arXiv:2301.03137v1 [math.NT] 9 Jan 2023

有理椭圆曲面上截面交数的缺口

Renato Dias Costa

摘要

给定代数闭域 X 上的有理椭圆曲面，我们研究给定的自然数 k 是否可以是 X的两个截面的交数。如果不能，我们就称其为k 间隙数。我们试图回答间隙数何时存在、如何分布以及如何识别。我们以 Mordell-Weil 格为主要工具，由此将研究与经典问题联系起来：用正定二次型表示整数。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **4**

2.1 Mordell–Weil 格4 2.2 间隙数6 2.3 界 $c_{\max}$， $c_{\min}$ 贡献项的界6 2.4 差 $\Delta = c_{\max} - c_{\min}$ 8 2.5 二次型 Q_X 9

3 与挠截面的交数 10

4 存在一对具有给定交数的截面 11

4.1 必要条件.11 4.2 当 $\Delta \leq 2$ 时的充分条件.12 4.2.1 $\Delta < 2$ 的情形.12 4.2.2 $\Delta = 2$ 的情形.13 4.3 $\Delta \leq 2$ 的充要条件.14 4.4 充分条件概要.15

5 主要结果 **15**

5.1 秩为 $r \geq 5$ 时无间隙数.15 5.2 秩为 $r \leq 2$ 时概率为1的间隙.17 5.3 当 $E(K)$ 无挠且秩为 $r = 1$ 时的间隙识别.18 5.4 具有1-间隙的曲面.20

6 附录 **23**

1 引言

问题描述。 设 X 是代数闭域上的有理椭圆曲面，即一个光滑有理射影曲面，带有纤维化 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$，其一般纤维是亏格 1 的光滑曲线。再假设 π 相对极小，即没有任何纤维的支撑中包含例外曲线。我们用 E/K 表示 π 的一般纤维，它是函数域 $K := k(\mathbb{P}^1)$ 上的一条椭圆曲线。根据莫德尔－韦伊定理， $E(K)$ 中的 K-点构成一个有限生成阿贝尔群，其秩记为 r。 $E(K)$ 上的点与 π 的截面以及 X 上的例外曲线一一对应，因此我们交替使用这些术语。本文探讨以下问题：给定截面 P_1， $P_2 \in E(K)$，交数 $P_1 \cdot P_2$ 可能取哪些值?

最初的动机。这个问题源于此前对 X 上圆锥丛的研究，也就是说，态射 $\varphi: X \to \mathbb{P}^1$ 的一般纤维是亏格为零的光滑曲线 [Cos]。更具体地说，构造圆锥丛的一种方法是找到一对截面 $P_1, P_2 \in E(K)$，满足 $P_1 \cdot P_2 = 1$，使得线性系 $|P_1 + P_2|$ 诱导出圆锥丛 $\varphi_{|P_1+P_2|}: X \to \mathbb{P}^1$，并以 $P_1 + P_2$ 为可约纤维。我们可以问，这样的一对截面在什么条件下存在。一个显而易见的必要条件是 $r \geq 1$，因为若 $r = 0$，任意两个不同的截面都必须不相交[SS19, Cor. 8.30]。反过来，已知 $r \geq 1$， X 是否存在这样的一对截面? 首先注意到， $r \geq 1$ 意味着存在无穷多个截面，因此当 $P_1 \cdot P_2$ 随着 P_1, P_2 遍历 $E(K)$ 时，我们应预期它会取无穷多个值。那么最终的问题是： $P_1 \cdot P_2$ 可能取哪些值?

Mordell-Weil 格。一般而言，计算曲面上的交数是一项困难的任务。然而，由于我们关注的是椭圆曲面上的截面，所需信息要容易获取得多。其原因在于 Mordell-Weil 格，这一概念最早由 [Elk90], [Shi89], [Shi90]确立。它涉及在 $E(K)$ 上定义一个取值于 $\mathbb{Q}$ 的配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，称为高度配对 [SS19, 第 6 节5], ，并由此得到一个正定格 $(E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$，称为 Mordell-Weil 格。其构造的一个关键方面是它与 Néron-Severi 格之间的联系，因此高度配对与截面的交配对紧密交织在一起。对于有理椭圆曲面，Mordell-Weil 格的可能类型已在 [OS91], 中分类，这为我们提供了一个良好的起点。

整数表示。我们研究中对 Mordell-Weil 格的运用，引出了数论中的一个经典问题，即用正定二次型表示整数。事实上， $E(K)$ 的自由部分由 r 项生成，因此高度 $h(P) := \langle P, P \rangle$ 在 r 个变量上诱导出一个系数属于 $\mathbb{Q}$ 的正定二次型。若 $O \in E(K)$ 是中性截面，且 R 是 π的可约纤维集合，那么根据高度公式（2）

$$h(P) = 2 + 2(P \cdot O) - \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P),$$

其中对 v 求和所得的是一个可以估算的有理数。通过通分，我们看到 $P \cdot O$ 可能取到的值，取决于某个范围内的整数；这些整数由系数属于 $\mathbb{Z}$ 的正定二次型表示。本文的部分内容探讨了这一视角，并应用了诸如经典的拉格朗日四平方定理 [HW79,§20.5], 关于二元二次型所表示整数的计数结果 [Ber12, p. 91] ，以及近期关于万有二次型的 Bhargava-Hanke 290定理 [BH, Thm. 1]。

结果陈述。 给定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们研究是否存在一对截面 $P_1,\ P_2 \in E(K)$，使得 $P_1 \cdot P_2 = k$。若不存在这样的一对，则称 X 具有一个 k-间隙，或称 k 是一个间隙数。我们的第一个结果是在某些情况下完整识别间隙数：

定理 5.7。 若 $E(K)$ 无挠且秩为 $r = 1$，则根据与 X 的可约纤维相关联的格 T，我们得到 π 上间隙数的如下刻画。

T	k 是间隙数 $\Leftrightarrow$ 以下各数均不是完全平方数
E_7	$k+1$、 $4k+1$
A_7	$\frac{k+1}{4}$， $16k$，……， $16k+9$
D_7	$\frac{k+1}{2}$， $8k+1$，……， $8k+4$
$A_6 \oplus A_1$	$\frac{k+1}{7}$, $28k-3$, ..., $28k+21$
$E_6 \oplus A_1$	$\frac{k+1}{3}$， $12k+1$, ..., $12k+9$
$D_5 \oplus A_2$	$\frac{k+1}{6}$, $24k+1$, ..., $24k+16$
$A_4 \oplus A_3$	$\frac{k+1}{10}$， $40k-4$，…， $40k+25$
$A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\frac{k+1}{15}$, $60k-11$, ..., $60k+45$

我们还探讨了 X 不存在间隙数的可能性。我们证明，事实上，只要 Mordell-Weil 秩足够大，情况就总是如此。

定理 5.2。 若 $r \geq 5$，则 X 没有间隙数。

另一方面，对于 $r \leq 2$，我们证明间隙数以概率 1 出现。

定理 5.4。 若 $r \leq 2$，那么 X的间隙数集合，即 $G := \{k \in \mathbb{N} \mid k$ 是 X 的间隙数在 $\mathbb{N}$中密度为 1，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#G \cap \{1, ..., n\}}{n} = 1.$$

最后，我们回答最初的动机所提出的问题，即对具有 1-间隙的有理椭圆曲面进行分类：

定理 5.8。 X 具有1-间隙，当且仅当 $r = 0$ 或 $r = 1$ 且 π 具有 III型* 纤维。

论文结构。本文安排如下。第 2 节介绍主要研究对象，即 Mordell–Weil 格、贡献项的界 $c_{\max}$, $c_{\min}$ 、差值$\Delta = c_{\max} - c_{\min}$ 以及由高度配对诱导的二次型 Q_X。第 3 节阐述扭截面在研究中的作用。关键技术结果汇集于第 4 节，其中我们给出了对于给定的 k，满足 $P_1 \cdot P_2 = k$ 的充要条件。第 5 节包含本文的主要结果，即：当 $E(K)$无挠且具有 $r = 1$ 时，间隙数的描述（第 5.3 小节）；$r \geq 5$ 不存在间隙数（第 5.1 小节）；当 $r \leq 2$ 时，间隙数的密度（第 5.2 小节）；以及具有1-间隙的曲面的分类（小节 5.4）。第 6 节为附录，其中包含表 8，列出了具有 $r \geq 1$的有理椭圆曲面的 Mordell-Weil 格的相关信息。

2 预备知识

全文中， X 表示任意特征的代数闭域k 上的有理椭圆曲面。更准确地说， X 是一个光滑有理射影曲面，带有纤维化$\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$和一个截面，其一般纤维是亏格为 1 的光滑曲线。此外，我们假设 π 是相对极小的（即每个纤维的支集都不含例外曲线） [SS19，定义 5.2]。 π 的一般纤维是定义在 K 上的椭圆曲线 $E/K := k(\mathbb{P}^1)$。 $E(K)$中的 K-点集称为 X的 Mordell-Weil群，其秩称为 X的 Mordell-Weil 秩，记作

$$r := \operatorname{rank} E(K).$$

接下来 我们将介绍本文研究的主要对象，并建立一些记号 .

