arXiv:2301.03138v3 [math-ph] 7 Feb 2024

经典李（超）代数上可酉化模的 Gaudin 哈密顿量

Wan Keng Cheong 和 Ngau Lam

摘要

设 M 是李（超）代数 $\mathfrak{g}$ 上可酉化不可约最高权模的张量积，其中 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(m|n)$、$\mathfrak{osp}(2m|2n)$ 或 $\mathfrak{spo}(2m|2n)$。我们利用超对偶证明，$\mathfrak{g}$ 在 M 上的（超）Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量，可以由相应李代数的 Gaudin 哈密顿量在某些有限维不可约模的张量积上的奇异特征向量得到。因此，$\mathfrak{g}$ 的（超）Gaudin 哈密顿量在由 M 的奇异向量张成的空间上可对角化，进而在 M 上也可对角化。特别地，我们证明了与任意正交李代数 $\mathfrak{so}(2n)$ 及辛李代数 $\mathfrak{sp}(2n)$ 相关的 Gaudin 哈密顿量，在无限维可酉化不可约最高权模的张量积上可对角化。

1 引言

Gaudin 模型由 Gaudin [G1, G2] 提出，用于描述与任意有限维单李代数 $\mathfrak{g}$相关的完全可积量子自旋链。设 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的非退化不变双线性型。设 $\{I_a \,|\, a = 1,\dots,d\}$ 是 $\mathfrak{g}$的一组基，$\{I^a \,|\, a = 1,\dots,d\}$ 是关于双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 的对偶基，其中 d是 $\mathfrak{g}$的维数。$\mathfrak{g}$ 的 Casimir 对称张量 Ω 定义为 $\Omega = \sum_{a=1}^{d} I_a \otimes I^a$。取 $\ell \in \mathbb{N}$ 满足 $\ell \geq 2$，并令 $z_1,\dots,z_\ell$为互不相同的复数。对于任意 $i = 1,\dots,\ell$，与 $\mathfrak{g}$ 相关的 Gaudin 模型的（二次）Gaudin 哈密顿量 H^i 定义为

$$H^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\ell} \frac{\Omega^{(ij)}}{z_i - z_j},$$

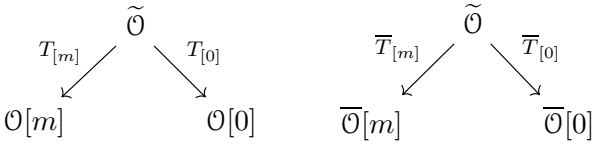
其中 $\Omega^{(ij)}$ 的定义见 (4.1)。Gaudin 哈密顿量 $H^1,\dots,H^\ell$ 作用于张量积 $M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$ 上，其中每个 M_i 都是一个 $\mathfrak{g}$-模，并且它们是彼此可交换的算子。

寻找 Gaudin 哈密顿量的公共特征向量是研究 Gaudin 模型的主要问题之一。Bethe ansatz 方法从所谓的 Bethe Ansatz 方程的解出发，显式构造公共特征向量；该方法已证明对特殊线性李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 有效（参见 [G1]）。通过这种方法得到的特征向量称为 Bethe 向量。Babujian 和 Flume [BF] 将 Bethe Ansatz 方程推广到了任意单李代数的情形。在 [FFR], 中，Feigin、Frenkel 和 Reshetikhin 提出了一种新方法，该方法基于临界层上仿射李代数的 Wakimoto 模。他们通过限制某些

张量积Wakimoto 模上的不变泛函得到了 Bethe 向量，并且还发现 Bethe 向量与 Knizhnik-Zamolodchikov 方程 [KZ] 的解密切相关（另见 [EFK]）。

本文关注（平方）Gaudin 哈密顿量的超版本。此类 Gaudin 哈密顿量的精确定义见（4.2）和（5.1）。我们发现，与类型为 $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ 的任意无限秩经典李（超）代数的（平凡）中心扩张相关联的 Gaudin 哈密顿量，与相应李代数的（平凡）中心扩张相关联的 Gaudin 哈密顿量之间存在一种有趣的联系。

让$\mathfrak{g}$是第 2.1–2.3 节中所述的类型为 $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ 的无限秩经典李超代数，设 $\mathcal{G}[m]$ 和 $\overline{\mathcal{G}}[m]$ 是 $\mathcal{G}$的某些子代数。令 $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]$ 分别为 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}[m]$ 和 $\overline{\mathcal{G}}[m]$的中心扩张。我们的主要工具是超对偶（参见 [CL2、CLW1、CLW2]），它断言抛物 BGG 范畴之间存在张量范畴等价：分别是 $\tilde{\mathfrak{g}}$-模的范畴 $\mathcal{O}$ 、 $\mathfrak{g}[m]$-模的范畴 $\mathcal{O}[m]$ 以及$\overline{\mathfrak{g}}[m]$-模的范畴 $\overline{\mathcal{O}}[m]$（参见定理 2.11）。以下图示概括了这些范畴之间的关系。



