该数的方法。为便于从最小分次自由分解中读取 Castelnuovo-Mumford 正则性，只要 I 可由 ν 中的 R 次形式生成，也可以将该代数视为多项式环 $k[t_1, \dots, t_\nu]$ 上的循环分次模。

引理 1.10。（[26, 命题 1.2]）如果 $\mathscr{F}(I)$ 是 Cohen-Macaulay 的，则 $\mathrm{r}(I) = \operatorname{reg} \mathscr{F}(I)$。

2. First family: linear free divisors in $\mathbb{P}^{n-1}$

在介绍我们的第一族自由除子以及相关爆破代数的性质之前，我们先记录几个基本计算，这些计算将在下文定理 2.2 的证明中直接使用。

注 2.1. 设 $S = k[w, u]$ 是一个含有 2 个变量 w、u 的标准分次多项式环，并考虑理想 $\mathfrak{n} = (w, u)$。给定一个整数 $r \ge 2$，以下事实是众所周知且易于验证的。

（a）理想 $\mathfrak{n}^r = (w^r, w^{r-1}u, \dots, wu^{r-1}, u^r)$ 是一个余维为 2 的完美理想，其具有如下 $(r+1) \times r$ 协同矩阵：

$$\varphi_r = \begin{bmatrix} -w & 0 & \dots & 0 \\ u & -w & \dots & 0 \\ 0 & u & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -w \\ 0 & 0 & \dots & u \end{bmatrix}; \tag{1}$$

(b) Rees 代数 $\mathscr{R}(\mathfrak{n}^r)$ 的表示理想，即满射 S 代数同态的核

$$S[y_1, \dots, y_{r+1}] \twoheadrightarrow \mathscr{R}(\mathfrak{n}^r), \quad y_i \mapsto w^{r-i+1}u^{i-1},$$

等于 $Q = (I_1(\underline{y} \cdot \varphi_r) \ I_2(B))$，其中 $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{r+1} \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_r \\ y_2 & \cdots & y_{r+1} \end{bmatrix}$.

定理 2.2. 考虑标准分次多项式环 $R = k[x_1, \dots, x_n]$，其中 $n \ge 4$。记 $x_{n-1} = w$ 和 $x_n = u$. 。令

$$f = 2w^{n-1}u + \sum_{i=1}^{n-2} x_i w^{i-1} u^{n-i}.$$

那么 f 是一个线性自由除子。

证明。首先注意到

$$f_{x_i} = w^{i-1}u^{n-i} \quad \text{for each} \quad 1 \le i \le n-2, \tag{2}$$

$$f_w = 2(n-1)w^{n-2}u + \sum_{i=2}^{n-2}(i-1)x_i w^{i-2}u^{n-i} \quad \text{and} \quad f_u = 2w^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2}(n-i)x_i w^{i-1}u^{n-(i+1)}.$$

特别地， J_f 的子理想 $(f_{x_1}, \ldots, f_{x_{n-2}})$ 等于理想 $u^2(w,u)^{n-3}$. 因此，若 φ_{n-3} 是理想 $(w,u)^{n-3}$ 的 $(n-2)\times(n-3)$ 协同矩阵（见 (1)），则 $n\times(n-3)$ 矩阵的各列

$$\eta = \left[\begin{array}{c} \varphi_{n-3} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

是梯度理想 J_f 的关系。我们还有以下等式

$$(3) \quad uf_w = 2(n-1)w^{n-2}u^2 + \sum_{i=2}^{n-2}(i-1)x_i w^{i-2}u^{n-(i-1)} = 2(n-1)wf_{x_{n-2}} + \sum_{i=2}^{n-2}(i-1)x_i f_{x_{i-1}}$$

and

$$(4) \quad (n-1)uf_u = 2(n-1)w^{n-1}u + \sum_{i=1}^{n-2}(n-1)(n-i)x_i w^{i-1}u^{n-i} = wf_w + \sum_{i=1}^{n-1}(n(n-i-1)+1)x_i f_{x_i}.$$

现在注意到，(3) 和 (4) 得出 J_f 的两个新的（线性）关系，即

$$\delta_1 = \left[\begin{array}{ccccccc} \alpha_2 x_2 & \alpha_3 x_3 & \cdots & \alpha_{n-2}x_{n-2} & 2(n-1)w & -u & 0 \end{array}\right]^t$$

and

$$\delta_2 = \left[\begin{array}{ccccccc} \beta_1 x_1 & \beta_2 x_2 & \cdots & \beta_{n-2}x_{n-2} & w & -(n-1)u \end{array}\right]^t$$

wher当 $2 \le i \le n-2$ 时，e $\alpha_i = i-1$；而只要 $1 \le i \le n-2$， $\beta_i = n(n-i-1)+1$.

断言 1. J_f 的最小分次自由分解为

$$(5) \qquad 0 \to R(-n)^{n-1} \xrightarrow{\psi} R(-n+1)^n \to J_f \to 0$$

其中 $\psi = \left[\begin{array}{c|c|c} \eta & \delta_1 & \delta_2 \end{array}\right]$.

根据上述讨论，我们已经知道序列 (5) 是一个复形。要证明它实际上是 J_f 的最小分次自由分解，只需验证 ht $I_{n-1}(\psi) \ge 2$. 注意，我们可以将 ψ 写成如下形式

$$\psi = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{n-3} & * \\ \hline \mathbf{0} & \Phi \end{array}\right]$$

其中 $\Phi = \left[\begin{array}{cc} -u & w \\ 0 & -(n-1)u \end{array}\right]$. 因此，$\det \Phi \cdot I_{n-3}(\varphi_{n-3}) = u^2 \cdot (w,u)^{n-3} \subset I_{n-1}(\psi)$。特别地，$u^{n-1} \in I_{n-1}(\psi)$。另一方面，若通过保持变量 w, u 不变并将其余变量映射为 0 的 R 上的 k-代数自同态对 ψ 的各项进行特化，我们得到矩阵

$$\overline{\psi} = \begin{bmatrix} -w & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ u & -w & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & u & 2(n-1)w & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -u & w \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -(n-1)u \end{bmatrix}.$$

$n-1$阶子式 $\overline{\psi}$ 省略最后一行后得到的结果为 cw^{n-1}，其中 $c \in k$. 是某个非零量。因此， ψ 的 $n-1$ 阶子式省略最后一行后具有 $cw^{n-1}+G$ 的形式，其中 $G \in$ 是适当的 x_1、……、 x_{n-2} 的函数。于是，$(u^{n-1}, cw^{n-1}+G) \subset I_{n-1}(\psi)$。因此，ht $I_{n-1}(\psi) \ge 2$，如所需。

□

计算表明，在定理涵盖的第一种情形（即 $n = 4$）中，雅可比理想 J_f 是线性型；特别地， $\ell(J_f) = 4$，且 $\mathrm{r}(J_f) = 0$。情形 $n \geq 5$ 将在下文的命题 2.3 中处理。作为准备，我们考虑多项式环

$$T := k[y_1, \ldots, y_{n-2}, s, t] \quad \text{and} \quad T' := k[y_1, \ldots, y_{n-2}]$$

以及这些 k-代数

$$A := k[f_{x_1}, \ldots, f_{x_{n-2}}, f_w, f_u] \quad \text{and} \quad A' := k[f_{x_1}, \ldots, f_{x_{n-2}}].$$

将多项式 f_{x_1}、……、$f_{x_{n-2}}$ 中的 u^2 约去（见（2）），可得

$$A' \cong A'' := k[w^{n-3}, w^{n-4}u, \ldots, u^{n-3}].$$

所有这些环通过以下 k-代数的交换图相互关联：

(6)
$$\begin{array}{ccccc} T & \twoheadrightarrow & A & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ T' & \twoheadrightarrow & A' & \xrightarrow{\cong} & A'' \end{array}$$

命题 2.3. 沿用上述记号，设 $f \in R$ 如定理 2.2 中所述，且 $n \geq 5$。以下断言成立：

(i) $\mathscr{F}(J_f) \cong T/I_2 \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix}$ 作为 k-代数。特别地， $\mathscr{F}(J_f)$是 Cohen-Macaulay；(ii) $\ell(J_f) = 4$；(iii) $\mathrm{r}(J_f) = 1$；(iv) $\operatorname{reg} \operatorname{Der}_k(R/(f)) = n - 2$ （ $n = 4$时也成立）。

证明. (i) 由于 J_f 是由相同次数的元素生成的齐次理想，存在分次 k-代数的同构 $\mathscr{F}(J_f) \cong A$，因此 $\mathscr{F}(J_f) \cong T/Q$，其中 $Q :=$ 是 $T \twoheadrightarrow A$ 的核。由图 (6)，得到 $Q'T \subset Q$，其中 $Q' :=$ 是 $T' \twoheadrightarrow A'$ 的核。由注记 2.1(b)，我们有

$$Q'T = I_2 \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix}.$$

因此，$\operatorname{ht} Q \geq \operatorname{ht} Q'T = n-4$.。于是，为了证明 $Q = I_2 \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix}$，我们必须证明 $\operatorname{ht} Q \leq n-4$，或等价地，证明 $\dim A \geq 4$。另一方面，引理 1.9 给出 $\dim A = \operatorname{rank} \Theta$，其中 Θ 是 f. 的海森矩阵。注意，(雅可比) 矩阵 Θ 可以写成分块形式

$$\Theta = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \Theta_{w,u} \\ \hline \Theta_{w,u}^t & * \end{array}\right]$$

其中 $\Theta_{w,\ u}$ 是关于 w, u 的 $f_{x_1}, \ldots, f_{x_{n-2}}$ 的（$n-2$）雅可比矩阵。显然，$I_2(\Theta_{w,\ u}) \neq 0$. 。特别地，$I_4(\Theta) \neq 0$，因为 $I_2(\Theta_{w,\ u})^2 \subset I_4(\Theta)$。因此 $\operatorname{rank} \Theta \geq 4$，从而 $\dim A = \operatorname{rank} \Theta \geq 4$，如所需。$\mathscr{F}(J_f)$ 的科恩–麦考利性将在下文 (iii) 的证明中得到确认。

(ii) 由于 $\ell(J_f) = \dim \mathscr{F}(J_f)$，结论可直接由 (i) 的证明得出。

(iii) 众所周知，$I_2 \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix}$ 是一个具有线性分解的完美理想（事实上，这个理想由 Eagon–Northcott复形分解）。特别地，环 $\mathscr{F}(J_f) \cong T/Q$ 是 Cohen-Macaulay，且其 Castelnuovo-Mumford 正则性为 1。因此，由引理 1.10，$\mathrm{r}(J_f) = \operatorname{reg} \mathscr{F}(J_f) = 1$。

(iv) 根据定理 2.2， f 是一个线性自由除子。现在结论由引理 1.7 得出。 □

我们的下一个目标是证明，对于上述的 f， $\mathscr{R}(J_f)$是 Cohen-Macaulay。首先，我们需要一个辅助引理。

引理 2.4. L　　令 $k[\mathbf{z},\mathbf{v}] = k[z_1,\dots,z_m,v_1,\dots,v_m]$ 为一个多项式环，其中 $m \geq 2$。考虑

$$F = a_1v_1z_1 + \cdots + a_mv_mz_m,$$

其中 a_1,... , a_n 是 k 的非零元素。令

$$M = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_{m-1} \\ z_2 & z_3 & \dots & z_m \end{bmatrix}.$$

那么， $k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/(I_2(M)\ F)$ 是一个余维为 $m-1$ 的 Cohen-Macaulay 整环　.

证明. 根据 [24, 第 4], 节，我们有 $k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/I_2(M)$ 是一个余维为$m-2$的 Cohen-Macaulay 整环。特别地，由于 $F \notin I_2(M)$，环 $k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/(I_2(M)\ F)$ 是余维为$m-1$的 Cohen-Macaulay 环，因此只需证明它是一个整环。显然，我们可以假设 $m \geq 3$。

断言。 z_1是一个 $(k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/(I_2(M)\ F))$-正则元。

假设 z_1不是 $(k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/(I_2(M)\ F))$-正则的。那么，对某个 $z_1 \in \mathfrak{p}$，它属于 $k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/(I_2(M)\ F)$ 的一个关联素理想 $\mathfrak{p}$，因此特别有 $(z_1, I_2(M)\ F) \subset \mathfrak{p}$。现在令 M_1为从 M中删去第一列所得的矩阵。容易看出 $(z_1, z_2, I_2(M_1)\ F) \subset \mathfrak{p}$。若 M_2为从 M_1中删去第一列所得的矩阵，则 $(z_1, z_2, z_3, I_2(M_2)\ F) \subset \mathfrak{p}$。如此继续，我们得到

$$(z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, F) \subset \mathfrak{p}.$$

由于 ht $(z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, F) = m$，可知 ht $\mathfrak{p} \geq m.$。然而，这与 $\mathfrak{p}$是 Cohen-Macaulay（因而无混合的）环 $k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/(I_2(M)\ F)$ 的一个关联素理想相矛盾，因为该环的余维为 $m-1$。断言得证。

最后，在 z_1 处局部化，我们推出同构

$$\frac{k[\mathbf{z},\mathbf{v}][z_1^{-1}]}{(I_2(M),F)k[\mathbf{z},\mathbf{v}][z_1^{-1}]} \cong \frac{k[\mathbf{z},v_2,\dots,v_m][z_1^{-1}]}{I_2(M)k[\mathbf{z},v_2,\dots,v_m][z_1^{-1}]}.$$

但该同构右侧的环是一个整环。由此断言可知，$k[\mathbf{z}, \mathbf{v}]/(I_2(M)\ F)$ 是一个整环。

□

定理 2.5. 设 $f \in R$ 如定理 2.2 所述。则 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay。