2.1 Mordell–Weil 格

我们简要介绍 Mordell-Weil 格，它是本文使用的核心工具。尽管它可以在一般的椭圆曲面上定义，我们这里只讨论有理椭圆曲面。关于 Mordell-Weil格的更多信息，读者可参阅 Schuett 和 Shioda 所作的全面介绍 [SS19] 以及以下原始文献 [Elk90], [Shi89], [Shi90]。

我们首先指出， $E(K)$ 中的点可以视为 X 上的曲线，并定义格 T 和平凡格 Triv(X)，它们是定义 Mordell–Weil 格所必需的。

截面、位于 $E(K)$上的点，以及**例外曲线**。 π 的截面与 $E(K)$上的点一一对应。此外，由于 X 是有理且相对极小的，$E(K)$上的点也对应于 X [SS10，第 8 节。2]因此，我们将 π的截面、位于 $E(K)$上的点以及 X上的例外曲线视为同一对象。

格 T 和平凡格 Triv(X)。令 $O \in E(K)$ 为中性截面，并令 $R := \{v \in \mathbb{P}^1 \mid \pi^{-1}(v)$ 为 π 的可约纤维集合。纤维$\pi^{-1}(v)$的各分量记为 $\Theta_{v,\,i}$，其中$\Theta_{v,\,0}$ 是唯一与 O 相交的分量。Néron-Severi 群 NS(X) 连同交配对称为 Néron-Severi 格。

我们定义 NS(X) 的以下子格，它们编码了 π 的可约纤维：

$$T_v := \mathbb{Z}\langle \Theta_{v,i} \mid i \neq 0 \rangle \text{ for } v \in R,$$

$$T := \bigoplus_{v \in R} T_v.$$

根据 Kodaira 分类 [SS19，定理 5。12], 每个 T_v 具有 $v \in R$ 的对象都由一个 Dynkin 图表示 A_m, D_m 或 E_m 对于某个 m。我们还定义 平凡格，即 X的平凡格，定义如下

$$\mathrm{Triv}(X) := \mathbb{Z}\langle O, \Theta_{v,i} \mid i \geq 0,\, v \in R \rangle.$$

接下来，我们定义 Mordell–Weil 格，并介绍高度公式。

Mordell–Weil 格。 为了赋予 $E(K)$ 格结构，不能直接使用交数配对，因为它只能在 NS(X) 上定义格结构，而不能在 $E(K)$ 上定义。为此，我们定义一个取值于 $\mathbb{Q}$ 的配对，称为高度配对，其定义如下：

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E(K) \times E(K) &\to \mathbb{Q} \\ P, Q &\mapsto -\varphi(P) \cdot \varphi(Q), \end{aligned}$$

其中 φ： $E(K) \to \mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 是关于 Triv(X) 的正交投影所定义的（详细说明见 [SS19，第 6 节.5]）。此外，除去挠元后，我们得到一个正定格（$E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}}$，h·, ·i） [SS19，定理 6.20], ，称为 Mordell–Weil 格。

高度公式。 根据高度公式，可以显式计算高度配对[SS19，定理 6。24]对于有理椭圆曲面，其形式为

$$\langle P, Q \rangle = 1 + (P \cdot O) + (Q \cdot O) - (P \cdot Q) - \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P, Q), \tag{1}$$

$$h(P) := \langle P, P \rangle = 2 + 2(P \cdot O) - \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P), \tag{2}$$

其中，contr$_v$(P)：$=$contr$_v$(P, P) 和 contr$_v$(P, Q) 由 1 [SS19，表 6 给出。1] 假设P, Q 在 π^{-1}(v) 处相交，$\Theta_{v,\,i}$，$\Theta_{v,\,j}$分别满足 $0 < i < j$。若 P或 Q 与 $\Theta_{v,\,0}$ 相交，则 contr$_v$(P, Q)：$= 0$。

最小范数。 由于 $E(K)$ 是有限生成的，当 P 遍历满足 $h(P) > 0$ 的 $E(K)$ 时， $h(P)$ 存在一个最小正值。该值称为最小范数，记为

$$\mu := \min\{h(P) > 0 \mid P \in E(K)\}.$$

窄 Mordell-Weil 格。 $E(K)$ 的一个重要子格是窄 *Mordell-Weil* 格 $E(K)^0$, ，定义为

$$\begin{aligned} E(K)^0 &:= \{P \in E(K) \mid P \text{ intersects } \Theta_{v,0} \text{ for all } v \in R\} \\ &= \{P \in E(K) \mid \mathrm{contr}_v(P) = 0 \text{ for all } v \in R\}. \end{aligned}$$

作为一个子群， $E(K)^0$ 是无挠的；作为一个子格，它是一个正定偶整格，在 $E(K)$ [SS19，定理 6。44]中具有有限指数。窄格的重要性可从它作为子格的相当大规模，以及在其上计算高度配对较为容易这两点来说明，因为所有贡献项都为零。关于有理椭圆曲面上的格 $E(K)$ 和 $E(K)^0$ 的完整分类见 [OS91，主定理。]。

T_v	A_1	E_7	A_2	E_6	A_{n-1}	D_{n+4}
类型 $\pi^{-1}(v)$	III	III*	IV	IV*	I_n	I_n^*
贡献$_v(P)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{i(n-i)}{n}$	$\begin{cases}1 & (i=1)\\ 1+\frac{n}{4} & (i>1)\end{cases}$
贡献$_v(P,Q)$	-	-	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{i(n-i)}{n}$	$\begin{cases}\frac{1}{2} & (i=1)\\ \frac{1}{2}+\frac{n}{4} & (i>1)\end{cases}$

表 1：可约纤维对截面高度配对的局部贡献。

2.2 间隙数

我们引入一些便于使用的术语，以表达是否能够找到一对交数给定的截面。

定义 2.1。如果不存在截面 P_1，$P_2 \in E(K)$ 使得 $P_1 \cdot P_2 = k$，我们称 X 具有一个 k-间隙，或者称 k 是 X的一个间隙数。

定义 2.2。我们称 X 为无间隙，如果对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都存在截面 P_1、$P_2 \in E(K)$，使得 $P_1 \cdot P_2 = k$。

注 2.3。当 Mordell-Weil 秩为 $r = 0$时，有 $E(K) = E(K)_{\mathrm{tor}}$。特别地，任意两个不同的截面都不相交[SS19，推论 8。30]，因此每个 $k \geq 1$ 都是 X的间隙数。当秩为正时，间隙数的描述不那么简单，因此我们着重研究 $r \geq 1$。

2.3 贡献项 $c_{\max}$、$c_{\min}$ 的界

我们定义贡献项 $\sum_v \mathrm{contr}_v(P)$ 的估计 $c_{\max}$、$c_{\min}$，并陈述一些关于它们的简单事实。我们还给出一个例子，说明如何计算它们。

进行这些估计的必要性源于以下情况。假设给定一个截面 $P \in E(K)$，其高度 $h(P)$ 已知，而我们希望确定 $P \cdot O$。若 $P \in E(K)^0$，则可直接得到答案，即由高度公式 (2) 可得 $P \cdot O = h(P)/2 - 1$。然而，若 $P \notin E(K)^0$，，则计算 $P \cdot O$ 取决于贡献项 $c_P := \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P)$；根据表 1，该项取决于 P 与 π 的可约纤维的相交方式。通常我们手头没有这些相交数据，因此需要不依赖于 P 的 c_P 估计。

定义 2.4。如果 π 的可约纤维集合 R 非空，我们定义

$$c_{\max} := \sum_{v \in R} \max\{\mathrm{contr}_v(P) \mid P \in E(K)\},$$
$$c_{\min} := \min\{\mathrm{contr}_v(P) > 0 \mid P \in E(K), v \in R\}.$$

注 2.5。情形 $R = \emptyset$ 仅在 X 的 Mordell-Weil 秩为 $r = 8$（表 8中的第 1 项）时才会出现。此时 $E(K)^0 = E(K)$ 以及 $\sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P) = 0 \ \forall P \in E(K)$，因此我们采用约定$c_{\max} = c_{\min} = 0$。

注 2.6。 我们将 $c_{\max}$， $c_{\min}$ 作为 $c_P := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$ 的界。就我们的目的而言，无需知道 c_P是否会在某个 P 下实际达到其中一个界，因此 $c_{\max}$， $c_{\min}$应理解为假设值。

我们陈述一些关于 $c_{\max}, c_{\min}$ 的事实。

引理 2.7. 设 X 是一个 *Mordell-Weil* 秩为 $r \geq 1$ 的有理椭圆曲面。若 π 有可约纤维，则：

i) $c_{min} > 0$。

ii) $c_{max} < 4$。

iii) $c_{\min} \leq \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P) \leq c_{\max}\ \forall P \notin E(K)^0$。对于 $P \in E(K)^0,$，只有第二个不等式成立。

iv) 若 $\sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P) = c_{\min}$，则对于某个 v'，有 $\mathrm{contr}_{v'}(P) = c_{\min}$；并且对于 $v \neq v'$，有 $\mathrm{contr}_v(P) = 0$。

证明。i) 项由 $c_{\min}$ 的定义立即可得。对于 ii)，只需直接在表 8 中检查 $c_{\max}$ 的取值。对于 iii)，第二个不等式由 $c_{\max}$ 的定义得出，并且显然对任意 $P \in E(K)$ 都成立。如果 $P \notin E(K)^0,$，那么 $c_P := \sum_v \mathrm{contr}_v(P) > 0$，因此对于某个 v_0，有 $\mathrm{contr}_{v_0}(P) > 0$。所以 $c_P \geq \mathrm{contr}_{v_0}(P) \geq c_{\min}$。

对于 iv)，设 $\sum_v \mathrm{contr}_v(P) = c_{\min}$。反设存在互不相同的 v_1, v_2，使得对于 $i = 1,2$，有 $\mathrm{contr}_{v_i}(P) > 0$。根据 $c_{\min}$ 的定义，对于 $i = 1,2$，我们有 $c_{\min} \leq \mathrm{contr}_{v_i}(P)$，因此

$$c_{\min} = \sum_v \mathrm{contr}_v(P) \geq \mathrm{contr}_{v_1}(P) + \mathrm{contr}_{v_2}(P) \geq 2c_{\min},$$

这显然荒谬，因为根据 i)， $c_{\min} > 0$。因此，满足 $\mathrm{contr}_{v'}(P) > 0$ 的 v' 只有一个，而对于所有 $v \neq v'$，$\mathrm{contr}_v(P) = 0$。特别地，$\mathrm{contr}_{v'}(P) = c_{\min}$。 ■

显式计算。 一旦我们知道 T 与 π的可约纤维相关联的格（第 2.1节），计算 $c_{\max}, c_{\min}$ 就很简单。对于固定的 $v \in R$，局部贡献 contr 的极值$v(P)$ 见表 2，该表由表 1推导而来。我们给出一个示例来说明这一计算。