这里，在第 2.6 节中定义的张量函子 $T_{[m]}$、 $\overline{T}_{[m]}$、 $T_{[0]}$ 和 $\overline{T}_{[0]}$，对于 $m \in \mathbb{N}$ 而言是张量范畴之间的等价。注意，对于 $m \in \mathbb{N}$， $\tilde{\mathfrak{g}}$、 $\mathfrak{g}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]$ 是李超代数，而 $\mathfrak{g}[0]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[0]$ 是李代数。换言之，超对偶给出了李超代数的抛物 BGG 范畴与相应李代数的抛物 BGG 范畴之间的范畴等价。

我们将 $\tilde{\mathfrak{g}}$ （分别地， $\mathfrak{g}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]$）的 Gaudin 哈密顿量视为作用于范畴 $\mathcal{O}$ （分别地， $\mathcal{O}[m]$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]$）中模的张量积上的线性算子。我们不直接为这些算子构造奇异特征向量，而是运用超对偶以及 [CaL] 的工作来确立以下结果。

定理 1.1（定理 4.7）。对于 $m \in \mathbb{Z}_+$， $\tilde{\mathfrak{g}}$、 $\mathfrak{g}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]$ 的 Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量集之间存在一一对应。

此外，通过使用截断函子的概念（见（2.18）），对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathfrak{g}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]$ 的 Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量与其有限秩对应对象 $\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$ 的 Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量联系起来。

Gaudin 哈密顿量的对角化问题在 Gaudin 模型的研究中发挥着重要作用。设 $\mathcal{G}$ 是一个有限维单李代数。Rybnikov [Ry] 证明，对于一般的 $z_1, \dots, z_\ell$，由（二次）Gaudin 哈密顿量和高阶 Gaudin 哈密顿量生成的 Gaudin 代数，在 $L_1 \otimes \cdots \otimes L_\ell$ 中奇异向量张成的空间上是可对角化的，其中对于每个 $i = 1, \dots, \ell$， L_i 都是 $\mathcal{G}$ 上的有限维不可约模。相关结果可参见 [MV, MTV1, MTV2, FFRy, LMV] 。

在本文中，我们希望将 Rybnikov 的结果推广到李（超）代数的情形。我们将重点研究有限维经典李（超）代数

$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ $\mathfrak{x}$ 型，其中 $\mathfrak{x}$ 表示 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$ 中一个固定的类型（参见第2.1、2.2和2.3节）。注意，$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n \cong \mathfrak{gl}(m|n)$、$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n \cong \mathfrak{spo}(2m|2n)$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n \cong \mathfrak{osp}(2m|2n)$。

定理 1.2（定理 5.6 和定理 5.8）。设 $M = \overline{L}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{L}_\ell$，其中每个 $\overline{L}_i$ 都是 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$上的不可约最高权模，且 M^{sing} 是由 M中的奇异向量张成的空间。假设对于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$，每个 $\overline{L}_i$ 都是多项式模，并且对于$\mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$，$\overline{L}_i$' 的所有最高权都属于 $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{x}}$, $I(m|n)$ 或 $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{x}}$, $II(m|n)$（见第 3.3 节）。那么，对于 $i = 1, \ldots, \ell$ 和一般的 $z_1, \ldots, z_\ell$，与 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$相关联的（超）Gaudin 哈密顿量 $\overline{H}^i[m]_n$ 在 M^{sing} 上可对角化，并且其任一特征基都可以由与李代数对应对象 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[0]_k$' 相关联的 Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量构造得到，这些奇异特征向量取自若干有限维不可约模的张量积。

注 1.3. 上述定理中的 $\overline{L}_i$ 是关于 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 上自然选取的 $*$结构的 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 可酉化模（见第 3.2 节和第 3.3 节）。该定理还应能给出一个过程：利用相应李代数的结果，构造经典李（超）代数的 Gaudin 哈密顿量的公共特征向量。

尽管关于 Gaudin 模型的研究成果颇丰，但关于超 Gaudin 哈密顿量的已知结果似乎不多。在 [MVY], Mukhin、Vicedo 和 Young 研究了与一般线性李超代数 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 相关的 Gaudin 哈密顿量，并证明这些算子在自然模 $\mathbb{C}^{m|n}$ 的张量幂中由奇异向量张成的空间上可对角化，且其特征基由 Bethe 向量构成。在[KuM], Kulish 和 Manojlović 明确构造了与正交辛李超代数 $\mathfrak{osp}(1|2)$ 相关的 Gaudin 哈密顿量的特征向量。读者也可参阅 [HMVY、L、LM]，了解相关结果。我们希望本文能为 Gaudin 模型带来新的见解。