证明. 考虑自然满同态

$$C := k[x_1,\dots,x_{n-2},w,u,y_1,\dots,y_{n-2},s,t] \twoheadrightarrow \mathscr{R}(J_f),$$

其核为 w　　我们记为 $\mathcal{J}$。根据前面的讨论（及记号），可知　　t

$$\mathcal{K} := (I_1(\gamma\cdot\psi), Q) \subset \mathcal{J}$$

其中 $\gamma = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-2} & s & t \end{bmatrix}$。注意，我们可以将理想 $\mathcal{K}$ 改写为

$$\mathcal{K} = I_2\begin{bmatrix} u & y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ w & y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix} + (G,\ H),$$

$$G = \gamma\cdot\delta_1 = -su + 2(n-1)y_{n-2}w + \sum_{i=2}^{n-2}\alpha_i y_{i-1}x_i \quad \text{and} \quad H = \gamma\cdot\delta_2 = -(n-1)tu + sw + \sum_{i=1}^{n-2}\beta_i y_i x_i.$$

断言 1. 设 $\mathcal{K}_1 := I_2\begin{bmatrix} u & y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ w & y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix} + (H) \subset C$。那么， $C/\mathcal{K}_1$ 是一个 Cohen-Macaulay 整环。

记 $\mathcal{K}_0 := I_2\begin{bmatrix} u & y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ w & y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix}$. 众所周知， $C/\mathcal{K}_0$ 是一个维数为 $n+3$ 的 Cohen-Macaulay 整环。此外，由于 $H \notin \mathcal{K}_0$，该多项式必为 $C/\mathcal{K}_0$-正则。因此，

环 $C/\mathcal{K}_1 = C/(\mathcal{K}_0, H)$ 是维数为 $n+2$ 的 Cohen-Macaulay 环。特别地， $C/\mathcal{K}_1$ 满足 Serre 的 S_2 条件（定义见第 6.1 小节）。我们进一步断言，环 $C/\mathcal{K}_1$是正规的，由此可推出其整性。为了证明 $C/\mathcal{K}_1$ 是正规的，只需验证它在余维 1 处局部正则。注意 $\operatorname{ht}\mathcal{K}_1 = n-2$。根据经典的雅可比判别法，只需证明

$$\operatorname{ht}(\mathcal{K}_1,\, I_{n-2}(\Theta)) \geq n,$$

其中， Θ 表示 $\mathcal{K}_1$的雅可比矩阵。注意，矩阵 Θ在对其各列重新排序后（这显然不会影响子式理想），可以写成如下形式

$$\Theta = \left[\begin{array}{c|c} \Theta' & 0 \\ \hline * & \Theta'' \end{array}\right].$$

具体而言， Θ'是关于变量 w、 u、 y_1、……、 y_{n-2}的 $\mathcal{K}_0$的雅可比矩阵，而 Θ''是关于变量 x_1、……、 x_{n-2}、 s、 t的 H的（行）雅可比矩阵。特别地，

$$(\mathcal{K}_1,\, I_1(\Theta'')\cdot I_{n-3}(\Theta')) \subset (\mathcal{K}_1, I_{n-2}(\Theta)).$$

现在取（$\mathcal{K}_1, I_{n-2}(\Theta)$)的一个极小素理想 $\mathfrak{q}$。特别地， $I_1(\Theta'')\cdot I_{n-3}(\Theta') \subset \mathfrak{q}$，由此得到$I_1(\Theta'') \subset \mathfrak{q}$或 $I_{n-3}(\Theta') \subset \mathfrak{q}$。若 $I_1(\Theta'') \subset \mathfrak{q}$，则 $\operatorname{ht}\mathfrak{q} \geq n$，因为 $I_1(\Theta'') = (y_1, \ldots\ldots, y_{n-2}, w, u)$。另一方面，若 $I_{n-3}(\Theta') \subset \mathfrak{q}$，则 $(\mathcal{K}_0, I_{n-3}(\Theta')) \subset \mathfrak{q}$。但众所周知，

$$\operatorname{ht}(\mathcal{K}_0,\, I_{n-3}(\Theta')) = n.$$

因此，无论如何都有 $\operatorname{ht}\mathfrak{q} \geq n$，从而得到 $\operatorname{ht}(\mathcal{K}_1, I_{n-2}(\Theta)) \geq n$，这正是所求。

断言 2. $C/\mathcal{K}$ 是一个维数为 $n+1$. 的 Cohen-Macaulay 整环

根据断言 1 及其证明， $C/\mathcal{K}_1$ 是一个维数为 $n+2$ 的 Cohen-Macaulay 整环。因此，由于$G \notin \mathcal{K}_1$, 环 $C/\mathcal{K} = C/(\mathcal{K}_1, G)$ 是一个维数为 $n+1$ 的 Cohen-Macaulay 环。剩下要证明$C/\mathcal{K}$ 是一个整环。首先，我们断言 u 是 $C/\mathcal{K}$-正则的。反设不然。则对于 $C/\mathcal{K}$的某个关联素理想 $\mathfrak{p}$， 有 $u \in \mathfrak{p}$， 这给出

$$(u, wy_1, \ldots, wy_{n-3}, I_2(N), G, H) \subset \mathfrak{p},$$

其中

$$N := \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-3} \\ y_2 & \cdots & y_{n-2} \end{bmatrix}.$$

特别地,

$$\mathcal{Q}_1 := (u, w, I_2(N), G, H) \subset \mathfrak{p} \quad \text{or} \quad \mathcal{Q}_2 := (u, y_1, \ldots, y_{n-3}, G, H) \subset \mathfrak{p}. \tag{7}$$

我们有

$$C/(u, w, I_2(N), H) \cong (k[x_1, \ldots, x_{n-2}, y_1, \ldots, y_{n-2}]/(I_2(N), \beta_1 y_1 x_1 + \cdots + \beta_{n-2} y_{n-2} x_{n-2}))[s,t].$$

由这个同构和引理 2.4， 环 $C/(u, w, I_2(N)\ H)$ 是维数为 $(n-1)+2 = n+1$ 的 Cohen-Macaulay 整环。因此， 由于 $G \notin (u, w, I_2(N)\ H)$， 我们得到 $C/\mathcal{Q}_1 = C/(u, w, I_2(N)\ G, H)$ 是维数为 n 的 Cohen-Macaulay 环。特别地， $\operatorname{ht}\ \mathcal{Q}_1 = n$。另一方面,

$$C/\mathcal{Q}_2 \cong k[x_1, \ldots, x_{n-2}, w, y_{n-2}, s, t]/(y_{n-2}w, sw + \beta_{n-2} y_{n-2} x_{n-2})$$

这是维数为 n 的 Cohen-Macaulay 环， 由此可得 $\operatorname{ht}\ \mathcal{Q}_2 = n$。由 (7) 可知， $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \geq n$。这与事实矛盾，因为 $\mathfrak{p}$ 是 $C/\mathcal{K}$的关联素理想， 而 $C/\mathcal{K}$是余维为 $n-1$ 的 Cohen-Macaulay 环。因此， u 是 $C/\mathcal{K}$-正则的。现在， 在 u 处局部化并令 $D := k[x_1, \ldots, x_{n-2}, w, u, y_1, s, t]$, 经过常规计算可得

$$(C/\mathcal{K})[u^{-1}] \cong D[u^{-1}]/(G, H)D[u^{-1}] \cong k[x_1, \ldots, x_{n-2}, w, u, y_1][u^{-1}],$$

这是一个整环。因此， $C/\mathcal{K}$ 是一个整环，这就证明了断言 2。

为完成定理的证明，我们注意到，由于 $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ 是余维相同的素理想，因此必有 $\mathcal{K} = \mathcal{J}$.。特别地， $\mathscr{R}(J_f) \cong C/\mathcal{J}$ 是 Cohen-Macaulay。 □

3. Second family: linear free divisors in $\mathbb{P}^{2n-1}$

为了描述第二族自由除子，考虑由 k 上的 $2n \geq 4$ 个不定元生成的标准分次多项式环 $R = k[x_1, \ldots, x_{2n-2}, w, u]$。令

$$f = wuq, \quad q = (x_1u - x_2w)(x_3u - x_4w)\cdots(x_{2(n-1)-1}u - x_{2(n-1)}w).$$

对于每个 $1 \leq i \leq n-1$，记 $q_i = q/(x_{2i-1}u - x_{2i}w) \in R$。那么，

$$f_{x_{2i-1}} = u^2wq_i \quad \text{and} \quad f_{x_{2i}} = -w^2uq_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \tag{8}$$

$$f_w = qu - wu\sum_{i=1}^{n-1} x_{2i}q_i \quad \text{and} \quad f_u = qw + wu\sum_{i=1}^{n-1} x_{2i-1}q_i. \tag{9}$$

利用 (8) 和 (9)，我们很容易推出以下关系：

$$\det\begin{pmatrix} f_{x_{2i-1}} & f_{x_{2j-1}} \\ f_{x_{2i}} & f_{x_{2j}} \end{pmatrix} = 0 \quad (1 \leq i < j \leq n-1), \tag{10}$$

$$wf_{x_{2i-1}} + uf_{x_{2i}} = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1), \tag{11}$$

$$wf_w + uf_u = (n+1)f,$$

$$x_{2i-1}f_{x_{2i-1}} + x_{2i}f_{x_{2i}} = f \quad (1 \leq i \leq n-1), \tag{12}$$

$$(n+1)x_{2i-1}f_{x_{2i-1}} + (n+1)x_{2i}f_{x_{2i}} - uf_u - wf_w = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1). \tag{13}$$

设 $\alpha = a_1a_2$、$\beta = b_1b_2$ 和 $\gamma = a_1b_2 + a_2b_1$。除上述等式外，我们还有

$$\begin{aligned} (n+1)\sum_{i=1}^{n-1} x_{2i}f_{x_{2i}} &= -(n+1)w^2u\sum_{i=1}^{n-1} x_{2i}q_i \\ &= (n+1)[w(f_w - qu)] \\ &= nwf_w - uf_u + (uf_u + wf_w) - (n+1)f \\ &= nwf_w - uf_u. \end{aligned} \tag{14}$$

现在我们可以证明本节的第一个结果。

定理 3.1。沿用上述记号。以下结论成立：

(i) f 是一个线性自由除子；

(ii) $2n \times (2n-1)$ 矩阵

$$\psi_n = \left[\begin{array}{cc|c|cc|c} w & (n+1)x_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ u & (n+1)x_2 & \ldots & 0 & 0 & (n+1)x_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & w & (n+1)x_{2n-3} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & u & (n+1)x_{2n-2} & (n+1)x_{2n-2} \\ \hline 0 & -w & \cdots & 0 & -w & -nw \\ 0 & -u & \cdots & 0 & -u & u \end{array}\right] \tag{15}$$

是 J_f 的协同矩阵。因此，$T_{R/k}(f)$ 的一个自由基为 $\{\theta_1, \ldots, \theta_{2n-1}, \varepsilon_{2n}\}$，其中 θ_i 对应于 ψ_n 的各列；(iii) $\operatorname{reg} \operatorname{Der}_k(R/(f)) = 2(n-1)$。

证明。(i) 考虑 $2n \times 2n$ 矩阵

$$\mathscr{M} = \left[\begin{array}{cc|c|cc|cc} w & x_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ u & x_2 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)x_2 & x_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & w & x_{2n-3} & 0 & x_{2n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & u & x_{2n-2} & (n+1)x_{2n-2} & x_{2n-2} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -nw & w \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u & u \end{array}\right].$$

利用 (11)、(12)、(14) 以及欧拉关系，很容易看出

$$\nabla f \cdot \mathscr{M} = [\ 0 \quad f \ |\ \cdots\ |\ 0 \quad f \ |\ 0 \quad 2nf\ ],$$

因此 $\nabla f \cdot \mathscr{M} \equiv 0 \bmod f$。此外，$(n+1)f = \det \mathscr{M}$. 因此，根据引理 1.4（或者在这种情况下，根据 [8, 定理 2.4] 中陈述的斋藤判据版本），我们得出 f 是一个线性自由除子。

(ii) 为简便起见，记作 $\psi_n = \psi$。由 (i) 和引理 1.3 可知，J_f 是一个余维 2 完美理想，因此只需证明 $\nabla f \cdot \psi = 0$，并证明 ψ 具有最大秩。前者由 (11)、(13) 和 (14) 得出。现在记 Δ 为 ψ. 中删去第 $2n$ 行后得到的 $(2n-1)$ 子式。容易看出，模 w 后，Δ 由 $(n+1)^n x_1 x_3 \cdots x_{2n-3} u^n$. 给出。特别地，$\Delta$ 也非零。因此，ψ 具有最大秩。

(iii) B 由 (i) 的部分可知，f 是一个（以 $2n$ 个变量为变量的）线性自由除子。现在我们应用引理 1.7 . □

对于接下来的结果，我们考虑复数域上的一组 $2n$ 个变量 $z_1, \ldots, z_{2n-2}, s, t$，以及自然满同态

$$S := k[x_1, \ldots, x_{2n-2}, w, u, z_1, \ldots, z_{2n-2}, s, t] \twoheadrightarrow \mathscr{R}(J_f)$$

其核记为 $\mathcal{J}$。由等式 (10) 可得包含关系

$$I_2 \begin{bmatrix} z_1 & z_3 & \cdots & z_{2n-3} \\ z_2 & z_4 & \cdots & z_{2n-2} \end{bmatrix} \subset \mathcal{J}.$$

因此，

$$\mathcal{K} := \left(I_1(\gamma \cdot \psi_n),\ I_2 \begin{bmatrix} z_1 & z_3 & \cdots & z_{2n-3} \\ z_2 & z_4 & \cdots & z_{2n-2} \end{bmatrix} \right) \subset \mathcal{J}$$