T_v	$\max\{\mathrm{contr}_v(P) \mid P \in E(K)\}$	$\min\{\mathrm{contr}_v(P) > 0 \mid P \in E(K)\}$
A_{n-1}	$\frac{\ell(n-\ell)n}{}$，其中 $\ell := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\frac{n-1}{n}$
D_{n+4}	$1 + \frac{n}{4}$	1
E_6	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
E_7	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

表2：$\mathrm{contr}_v(P)$ 的极值。

示例： 设 π 其纤维构型为 $(\mathrm{I}_4, \mathrm{IV}, \mathrm{III}, \mathrm{I}_1)$。可约纤维为 $\mathrm{I}_4, \mathrm{IV}, \mathrm{III}$，因此 $T = A_3 \oplus A_2 \oplus A_1$。根据表 2， A_3, A_2, A_1 的最大贡献分别为 $\frac{2\cdot 2}{4} = 1, 2\,3, 1\,2$。最小正贡献分别为 $\frac{1\cdot 3}{4} = \frac{3}{4}, \overline{2\,3}, 1\,2$。于是

$$c_{\max} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6},$$
$$c_{\min} = \min\left\{\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

2.4 差值 $\Delta = c_{\max} - c_{\min}$

在本节中，我们将说明 $\Delta := c_{\max} - c_{\min}$ 的取值为何与我们的讨论相关，尤其是在小节 4.2 中。我们还将验证，在大多数情况下 $\Delta < 2$，并在表 3 和表 4 中找出例外情况。

如小节 2.3 所述，若已知 $P \notin E(K)^0$ 和 $h(P)$，则确定$P \cdot O$ 的难点在于贡献项 $c_P := \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P)$。特别地， c_P 的可能取值范围决定了 $P \cdot O$ 的可能取值。该范围由差值刻画

$$\Delta := c_{\max} - c_{\min}.$$

因此， Δ 越小，对交数 $P \cdot O$的控制就越好，这也是 Δ在确定可能的交数时发挥重要作用的原因。在第4.3 小节中，我们假设$\Delta \leq 2$ 并给出存在一对 P_1， P_2 使得 $P_1 \cdot P_2 = k$（给定 $k \geq 0$）的充要条件。然而，若 $\Delta > 2$，则并不能预先保证存在这样的一对，因此需要逐一讨论各个情形。幸运的是，根据引理2.8， $\Delta > 2$ 这种情形很少见。

引理 2.8。 设 X 是一个 *Mordell-Weil* 秩为 $r \geq 1$ 的有理椭圆曲面。满足 $\Delta = 2$ 且 $\Delta > 2$ 的唯一几种情况分别列于表 *3* 和 *4* 中。特别地，当 $\Delta < 2$ （$E(K)$无挠时，我们有

No.	T	$E(K)$	$c_{\max}$	$c_{\min}$
24	$A_1^{\oplus 5}$	$A_1^{*\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
38	$A_3 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1^* \oplus \mathrm{h}1/4\mathrm{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
53	$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\mathrm{h}1/6\mathrm{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
57	$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1^* \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
58	$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	$\mathrm{h}1/6\mathrm{i} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

表3： $\Delta = 2$的情形

No.	T	$E(K)$	$c_{\max}$	$c_{\min}$	Δ
41	$A_2 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
42	$A_1^{\oplus 6}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
59	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\mathbf{h}1/12\mathbf{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
60	$A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\mathbf{h}1/4\mathbf{i} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

表4：涉及 $\Delta > 2$ 的情形

证明。 通过在表8 中查找所有满足 $\Delta = 2$ 和 $\Delta > 2$的情形，分别得到表3 和表4。特别注意，在这两个表中， $E(K)$的挠部分始终非平凡。因此，如果 $E(K)$是无挠的，那么 $\Delta < 2$。 ■

2.5 二次型 Q_X

我们定义由高度配对导出的、系数为整数的正定二次型 Q_X 。其重要性 Q_X 在于，某些关于满足 $P_1 \cdot P_2 = k$的条件（对某个 P_1， $P_2 \in E(K)$ 可以用 Q_X 所能表示的整数来表述（见推论 4.2 和命题 4.12）。

Q_X 的定义是清除由高度配对诱导的有理二次型的分母；唯一的问题是如何找到一个在所有情况下都适用的缩放因子。更确切地说，若 E（K）的秩为 $r \geq 1$，且 P_1， ..., P_r 是其自由部分的生成元，那么 q（x_1， ..., x_r）：$=h$（$x_1P_1 + ... + x_rP_r$）是一个系数属于 $\mathbb{Q}$的二次型；我们将 q 乘以某个整数 $d > 0$，使其系数属于 $\mathbb{Z}$，并据此定义 Q_X。我们证明， d 总可以取为窄格 E（K）^{0} 的行列式。

定义2.9。 设 X 满足 $r \geq 1$。令 P_1,..., P_r 为 E（K）自由部分的生成元。定义

$$Q_X(x_1, ..., x_r) := (\det E(K)^0) \cdot h(x_1P_1 + ... + x_rP_r).$$

我们验证表示 Q_X 的矩阵的元素属于 $\mathbb{Z}$，因此 Q_X 的系数属于 $\mathbb{Z}$。

引理2.10。 设 A 为表示二次型 Q_X的矩阵，即 $Q(x_1$， ...， $x_r) = x^tAx$，其中 $x := (x_1$， ...， $x_r)^t$。那么 A 的元素均为整数。特别地， Q_X 具有整数系数。

证明。设 P_1, ..., P_r 是 $E(K)$ 自由部分的生成元，并设 $L := E(K)^0$。$E(K)$ 的自由部分与对偶格 L^* [同构（OS91，主定理],），因此我们可以找到 P_1^0, ..., P_r^0 作为 L 的生成元，使得其格拉姆矩阵 $B^0 := (\mathbf{h}P_i^0, P_j^0\mathbf{i})_{i,j}$ 是 L 的格拉姆矩阵 $B := (\mathbf{h}P_i, P_j\mathbf{i})_{i,j}$ 的逆矩阵。

我们断言， Q_X 可由 B^0 的伴随矩阵表示，即满足 $B^0 \cdot \mathrm{adj}(B^0) = (\det B^0) \cdot I_r$ 的矩阵 $\mathrm{adj}(B^0)$，其中 I_r 是 $r \times r$ 单位矩阵。事实上，根据构造， B 表示二次型 $h(x_1P_1 + ... + x_rP_r)$，因此

$$\begin{aligned} Q_X(x_1, ..., x_r) &= (\det E(K)^0) \cdot h(x_1P_1 + ... + x_rP_r) \\ &= (\det B^0) \cdot x^t Bx \\ &= (\det B^0) \cdot x^t (B^0)^{-1} x \\ &= x^t \mathrm{adj}(B^0) x, \end{aligned}$$

如所述。为证明 $A := \mathrm{adj}(B^0)$ 的元素均为整数，注意到 $L = E(K)^0$ 的格拉姆矩阵 B^0 的元素均为整数（因为 $E(K)^0$ 是偶格），因此 A 也如此。 ■

我们以 Q_X 定义的一个简单推论结束本小节。

引理 2.11。若 $h(P) = m$ 对于某个 $P \in E(K)$，则 Q_X 表示 $d \cdot m$，其中 $d :=$ 行列式 $E(K)^0$.

证明。设 $P_1, ..., P_r$ 是 $E(K)$ 自由部分的生成元。设 $P = a_1P_1 + ... + a_rP_r + Q$，其中$a_i \in \mathbb{Z}$ 且 Q 是一个扭点元素（可能为零）。由于扭截面不影响高度配对，因此 $h(P - Q) = h(P) = m$。于是

$$\begin{aligned} Q_X(a_1, ..., a_r) &= d \cdot h(a_1P_1 + ... + a_rP_r) \\ &= d \cdot h(P - Q) \\ &= d \cdot m. \end{aligned}$$ ■

3 与挠截面的交

在讨论第 4节中更多技术细节之前，我们先说明挠截面如何有助于我们的研究，尤其是第 4.2小节。

我们先指出挠截面的一些一般性质。由于高度配对在 $E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}}$ 上正定，挠截面具有惰性，即对于每个 $Q \in E(K)_{\mathrm{tor}}$ ，对所有 $P \in E(K)$ 都有 $\langle Q, P \rangle = 0$。此外，在有理椭圆曲面的情形下，挠截面还彼此不相交：

定理 3.1。 [MP89，引理 1。1] 在有理椭圆曲面上， $Q_1 \cdot Q_2 = 0$ 对于任意不同的Q_1， $Q_2 \in E(K)_{tor}$。特别地，若 O 是中性截面，则对于所有 Q·$O = 0$ 都有 $Q \in E(K)_{tor} \backslash \{O\}$。

注 3.2。 如 [MP89，引理 1。1], 定理 3.1 所述，该结论对 $\mathbb{C}$ 上的椭圆曲面成立 X ，即使不假设 X 为有理的。然而，对于任意代数闭域，仍需假设曲面有理；证明见 [SS19，推论 8。30]。

利用上述性质，我们使用挠截面来帮助我们找到 P_1， $P_2 \in E（K）$ ，使得 $P_1 \cdot P_2 = k$ 对于给定的 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。当 $\Delta \geq 2$时，这尤其有用；在这种情况下， $E（K）_{\mathrm{tor}}$ 由引理2.8可知并非平凡的。

思路如下。给定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，假设我们能找到 $P \in E(K)^0$ ，其高度为 $h(P) = 2k$。根据高度公式（2），$P \cdot O = k - 1 < k$，这还不是我们所需要的结果。在下一个引理中，我们将证明，用挠截面 O 替换 $Q \neq O$ ，可得 $P \cdot Q = k$，正如所需。

引理 3.3。令 $P \in E(K)^0$ 满足 $h(P) = 2k$。则对所有 $Q \in E(K)_{tor} \setminus \{O\}$，都有 $P \cdot Q = k$。