其中 $\gamma = [\ z_1 \quad \ldots \quad z_{2n-2} \quad s \quad t\ ]$.，$I_1(\gamma \cdot \psi_n)$ 的生成元分为三类：

$$wz_{2i-1} + uz_{2i} \quad (1 \le i \le n-1), \tag{16}$$

$$F_i := (n+1)(x_{2i-1}z_{2i-1} + x_{2i}z_{2i}) - ws - ut \quad (1 \le i \le n-1),$$

$$G := (n+1)\sum_{i=1}^{n-1} x_{2i}z_{2i} - nws + ut.$$

我们可以利用 (16) 型生成元以及理想 $I_2 \begin{bmatrix} z_1 & z_3 & \cdots & z_{2n-3} \\ z_2 & z_4 & \cdots & z_{2n-2} \end{bmatrix}$，将 $\mathcal{K}$ 重写为

$$\mathcal{K} = \left(\underbrace{I_2 \begin{bmatrix} z_1 & z_3 & \cdots & z_{2n-3} & -u \\ z_2 & z_4 & \cdots & z_{2n-2} & w \end{bmatrix}}_{=:\mathcal{K}_0}, F_1, \ldots, F_{n-1}, G \right)$$

由此可得

$$S/\mathcal{K} \cong A[x_1, \ldots, x_{2n-2}, s, t]/(F_1, \ldots, F_{n-1}, G)A[x_1, \ldots, x_{2n-2}, s, t]$$

其中 $A := k[z_1, \ldots, z_{2n-2}, w, u]/\mathcal{K}_0$. 现在，考虑 $2n \times n$ 矩阵

$$\zeta = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} (n+1)z_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ (n+1)z_2 & 0 & \ldots & 0 & (n+1)z_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & (n+1)z_{2n-3} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & (n+1)z_{2n-2} & (n+1)z_{2n-2} \\ \hline -w & -w & \ldots & -w & -nw \\ -u & -u & \ldots & -u & u \end{array}\right]$$

视为一个元素取自整环 A 的矩阵。我们将 M 记为由 ζ 的余核定义的 A-模。

命题 3.2. 保持上述记号不变。则：

(i) M 是一个投射维数为 1 的 A-模；(ii) 对称代数 $\mathrm{Sym}_A M$ 是一个维数为 $2n+1$ 的 Cohen-Macaulay 整环。

证明。(i) 考虑复形

$$0 \longrightarrow A^n \xrightarrow{\zeta} A^{2n} \longrightarrow M \longrightarrow 0. \tag{17}$$

根据广为人知的 Buchsbaum-Eisenbud 正合性判别准则，要证明 (17) 正合，只需确认秩 $\zeta = n$。为此，考虑 ζ 的以下 $n \times n$ 子矩阵：

$$\eta := \left[\begin{array}{cccc} (n+1)z_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & (n+1)z_{2n-3} & 0 \\ -w & \ldots & -w & -nw \end{array}\right].$$

我们有 $\det \eta = -n(n+1)^{n-1} z_1 \cdots z_{2n-3} w \neq 0 (\mathrm{mod} \mathcal{K}_0)$。因此，$\zeta$的秩为 n。

(ii) 除了 (i) 中给出的性质外，回顾一下 A 是 Cohen-Macaulay 整环，且 $\mathrm{ht}\, \mathcal{K}_0 = n-1$。于是，根据 [29, 定理 1.1], ，只需证明

$$\mathrm{ht}(I_t(\zeta) + \mathcal{K}_0) \geq 2n - t + 1$$

对每个 $1 \leq t \leq n$ 都成立。为此，首先注意到，适当地对 ζ 的行进行置换后，我们得到一个形如 N 的矩阵

$$N = \left[\begin{array}{cccccc} *z_1 & \cdots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & *z_{2i-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & *z_{2n-3} & 0 \\ -u & -u & -u & \ldots & -u & u \\ \hline *z_2 & \cdots & 0 & \ldots & 0 & *z_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & *z_{2i} & \ldots & 0 & *z_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & *z_{2n-2} & *z_{2n-2} \\ -w & -w & -w & \ldots & -w & -nw \end{array}\right]$$

其中所有系数 $*$ 均等于 $n+1$。我们分别将 N 的顶部和底部块记为 N_{odd}和 N_{even}。我们的目标是证明，只要 $1 \leq t \leq n$，就有 $\mathrm{ht}(I_t(N) + \mathcal{K}_0) \geq 2n - t + 1$，其中

与前文相同

$$\mathcal{K}_0 = I_2 \begin{bmatrix} z_1 & z_3 & \dots & z_{2n-3} & -u \\ z_2 & z_4 & \dots & z_{2n-2} & w \end{bmatrix}.$$

设 P 是包含 $I_t(N) + \mathcal{K}_0$ 且具有相同余维的素理想。由 N_{odd} 容易看出，由集合 $\{z_1, z_3, \dots, z_{2n-3}, z_{2n-1} := u\}$ 的 t-乘积生成的理想 C_t 包含于 P.。但是，根据 [48, 第 2], 节， C_t 的极小素理想具有 $(z_{2j_1-1}, \dots, z_{2j_{n-t+1}-1})$ 的形式，其中 $1 \le j_1 < \cdots < j_{n-t+1} \le n$.。因此，我们可以假设 $(z_{2j_1-1}, \dots, z_{2j_{n-t+1}-1}) \subset P$，其中$1 \le j_1 < \cdots < j_{n-t+1} \le n$。类似地，由 N_{even} 可将 $(z_{2i_1}, \dots, z_{2i_{n-t+1}})$ 写为 $\subset P$，其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_{n-t+1} \le n$ （我们令 $z_{2n} := w$）。

假设以下条件成立：

(†) There exists $j \in \{1, \dots, n\}$ such that $\{z_{2j-1}, z_{2j}\} \cap P = \{z_{2j-1}\}$ or $\{z_{2j}\}$.

设 $\{z_{2j-1}, z_{2j}\} \cap P = \{z_{2j-1}\}$. 那么，根据 $\mathcal{K}_0$ 中的关系，所有奇变量都属于P。因此，我们有

$$\underbrace{(n-t+1)}_{\text{even variables}} + \underbrace{n}_{\text{odd variables}} = 2n - t + 1 \text{ variables in } P,$$

这给出 $\operatorname{ht}(I_t(N) + \mathcal{K}_0) \ge 2n - t + 1$ 对于 $1 \le t \le n$。 $\{z_{2j-1}, z_{2j}\} \cap P = \{z_{2j}\}$ 的情形可类似处理。

现在，假设 (†) 不成立。不失一般性，可假设 $(j_1, \dots, j_{n-t+1}) = (1, \dots, n-t+1)$。由此可得 $z_1, z_2, \dots, z_{2(n-t+1)-1}, z_{2(n-t+1)} \in P$. 考虑 ζ 的如下 $t \times t$子矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & *z_{2(n-t+1)+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & *z_{2(n-t+2)+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & *z_{2n-3} & 0 \\ -u & -u & -u & \dots & -u & u \\ -w & -w & -w & \dots & -w & -nw \end{bmatrix}.$$

这个矩阵的行列式为 $cz_{2(n-t+1)+1} \cdots z_{2n-3} z_{2n-1} z_{2n}$，其中 $c \in k$；特别地，这个行列式属于 P，因此 $z_s \in P$，其中 s 满足 $2(n-t+1) + 1 \le s \le 2n$。因此，既然我们假设 (†) 不成立，就存在两个连续的指标 $2j-1$、 $2j$，满足 $2(n-t+1) + 1 \le 2j-1$、 $2j \le 2n$，且 z_{2j-1}、 $z_{2j} \in P$。现在不失一般性，我们可以假设 $2j - 1 = 2(n-t+1) + 1$。于是有

$$(z_1, z_2, \dots, z_{2(n-t+1)-1}, z_{2(n-t+1)}, z_{2(n-t+1)+1}, z_{2(n-t+1)+2}) + \mathcal{K}_0 \subset P.$$

因此，考虑子理想

$$\widetilde{\mathcal{K}_0} := I_2 \begin{bmatrix} z_{2(n-t+2)+1} & z_{2(n-t+3)+1} & \dots & z_{2n-3} & -u \\ z_{2(n-t+3)} & z_{2(n-t+4)} & \dots & z_{2n-2} & w \end{bmatrix} \subset \mathcal{K}_0,$$

~我们注意到， $\mathcal{K}_0$ 中出现的所有变量都不同于已经属于 P 的 $2(n-t+2)$ 个变量~；又因为 $\operatorname{ht} \mathcal{K}_0 = t - 3$，我们得出

$$\operatorname{ht}(I_t(N) + \mathcal{K}_0) = \operatorname{ht} P \ge 2(n-t+2) + (t-3) = 2n - t + 1$$

在需要时，只要满足 $1 \le t \le n$。

因此，我们已经证明 $\operatorname{Sym}_A M$ 是 Cohen-Macaulay 整环。注意， M 作为 A-模具有秩（由 (17) 可知，该秩等于 n）。现在回顾一下， A-模 M 的 Rees 代数，记作 $\mathscr{R}_A(M)$，可以定义为 $\operatorname{Sym}_A M$ 除以其挠元子模所得的商（一般理论见 [42] ）。因此，由于在此情形下 A 和 $\operatorname{Sym}_A M$ 都是整环，我们可以将 $\operatorname{Sym}_A M = \mathscr{R}_A$ 与 M 等同；特别地，利用 [42, 命题 2.2] （该命题给出了具有秩的模的 Rees 代数维数公式）

并注意到 $\dim A = 2n - (n-1) = n+1$，最终得到

$$\dim \mathrm{Sym}_A M = \dim \mathscr{R}_A(M) = \dim A + \mathrm{rank}_A M = (n+1) + n = 2n+1.$$

□

定理 3.3. 沿用上述记号。则：

(i) $\mathcal{K} = \mathcal{J}$；(ii) Rees 代数 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay；(iii) 设 $T = k[z_1, \ldots, z_{2n-2}, s, t]$，其中 $n \geq 3$。则，

$$\mathscr{F}(J_f) \cong T/I_2 \begin{bmatrix} z_1 & z_3 & \cdots & z_{2n-3} \\ z_2 & z_4 & \cdots & z_{2n-2} \end{bmatrix}$$

作为 k-代数。在特别地，$\mathscr{F}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay，$\ell(J_f) = n+2$，且 $\mathrm{r}(J_f) = 1$。

证明. 我们有一个自然满同态

$$\mathrm{Sym}_A M \cong S/\mathcal{K} \twoheadrightarrow S/\mathcal{J} \cong \mathscr{R}(J_f).$$

由命题 3.2，$\mathcal{K}$ 是 S的素理想，且 $\dim \mathrm{Sym}_A M = 2n+1 = \dim R + 1 = \dim \mathscr{R}(J_f)$。因此 $\mathrm{ht}\ \mathcal{K} = \mathrm{ht}\ \mathcal{J}$，进而 $\mathcal{K} = \mathcal{J}$。再次应用命题 3.2，我们得到 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay。这证明了 (i) 和 (ii)。

I为证明 (iii)，令 R_+ 为 R 的齐次极大理想。我们有 e

$$\mathscr{F}(J_f) \cong \mathscr{R}(J_f)/R_+\mathscr{R}(J_f) \cong S/(R_+S, \mathcal{K}) \cong T/I_2 \begin{bmatrix} z_1 & z_3 & \cdots & z_{2n-3} \\ z_2 & z_4 & \cdots & z_{2n-2} \end{bmatrix},$$

众所周知，它是一个一般行列式环，因此是维数为 $n+2$ 的 Cohen-Macaulay 环，而且正则性为 1。根据引理 1.10，后者给出 $\mathrm{r}(J_f) = 1$。 □

注 3.4. (a) 理想 J_f 是线性型，当且仅当 $n = 2$（即 R 是一个有 4 个变量的多项式环的情形）。事实上，根据定理 3.3(iii)，若 $n \geq 3$，则 $\mathrm{r}(J_f) = 1 \neq 0$，因此 J_f 不可能是线性型。反过来，设 $n = 2$，于是 $R = k[x_1, x_2, w, u]$。我们可以验证，ψ_2 的子式理想（见 (15)）满足

$$\mathrm{ht}\, I_s(\psi_2) \geq 5 - s = (2n-1) + 2 - s \quad \text{for} \quad s = 1, 2, 3.$$

由定理 1.1] 可得，J_f 是线性型（特别地，$\mathrm{r}(J_f) = 0$）。另外请注意，$\mathrm{Sym}_R J_f$ 是一个完全交，即这些多项式

$$L_1 = 3x_1z_1 + 3x_2z_2 - ws - ut,\ L_2 = wz_1 + uz_2,\ L_3 = x_2z_1 + x_1z_2 + us + wt$$

构成一个 $R[z_1, z_2, s, t]$-序列。

还值得一提的是，对于 3 个变量，若 $g \in k[x, y, z]$ 定义了一个秩为 3 的中心超平面配置，那么最近已有研究证明 J_g 是线性型；此外，J_g 的对称代数为完全交这一性质刻画了 g 的自由性（参见 [10, 命题 2.14 和推论 2.15]）。

（b）设 $n = 3$，即 $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4, w, u]$。在这种情况下，计算表明乘积 $\begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_4 & s & t \end{bmatrix} \cdot \psi_3$ 的各项构成一个正则序列，也就是说，$\mathrm{Sym}_R J_f$ 再次是一个完全交。

问题 3.5. 对于任意 n，$\mathrm{Sym}_R J_f$ 是一个完全交环吗?

4. Third family: non-linear free plane curves

本节中，我们给出第三族自由除子及其若干性质。事实上，我们将从这样一族导出另一族；见注 4.3。类似的例子（也涉及 3 个变量）可见于例如 [20] 和 [34]。

定理 4.1。考虑由以下多项式构成的二参数族

$$f = f_{\alpha,\beta} = (x^\alpha - y^{\alpha-1}z)^\beta + y^{\alpha\beta} \in R = k[x,y,z],$$

其中 α、$\beta \geq 2$ 为整数。以下断言成立：

(i) f 是自由除子；(ii) 当 $(\alpha,\beta) = (2,3)$ 或者 $\alpha \geq 2$ 且 $\beta = 2$时，$\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay；(iii) 当 $\alpha = 2$ 且 $\beta \geq 3$ 或者 $\alpha \geq 3$ 且 $\beta = 2$时，J_f 不是线性型。在这些情况下，$\mathscr{F}(J_f)$ 是 k 上的多项式环，因此 $\mathrm{r}(J_f) = 0$；(iv) f 在 $k = \mathbb{C}$上可约。若 $k \subseteq \mathbb{R}$，则当 β 为奇数时 f 可约，否则不可约；(v) $\operatorname{reg} \operatorname{Der}_k(R/(f)) = \alpha\beta - 2$。

证明。（i）我们有

$$f_x = \alpha\beta x^{\alpha-1}(x^\alpha - y^{\alpha-1}z)^{\beta-1}, \quad f_y = \alpha\beta y^{\alpha\beta-1} - (\alpha-1)\beta y^{\alpha-2}z(x^\alpha - y^{\alpha-1}z)^{\beta-1}, \; f_z = -\beta y^{\alpha-1}(x^\alpha - y^{\alpha-1}z)^{\beta-1}$$

注意，我们可以将 f_x、f_y 和 f_z 写成

$$f_x = \alpha x^{\alpha-1}G, \quad f_y = x^{\alpha-1}P + y^{\alpha-1}Q, \quad f_z = -y^{\alpha-1}G$$

对于某些 G、P、$Q \in R$。因此，

$$J_f = I_2 \begin{bmatrix} y^{\alpha-1} & -\alpha^{-1}P \\ 0 & G \\ \alpha x^{\alpha-1} & Q \end{bmatrix}. \tag{18}$$

特别地，由于 J_f 的余维为二，由希尔伯特-伯奇定理可知 J_f 是一个完美理想。根据引理 1.3，f 是一个自由除子。

（ii）在具体情形$(\alpha,\beta) = (2,2)$和$(\alpha,\beta) = (2,3)$中，可以通过常规计算确认 $\mathscr{R}(J_f)$的科恩–麦考利性。因此，我们可以假设 $\alpha \geq 3$ 和 $\beta = 2$。在这种情况下确定G、P、Q后，由(18)可得 J_f的一个协同矩阵为

$$\varphi = \begin{bmatrix} y^{\alpha-1} & (\alpha-1)xy^{\alpha-2}z \\ 0 & \alpha(x^\alpha - y^{\alpha-1}z) \\ \alpha x^{\alpha-1} & \alpha^2 y^\alpha + \alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2}z^2 \end{bmatrix}.$$

我们记 $\mathcal{Q} \; k[x,y,z,s,t,u] = R[s,t,u]$ 定义 $\mathscr{R}(J_f)$的（素）理想。注意，

$$I_1\left(\begin{bmatrix} s & t & u \end{bmatrix} \cdot \varphi\right) = (sy^{\alpha-1} + \alpha u x^{\alpha-1}, y^{\alpha-2}H + \alpha x^\alpha t) \subset \mathcal{Q}, \tag{19}$$

其中 $H := (\alpha-1)xzs + (\alpha^2y^2 + \alpha(\alpha-1)z^2)u - \alpha yzt$。显然，我们可以将 $I_1([\; s \quad t \quad u \;] \cdot \varphi)$ 改写为

$$I_1\left(\begin{bmatrix} y^{\alpha-2} & x^{\alpha-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sy & H \\ \alpha ux & \alpha x^2 t \end{bmatrix}\right).$$

现在由克拉默法则可得

$$\det \begin{bmatrix} sy & H \\ \alpha ux & \alpha x^2 t \end{bmatrix} = \alpha x^2 yst - \alpha uxH = \alpha x(xyst - uH) \in \mathcal{Q}. \tag{20}$$

由 (19) 和 (20) 可推出一个包含关系

$$\mathcal{P} := (sy^{\alpha-1} + \alpha u x^{\alpha-1},\, y^{\alpha-2}H + \alpha x^\alpha t,\, xyst - uH) \subset \mathcal{Q}.$$

断言 1. $\mathcal{P}$ 是一个高度为 2 的完美理想。

显然，高度 $\mathcal{P} \geq 2$，且

$$\mathcal{P} = I_2 \begin{bmatrix} H & -xt \\ -ys & u \\ \alpha x^{\alpha-1} & y^{\alpha-2} \end{bmatrix}$$

现在，由希尔伯特-伯奇定理可得断言 1。

断言 2。 $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$。

由于 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ 且高度 $\mathcal{P} =$ 高度 $\mathcal{Q} = 2$，只需证明理想 $\mathcal{P}$ 是素理想。首先注意， x 模 $\mathcal{P}$ 是正则的。为证明这一点，反设不然，则对某个 $R[s,t,u]/\mathcal{P}$ 的关联素理想 $\mathfrak{p}$，有 $x \in \mathfrak{p}$。特别地，$(x, sy^{\alpha-1}, y^{\alpha-2}H, uH) \subset \mathfrak{p}$。利用上文给出的 H 的显式形式，容易看出

$$\operatorname{ht}(x, sy^{\alpha-1}, y^{\alpha-2}H, uH) \geq 3.$$

特别地，高度 $\mathfrak{p} \geq 3.$。但这与断言 1 矛盾，因为 $\mathcal{P}$ 是高度为 2 的完美理想。现在，将元素 x 求逆，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{D} := \frac{k[x,y,z,s,t,u][x^{-1}]}{\mathcal{P}k[x,y,z,s,t,u][x^{-1}]} &= \frac{k[x,y,z,s,t,u][x^{-1}]}{(u+\alpha^{-1}x^{1-\alpha}y^{\alpha-1}s, xt+\alpha^{-1}x^{1-\alpha}y^{\alpha-2}H, xyst-uH)} \\ &= \frac{k[x,y,z,s,t,u][x^{-1}]}{(u+\alpha^{-1}x^{1-\alpha}y^{\alpha-1}s, xt+\alpha^{-1}x^{1-\alpha}y^{\alpha-2}H)} \\ &\cong \frac{k[x,y,z,s,t][x^{-1}]}{(at+bs)} \\ &\cong \frac{k[x,y,z,x^{-1}][s,t]}{(at+bs)} \end{aligned}$$

其中 $a := x(1 - x^{-\alpha}y^{\alpha-1}z)$ 和 $b := x^{1-\alpha}y^{\alpha-2}[(\alpha-1)za + x^{1-\alpha}y^{\alpha+1}]$ 是系数环 $k[x,y,z,x^{-1}]$. 中的元素。由于容易看出 a 和 b 在这个整环中互素，因此元素 $at+bs$ 在 $k[x,y,z,x^{-1}][s,t]$ 中必为不可约元，从而商环 $k[x,y,z,x^{-1}][s,t]/(at+bs) \cong \mathcal{D}$ 是整环。这意味着（由于 x 模 $\mathcal{P}$ 是正则的） $R[s,t,u]/\mathcal{P}$ 是整环，正如所需。

最后，由断言 1 和断言 2，我们得出 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay .

(iii) 首先，如果 $\alpha = 2$，简单检查可知，通过考察由 2 个线性形式在 $R[s,t,u]$ 中定义 $\operatorname{Sym}_R J_f$ 的理想 $\mathscr{S}$ 对理想 J_f 的饱和，可得 J_f 的线性型性质在 $\beta \geq 3$ 时不成立（而在 $\beta = 2$ 时成立）。由此得到的理想——因而定义了 $\mathscr{R}(J_f)$（参见例如 [31, 引理 2.11]）——结果严格包含 $\mathscr{S}$。此外，它包含于 $(x,y,z)R[s,t,u]$ 中，因此 $\mathscr{F}(J_f) \cong k[s,t,u]$。至于 $\alpha \geq 3$ 且 $\beta = 2$ 的情形，我们可以使用先前的一项计算。具体而言，根据条目 (ii) 中得到的 $\mathscr{R}(J_f)$ 的定义理想 $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \subset k[x,y,z,s,t,u]$ 的结构，我们很容易得到 J_f 不是线性型的。此外，考察非线性雷斯方程

$$xyst - uH \in (x,y,z)R[s,t,u]$$

我们再次得出，一旦 $\mathscr{F}(J_f) \cong k[s,t,u]$。无论哪种情况， $\ell(J_f) = 3$，并且（根据引理 1.10）$\mathrm{r}(J_f) = 0$。

(iv) 令 $k = \mathbb{C}$，并首先假设 $\beta = 2m$、 $m \geq 1$。我们有 $f = (x^\alpha - y^{\alpha-1}z)^{2m} + y^{2m\alpha}$，因此，对于 $i = \sqrt{-1}$ 和 $A := x^\alpha - y^{\alpha-1}z$,

$$f = (iA^m + y^{m\alpha})(-iA^m + y^{m\alpha}). \tag{21}$$

现在，假设 $\beta \geq 3$ 为奇数。将 $f = (x^\alpha - y^{\alpha-1}z + y^\alpha - y^\alpha)^\beta + y^{\alpha\beta}$ 写出，并令 $B := x^\alpha - y^{\alpha-1}z + y^\alpha$。因此，我们可以改写为

$$f = (B - y^\alpha)^\beta + y^{\alpha\beta} = [Bg + (-1)^\beta y^{\alpha\beta}] + y^{\alpha\beta} = Bg$$

对于适当的 $g := g_{\alpha,\,\beta} \in R$，其次数为 $\alpha(\beta-1)$。当然，这也表明，若 $k \subseteq \mathbb{R}$ 且 β 为奇数，则 f 在 k上可约。

最后，如果 $k \subseteq \mathbb{R}$，那么对于偶数 β，由 (21) 中在唯一分解整环 $\mathbb{C}[x,y,z]$ 上所描述的因子结构可知，f 在 k 上不可约。

(v) 根据 (i)，f 是一个自由除子。注意到其次数为 $\alpha\beta$，由引理 1.7 即得所述结论。

□

注 4.2. 计算结果强烈表明，(ii) 中所述的情形恰好是 $\mathscr{R}(J_f)$ 具有科恩–麦考利性的情形。关于 J_f 的线性型性质，计算结果也表明，当 α、$\beta \geq 3$ 时，J_f 不是线性型——这些情形未包含在 (iii) 中。经（部分由计算机辅助）得出的结论是，J_f 是线性型当且仅当 $\alpha = \beta = 2$。

注 4.3. 这里我们想指出，在 $\beta \geq 3$ 为奇数时，(iv) 的证明中定义的形式 $g = g_{\alpha,\,\beta} \in R_{\alpha(\beta-1)}$ 也是一个自由除子。首先注意，g 是通过 $Bg = (B-y^\alpha)^\beta + y^{\alpha\beta}$ 定义的，其中 $B = x^\alpha - y^{\alpha-1}z + y^\alpha$。具体而言，由

$$Bg = (B-y^\alpha)^\beta + y^{\alpha\beta} = \sum_{j=0}^{\beta}\binom{\beta}{j}B^{\beta-j}(-y^\alpha)^j + y^{\alpha\beta} = B\cdot\left(\sum_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta}{j}B^{\beta-j-1}y^{\alpha j}\right)$$

我们得到 $g = \sum_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta}{j}B^{\beta-j-1}y^{\alpha j}$。通过初等计算可知，我们可以将 g_x、g_y、g_z分别写成

$g_x = \alpha x^{\alpha-1}T$、$g_y = x^{\alpha-1}U + y^{\alpha-1}V$、$g_z = y^{\alpha-1}T$，其中 T、U、$V \in R$满足一定条件。因此，

$$J_g = I_2\begin{bmatrix} y^{\alpha-1} & -\alpha^{-1}U \\ 0 & T \\ \alpha x^{\alpha-1} & V \end{bmatrix}.$$

由于 $\operatorname{ht} J_g = 2$，根据希尔伯特-伯奇定理，理想 J_g 必为完美理想。因此，当 $\beta \geq 3$ 为奇数时，g 是自由除子。特别地，由引理 1.7 可得 $\operatorname{reg}\operatorname{Der}_k(R/(g)) = \alpha\beta - \alpha - 2$。我们还注意到，对于每个奇数 $\beta \geq 3$，形式 g 在 $k = \mathbb{C}$上是可约的。事实上，设

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta}{j}Z^{\beta-j-1}W^j \in \mathbb{C}[Z,W],$$

于是它可以分解为 Z和 W中的线性形式的乘积。现在令 $\sigma\colon \mathbb{C}[Z,W] \to \mathbb{C}[x,y,z]$为由 $Z \mapsto B$和 $W \mapsto y^\alpha$给出的同态。则，形式 $\sigma(\Phi) = g$在 $\mathbb{C}[x,y,z]$中是可约的。最后，我们在 $\beta = 3$ 和 $\beta = 5$的情形下研究代数 $\mathscr{R}(J_{g_{\alpha,\beta}})$。