证明。假设存在某个 $Q \in E(K)_{\text{tor}} \setminus \{O\}$。由定理 3.1，$Q \cdot O = 0$，并由高度公式 (2)，$2k = 2 + 2(P \cdot O) - 0$，因此 $P \cdot O = k - 1$。我们使用高度公式 (1) 计算 $\mathrm{h}P, Q\mathrm{i}$，从而得出 $P \cdot Q = k$。由于 $P \in E(K)^0,$，它与每个可约纤维 $\pi^{-1}(v)$ 的中性分支 $\Theta_{v,0}$ 相交，因此对所有 $v \in R$，$\mathrm{contr}_v(P, Q) = 0$。因此

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P, Q \rangle \\ &= 1 + P \cdot O + Q \cdot O - P \cdot Q - \sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P, Q) \\ &= 1 + (k-1) + 0 - P \cdot Q - 0 \\ &= k - P \cdot Q. \end{aligned}$$ ■

4 具有给定交数的一对截面的存在性

给定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们陈述存在$P_1 \cdot P_2 = k$的必要条件，以及（在大多数情况下）充分条件，其中 P_1，$P_2 \in E(K)$。一般情形下的必要条件在小节 4.1中陈述，而充分条件取决于 Δ 的取值，并在小节 4.2中分别讨论。在小节 4.4中，我们汇总本节证明的所有充分条件。

4.1 必要条件

若 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们陈述存在某些截面 $P_1, P_2 \in E(K)$ 使得 $P_1 \cdot P_2 = k$ 的必要条件。注意，在本小节中 Δ 的取值并不重要，尽管它对于4.2 小节中的充分条件起着决定性作用。

引理 4.1. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$，则以下情况之一成立：

i) $h(P) = 2 + 2k$ *for some* $P \in E(K)^0$.

ii) $h(P) \in [2 + 2k - c_{max}, 2 + 2k - c_{min}]$，对于某些 $P \notin E(K)^0$。

证明. 不失一般性，设 P_2 是中性截面，因此 $P_1 \cdot O = k$。由高度公式 (2)，$h(P_1) = 2 + 2k - c$，其中 $c := \sum_v \mathrm{contr}_v(P_1)$。若 $P_1 \in E(K)^0,$，则 $c = 0$ 且 $h(P_1) = 2 + 2k$，故 i) 成立。若 $P_1 \notin E(K)^0,$，则由引理 2.7 得 $c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$。但 $h(P_1) = 2 + 2k - c$，因此 $2 + 2k - c_{\max} \leq h(P_1) \leq 2 + 2k - c_{\min}$，即 ii) 成立。 ■

推论 4.2. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若对于某个 P_1，$P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$，则 Q_X 表示 $[d \cdot (2 + 2k - c_{max})\ d \cdot (2 + 2k)]$, 中的某个整数，其中 $d := \det E(K)^0$。

证明。我们应用引理 4.1，并将其改写为关于 Q_X 的表述。若 i) 成立，则根据引理 2.11，Q_X 表示$d \cdot (2 + 2k)$。但若 ii) 成立，则 $h(P) \in [2 + 2k - c_{\max}, 2 + 2k - c_{\min}]$，并且根据引理 2.11，$Q_X$表示 $d \cdot h(P) \in [d \cdot (2 + 2k - c_{\max})\ d \cdot (2 + 2k - c_{\min})]$。在 i) 和 ii) 两种情况下，$Q_X$ 都表示 $[d \cdot (2 + 2k - c_{\max})\ d \cdot (2 + 2k)]$ 中的某个整数。 ■

4.2 当 $\Delta \leq 2$ 时的充分条件

本小节陈述在 $P_1 \cdot P_2 = k$ 的假设下，使 $P_1, P_2 \in E(K)$ 成立的充分条件。根据引理 2.8，这涵盖了几乎所有情况（更准确地说，除了表 8 中的编号 41、42、59、60 之外的所有情况）。我们分别讨论 $\Delta < 2$ 和 $\Delta = 2$，因为后者需要更加仔细地处理。

4.2.1 $\Delta < 2$ 的情形

我们首先证明引理 4.3，它给出了在假设 $\Delta < 2$下的充分条件；然后给出推论 4.5，其中根据由 Q_X 表示的整数给出了充分条件。接下来是推论 4.6，它是推论 4.5 的简化版本。

引理 4.3。 假设 $\Delta < 2$ 且令 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若 $h(P) \in [2 + 2k - c_{max}, 2 + 2k - c_{min}]$ 对于某个$P \notin E(K)^0$, 成立，则对于某个 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

证明。 令 $O \in E(K)$ 为中性截面。由高度公式（2）， $h(P) = 2 + 2(P \cdot O) - c$，其中 $c := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$。由于 $h(P) \in [2 + 2k - c_{\max}, 2 + 2k - c_{\min}]$，于是

$$\begin{aligned} & 2 + 2k - c_{\max} \leq 2 + 2(P \cdot O) - c \leq 2 + 2k - c_{\min} \\ \Rightarrow \ & \frac{c - c_{\max}}{2} \leq P \cdot O - k \leq \frac{c - c_{\min}}{2}. \end{aligned}$$

因此， $P \cdot O - k$ 是 I 中的一个整数: $= [\frac{c - c_{\max}}{2}, \frac{c - c_{\min}}{2}]$。我们证明 I 中唯一的整数是 0，从而 $P \cdot O - k = 0$，即 $P \cdot O = k$。首先注意到 $c \neq 0$，因为 $P \notin E(K)^0$。根据引理 2.7 iii)，$c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$，因此 $\frac{c - c_{\max}}{2} \leq 0 \leq \frac{c - c_{\min}}{2}$，即 $0 \in I$。此外， $\Delta < 2$ 意味着 I 的长度为 $\frac{c_{\max} - c_{\min}}{2} = \frac{\Delta}{2} < 1$，所以如所要求的，$I$ 中除 0 外不含其他整数。 ■

注记 4.4。 引理 4.3 也适用于 $c_{\max} = c_{\min}$ 的情形，此时闭区间退化为一个点。

引理 4.3 的以下推论给出了一个充分条件，该条件涉及二次型所表示的整数 Q_X （第 2.5节）。

推论 4.5. 假设 $\Delta < 2$ 且令 $d := $ 行列式 $E(K)^0$. 若 Q_X 表示一个在区间 $[d \cdot (2 + 2k - c_{max}) \ d \cdot (2 + 2k - c_{min})]$, 内不能被 d 整除的整数，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

证明。设 $a_1, ..., a_r \in \mathbb{Z}$ 使得 $Q_X(a_1, ..., a_r) \in [d \cdot (2 + 2k - c_{\max}) \ d \cdot (2 + 2k - c_{\min})]$，其中 $d \nmid Q_X(a_1, ..., a_r)$。设 $P := a_1 P_1 + ... + a_r P_r$，其中 $P_1, ..., P_r$ 是 $E(K)$ 自由部分的生成元。于是 $d \nmid Q_X(a_1, ..., a_r) = d \cdot h(P)$，这意味着 $h(P) \notin \mathbb{Z}$。特别地， $P \notin E(K)^0$，因为 $E(K)^0$ 是一个整数格。此外， $h(P) = \frac{1}{d} Q_X(a_1, ..., a_r) \in [2 + 2k - c_{\max}, 2 + 2k - c_{\min}]$，由引理 4.3 即得。 ■

下一个推论虽然弱于推论 4.5，但对于具体例子更实用，并且在小节 5.4 中经常使用。它不涉及寻找由 Q_X 表示的整数，而只需在一个取决于最小范数 μ 的区间内寻找完全平方数（小节 2.1）。

推论 4.6。 假设 $\Delta < 2$。若存在一个完全平方数 $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right]$ 使得$n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

证明。 取 $P \in E(K)$，使得 $h(P) = \mu$。由于 $h(nP) = n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，必有 $nP \notin E(K)^0$，因为 $E(K)^0$ 是一个整数格。此外， $h(nP) = n^2\mu \in [2 + 2k - c_{\max}, 2 + 2k - c_{\min}]$，由引理 4.3即可得证。 ■

4.2.2 $\Delta = 2$ 的情形

关于 $\Delta = 2$ 的充分条件表述与 $\Delta < 2$的几乎完全相同：唯一的区别是，引理 4.3 中的闭区间被引理 4.8中的右半开区间所取代。然而，当某个截面的贡献项达到最小值时，这一变化会带来技术困难，因此需要对 $\Delta = 2$单独处理。

结果按以下顺序给出。首先，我们证明引理 4.7，它陈述了贡献项最小的截面的性质。接下来，我们证明引理 4.8，该引理给出了 $\Delta = 2$ 的充分条件，随后给出推论 4.9 和 4.10。

引理 4.7。 假设 $\Delta = 2$。若存在 $P \in E(K)$ 使得 $\sum_{v\in R} \mathrm{contr}_v(P) = c_{\min}$，则对每个 $Q \in E(K)_{tor} \setminus \{O\}$，都有 $P \cdot Q = P \cdot O + 1$。

证明。 若 $Q \in E(K)_{\mathrm{tor}} \setminus \{O\}$，则根据定理 $Q \cdot O = 0$，可得 3.1。此外，根据高度公式（1），

$$0 = \langle P, Q\rangle = 1 + P \cdot O + 0 - P \cdot Q - \sum_{v\in R} \mathrm{contr}_v(P, Q). \quad (*)$$

因此，只需证明 $\mathrm{contr}_v(P, Q) = 0 \ \forall v \in R$。根据引理 2.7 iv)，对于某个 v'，$\mathrm{contr}_{v'}(P) = c_{\min}$，而对所有 $v \neq v'$，$\mathrm{contr}_v(P) = 0$。特别地， P与 $\Theta_{v,0}$ 相交，因此对所有 $v \neq v'$，$\mathrm{contr}_v(P, Q) = 0$。于是由（$*$）可见，$\mathrm{contr}_{v'}(P, Q)$ 是一个整数，下面将证明它为 0。