若 $\beta = 3$，那么首先作为说明，我们明确有

$$\begin{aligned} g_{\alpha,3} = B^2 - 3By^\alpha + 3y^{2\alpha} &= (B-y^\alpha)^2 - y^\alpha(B-2y^\alpha) = (B-y^\alpha)^2 - y^\alpha(B-y^\alpha) + y^{2\alpha} \\ &= (x^\alpha - y^{\alpha-1}z + y^\alpha)(x^\alpha - y^{\alpha-1}z - 2y^\alpha) + 3y^{2\alpha} \\ &= x^{2\alpha} - 2x^\alpha y^{\alpha-1}z - x^\alpha y^\alpha + y^{2\alpha-2}z^2 + y^{2\alpha-1}z + y^{2\alpha}. \end{aligned}$$

计算表明，对于所有 $\alpha \geq 2$，环 $\mathscr{R}(J_{g_{\alpha,\,3}})$ 是 Cohen-Macaulay 的，$\mathrm{r}(J_{g_{\alpha,\,3}}) = 0$，但 J_f 是线性型当且仅当 $\alpha = 2$；更确切地说，如果 $\mathcal{L}$（分别为 $\mathcal{Q}$）在多项式环 $R[s,t,u]$ 中定义了 $\operatorname{Sym}_R J_{g_{\alpha,\,3}}$（分别为 $\mathscr{R}(J_{g_{\alpha,\,3}})$），那么我们得到了关系

$$\mathcal{L} : \mathcal{Q} = (x^{\alpha-1}, y^{\alpha-2})R[s,t,u].$$

如果 $\beta = 5$，那么在 $\alpha = 2$和 $\alpha = 3$的情形下，我们已确认 $\operatorname{depth}\mathscr{R}(J_{g_{\alpha,5}}) = 3$；也就是说，环 $\mathscr{R}(J_{g_{\alpha,5}})$ 是几乎科恩-麦考利的，因为它的深度比维数小 1。此外，$\mathrm{r}(J_{g_{\alpha,5}}) = 0$。我们坚信，这些性质对 $\alpha \geq 4$ 也成立。

问题 4.4。设 $\beta \geq 7$为奇数。 $\mathscr{R}(J_{g_{\alpha,\beta}})$ 是几乎科恩-麦考利的吗? $\mathrm{r}(J_{g_{\alpha,\beta}}) = 0$ 是否成立? 如果 $k \subseteq \mathbb{R}$ 且 $\beta \geq 3$ 为奇数，那么 $g_{\alpha,\beta}$ 是否不可约?

5. Fourth family: linear free plane curves

本节中，我们令 $R = k[x, y, z]$，目标是展示自由除子的第四族。正如我们将要证明的，这一族与前面两个族一样具有线性性质。尽管在[27, 6.4，第 837] 页，给出了在 $k = \mathbb{C}$ 情形下至多 4 个变量中的线性自由除子的分类，但本文所提供的方法具体描述了一套方案：从一个适当的由线性形式构成的 2×3 矩阵 $\mathscr{L}$出发，检测出 3 个变量中的某些线性自由除子（事实上只需 3 个线性形式，稍后我们会说明）。在此提醒读者， k 不要求是代数闭域；关于这一点，值得一提的是，尽管现有文献中的大多数结果都是在 $\mathbb{C}$上建立的，但人们一直对任意域上的自由除子理论抱有兴趣（例如参见 [46] 和 [49]）。

我们可以先研究 $\mathscr{L}$ 的 6 个条目为一般线性形式的情形，但实际上没有必要作此限制，因为我们只假设第一行中的形式在 k 上线性无关，并且自然地假设矩阵的秩为 2。因此，经过适当的线性变量变换后，令

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(L_1, L_2, L_3) := \begin{bmatrix} x & y & z \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix},$$

对于线性形式

$$L_1 = a_1x + a_2y + a_3z,\ L_2 = a_4x + a_5y + a_6z,\ L_3 = a_7x + a_8y + a_9z,$$

其中至少有一个 2×2 子式

$$Q_1 = xL_2 - yL_1,\ Q_2 = xL_3 - zL_1,\ Q_3 = yL_3 - zL_2$$

不为零。我们还考虑 $\mathsf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ 的雅可比矩阵,

$$\Theta = \Theta(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} Q_{1x} & Q_{2x} & Q_{3x} \\ Q_{1y} & Q_{2y} & Q_{3y} \\ Q_{1z} & Q_{2z} & Q_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 - a_4x - a_1y & L_3 + a_7x - a_1z & a_7y - a_4z \\ a_5x - L_1 - a_2y & a_8x - a_2z & L_3 - a_8y - a_5z \\ a_6x - a_3y & a_9x - L_1 - a_3z & a_9y - L_2 - a_6z \end{bmatrix}.$$

本节的结果如下。

定理 5.1。沿用上述记号。如果三次多项式 $f := \det\Theta$ 非零且约化，那么 f 是一个线性自由除子。更确切地说， $T_{R/k}(f)$ 的一个自由基为 $\{\theta_1, \theta_2, \varepsilon_3\}$，其中 ε_3 是欧拉导子，
$\theta_2 = L_1\frac{\partial}{\partial x} + L_2\frac{\partial}{\partial y} + L_3\frac{\partial}{\partial z}$，并且

$$\theta_1 = (a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3)\frac{\partial}{\partial x} + (a_4L_1 + a_5L_2 + a_6L_3)\frac{\partial}{\partial y} + (a_7L_1 + a_8L_2 + a_9L_3)\frac{\partial}{\partial z}.$$

证明。经常规计算可知，下面的 η_1 和 η_2 是 J_f 的关系，

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} (2a_1 - a_5 - a_9)x + 3a_2y + 3a_3z \\ 3a_4x + (2a_5 - a_1 - a_9)y + 3a_6z \\ 3a_7x + 3a_8y + (2a_9 - a_1 - a_5)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3L_1 - (a_1 + a_5 + a_9)x \\ 3L_2 - (a_1 + a_5 + a_9)y \\ 3L_3 - (a_1 + a_5 + a_9)z \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

且 η_2 是由下式给出的 3×1 列矩阵

$$\begin{bmatrix} (-3a_5 - 3a_9)L_1 + 6a_2L_2 + 6a_3L_3 + (-4a_6a_8 - (a_5 - a_9)^2 - 4a_3a_7 - 4a_2a_4 + 3a_1(a_5 + a_9))x \\ 6a_4L_1 + (-6a_1 + 3a_5 - 3a_9)L_2 + 6a_6L_3 + (-4a_6a_8 - (a_5 - a_9)^2 - 4a_3a_7 - 4a_2a_4 + 3a_1(a_5 + a_9))y \\ 6a_7L_1 + 6a_8L_2 + (-6a_1 - 3a_5 + 3a_9)L_3 + (-4a_6a_8 - (a_5 - a_9)^2 - 4a_3a_7 - 4a_2a_4 + 3a_1(a_5 + a_9))z \end{bmatrix}.$$

现在令

$$A := a_1 + a_5 + a_9, \quad B := -4a_6a_8 - (a_5 - a_9)^2 - 4a_3a_7 - 4a_2a_4 + 3a_1(a_5 + a_9),$$

使得下式成为 J_f 的关系矩阵的一个子矩阵：

$$\begin{bmatrix} (-3a_5-3a_9)L_1+6a_2L_2+6a_3L_3+Bx & 3L_1-Ax \\ 6a_4L_1+(-6a_1+3a_5-3a_9)L_2+6a_6L_3+By & 3L_2-Ay \\ 6a_7L_1+6a_8L_2+(-6a_1-3a_5+3a_9)L_3+Bz & 3L_3-Az \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

将第二列乘以 $C := a_1 + A = 2a_1 + a_5 + a_9$ 后加到第一列，我们得到一个等价矩阵

$$\varphi = \begin{bmatrix} 6(a_1L_1+a_2L_2+a_3L_3)+(B-AC)x & 3L_1-Ax \\ 6(a_4L_1+a_5L_2+a_6L_3)+(B-AC)y & 3L_2-Ay \\ 6(a_7L_1+a_8L_2+a_9L_3)+(B-AC)z & 3L_3-Az \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

最后，为 φ 添上一个对应于欧拉导子的第三列，容易看出所得 3×3 矩阵等价于

$$\Phi = \begin{bmatrix} a_1L_1+a_2L_2+a_3L_3 & L_1 & x \\ a_4L_1+a_5L_2+a_6L_3 & L_2 & y \\ a_7L_1+a_8L_2+a_9L_3 & L_3 & z \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

且满足 $\det\Phi = \frac{1}{2}f$。现在，所提出的断言由引理 1.4 得出。 □

这里有许多值得说明之处。

注 5.2。(a) 回顾一下，根据定义，约化是多项式为自由多项式的必要条件。现在我们指出，一般而言，三次多项式 $f := \det\Theta$ （其中 Θ 如上所定义）可能不是约化的。例如，若从矩阵 $\mathscr{L}(x-y, x+y+z, y+z)$ 开始，则 $f = -2(x+z)^3$。

(b) 关于条件 $f \neq 0$，它意味着（由于 $\mathrm{char}\ k = 0$）二次型 Q_1、Q_2、Q_3 是代数独立的，因此也是线性无关的。显然，这种情况未必会发生；例如，对于 $\mathscr{L}(y, x, z)$，我们有 $f = 0$，因为 $Q_3 = -Q_2$。

(c) 我们指出，定理 5.1 中的任何 f 至少在 $k = \mathbb{C}$ 时必然是可约的。这是因为，3 个变量上的复不可约自由除子的次数必须至少为 5（见 [20, 定理 2.8]）。

(d) 我们第四族中的线性自由除子 f 可以含有不可约二次因子，至少在 $k = \mathbb{R}$ 上如此（或者最终在 $\mathbb{Q}$ 的某个适当有限域扩张上如此）。事实上，例如从矩阵 $\mathscr{L}(0, x+z, y+z)$ 出发，我们得到

$$f = -2xq := -2x(x^2+xy-y^2+3xz-yz+z^2).$$

若强令 q 为两个实系数线性形式的乘积，便会导致矛盾，因此 q 在 $\mathbb{R}$ 上不可约。不过，应该指出，q 在 $\mathbb{C}$ 上是可约的，因为其关联矩阵的秩并非最大。事实上，我们认为（但尚无证明），若 $k = \mathbb{C}$，那么定理 5.1 中的自由三次曲线 f 必然是线性形式的乘积。这将意味着复线性自由除子 $z(xz+y^2)$ 不属于我们的第四族，而这一点我们尚无法证明。

(e) 我们的方法 通常不适用于更高的次数。例如，取任意一个矩阵 es

$$\begin{bmatrix} x^2 & y & z \\ y^2 & z & x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & y & z \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{bmatrix},$$

按照相同的方案，我们得到的多项式并非自由多项式，因为它们的雅可比理想并非完美。不过，仍有一个有趣的问题：能否采用类似的技术，通过精心选取次数更高的项来构造自由除子？

(f) 一般而言，我们的方法不适用于高维情形。例如，在环$k[x,y,z,w]$上，考虑矩阵

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \\ x-y & x+w & y-z & x+3y \\ 2y-z & 3w & x-w & y+2w \end{bmatrix}.$$

极大子式是 4 个三次多项式，其雅可比矩阵的行列式约化为 $g \neq 0$。计算表明， J_g 并不完美，因此 g 并不自由。

我们还推导出一些其他性质。

命题 5.3。设 f 如定理 5.1 所述。以下断言成立：

(i) J_f 是线性型。特别地，$\mathrm{r}(J_f) = 0$；(ii) $\mathscr{R}(J_f)$ ($\cong$ 对称代数$_R J_f$) 是完全交；(iii) $\operatorname{reg} \operatorname{Der}_k(R/(f)) = 1$。

证明。(i) 根据定理的证明， 3×2 矩阵 φ 是 J_f的极小表示矩阵。由 φ 的结构很容易得出——其元素特别地全是线性形式——所谓的 G_3 条件得到满足（定义见下一节例 6.5 之前）。此外，显然 J_f 的投射维数为 1（另见引理 1.3）。现在，应用[42, 命题 4.11] ，可得 J_f 是线性型。

(ii) 根据前一项，我们有 $\mathscr{R}(J_f) \cong$对称代数$_R J_f$，后者是 $R[s,t,u]$（其中 s、t、u是 复数域 R上的变量）对由 s、t、u中的两个线性形式 ξ_1、ξ_2生成的理想取商所得，而这两个线性形式是矩阵乘积 $[s\ t\ u]\cdot\varphi$的各项。说 $\operatorname{ht}(\xi_1,\xi_2) = 1$，恰好意味着

$$\xi_2 = \lambda\xi_1, \quad \text{for some non-zero} \quad \lambda \in k,$$

这等价于 φ 的第一列是第二列的 λ 倍。仿照定理的证明，这将推出 $\det\Phi = 0$，矛盾。因此，$\operatorname{ht}(\xi_1,\xi_2) = 2$。

(iii) 由于 f 是自由三次曲线，这可由引理 1.7 得出。 □

我们以一个实际例子结束本节；另一方面，从某种意义上说，这个例子有些退化，因为有两个 L_i彼此相等。

例 5.4. 取 $\mathscr{L}(y,x,x)$，得到直线配置

$$\frac{1}{2}f = -x^2y + y^3 + x^2z - y^2z = (x+y)(x-y)(z-y),$$

根据定理 5.1，它因此是自由的。在这种情况下，按照定理证明中的方法写出 J_f 的协同矩阵 φ，并将其各列乘以适当的非零标量，我们得到 J_f 的如下较简单的表示矩阵：

$$\begin{bmatrix} y & x \\ x & y \\ x & 3y-2z \end{bmatrix}.$$

因 此，由命题 5.3(ii) 可知，Rees 代数是完全交环 g

$$\mathscr{R}(J_f) \cong R[s,t,u]/(ys + x(t+u),\ xs + yt + (3y-2z)u).$$

6. Maximal analytic spread and an application to homaloidness

考虑标准分次多项式环 $R = k[x_1,\dots,x_n] = k \oplus R_+$, $n \geq 3$，并令 $f \in R$ 为次数为 $d \geq 3$ 的非零约化齐次多项式。回顾一下，雅可比理想 J_f 可由导数 $f_{x_1},\dots,f_{x_n}$ 最小生成，因为按照约定， f 不允许是锥。此外，由于 f 是约化的，$\operatorname{ht} J_f \geq 2$ 。

6.1. 雅可比理想何时具有极大解析扩张度？本部分的目标是通过各种刻画来回答这个问题。回顾一下，

$$\operatorname{ht} J_f \;\le\; \ell(J_f) \;\le\; n,$$

因此，我们在此特别关注性质 $\ell(J_f) = n$；例如，当 J_f 是线性型时，该性质成立。事实上，在这种情况下，我们可以将 $\mathscr{F}(J_f) = \mathrm{Sym}_R J_f/R_+\mathrm{Sym}_R J_f \cong \mathrm{Sym}_k(J_f/R_+J_f) \cong R$ 写成 k-代数。

例 6.1. 非自由三次多项式的雅可比理想

$$f \;=\; xyz + w^3 \;\in\; k[x,y,z,w]$$

可以证明是线性型，因此 $\ell(J_f) = 4$。

另一方面，正如我们在命题 2.3(2) 中所见，即使对于至少含 5 个变量的线性自由除子，J_f 的解析扩张度也可以任意小于变量的数量 n。

这里将给出的一些刻画具有上同调性质，另一些则依赖于深度的渐近行为。其中一个要素是一个适当的辅助模，我们现在来引入它。按照惯例，我们用 $\nabla g = (g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}) \in R^n$ 表示多项式 $g \in R$ 的梯度向量。给定上述 f，我们定义

$$\mathscr{C}_f \;:=\; R^n \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} R\,\nabla f_{x_i} \right).$$

在陈述我们的结果之前，需要先介绍几个预备概念。

设 E 是诺特环 A 上的有限生成模，且 $G \xrightarrow{\Phi} F \to E \to 0$ 是 E 的一个 A-自由表示。考虑对偶映射 $\mathrm{Hom}_A(\Phi, A)$: $F \to G$。E 的 Auslander 转置（或 Auslander 对偶）是如下 A-模

$$\operatorname{Tr} E \;=\; \operatorname{coker} \mathrm{Hom}_A(\Phi, A),$$

它在相差投射直和项的意义下唯一。我们记作 [3]。

现在，设 $A = \bigoplus_{i\ge 0} A_i$ 是域 A_0 上的标准分次环，且 $A_+ = \bigoplus_{i\ge 1} A_i$ 是 A 的齐次极大理想。假设 E 也是一个分次的 A-模。那么，给定整数 $j \ge 0$，E 的第 j 个局部上同调模是如下极限

$$H^j_{A_+}(E) \;=\; \varinjlim \operatorname{Ext}^j_A(A/A_+^s,\, E).$$

通常，称 $E \cong E'$ 是分次 A-模，意即 E 与 E' 之间存在一个零次同构。

最后，给定 $r \ge 1$，回顾一下，诺特环 A 满足（Serre）条件 S_r，是指

$$\operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}} \;\ge\; \min\{r,\, \operatorname{ht}\mathfrak{p}\} \quad \text{for all} \quad \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A.$$

若 A 是 Cohen-Macaulay，则显然对所有 r 都成立。

回到多项式设定，我们的结果如下。

定理 6.2. 给定如前所述的 $f \in R$，以下断言等价 t:

(i) $\ell(J_f) = n$; (ii) $\dim \mathscr{C}_f = n-1$; (iii) $\nabla f_{x_1}, \ldots, \nabla f_{x_n}$ 线性无关于 R; (iv) $\mathrm{Ext}^1_R(\mathscr{C}_f, R) \cong \mathscr{C}_f(d-2)$，作为分次 R-模；(v) $H^{n-1}_{R_+}(\mathscr{C}_f) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathscr{C}_f, k)(n-d+2)$，作为分次 R-模；(vi) 对某个 $m \ge 1$，$R/\overline{J_f^m} = 0$ 的深度，其中上划线表示整闭包；(vii) 对所有 $m \gg 0$，$R/\overline{J_f^m} = 0$ 的深度。

此外，如果 $\mathscr{R}(J_f)$ 满足 S_2 条件，那么这些断言也等价于以下命题：

(viii) 对所有 $m \gg 0$, $R/J_f^m = 0$ 的深度;
(ix) 对某个 $m \geq 1$, $R/J_f^m = 0$ 的深度。

证明。令 H 为 f 的分次海森矩阵映射，即次数为零的同态 $R^n(-(d-2)) \to R^n$，其在典范基下的矩阵为 f 的海森矩阵。H 的像是由齐次向量 $\nabla f_{x_1}, \ldots, \nabla f_{x_n}$ 生成的 R^n 的子模。因此，$\mathscr{C}_f$ 是 H 的余核，即它有一个分次 R-自由表示

$$R^n(-(d-2)) \xrightarrow{H} R^n \longrightarrow \mathscr{C}_f \longrightarrow 0. \tag{22}$$

对该序列取对偶，并记 E^*（分别为 φ^*）为 R 模 E（分别为 R 模同态 φ）的 R 对偶，我们得到一个正合序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_f^* \longrightarrow R^n \xrightarrow{H^*} R^n(d-2) \longrightarrow \mathscr{C}_f(d-2) \longrightarrow 0, \tag{23}$$

这里注意到，由于海森矩阵是对称的，$H^* = H \otimes 1_{R(d-2)}$，因此，确实有 coker $H^* =$ (coker H)($d-2$) $= \mathscr{C}_f(d-2)$。

现在，$\ell(J_f)$ 是特殊纤维环 $\mathscr{F}(J_f) = k[f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}]$ 的维数。根据引理 1.9，它可以计算为 f 的海森矩阵的秩。因此，

$$\ell(J_f) \;=\; \operatorname{rank} H \;=\; \operatorname{rank} H^*,$$

因此，$\ell(J_f) = n$ 当且仅当 H 是单射的（这当然等价于通过 H，$R^n(-(d-2)) \cong \sum_{i=1}^n R\nabla f_{x_i}$，从而证明了 (i)$\Leftrightarrow$ (iii)），当且仅当 H^* 是单射的。后一性质意味着 $\mathscr{C}_f^* = 0$。

因此，为了证明 (i)$\Leftrightarrow$ (iv)，只需验证 $\mathscr{C}_f^* = 0$ 当且仅当 (iv) 成立。设 $\mathscr{C}_f^* = 0$。那么，正如我们所见，H 是单射的。对 (22)（现在是一个短正合序列）取对偶，并与 (23) 比较，我们得到 (iv)。反之，假设 (iv) 成立。因此

$$\mathscr{C}_f \;\cong\; \operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f,\, R)(2-d) \;\cong\; \operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f(d-2),\, R).$$

现在回顾一下，R-挠元 $\tau_R(\mathscr{C}_f)$ 与 $\mathscr{C}_f$ 的典范双对偶映射$\mathscr{C}_f \to \mathscr{C}_f^{**}$的核重合，因此，根据 [3, 命题 2.6(a)], ，我们有

$$\tau_R(\mathscr{C}_f) \;\cong\; \operatorname{Ext}_R^1(\operatorname{Tr}\mathscr{C}_f, R).$$

但 (23) 给出了 Tr $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_f(d-2)$。综合这些事实，我们得到

$$\mathscr{C}_f^* \;\cong\; \operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f(d-2),\, R)^* \;\cong\; \operatorname{Ext}_R^1(\operatorname{Tr}\mathscr{C}_f,\, R)^* \;\cong\; \tau_R(\mathscr{C}_f)^* \;=\; 0.$$

接下来，我们证明 (iv)$\Leftrightarrow$ (v)。标准分次多项式环 R 的分次典范模为 $\omega_R = R(-n)$，因此

$$\operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f,\, \omega_R) \;\cong\; \operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f,\, R)(-n).$$

还要回顾一下，在当前情形下，Matlis 对偶函子由 $\operatorname{Hom}_R(-, k)$ 给出。因此，根据分次局部对偶（参见 [7, 例 13.4.6]），我们可以写成

$$H_{R_+}^{n-1}(\mathscr{C}_f) \;\cong\; \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f, R)(-n),\, k) \;\cong\; \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f, R),\, k)(n). \tag{24}$$

若 (iv) 成立，则 $H_{R_+}^{n-1}(\mathscr{C}_f) \cong \operatorname{Hom}_R(\mathscr{C}_f(d-2)\ k)(n) \cong \operatorname{Hom}_R(\mathscr{C}_f, k)(n-d+2)$。反之，假设 (v)。利用 (24)，我们得到

$$\operatorname{Hom}_R(\mathscr{C}_f, k)(n-d+2) \;\cong\; \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f, R),\, k)(n),$$

这等同于一个同构 $\operatorname{Hom}_R(\mathscr{C}_f(-n+d-2)\ k) \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}_R^1(\mathscr{C}_f, R)(-n)\ k)$。取 Matlis 对偶并与 $R(n)$ 张量积后，我们得到 (iv)。

我们继续证明 (i)$\Leftrightarrow$(ii)。首先注意到，由 (22) 可知，$\mathscr{C}_f$ 的第 0 个 Fitting 理想是由 h（即 f 的海森矩阵的行列式）生成的主理想，因此我们有

$$\sqrt{0 :_R \mathscr{C}_f} \;=\; \sqrt{(h)}$$

因此 dim $\mathscr{C}_f = \dim R/(h)$。由此可知，dim $\mathscr{C}_f = n-1$ 当且仅当 $h \neq 0$，也就是说，H 是单射；如上所见，这等价于 (i)。

显然，我们有 $\ell(J_f) = \ell((J_f)^{R_+})$，且高度为 $R_+ = n$。因此，根据[30, 命题 4.1], 中给出的一般刻画，我们有 $\ell(J_f) = n$ 当且仅当对所有 $m \gg 0$，$R_+ \in \mathrm{Ass}_R R/\overline{J_f^m}$，这等价于说 (vii) 成立。这就证明了 (i)⇔(vii) 的等价性。

显然，(vii) ⇒(vi)，而回想起如下链式关系即可推出反向结论（见 [30, 命题 3.4]）

$$\mathrm{Ass}_R R/\overline{J_f} \subset \mathrm{Ass}_R R/\overline{J_f^2} \subset \mathrm{Ass}_R R/\overline{J_f^3} \subset \dots$$

因此，我们证明了陈述 (i) . . . ,(vii) 等价。

现在我们指出，无论 $\mathscr{R}(J_f)$ 是否满足 S_2，蕴含关系 (vii)⇒(viii) 都成立。事实上，条件 (vii) 意味着无关理想 R_+ 属于函数 $\overline{\mathscr{A}^*}(J_f)$ 的极限值

$$m \mapsto \mathrm{Ass}_R R/\overline{J_f^m},$$

已知其最终会稳定（参见例如 [30, 命题 3.4]）。此外，还有集合 $\mathscr{A}^*(J_f)$，其定义类似，是关于由 J_f 的幂给出的通常滤过的渐近素因子的稳定集。根据 [30, 命题 3.17], ，我们有

$$\overline{\mathscr{A}^*}(J_f) \subset \mathscr{A}^*(J_f)$$

因此 $R_+ \in \mathscr{A}^*(J_f)$，这就得到了 (viii)。注意，(viii)⇒(ix) 显然成立。

接下来只需证明，在 $\mathscr{R}(J_f)$ 满足 S_2 的假设下，(ix)⇒(i)。在此情形下，根据 [14,注 2.16], ，扩展 Rees 代数

$$R[J_f t, t^{-1}] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} I^i t^i \subset R[t, t^{-1}]$$

（按照约定，当 $i \leq 0$ 时，$I^i = R$ ）也必须满足 S_2 。注意，(ix) 意味着对某个 $m \geq 1$，有 $R_+ \in \mathrm{Ass}_R R/J_f^m$。现在我们可以应用 [14, 命题 4.1] ，从而得出所需结论：$\ell(J_f) = n$。 □

注 6.3. 借助 [30, 命题 3.26 和命题 3.20], ，可以看出定理 6.2 的断言 (i) . . . ,(vii) 也分别等价于以下各项:

(a) 对任意非零的 R-理想 I，$R_+ \in \overline{\mathscr{A}^*}(IJ_f)$，即

$$\operatorname{depth} R/\overline{I^m J_f^m} = 0 \quad \text{for all} \quad m \gg 0;$$

(b) 对某个 j，$R[f_{x_1}/f_{x_j}, \dots, f_{x_n}/f_{x_j}] \subset k(x_1, \dots, x_n)$ 的整闭包包含一个高度为 1 的素$\mathfrak{Q}$，使得 $\mathfrak{Q} \cap R = R_+$。

在定理 6.2 中，蕴含关系 (ix)⇒(i)（因此蕴含关系 (viii)⇒(i)）在 Rees 环 $\mathscr{R}(J_f)$ 满足 S_2，时成立，但我们不知道能否去掉这一假设。因此，以下问题便自然产生（另见下一小节的问题 6.17）。

问题 6.4。假设对于所有 $m \gg 0$，深度 $R/J_f^m = 0$。那么 $\ell(J_f) = n$ 是否成立? 如果我们只假设对于某个 $m \geq 1$，深度 $R/J_f^m = 0$，这个结论是否仍成立?