我们断言 $T_{v'} = A_1$，因此根据表， Q，$\mathrm{contr}_{v'}(P) = 0$或 $1\,2$。在这种情况下，由于 $\mathrm{contr}_{v'}(P,\ Q)$ 是整数，因此必为 0，结论得证。为证明 $T_{v'} = A_1$，我们分析 $\mathrm{contr}_{v'}(P)$。由于 $\Delta = 2$，根据表 3可得 $c_{\min} = \frac{1}{2}$，且 $\mathrm{contr}_{v'}(P) = c_{\min} = \frac{1}{2}$。根据表 1，这只有在$T_{v'} = A_{n-1}$ 且 $\frac{1}{2} = {}^{i}\!/_{(n-i)\,n}$ 对某个 $0 \leq i < n$ 成立时才会发生。唯一的可能性是 $i = 1$， $n = 2$，且 $T_{v'} = A_1$。 ■

借助引理 4.7，我们能够给出 $\Delta = 2$ 的充分条件。

引理 4.8。 假设 $\Delta = 2$ 且令 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若 $h(P) \in [2+2k-c_{max}, 2+2k-c_{min})$ 对某个$P \notin E(K)^0$, 成立，则 $P_1 \cdot P_2 = k$ 对某个 $P_1, P_2 \in E(K)$成立。

证明。设 $O \in E(K)$ 为中性截面。由高度公式 (2)， $h(P) = 2 + 2(P \cdot O) - c$，其中 $c := \sum_v \mathrm{contr}_v(P)$。我们重复引理 4.3 中的论证，在此情形下使用右半开区间，因此假设 $h(P) \in [2+2k-c_{\max}, 2+2k-c_{\min})$ 意味着$P \cdot O - k$ 是 $I' := \left[\frac{c-c_{\max}}{2}, \frac{c-c_{\min}}{2}\right)$ 中的一个整数。

由于 I' 是长度为 $\frac{c_{\max}-c_{\min}}{2} = \frac{\Delta}{2} = 1$ 的半开区间，因此 I' 恰好包含一个整数。若$0 \in I'$，则 $P \cdot O - k = 0$，即 $P \cdot O = k$，结论成立。因此我们假设 $0 \notin I'$。

我们断言 $P \cdot O = k - 1$。首先，注意若 $c > c_{\min}$，则不等式 $c_{\min} < c \leq c_{\max}$给出 $\frac{c-c_{\max}}{2} \leq 0 < \frac{c-c_{\min}}{2}$，即 $0 \in I'$，这与结论矛盾。因此 $c = c_{\min}$。由于 $\Delta = 2$，于是$I' = [-1, 0)$，其唯一的整数是 -1。故 $P \cdot O - k = -1$，即 $P \cdot O = k - 1$，如所断言。

最后，令 $Q \in E(K)_{\mathrm{tor}} \setminus \{O\}$，于是 $P \cdot Q = P \cdot O + 1 = k$ 由引理 4.7 可得，证明完毕。我们指出，$E(K)_{\mathrm{tor}}$ 根据表 3并非平凡，因此这样的 Q 存在。 ■

以下推论是推论 4.5 和推论 4.6 针对 $\Delta = 2$所作的类比推广。与 $\Delta < 2$的情形类似，推论 4.9 强于推论 4.10，不过后者在具体示例中更实用。提醒读者， μ 表示最小范数（小节 2.1）。

推论 4.9. 假设 $\Delta = 2$ 且令 $d :=$ 行列式 $E(K)^0$. 若 Q_X 在区间 $[d \cdot (2+2k-c_{max})\ d \cdot (2+2k-c_{min}))$中表示一个不能被 d 整除的整数，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

证明。我们重 复推论 4.5中的论证，此处使用半开区间。 ■

推论 4.10. 假设 $\Delta = 2$。若存在完全平方数 $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right)$ 使得$n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

证明。 我们重复推论 4.6中的论证，此处使用半开区间。 ■

4.3 $\Delta \leq 2$ 的充要条件

为完整起见，我们给出一个统一的充要条件陈述，假设$\Delta \leq 2$；这自然地由小节 4.1 和 4.2中的结果得出。

引理 4.11。 设 $\Delta \leq 2$，并令 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。则 $P_1 \cdot P_2 = k$ 对某个 $P_1, P_2 \in E(K)$ 成立，当且仅当以下条件之一成立：

i) $h(P) = 2 + 2k$ 对某个 $P \in E(K)^0$成立。

ii) $h(P) \in [2+2k-c_{\max}, 2+2k-c_{\min})$ 对某个 $P \notin E(K)^0$成立。

iii) $h(P) = 2 + 2k - c_{\min}$ 且 $\sum_{v \in R} \mathrm{contr}_v(P) = c_{\min}$ 对某个 $P \in E(K)$成立。

证明。 若 i) 或 iii) 成立，则 $P \cdot O = k$ 由高度公式（2）可直接得到。但若 ii) 成立，只需在 4.3 引理适用于 $\Delta < 2$ 时应用引理 4.8 引理适用于 $\Delta = 2$时即可。

反过来，设 $P_1 \cdot P_2 = k$。不失一般性，可设 $P_2 = O$，于是 $P_1 \cdot O = k$。由高度公式（2）， $h(P_1) = 2 + 2k - c$，其中 $c := \sum_v \mathrm{contr}_v(P_1)$。

若 $c = 0$，则 $P_1 \in E(K)^0$ 且 $h(P_1) = 2 + 2k$，故 i) 成立。因此我们令 $c \neq 0$，即 $P_1 \notin E(K)^0$，使得由引理 2.7 可知 $c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$。若 $c = c_{\min}$，则 $h(P_1) = 2 + 2k - c_{\min}$，且 iii) 成立。否则 $c_{\min} < c \leq c_{\max}$，这意味着 $2 + 2k - c_{\max} \leq h(P_1) < 2 + 2k - c_{\min}$，故 ii) 成立。 ■

4.4 充分条件概要

为清楚起见，我们将本节中证明的、使某个 P_1，$P_2 \in E(K)$ 满足$P_1 \cdot P_2 = k$ 的所有充分条件汇总为一个命题。

命题 4.12。 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。若满足以下任一条件，则对于某些 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。

1) $h(P)$ 对于某些 $P \in E(K)^0$，有 $= 2 + 2k$。

2) $h(P)$ 对于某些 $P \in E(K)^0$，且 $E(K)_{tor}$ 非平凡。

3) $\Delta < 2$ 且存在一个完全平方数 $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right]$ 满足 $n^2\mu \notin \mathbb{Z}$，其中 μ 是最小范数（小节 *2.1*）。若 $\Delta = 2$，则考虑右半开区间。

4) $\Delta < 2$ 且二次型 Q_X 表示一个不能被 d 整除的整数：$= \det E(K)^0$ 在区间 $[d \cdot (2 + 2k - c_{max})\ d \cdot (2 + 2k - c_{min})]$内。若 $\Delta = 2$，则考虑右半开区间。

证明。在 1) 中，通过高度计算可得 $2 + 2k = h(P) = 2 + 2(P \cdot O) - 0$，因此 $P \cdot O = k$。对于 2)，我们应用引理 3.3，得出对于任意 $Q \in E(K)_{\text{tor}} \setminus \{O\}$，$P \cdot Q = k$。在 3) 中，当 $\Delta < 2$ 时，我们使用推论 4.6；当 $\Delta = 2$ 时，使用推论 4.10。在 4) 中，若 $\Delta < 2$，我们应用推论 4.5；若 $\Delta = 2$，则应用推论 4.9。 ■

5 主要结果

我们证明本文的四个主要定理，它们分别独立地应用了第 4 节的结果。前两个定理旨在概括间隙数何时以及如何出现：定理 5.2 指出，较大的 Mordell-Weil群会阻止间隙数的出现；更确切地说，当 Mordell-Weil 秩为 $r \geq 5$ 时；定理 5.4 则表明，当 Mordell-Weil 秩较小时，更确切地说，当 $r \leq 2$时，间隙数出现的概率为 1。另一方面，后两个定理讨论间隙数的具体取值：定理 5.7 对某些情形下的间隙数给出了完整描述，而定理 5.8 则对存在 1-间隙的情形进行了分类。

5.1 秩为 $r \geq 5$ 时无间隙数

我们证明，若 $E(K)$ 的秩为 $r \geq 5$，则 X 无间隙。我们的策略是证明：对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都存在某个 $P \in E(K)^0$，使得 $h(P) = 2+2k$；由命题 4.12 1)，即可得证。我们分两步完成这一证明。首先证明，当 $A_1^{\oplus}$ 或 A_4 嵌入 $E(K)^0$ 时，该结论成立（引理 5.1）。其次证明，若 $r \geq 5$，则存在这样的嵌入，因此 X 无间隙（定理 5.2）。

引理 5.1。 假设 $E(K)^0$ 含有一个与 $A_1^{\oplus 4}$ 或 A_4 同构的子格。那么对每个 $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都存在 $P \in E(K)^0$，使得 $h(P) = 2\ell$。

证明。首先假设 $A_1^{\oplus 4} \subset E(K)^0$，并令 P_1、P_2、P_3、P_4 分别为 A_1 中每个因子的生成元。那么，对于互不相同的 i、$j = 1$、2、3、4，有 $h(P_i) = 2$ 且 $\mathsf{h}P_i, P_j\mathsf{i} = 0$。根据拉格朗日四平方定理 [HW79, §20.5]，存在整数 a_1、a_2、a_3、a_4，使得 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \ell$。定义$P$:
$= a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 \in A_1^{\oplus 4} \subset E(K)^0,$，我们有

$$h(P) = 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + 2a_4^2 = 2\ell.$$

现在令 $A_4 \subset E(K)^0$，其生成元为 P_1、P_2、P_3、P_4。那么，对于 $i = 1$、2、3、4，有 $h(P_i) = 2$，并且对于 $i = 1$、2、3，有 $\mathsf{h}P_i$、$P_{i+1}\mathsf{i} = -1$。我们需要寻找整数 x_1、.....、x_4，使得 $h(P) = 2\ell$，其中$P := x_1P_1 + ... + x_4P_4 \in A_4 \subset E(K)^0$。等价地，我们需要满足

$$\ell = \frac{1}{2}\langle P, P\rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4.$$