现在设 $f \in R$ 是一个线性自由除子。稍后我们将看到，如果 $n \leq 4$，那么 $\ell(J_f) = n$。反过来则不成立；在下文的例 6.5 中，我们还将证明存在一个线性自由除子f，使得对于任意给定的 n，$\ell(J_f) = n$。

下面这个众所周知的概念将会很有用（我们在 R 上陈述）。R 的一个非零齐次理想I，若其由 ν 个元素极小生成，则称它对于给定的 $s \geq 0$ 满足 G_s 条件，当且仅当

$$\operatorname{ht} I_{\nu-j}(\varphi) \geq j+1 \quad \text{for} \quad j = 1, \dots, s-1.$$

这里，φ 表示 I的极小表示矩阵（或协同矩阵）。注意，这与 φ 的选择无关，因为每个 $I_{\nu-j}(\varphi)$ 都只是 I的 Fitting 理想。

例 6.5. 给定任意 n，考虑正规交叉除子

$$f = x_1 \cdots x_n \in R = k[x_1, \ldots, x_n],$$

这是一个众所周知的线性自由除子。理想 J_f 就是由所有互不相同的 $n-1$ 不定元的乘积生成的理想，并且满足

$$\operatorname{depth} R/J_f^m = \max\{0, n-m-1\} \quad \text{for all} \quad m \geq 1.$$

特别地，对于所有 $m \geq n-1$，深度 $R/J_f^m = 0$。现在我们断言，$\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay 的（因此它具有 S_2 性质）。首先注意，J_f 的一个协同矩阵为

$$\varphi = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{n-1} \\ -x_n & -x_n & \ldots & -x_n \end{bmatrix}.$$

这里我们有

$$\operatorname{ht} I_{n-j}(\varphi) = j+1 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

因此 J_f 满足 G_n 性质。此外，由于 f 是自由的，J_f 在 R 上的投射维数为 1（见引理 1.3）。由 [42, 命题 4.11] 可知，$\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay 的，证毕。现在我们可以应用定理 6.2，得出 $\ell(J_f) = n$。

此外，该定理还表明，$\mathscr{C}_f$ 在 R 上的投射维数为 1（因为自然生成元的梯度向量生成一个自由模），且维数为 $n-1$，因此 $\mathscr{C}_f$ 是一个 Cohen-Macaulay 模，由此得到

$$H^i_{R_+}(\mathscr{C}_f) \cong \begin{cases} \operatorname{Hom}_R(\mathscr{C}_f, k)(2), & i = n-1 \\ 0 & , \ i \neq n-1 \end{cases}$$

在例 6.5 中，确认 $\ell(J_f) = n$ 的另一种方法是证明（单项式）理想 J_f是线性型的。这一事实以及许多其他实验表明，可以提出一个限制更严格的问题，以及一个关于极大解析扩张度与线性型性质之间相互作用的猜想；正如我们已经看到的，后者蕴含前者。

问题 6.6. 对于任意的 $n \geq 3$（变量个数），是否存在一个自由除子 f，使得 J_f不是线性型，且 $\ell(J_f) = n$？

我们关注的情形是 $n \geq 4$。事实上，如果 $n = 3$，那么第 4 节中给出的那族（非线性）自由除子中的任意一个，都能对这个问题给出肯定的回答。

猜想 6.7. 如果 f 是一个线性自由除子，且 $\ell(J_f) = n$，那么 J_f 是线性型 e.

我们尚未能够在 $n \geq 5$的情形下证明这个猜想。在 $n \leq 4$ 个变量的情形下它成立，这一点可以通过使用 [27, 6.4，第 837] 页给出的线性自由除子分类来验证。

接下来，我们再给出一些例子。

例 6.8. 考虑所谓的 Gordan-Noether 三次式

$$f = xw^2 + ytw + zt^2 \in R = k[x, y, z, w, t].$$

在这种情况下，虽然对称代数 $\operatorname{Sym}_R J_f = B/\mathscr{S} = R[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]/\mathscr{S}$ 的维数为 6、深度为 5，但计算表明 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay 环（特别是，它满足 S_2条件）。事实上，若 φ 是 J_f的极小表示矩阵，则其饱和

$$\mathscr{S} :_B I_4(\varphi)^\infty,$$

根据 [31, 引理 2.11] ，它在环 B 中定义了 $\mathscr{R}(J_f)$（注意， $I_4(\varphi)$定义了 J_f的非主轨迹），且为余维 4 的完美理想。接下来，进一步的计算表明深度 $R/J_f = 2$ 并且

$$\operatorname{depth} R/J_f^m \;=\; 1 \quad \text{for all} \quad m \geq 2.$$

因此，利用定理 6.2，我们得出 $\ell(J_f) < 5$。更确切地说，特殊纤维环可表示为 $\mathscr{F}(J_f)$ $= k[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]/(t_2^2 - t_1t_3)$，由此得到 $\ell(J_f) = 4$。

例 6.9。考虑五次曲线

$$f = 2w^4u + xu^4 + ywu^3 + zw^2u^2 \in R = k[x, y, z, w, u].$$

这是定理 2.2 的情形，因此 f 是一个线性自由除子（为完整起见，这里应当指出， f/u 并非自由，其雅可比理想甚至不是线性表示的）。根据命题 2.3(ii)，我们有 $\ell(J_f) = 4 < 5$，而定理 2.5 保证 $\mathscr{R}$ (J_f) 是 Cohen-Macaulay。因此，由定理 6.2，我们得出

$$\operatorname{depth} R/J_f^m \;>\; 0 \quad \text{for all} \quad m \geq 1.$$

事实上，对于这样的 f，可以验证对于所有 $m \geq 3$，都有 depth $R/J_f = 3$ 和 depth $R/J_f^2 = 2$。 J_f 的渐近深度非零会带来一个有趣的结论，涉及更高阶的余法模 J_f^m/J_f^{m+1}。实际上，在这种情况下， J_f 的余法渐近深度（同样定义良好）也必定为正，因为根据 [6] ，我们可以写成

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{depth} J_f^m/J_f^{m+1} \;\geq\; \lim_{m\to\infty} \operatorname{depth} R/J_f^m \;>\; 0.$$

因此，对于所有 $m \gg 0$，都有 $R_+ \notin \operatorname{Ass}_R J_f^m/J_f^{m+1}$。

例 6.10。考虑平面六次曲线

$$f = x^6 - 2x^3y^2z + y^4z^2 + y^6 \in R = k[x, y, z].$$

这是定理 4.1(i) 中 $\alpha = 3$ 和 $\beta = 2$ 的情形，因此 f 是一个自由除子（但不再是线性的）。根据定理 4.1(ii)，环 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay 的。可以验证

$$\operatorname{depth} R/J_f^m \;=\; 0 \quad \text{for all} \quad m \geq 2.$$

应用定理 6.2，我们得到 $\ell(J_f) = 3$。现在由定理 4.1(iii)可知， J_f 不可能是线性型。为明确说明这一点，环 $R[t_1, t_2, t_3]$ 中 Rees 代数的定义理想的一个极小生成元是下面这个多项式，它不是关于 t_i 的线性式：

$$3xyt_1t_2 + 2xzt_1t_3 - 3yzt_2t_3 - 3y^2t_3^2 - 2z^2t_3^2.$$

此外，该定理还给出 $\operatorname{Ext}^1_R(\mathscr{C}_f, R) \cong \mathscr{C}_f(4)$，并且

$$H^j_{R_+}(\mathscr{C}_f) \cong \begin{cases} \operatorname{Hom}_R(\mathscr{C}_f, k)(-1), & j = 2 \\ 0 & , \; j \neq 2 \end{cases}$$

例 6.11。考虑四次曲线

$$f = x^4 - xyz^2 + z^3w \in R = k[x, y, z, w],$$

由于 J_f 不是完美的，因此它不是自由的。还要指出，理想 J_f 不是线性型，因为多项式

$$4xt_2^2 - 4zt_1t_4 - yt_4^2 \in R[t_1, t_2, t_3, t_4]$$

是 $\mathscr{R}(J_f)$ 的定义理想的极小生成元之一。另一方面，不难验证， J_f 的伴随分次环——即分次代数 $\bigoplus_{s\geq 0} J_f^s/J_f^{s+1}$——满足 S_1 性质；此外，由于 ht $J_f \geq 2$，根据备注 2.16] 的 [14,，可得 $\mathscr{R}(J_f)$ 满足 S_2（事实上可以证明 $\mathscr{R}(J_f)$ 是 Cohen-Macaulay）。此外，当 $i = 1$ 为 2、3 时， $R/J_f^i = 1$，而

$$\operatorname{depth} R/J_f^m \;=\; 0 \quad \text{for all} \quad m \geq 4.$$

应用定理 6.2，我们得出 $\ell(J_f) = 4$。我们还得到 $\mathrm{Ext}^1_R(\mathscr{C}_f, R) \cong \mathscr{C}_f(2)$，并且

$$H^j_{R_+}(\mathscr{C}_f) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_R(\mathscr{C}_f, k)(2), & j = 3 \\ 0 & , \ j \neq 3 \end{cases}$$

6.2. 应用：同次映射判据。如上所述，设 $f \in R = k[x_1, \ldots, x_n]$, $n \geq 3$ 是一个非零约化齐次多项式。在本小节中，我们还假设域 k 是代数闭的。由形式 f，我们可以关联如下有理映射

$$\mathscr{P}_f = (f_{x_1} : \cdots : f_{x_n}) : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1},$$

即由 f 定义的极映射。因此， $\mathscr{P}_f$ 的基点集是射影超曲面 $V(f) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ 的奇异轨迹。

定义 6.12. ([21]) 若多项式 f 的 $\mathscr{P}_f$ 是双有理的（因而是一个克雷莫纳变换），则称 f 是同伦映射的。

在 $k = \mathbb{C}$ 上，这一定义可以表述为： $\mathscr{P}_f$ 的次数为 1（此处需考虑适当的次数概念）；根据 [19, 推论 2]，是否为同伦映射的这一性质仅取决于 f_{red}。

下面是一个将这类多项式与自由除子类联系起来的初步事实。它也可以被视为同伦因子的第一批例子来源（高维中的例子可见 [13] 和 [33]）。回顾一下，一般而言，极映射 $\mathscr{P}_f$ 的像的维数由 $\ell(J_f) - 1$ 给出（参见命题 6.14 的证明）。

命题 6.13。（$k = \mathbb{C}$）如果 $n \leq 4$，那么每个线性自由除子都是同伦映射的。

证明。设 $f \in R$ 是一个线性自由除子。回顾一下，我们假设 f 不是一个锥（见第 1.1 小节）。因此，根据 [25, 命题 2.4 和命题 2.5]， f 具有非零的海森矩阵，所以 $\ell(J_f) = n$。于是， $\mathscr{P}_f$ 的像的维数为 $n-1$。由于梯度理想 J_f 的线性秩是最大的，根据 [22, 定理 3.2] 可知， $\mathscr{P}_f$ 是双有理的。□

注意，若 $n \geq 5$，此命题便不成立。事实上，在这种情况下，若我们取 f 为定理 2.2 中所述的线性自由除子，那么根据命题 2.3(ii)， J_f 的解析扩张度为 4，因此 $\mathscr{P}_f$ 的像的维数至多为 $n-2$，所以此映射不是双有理映射。

关于同构映射性的应用如下：这是对 [22, 定理 3.2] 中所给判据的一个理想论版本，同时也是同调版本。它不如原判据实用或有效，但在我们看来，它为经典的——通常是几何的——理论增添了一些韵味，而且有助于将其与不同的代数工具和不变量联系起来。

命题 6.14. 给定前述的 $f \in R$，令 φ_1 为理想 J_f 的极小 syzygy 矩阵中由其线性 syzygy 构成的子矩阵，并假设 $I_{n-1}(\varphi_1) \neq (0)$。设以下任一情形成立：

(i) 对某个 $m \geq 1$, $\mathrm{projdim}\ \overline{J_f^m} = n-1$；(ii) $\mathscr{R}(J_f)$ 满足 S_2,，且对某个 $m \geq 1$, $\mathrm{projdim}\ J_f^m = n-1$。

那么 f 是合度多项式。

证明。首先，在这两种情形下，我们的定理 6.2（连同 Auslander-Buchsbaum 公式）都保证 $\ell(J_f) = n$。另一方面，

$$\dim(\mathrm{image}\ \mathscr{P}_f) = \dim \mathrm{Proj}\, k[f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}] = \dim \mathrm{Proj}\, \mathscr{F}(J_f) = \ell(J_f) - 1 = n -$$

现在，定理 3.2] 保证 $\mathscr{P}_f$ 是双有理的，正如所需。□

例 6.15。我们先指出，并非所有合度多项式都满足条件 $I_{n-1}(\varphi_1) \neq (0)$。事实上，考虑三次多项式

$$f = xw^2 + yzw + z^3 \in k[x, y, z, w].$$

于是可以验证：

(a) f 是一个不可约同调多项式。事实上，这是 [28, p. 1264] 中所述不可约同调超曲面族的第一个成员；(b) 雅可比理想 J_f 不是线性表示的，而且线性 syzygy 数量也不足。更准确地说，极小表示矩阵 φ中只有 2 列是线性 syzygy，因此显然 $I_3(\varphi_1) = (0)$；(c) J_f 不是线性型；(d) 相当有趣的是，J_f 满足命题 6.14 第 (ii) 部分中的条件。特别地，甚至可以证明 J_f 的 Rees 代数是 Cohen-Macaulay 的。

我们现在指出，若 f 是线性自由除子，则条件 $I_{n-1}(\varphi_1) \neq (0)$ 自动成立，因为在这种情况下，根据希尔伯特-伯奇定理，$\varphi_1 = \varphi$ 和 $I_{n-1}(\varphi) = J_f$。因此我们记录如下推论。

推论 6.16. 若 f 是满足命题 6.14 的条件 (i) 或 (ii) 的线性自由除子，则 f 是同伦映射的。

在给出第一个例证之前，我们提出以下问题。我们指出，若问题 6.4 的第二部分也有肯定答案，那么此问题的答案也是肯定的。另请注意，根据命题 6.13，我们感兴趣的情形是 $n \geq 5$。

问题 6.17. ($n \geq 5$) 设 f 是一个线性自由除子，且对某个 $m \geq 1$ 有 projdim $J_f^m = n-1$。那么 f 必须是同伦映射的吗?