因此，ℓ必须由 $q(x_1, ..., x_4) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4$表示。我们证明 q 表示所有正整数。注意，q 是正定的，因为它由$\langle\cdot, \cdot\rangle$诱导。根据 Bhargava-Hanke 290定理 [BH][定理 1]，q 当且仅当它表示以下整数时，才表示所有正整数:

$$2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26,$$

$$29, 30, 31, 34, 35, 37, 42, 58, 93, 110, 145, 203, 290.$$

上述每个整数的表示均见表5。 ■

现在我们证明本节的主定理。

定理 5.2。 若 $r \geq 5$，则 X 无间隙。

证明。 我们证明，对每个 $k \geq 0$，都存在 $P \in E(K)^0$ 使得 $h(P) = 2 + 2k$，因此由命题4.12 1)，结论得证。根据引理5.1，只需证明 $E(K)^0$ 含有一个与 $A_1^{\oplus 4}$或 A_4同构的子格。

满足 $r \geq 5$ 的情形为第 1–7 项（表 8）。在第 1–6 项中，$E(K)^0 = E_8$、E_7、E_6、D_6、D_5、A_5分别如此。它们各自都含有一个 A_4 子格 [Nis96，引理 4.2、4.3]。对于第 7 项，我们声称$E(K)^0 = D_4 \oplus A_1$ 含有一个 $A_1^{\oplus 4}$子格。这是因为 D_4 含有一个 $A_1^{\oplus 4}$子格[Nis96，引理 4.5 (iii)]。 ■

n	$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$，其中 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4=n$
1	$1,0,0,0$
2	$1,0,1,0$
3	$1,1,2,0$
5	$1,0,2,0$
6	$1,1,-2,-1$
7	$1,1,-2,0$
10	$1,0,3,0$
13	$2,0,3,0$
14	$1,2,5,1$
15	$1,5,5,2$
17	$1,0,4,0$
19	$1,5,3,-1$
21	$1,5,0,0$
22	$1,5,0,-1$
23	$1,6,6,2$
26	$1,0,5,0$
29	$2,0,5,0$
30	$1,5,0,-3$
31	$1,3,-4,-2$
34	$3,0,5,0$
35	$1,2,-2,4$
37	$1,0,6,0$
42	$1,1,-4,3$
58	$3,0,7,0$
93	$1,1,-10,0$
110	$1,-2,3,-8$
145	$1,0,12,0$
203	$1,-5,-9,8$
290	$1,0,17,0$

Ta表 5：Bhargava-Hanke 290定理中临界整数的表示 .

5.2 秩 $r\leq 2$ 中概率为1 的缺口

固定一个有理椭圆曲面 $\pi:\ X\to\mathbb{P}^1$，其 Mordell-Weil 秩为 $r\leq 2$。我们证明，若 k 是均匀随机选取的自然数，则 k 以概率 1 是一个间隙数。更准确地说，若$G:=\{k\in\mathbb{N}\mid k$ 是 X的间隙数$\}$是间隙数集合，则 $G\subset\mathbb{N}$ 的密度为 1，即

$$d(G):=\lim_{n\to\infty}\frac{\#G\cap\{1,...,n\}}{n}=1.$$

我们采用以下策略。若 $k \in \mathbb{N} \setminus G$，则对于某个 $P_1, P_2 \in E(K)$，有 $P_1 \cdot P_2 = k$；根据推论 4.2，二次型 Q_X 表示某个依赖于 k的整数 t。这定义了一个函数 $\mathbb{N}\setminus G \to T$，其中 T是由 Q_X表示的整数集合。由于 Q_X是关于 $r \leq 2$个变量的二次型，根据引理 5.3，T在 $\mathbb{N}$中的密度为 0。通过分析 $\mathbb{N}\setminus G \to T$的原像，我们在定理 5.4 中得出结论：$d(\mathbb{N} \setminus G) = d(T) = 0$，因此 $d(G) = 1$，如所求。

引理 5.3。设 Q 是定义在 $r = 1$上的正定二次型，2 个变量，且系数为整数。那么，由 Q 表示的整数集合在 $\mathbb{N}$中的密度为0 。

证明。设 S 为由 Q表示的整数集合。若 d 是 Q各系数的最大公约数，令 S' 为可由本原形式 $Q' := \frac{1}{d} \cdot Q$表示的整数集合。根据构造，$S'$ 是 S的缩放，因此 $d(S) = 0$ 当且仅当 $d(S') = 0$。

如果 $r = 1$，那么 $Q'(x_1) = x_1^2$，且 S' 是完全平方数的集合，因此显然 $d(S') = 0$。如果 $r = 2$，那么 Q' 是一个二元二次型，而 S' 中元素的个数上界为 $x > 0$，由 $C \cdot \sqrt{x}^{\log x} + o(x)$给出，其中 $C > 0$为常数，且 $\lim_{x\to\infty} o(x)_x = 0$ [Ber12，第 91]页。因此

$$d(S') = \lim_{x\to\infty} \frac{C}{\sqrt{\log x}} + \frac{o(x)}{x} = 0. \blacksquare$$

现在我们证明本节的主要结果。

定理 5.4。设 $\pi: X \to \mathbb{P}^1$ 是一个 *Mordell-Weil* 秩为 $r \leq 2$的有理椭圆曲面。那么，集合 $G := \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ 是 } X\}$ 的一个间隙数的间隙数集合，在 X 中的密度为 1 。

证明。如果 $r = 0$，那么根据注 2.3，结论显然成立，因此我们可以假设 $r = 1$，2。我们证明：$S := \mathbb{N}\setminus G$ 的密度为 0。如果 S 是有限集，则无需证明。否则，设$k_1 < k_2 < \ldots$ 为 S中所有元素按递增排列所成的序列。根据推论 4.2，对每个 n，存在某个 $t_n \in J_{k_n} := [d \cdot (2 + 2k_n - c_{\max})$ $d \cdot (2 + 2k_n)]$，其由二次型 Q_X表示。设 T为由 Q_X 表示的整数集合，并定义函数 f: $\mathbb{N}\setminus G \to T$为 $k_n \mapsto t_n$。由于Q_X 具有 $r = 1$，2 个变量，根据引理 5.3，T 的密度为 0。

对于 $N > 0$，令 $S_N := S \cap \{1, \ldots\ldots, N\}$ 和 $T_N := T \cap \{1, \ldots\ldots, N\}$。由于 T 的密度为零，$\#T_N = o(N)$，即 $\#_N^{T_N} \to 0$ 在 $N \to \infty$时成立，我们需要证明 $\#S_N = o(N)$。我们分析限制在 S_N 上的函数 f。注意，当 $t_n \in J_{k_n}$时，$k_n \leq N$ 蕴含 $t_n \leq d \cdot (2 + 2k_n) \leq d \cdot (2 + 2N)$。因此，限制 $g := f|_{S_N}$ 可视为函数 $g: S_N \to T_{d\cdot(2+2k)}$。

我们声称，对于所有 $t \in T_{d\cdot(2+2N)}$，都有 $\#g^{-1}(t) \leq 2$；在这种情况下，$\#S_N \leq 2 \cdot \#T_{d\cdot(2+2N)} = o(N)$，于是得证。反设 $g^{-1}(t)$ 含有三个不同的元素，记为 $k_{\ell_1} < k_{\ell_2} < k_{\ell_3}$，其中 $t = t_{\ell_1} = t_{\ell_2} = t_{\ell_3}$。由于对每个 $i = 1$，2，3，均有 $t_{\ell_i} \in J_{k_{\ell_i}}$，因此 $t \in J_{k_{\ell_1}} \cap J_{k_{\ell_2}} \cap J_{k_{\ell_3}}$。我们证明 $J_{k_{\ell_1}}$ 与 $J_{k_{\ell_3}}$ 不相交，从而导出矛盾。事实上，由于 $k_{\ell_1} < k_{\ell_2} < k_{\ell_3}$，特别地有 $k_{\ell_3} - k_{\ell_1} \geq 2$，因此 $d \cdot (2 + 2k_{\ell_1}) \leq d \cdot (2 + 2k_{\ell_3} - 4)$。但根据引理 2.7，$c_{\max} < 4$，所以 $d \cdot (2 + 2k_{\ell_1}) < d \cdot (2 + 2k_{\ell_3} - c_{\max})$，即 $\max J_{k_{\ell_1}} < \min J_{k_{\ell_3}}$。因此 $J_{k_{\ell_1}} \cap J_{k_{\ell_3}} = \emptyset$，证毕。 $\blacksquare$

5.3 当 $E(K)$ 为无挠且秩为 $r = 1$ 时的间隙的识别

小节5.1 和 5.2 中的结果讨论了间隙数的存在性和分布情况。在接下来的小节中，我们将着重明确求出间隙数。本小节假设 $E(K)$是秩为$r = 1$的无挠群，并在此假设下完整描述间隙数。一般情况下，这类描述较为困难，但我们的假设保证每个

$E(K)$ $E(K)^0$ 由单个元素生成，并且 $\Delta < 2$ 根据引理 2.8，这使问题更易处理。

本小节安排如下。首先，我们指出关于 $E(K)$ $E(K)^0$ 在 $r = 1$ 中的生成元的一些显然事实，见引理 5.5。接着，我们在引理 5.5. Next we state necessary and sufficient conditions for having $P_1 \cdot P_2 = k$ when $E(K)$ is torsion-free with $r = 1$ in Lemma 5.6. As an application of thelatter, we prove Theorem 5.7, which is the main resultof the subsection.

引理 5.5。 设 X 是一个 *Mordell-Weil* 秩为 $r = 1$的有理椭圆曲面。若 P 生成 $E(K)$的自由部分，则

a) $h(P) = \mu$.

b) $1/\mu$ 是偶整数。

c) $E(K)^0$ 由 $P_0 := (1/\mu)P$和 $h(P_0) = 1/\mu$生成。

证明。 a)项显然。b)、c)项由以下事实推出： $E(K)^0$ 是偶格，且$E(K) \simeq L^* \oplus E(K)_{\text{tor}}$，其中 $L := E(K)^0$ [OS91，主定理]。 ■

以下我们将利用引理 5.5 以及第 4 节的结果，给出存在 $P_1 \cdot P_2 = k$ 且满足某个 $P_1, P_2 \in E(K)$ 的充要条件，其中 $E(K)$ 是无挠的，且秩为 $r = 1$。

引理 5.6. 假设 $E(K)$ 是无挠的，秩为 $r = 1$。那么，对于某个 $P_1, P_2 \in$， $P_1 \cdot P_2 = k$ $E(K)$ 成立，当且仅当以下条件之一成立：

i) $\mu \cdot (2 + 2k)$ 是完全平方数。
ii) 存在完全平方数 $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{min}}{\mu}\right]$，使得 $\mu \cdot n \notin \mathbb{Z}$。

证明。 由引理 5.5， $E(K)$ 由某个 P 生成，且 $h(P) = \mu$ 并且 $E(K)^0$ 由以下元素生成：$P_0 := n_0 P$，其中 $n_0 := \frac{1}{\mu} \in 2\mathbb{Z}$。

首先假设对于某个 P_1， P_2，有 $P_1 \cdot P_2 = k$。不妨设 $P_2 = O$。令 $P_1 = nP$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。我们证明， $P_1 \in E(K)^0$ 蕴含 i)，而 $P_1 \notin E(K)^0$ 蕴含 ii)。

若 $P_1 \in E(K)^0$, ，则 $n_0 \mid n$，因此 $P_1 = nP = mP_0$，其中 $m := \frac{n}{n_0}$。根据高度公式（2），$2 + 2k = h(P_1) = h(mP_0) = m^2 \cdot \frac{1}{\mu}$。因此 $\mu \cdot (2 + 2k) = m^2$，即 i) 成立。

若 $P_1 \notin E(K)^0$, ，则 $n_0 \nmid n$，因此 $\mu \cdot n = \frac{n}{n_0} \notin \mathbb{Z}$。此外， $h(P_1) = n^2 h(P) = n^2\mu$，根据高度公式（2）， $n^2\mu = h(P) = 2 + 2k - c$，其中 $c := \sum_v \text{contr}_v(P_1) \neq 0$。不等式 $c_{\min} \le c \le c_{\max}$ 从而给出 $\frac{2+2k-c_{\max}}{\mu} \le n^2 \le \frac{2+2k-c_{\min}}{\mu}$。因此 ii) 成立。

反过来，假设 i) 或 ii) 成立。由于 $E(K)$ 是无挠的，根据引理 2.8， $\Delta < 2$，因此我们可以应用引理 4.3。若 i) 成立，则对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $\mu \cdot (2 + 2k) = m^2$。由于 $mP_0 \in E(K)^0$ 且 $h(mP_0) = \frac{m^2}{\mu} = 2 + 2k$，由引理 4.3 i) 可得结论。若 ii) 成立，则条件 $\mu \cdot n \notin \mathbb{Z}$ 等价于 $n_0 \nmid n$，因此 $nP \notin E(K)^0$。此外， $n^2 \in \left[\frac{2+2k-c_{\max}}{\mu}, \frac{2+2k-c_{\min}}{\mu}\right]$ 蕴含 $h(nP) = n^2\mu \in [2 + 2k - c_{\max}, 2 + 2k - c_{\min}]$。由引理 4.3 ii) 可得结论。 ■

通过将引理5.6 应用于 $E(K)$ 为无挠、秩为 $r = 1$的所有可能情形，我们得到本小节的主要结果。

定理 5.7。 若 $E(K)$ 为无挠且秩为 $r=1$，则 X 的所有间隙数如表*6*所述。

No.	T	k 是间隙数 $\Leftrightarrow$ 均不是以下为完全平方数	前几个间隙数
43	E_7	$k+1$、 $4k+1$	$1,4$
45	A_7	$\frac{k+1}{4}$、 $16k$，……、 $16k+9$	$8,11$
46	D_7	$\frac{k+1}{2}$, $8k+1$, ..., $8k+4$	$2,5$
47	$A_6\oplus A_1$	$\frac{k+1}{7}$， $28k-3$，…， $28k+21$	12, 16
49	$E_6\oplus A_1$	$\frac{k+1}{3}$, $12k+1$, ..., $12k+9$	$3,7$
50	$D_5\oplus A_2$	$\frac{k+1}{6}$, $24k+1$, ..., $24k+16$	$6,11$
55	$A_4\oplus A_3$	$\frac{k+1}{10}$, $40k-4$, ..., $40k+25$	16, 20
56	$A_4\oplus A_2\oplus A_1$	$\frac{k+1}{15}$, $60k-11$, ..., $60k+45$	22、 27

表 6：当 $E(K)$ 的秩为 $r=1$ 且无挠时，间隙数的描述。

证明。为简洁起见，我们仅讨论第55号。其他情形的处理方法类似。此处 $c_{\max}=\frac{2\cdot 3}{5}+\frac{2\cdot 2}{4}=\frac{11}{5}$，$c_{\min}=$最小 $\left\{\frac{4}{5},\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4}$和 $\mu=1/20$。

根据引理 5.6，k 是间隙数，当且仅当 i) 和 ii) 均不发生。条件 i) 是$\frac{2+2k}{20}=\frac{k+1}{10}$是完全平方数。条件 ii) 是 $\left[\frac{2+2k-c_{\max}}{\mu},\ \frac{2+2k-c_{\min}}{\mu}\right]=[40k-4,40k+25]$包含某个 n^2，满足 $20\nmid n$。我们检验可知，对于每个 n 满足 $n^2=40k+\ell$的 $20\nmid n$，均有$\ell=-4$，…，25。事实上，若 $20\mid n$，则 $400\mid n^2$，特别地 $40\mid n^2$。于是 $40\mid(n^2-40k)=\ell$，这就产生了矛盾。 ■

5.4 具有1间隙的曲面

在小节 5.3 中，我们逐一考察表 6 中的每种情形，并描述其全部间隙数。在本小节中，我们采取相反的做法：固定一个数，并描述所有将其作为间隙数的情形。提醒读者，我们的问题动机（第 1 节）是确定何时存在截面 P_1，P_2 满足 $P_1\cdot P_2=1$，从而诱导出一个圆锥丛，并以 P_1+P_2 作为其可约纤维。这个问题的答案就是本小节的主定理：

定理 5.8。 设 X 是一个有理椭圆曲面。那么，当且仅当 $r=0$ 或$r=1$，且 π 有一个III型* 纤维时，X 有一个1-间隙。

证明的策略如下。我们已经知道，只要 $r = 0$（定理 3.1），或者 $r = 1$ 且 π 有一个III型* 纤维（定理 5.7，编号 43），就存在一个1-间隙。反过来，我们需要在所有满足 $r \geq 1$ 且 $T \neq E_7$的情形下，找到 P_1，P_2 使得 $P_1 \cdot P_2 = 1$。

首先，我们引入两个引理，它们通过少量计算即可解决大多数情形，并将其余情形留待定理 5.8 的证明。在引理 5.9 和引理 5.11 中，我们的目标是分析窄格 $E(K)^0$，并应用命题 4.12 找出不存在 1-间隙的情形。

引理 5.9。若以下条件之一成立，则对于某个 $P \in E(K)^0$，有 $h(P) = 4$.

a) $E(K)^0$ 的格拉姆矩阵主对角线上有一个4 。

b) 对于某些 n、$m \geq 1$，$A_n \oplus A_m$ 可嵌入 $E(K)^0$。

c) 对于某个 $n \geq 3$，A_n、D_n 或 E_n 可嵌入 $E(K)^0$。

证明。情形 a) 显然。假设 b) 成立，分别从 A_n、A_m 中取生成元 P_1、P_2，使得$h(P_1) = h(P_2) = 2$。由于 A_n、A_m 属于直和，$\mathbf{h}P_1, P_2\mathbf{i} = 0$，因此 $h(P_1 + P_2) = 4$，证毕。若 c) 成立，则由 $n \geq 3$ 可知，我们可以从 $L_1 = A_n$、D_n 或 E_n 的生成元中选取两个元素 P_1、P_2，使得 $h(P_1) = h(P_2) = 2$ 且 $\mathbf{h}P_1, P_2\mathbf{i} = 0$。因此，$h(P_1 + P_2) = 4$，如所述。 ■

推论 5.10. 在以下情形中，X 不存在1-间隙。

- $r \geq 3$： 除第 20 项外的所有情形。
- $r = 1$，2：情形 编号 25、26、30、32-36、38、41、42、46、52、54、60。

证明。 我们查看表 $E(K)^0$ 中的第 8 列，以找出哪些情形满足引理 5.9中的条件 a)、b)、c) 之一。

a) 适用于编号 12、17、19、22、23、25、30、32、33、36、38、41、46、52、54、60 .

b) 适用于编号 10、11、14、15、18、24、26、34、35、42。

c）适用于编号 1–10、13、16、21。

特别地，这涵盖了所有满足 $r \geq 3$ (编号 1–24) 的情形，但编号 20 除外。根据引理 5.9，在这些情形中，每种情况下都存在 $P \in E(K)^0$ 使得 $h(P) = 4$，由命题 4.12 1) 即得结论。 ■

在下一个引理中，我们还将分析 $E(K)^0$，以找出没有 1-间隙的曲面。

引理 5.11。假设 $E(K)^0 \simeq A_n$ 对于某个 $n \geq 1$ 成立，并且 $E(K)$ 的挠部分非平凡。那么 X 没有 1-间隙。此结论适用于表 8中的编号 *28*、*39*、*44*、*48*、*51*、*57*、*58* 。

证明。 取一个生成元 P属于 $E(K)^0$ 满足 $h(P) = 2$ 并应用命题 4.12 2）。 ■

我们现在可以证明本小节的主要结果。

定理 5.8 的证明。 我们需要证明，在所有满足以下条件的情形中 $r \geq 1$ 且 $T \neq E_7$ 存在P_1， $P_2 \in E$（K），使得 $P_1 \cdot P_2 = 1$。这对应于表 8 中除 43 以外的第 1–61 项情形。