例 6.18。任意维数下最简单的例子是例 6.5 中研究的正规交叉除子 $f = x_1 \cdots x_n \in R$。此时 f 是一个线性自由除子，特别是我们已经看到，深度 $R/J_f^{n-1} = 0$，即投射维数 $J_f^{n-1} = n-1$。由于 J_f 是由所有次数为 $n-1$ 的平方自由单项式生成的理想，根据命题 7.4.5] ，我们得出 J_f 的所有幂都是整闭的；特别是，

$$\overline{J_f^{n-1}} = J_f^{n-1}.$$

由推论 6.16（或命题 6.14(i)）可知，f 是同伦映射的，从而重新得到这一众所周知的事实：由 $\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ 给出的有理映射

$$(x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (x_2x_3 \cdots x_n : x_1x_3 \cdots x_n : \ldots : x_1x_2 \cdots x_{n-1})$$

是双有理的——即所谓的 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上的克雷莫纳对合。

下面我们在 f 不是自由的情形下说明命题 6.14，并分别讨论可约和不可约的情况。

例 6.19. ($n = 6$) 考虑超平面-二次曲面配置

$$f = xw(yz + zt + tu) \in R = k[x, y, z, w, t, u].$$

在这种情况下，f 不是自由的，因为 J_f 并不完美；另一方面，这个理想（它是线性表示的，因此 $\varphi_1 = \varphi$）满足 $I_5(\varphi_1) \neq (0)$，并且

$$\operatorname{projdim} J_f^3 = 5.$$

此外，与例 6.11 一样，J_f 的伴随分次环具有 S_1 性质，因此 $\mathscr{R}(J_f)$满足 S_2。根据命题 6.14(ii)，f 是同伦映射的。也就是说，由下式给出的有理映射 $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^5$

$$(x : y : z : w : t : u) \mapsto (w(yz + zt + tu) : xzw : xw(y + t) : x(yz + zt + tu) : xwu : xwt)$$

是克雷莫纳。

例 6.20. ($n = 5$) 考虑不可约三次多项式

$$f \;=\; xt^2 + yzt + z^3 + w^2t \;\in\; R \;=\; k[x, y, z, w, t].$$

理想 想 J_f 是完美的，但 f 不是自由的，因为 $\operatorname{ht} J_f = 3$。它还满足 $I_4(\varphi_1) \neq (0)$ 和 d

$$\operatorname{projdim} J_f^3 \;=\; 4.$$

此外， J_f 的伴随分次环是 Cohen-Macaulay；特别地， $\mathscr{R}(J_f)$ 满足 S_2。根据命题 6.14(ii)， f 是同伦映射的。具体而言，由 $\mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ 给出的有理映射

$$(x : y : z : w : t) \mapsto (t^2 \,:\, zt \,:\, z^2 + \frac{1}{3}yt \,:\, wt \,:\, yz + w^2 + 2xt)$$

是克雷莫纳变换。

接下来，我们提出一些额外的观察和问题；在我们看来，它们很有意思，也可能为未来研究提供动力。首先请注意，若将例 6.19 中的自伴四次多项式 f写成

$$f = xg, \quad g \;=\; w(yz + zt + tu),$$

然后，进一步计算（再次利用我们的命题）表明， g 也是同伦映射的。这一事实以及其他例子促使我们提出下面这个受自由除子理论中著名研究启发的“加法—删除”问题（另见 [43], [1] 和 [39]）。

问题 6.21。（合度除子的加法—删除问题。）对于多项式 f、$g \in R$，若 f 是同伦映射的，则乘积 fg 何时是同伦映射的？若 fg 是同伦映射的，则 f 或 g 何时是同伦映射的？

现在令 $f \in R = k[x, y, z, w, t, u, v]$ 表示二阶催化行列式

$$f = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & w & t \\ t & u & v \end{bmatrix}.$$

根据 [33, 命题 3.25(b)]），这个三次多项式是同伦映射的。于是，对于这样的 f，我们发现了一个耐人寻味的有趣事实：海森矩阵 f 的行列式 $h(f)$ 是一个线性自由除子——尤其是， $h(f)$ 已经是约化的。在 $h(f)$ 不是约化的情况下，我们自然会考虑 $h(f)_{\text{red}}$，它同样可以是一个线性自由除子。例如，令

$$g = \det \begin{bmatrix} x & w & z & y \\ y & x & w & z \\ w & z & y & x \\ z & y & x & w \end{bmatrix}$$

在环 $R = k[x, y, z, w]$ 中。注意， g实际上是一个线性自由除子，并且利用推论 6.16，不难看出 g 也是同伦映射的。这里，

$$h(g) \;=\; \lambda g^2 \quad \text{for some non-zero} \quad \lambda \in k,$$

因此 $h(g)_{\text{red}}$ 是自由的。

如预期所示，这种现象通常并不会发生。例如，如果我们再次取例 6.19 中的同伦映射的自伴四次多项式 f ，那么计算表明 $h(f) \;=\; 3x^2w^2f^2$，因此 $h(f)_{\text{red}} = 3f$ 不是自由的。

上述事实促使我们提出以下问题，这使我们重新回到自由性的核心主题，并为本文画上句号。

问题 6.22. 设 f 是一个合度多项式。何时 $h(f)_{\text{red}}$ 是一个（线性）自由除子？如果 $h(f)$ 是约化的且不是锥，它是否必定是一个（线性）自由除子？

致谢。第二作者获得了 CNPq 项目 301029/2019-9 和 406377/2021-9 的资助。第三作者获得了 CNPq 项目 305860/2019-4 和 425752/2018-6 的资助。

References

[1] T. Abe，《超平面的可分自由配置》，《数学发明》204（2016）317–346。[2] T. Abe，H. Terao，M. Yoshinaga，《超平面的全自由配置》，《美国数学会会刊》137（2009）1405–1410。[3] M. Auslander，M. Bridger，《稳定模理论》，《美国数学会回忆录》94，1969。[4] D. Bayer，D. Mumford，《代数几何中可以计算什么？》载于：D. Eisenbud 和 L. Robbiano（编），《计算代数几何与交换代数》，会议论文集，科尔托纳（1991），剑桥大学出版社，1–48（1993）。[5] D. Bayer，M. Stillman，《Macaulay：用于代数几何的计算机代数系统》，Macaulay 3.0 版，1994（Bernd Johannes Wuebben 的 Windows 版 Macaulay，1996）。[6] M. Brodmann，《关于爆破与余法锥的若干注记》，交换代数会议论文集（特伦托，1981），《纯粹与应用数学讲义》84，Dekker，纽约，1983。[7] M. Brodmann，R. Sharp，《局部上同调：带有几何应用的代数导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1998。[8] R.-O. Buchweitz，A. Conca，《由旧自由除子构造新自由除子》，《交换代数杂志》5（2013）17–47。[9] R.-O. Buchweitz，D. Mond，《线性自由除子与箭图表示》，载于《奇点与计算机代数》，伦敦数学会讲义丛书，第324卷（剑桥大学出版社，剑桥，2006），41–77。[10] R. Burity，A. Simis，S. O. Tohˇaneanu，《关于近乎一般的超平面配置的雅可比理想》，《美国数学会会刊》150（2022）4259–4276。[11] L. Bus´e，A. Dimca，H. Schenck，G. Sticlaru，《约化超曲面的赫essian多项式与雅可比理想》，$\mathbb{P}^n$《数学进展》392（2021）108035。[12] F. J. Calder´on-Moreno，L. Narv´aez-Macarro，《局部准齐次自由除子的 $\mathcal{D}f^s$ 模》，《组合数学》134（2002）59–74。[13] C. Ciliberto，F. Russo，A. Simis，《霍马洛伊达超曲面与具有消失赫essian的超曲面》，《数学进展》218（2008）1759–1805。[14] C. Ciuperc˘a，《 S_2-滤子的渐近素理想》，《代数杂志》503（2018）356–371。[15] J. Damon，《自由除子的遗产：判别式与莫尔斯型奇点》，《美国数学杂志》120（1998）453–492。[16] H. Derksen，J. Sidman，《通过逼近得到的 Castelnuovo-Mumford 正则性》，《数学进展》188（2004）104–123。[17] A. Dimca，《超平面配置：导论》，Universitext，施普林格，2017。[18] A. Dimca，《平面曲线的自由性与最大全局蒂尤里纳数》，《剑桥哲学会数学会刊》163（2017）161–172。[19] A. Dimca，S. Papadima，《超曲面补集、米尔诺纤维与配置的高阶同伦群》，《数学年刊》158（2003）473–507。[20] A. Dimca，G. Sticlaru，《自由除子与有理尖点平面曲线》，《数学研究快报》24（2017）1023–1042。[21] I. V. Dolgachev，《极性克雷莫纳变换》，《密歇根数学杂志》48（2000）191–202。[22] A. Doria，H. Hassanzadeh，A. Simis，《无特征双有理性判据》，《数学进展》230（2012）390–413。[23] L. Ein，N. Shepherd-Barron，《一些特殊的克雷莫纳变换》，《美国数学杂志》111（1989）783–800。[24] D. Eisenbud，《行列式簇的线性截面》，《美国数学杂志》110（1988）541–575。[25] A. Garbagnati，F. Repetto，《从几何角度研究 Gordan-Noether 与 Franchetta 对 Hesse 所提问题的贡献》，《数学汇刊》60（2009）27–41。[26] M. Garrousian，A. Simis，S. O. Tohˇaneanu，《超平面配置的一个爆破代数》，《代数与数论》12（2018）1401–1429。[27] M. Granger，D. Mond，A. Nieto-Reyes，M. Schulze，《线性自由除子与全局对数比较定理》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）59（2009）811–850。[28] J. Huh，《非常仿射簇的最大似然度》，《组合数学》149（2013）1245–1266。[29] C. Huneke，《关于模的对称代数》，《代数杂志》69（1981）113–119。[30] S. McAdam，《渐近素因子》，《数学讲义》1023，施普林格出版社，柏林，1983。[31] C. B. Miranda-Neto，《分次导子模与代数自由除子》，《纯粹与应用代数杂志》219（2015）5442–5466。[32] C. B. Miranda-Neto，《唯一分解整环上的自由对数导子模》，《数学研究快报》24（2017）153–172。[33] M. Mostafazadehfard，A. Simis，《霍马洛伊达行列式》，《代数杂志》450（2016）59–101。[34] R. Nanduri，《 $\mathbb{P}^2$中的一族不可约自由除子》，《代数与应用杂志》14（2015）1550105，11页。

[35] K. Saito, 《对数微分形式与对数向量场理论》, 《东京大学理学部学术杂志·数学》27（1980）265–291。[36] H. Schenck, 《 $\mathbb{P}^2$中的初等修改与直线构型》, 《瑞士数学评论》78（2003）447–462。[37] H. Schenck, 《超平面配置：计算与猜想》, 《超平面配置——札幌 2009》, 《纯粹数学进展》62（2012）323–358。[38] H. Schenck, H. Terao, M. Yoshinaga, 《具有准齐次奇点的 $\mathbb{P}^2$ 中曲线构型的对数向量场》, 《数学研究快报》25（2018）1977–1992。[39] H. Schenck, S. O. Tohˇaneanu, 《 $\mathbb{P}^2$中圆锥曲线与直线配置的自由性》, 《瑞士数学评论》84（2009）235–258。[40] A. Simis, 《特征零中的两个微分主题》, 《代数与非交换几何专题》（Luminy/Annapolis，马里兰州，2001）195–204, 《当代数学》324, 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2003。[41] A. Simis, S. O. Tohˇaneanu, 《齐次除子的同调》, 《以色列数学杂志》200（2014）449–487。[42] A. Simis, B. Ulrich, W. V. Vasconcelos, 《模的 Rees 代数》, 《伦敦数学会会刊》87（2003）610–646。[43] H. Terao, 《超平面配置及其自由性 I, II》, 《东京大学理学部学术杂志·数学》27（1980）293–320。[44] H. Terao, 《超平面自由配置的广义指数与 Shepherd-Todd-Brieskorn公式》, 《数学发明》63（1981）159–179。[45] H. Terao, 《分岔集与对数向量场》, 《数学年刊》263（1983）313–321。[46] H. Terao, 《任意域上的超平面自由配置》, 《日本学士院会刊·数学科学》59（1983）301–303。[47] S. O. Tohˇaneanu, 《 $\mathbb{P}^2$上的除子自由性》, 《交换代数》41（2013）2916–2932。[48] S. O. Tohˇaneanu, 《用于计算最小距离的 De Boer-Pellikaan方法》, 《符号计算杂志》45（2010）965–974。[49] M. Torielli, E. Palezzato, 《任意域上的自由超平面配置》, 《代数组合杂志》52（2020）237–249。[50] R. Villarreal, 《单项式代数》, 《纯粹与应用数学专著与教材》238, Marcel Dekker, 纽约, 2001。[51] M. Yoshinaga, 《超平面配置的自由性及相关主题》, 《图卢兹数学科学院年刊》23（2014）483–512。

Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900 João Pessoa, Paraíba, Brazil.

Email address: ricardo@mat.ufpb.br

Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900 João Pessoa, Paraíba, Brazil.

Email address: cleto@mat.ufpb.br

Departamento de Matemática, CCET, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000 São Cristovão, SE, Brazil.

Email address: zaqueu@mat.ufs.br