满足以下条件的情形 $r = 1$ 且 E（K）无挠，可由定理 5.10 解决，即编号 45–47、49、50、55、56。将这些情形加入推论 5.10 和引理 5.11 中已处理的情形后，我们便解决了以下问题：

$$\text{No. } 1\text{-}19,\ 21\text{-}26,\ 28,\ 30,\ 32\text{-}36,\ 38,\ 39,\ 41\text{-}52,\ 54\text{-}58,\ 60.$$

对于其余情形，我们应用命题 4.12 3)，该命题涉及在区间 $\left[\frac{4-c_{\max}}{\mu}, \frac{4-c_{\min}}{\mu}\right]$（见表 7）中寻找完全平方数；对于满足$\Delta = 2$ 的情形，则考虑半开区间（编号 53、61）。

No.	T	$E(K)$	μ	I	$n^2 \in I$
20	$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_2^* \oplus$h1/6i	$\frac{1}{6}$	$[13, 23]$	4^2
27	E_6	A_2^*	$\frac{2}{3}$	$[4, 4]$	2^2
29	$A_5 \oplus A_1$	$A_1^* \oplus$h1/6i	$\frac{1}{6}$	$[12, 21]$	4^2
31	$A_4 \oplus A_2$	$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{15}$	$[16, 21]$	4^2
37	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1$	$A_1^* \oplus$h1/12i	$\frac{1}{12}$	$[22, 28]$	5^2
40	$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$	h1/6i$^{\oplus 2}$	$\frac{1}{6}$	$[10, 21]$	4^2
53	$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	h1/6i $\oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{1}{6}$	$[9, 12]$	3^2
59	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	h1/12i $\oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{1}{12}$	$[16, 42]$	$4^2, 5^2, 6^2$
61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	h1/6i $\oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{1}{6}$	$[9, 12]$	3^2

表 7：区间 $I := \left[\frac{4-c_{\max}}{\mu}, \frac{4-c_{\min}}{\mu}\right]$ 中的完全平方数。

在第 59 号中，我们有 $\Delta > 2$，因此需要作特别处理。设 $T = T_{v_1} \oplus T_{v_2} \oplus T_{v_3} \oplus T_{v_4} = A_3 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$。如果 P生成 $E(K)$ 的自由部分，而 Q 生成其挠部分，那么$h(P) = \frac{1}{12}$，并且 $4P + Q$ 在 Θ_{v_1},2, Θ_{v_2},1, Θ_{v_3},1, Θ_{v_4} 处与可约纤维相交。[1] [Kur14][例 1.7]。根据表 1 和高度公式 (2),

$$\frac{4^2}{12} = h(4P + Q) = 2 + 2(4P + Q) \cdot O - \frac{2 \cdot 2}{4} - \frac{1 \cdot 2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2},$$

因此 $(4P + Q) \cdot O = 1$，如所需。 ■

6 附录

我们复现了 [OS91，主要定理] 中的部分表格，该表提供了 Mordell-Weil 秩为 $r \geq 1$ 的有理椭圆曲面的 Mordell-Weil格数据。我们仅添加了列 $c_{\max}$， $c_{\min}$， Δ。

No.	r	T	$E(K)^0$	$E(K)$	$c_{\max}$	$c_{\min}$	Δ
1	8	0	E_8	E_8	0	0	0
2	7	A_1	E_7	E_8^*	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
3	6	A_2	E_6	E_6^*	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
4		$A_1^{\oplus 2}$	D_6	D_6^*	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
5	5	A_3	D_5	D_5^*	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
6		$A_2 \oplus A_1$	A_5	A_5^*	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
7		$A_1^{\oplus 3}$	$D_4 \oplus A_1$	$D_4^* \oplus A_1^*$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
8	4	A_4	A_4	A_4^*	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
9		D_4	D_4	D_4^*	1	1	0
10		$A_3 \oplus A_1$	$A_3 \oplus A_1$	$A_3^* \oplus A_1^*$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
11		$A_2^{\oplus 2}$	$A_2^{\oplus 2}$	$A_2^{*\oplus 2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
12		$A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$
13		$A_1^{\oplus 4}$	D_4	$D_4^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
14		$A_1^{\oplus 4}$	$A_1^{\oplus 4}$	$A_1^{*\oplus 4}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
15	3	A_5	$A_2 \oplus A_1$	$A_2^* \oplus A_1^*$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$
16		D_5	A_3	A_3^*	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
17		$A_4 \oplus A_1$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$
18		$D_4 \oplus A_1$	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
19		$A_3 \oplus A_2$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

20		$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_2 \oplus \mathbf{h6i}$	$A_2^* \oplus \mathbf{h1/6i}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
21		$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	A_3	$A_3^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
22		$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$A_1 \oplus \mathbf{h4i}$	$A_1^* \oplus \mathbf{h1/4i}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
23		$A_2 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1 \oplus \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$A_1^* \oplus \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
24		$A_1^{\oplus 5}$	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
25	2	A_6	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}$
26		D_6	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
27		E_6	A_2	A_2^*	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0
28		$A_5 \oplus A_1$	A_2	$A_2^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
29		$A_5 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \mathbf{h6i}$	$A_1^* \oplus \mathbf{h1/6i}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
30		$D_5 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \mathbf{h4i}$	$A_1^* \oplus \mathbf{h1/4i}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
31		$A_4 \oplus A_2$	$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 15 & 1 & 8 \\ 2 & & \end{pmatrix}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{5}$
32		$D_4 \oplus A_2$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
33		$A_4 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ 10 & 1 & 3 \\ 2 & & \end{pmatrix}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{10}$
34		$D_4 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
35		$A_3^{\oplus 2}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
36		$A_3^{\oplus 2}$	$\mathbf{h4i}^{\oplus 2}$	$\mathbf{h1/4i}^{\oplus 2}$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
37		$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \mathbf{h12i}$	$A_1^* \oplus \mathbf{h1/12i}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
38		$A_3 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1 \oplus \mathbf{h4i}$	$A_1^* \oplus \mathbf{h1/4i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
39		$A_2^{\oplus 3}$	A_2	$A_2^* \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
40		$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\mathbf{h6i}^{\oplus 2}$	$\mathbf{h1/6i}^{\oplus 2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}$

41		$A_2 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
42		$A_1^{\oplus 6}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
43	1	E_7	A_1	A_1^*	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0
44		A_7	A_1	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{8}$
45		A_7	$\langle 8 \rangle$	$\mathbf{h}1/8\mathbf{i}$	2	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{8}$
46		D_7	$\langle 4 \rangle$	$\mathbf{h}1/4\mathbf{i}$	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
47		$A_6 \oplus A_1$	$\langle 14 \rangle$	$\mathbf{h}1/14\mathbf{i}$	$\frac{31}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{7}$
48		$D_6 \oplus A_1$	A_1	A_1^*	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
49		$E_6 \oplus A_1$	$\langle 6 \rangle$	$\mathbf{h}1/6\mathbf{i}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
50		$D_5 \oplus A_2$	$\langle 12 \rangle$	$\mathbf{h}1/12\mathbf{i}$	$\frac{23}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
51		$A_5 \oplus A_2$	A_1	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
52		$D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 4 \rangle$	$\mathbf{h}1/4\mathbf{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$
53		$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 6 \rangle$	$\mathbf{h}1/6\mathbf{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
54		$D_4 \oplus A_3$	$\langle 4 \rangle$	$\mathbf{h}1/4\mathbf{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
55		$A_4 \oplus A_3$	$\langle 20 \rangle$	$\mathbf{h}1/20\mathbf{i}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{29}{20}$
56		$A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\langle 30 \rangle$	$\mathbf{h}1/30\mathbf{i}$	$\frac{71}{30}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{28}{15}$
57		$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	A_1	A_1^*	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
58		$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	A_1	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
59		$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 12 \rangle$	$\mathbf{h}1/12\mathbf{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{6}$
60		$A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\langle 4 \rangle$	$\mathbf{h}1/4\mathbf{i} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
61		$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	$\langle 6 \rangle$	$\mathbf{h}1/6\mathbf{i} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

表 8：Mordell-Weil 秩为 $r \geq 1$ 的有理椭圆曲面的 Mordell-Weil 格。

参考文献

[Ber12] P. Bernays. 关于用非平方判别式的本原二元二次型表示正整数。博士论文，哥廷根，1912年。[BH] M. Bhargava 和 J. Hanke. 万有二次型与290定理。预印本见 http://math.stanford.edu/~vakil/files/290-Theorem-preprint.pdf。[Cos] R. D. Costa. 有理椭圆曲面上圆锥曲线丛的纤维分类。arXiv:2206.03549。[Elk90] N. D. Elkies. 有理椭圆曲面的 Mordell-Weil 格。波恩工作会议，1990年。[HW79] G. H. Hardy 和 E. M. Wright. 《数论导引》。克拉伦登出版社，1979年。[Kur14] Y. Kurumadani. 三次曲线铅笔与有理椭圆曲面。硕士论文，京都大学，2014年。[MP89] R. Miranda 和 U. Persson. 椭圆曲面的挠群。《数学汇编》，72(3):249–267，1989年。[Nis96] K. Nishiyama. 某些 K3 曲面上的雅可比纤维化及其 Mordell-Weil群。《日本数学杂志》，22(2)，1996年。[OS91] K. Oguiso 和 T. Shioda. 有理椭圆曲面的 Mordell-Weil 格。《圣保罗大学数学评论》，40，1991年。[Shi89] T. Shioda. Mordell-Weil格与伽罗瓦表示，I、II、III。《日本学士院纪要》，65(7)，1989年。[Shi90] T. Shioda. 关于 Mordell-Weil格。《圣保罗大学数学评论》，39(7)，1990年。[SS10] M. Schuett 和 T. Shioda. 椭圆曲面。《纯数学高级研究》，60:51–160，2010年。[SS19] M. Schuett 和 T. Shioda. Mordell-Weil 格，第70卷，《数学及其边界领域成果》。施普林格，2019年。