本文结构如下。第2节中，我们固定记号，并回顾经典李（超）代数及其中心扩张的一些背景知识。我们还定义分别与李（超）代数$\tilde{\mathfrak{g}}$、$\mathfrak{g}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]$相关的抛物 BGG 范畴 $\mathcal{O}$、$\mathcal{O}[m]$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]$，并讨论给出这些范畴之间等价关系的超对偶。第3节中，我们简要介绍 $*$结构，并研究可酉化模，这些模将在我们对 Gaudin 哈密顿量的研究中予以考察。第4节中，我们研究与有限秩和无限秩李（超）代数的中心扩张相关的 Gaudin 哈密顿量，并建立奇异特征向量集合之间的一一对应关系（见定理 4.7 和命题 4.8）。第5节中，我们重点研究有限维经典李（超）代数的 Gaudin 哈密顿量，并证明定理 5.6 和定理 5.8；这两个定理肯定地回答了可酉化模上算子的对角化问题，并给出了一种寻找公共特征向量的可能方法。

记号。本文中，$\mathbb{N}$ 表示正整数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{Z}^*$ 表示非零整数集，$\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集，$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$表示半整数和整数集，$\mathbb{C}$ 表示复数集。所有向量空间、代数、张量积等均定义在 $\mathbb{C}$上。

2 预备知识

本节首先定义有限秩和无限秩李（超）代数 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}$、$\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{d}$ 和，其中表示三种类型之一：、、。我们考虑它们的中心扩张 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$、$\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$，以及 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$（分别为 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）上的模所构成的抛物型 BGG 范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}$（分别为 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和$\overline{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）。接着，我们回顾截断函子；当 $n \in \mathbb{N}$时，这些函子分别将 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}[m]_\infty$ 和 $\overline{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}[m]_\infty$ 与 $\mathcal{O}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$联系起来。最后，我们介绍张量函子 $T_{[m]}$ 和$\overline{T}_{[m]}$ 及其性质。关于类型 $\mathfrak{a}$ 的详情，参见 [CL2 第 2 节和 3]；关于类型 $\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$的详情，参见 [CLW1 第 2 节和 3]（另见 [CW 第 6.1 节和第 6.2] 节，以及 [CaL 第 2.4]节）。本文中固定 $m \in \mathbb{Z}_+$和 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。

Let $\widetilde{V}$ 表示以 $\mathbb{C}$ 为底域、具有有序基 $\{v_r \mid r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\}$的超空间。$v_r$ 的宇称定义如下：若 $r \in \mathbb{Z}$，则为 $|v_r| = \bar{0}$；若 $r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$，则为 $|v_r| = \bar{1}$。

令 $\mathfrak{gl}(\widetilde{V})$ 为所有线性自同态构成的李超代数，这些自同态仅在有限多个 v_r上不为零。对于 i、$j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，令 $E_{i,j}$为定义在 V 上的线性自同态，其定义如下：

$$E_{i,j}(v_r) = \delta_{j,r} v_i \qquad \text{for } r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

其中 δ 是克罗内克 δ。李超代数 $\mathfrak{gl}(V)$由 $E_{i,\ j}$ 张成，其中$i, j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。

$\widehat{\mathfrak{gl}}(V)$ 李超代数 $\mathfrak{gl}(V)$有一个中心扩张，记为 $\widehat{\mathfrak{gl}}(V)$，其一维中心为 $\mathbb{C}K$，对应于以下 2- 余循环（参见 [CL1，第 99] 页）：

$$\tau(A, B) := \mathrm{Str}([J, A]B), \qquad A, B \in \mathfrak{gl}(\widetilde{V}), \tag{2.1}$$

其中 $J = -\sum_{r \geq \frac{1}{2}} E_{r,\ r}$，Str 表示超迹。事实上，余循环 τ是一个余边界。此外，存在一个同构 ι，它从李超代数的直和 $\mathfrak{gl}(V) \oplus \mathbb{C}K$ 映射到 $\widehat{\mathfrak{gl}}(V)$，定义如下：

$$\iota(A) = A + \mathrm{Str}(JA)K, \quad \text{for } A \in \mathfrak{gl}(\widetilde{V}), \quad \text{and} \quad \iota(K) = K. \tag{2.2}$$

注 2.1。中心扩张的概念便于表述截断函子以及第 2.6 节中描述的超对偶。建议读者参阅[CLW1, 注 3.3] 以了解更多说明。

Let

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_m(n) &= \Big\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots, \pm(m - \frac{1}{2})\Big\} \cup \{0\} \cup \{\pm j \mid j \in \mathbb{N}, j < n + 1\}, \\
\overline{\mathbb{J}}_m(n) &= \{\pm 1, \ldots, \pm m\} \cup \{0\} \cup \Big\{\pm(j - \frac{1}{2}) \;\Big|\; j \in \mathbb{N}, j < n + 1\Big\}, \\
\widetilde{\mathbb{J}}(n) &= \Big\{r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \;\Big|\; -n \leq r \leq n\Big\}, \\
\mathbb{J}_m^\times(n) &= \mathbb{J}_m(n) \backslash \{0\}, \qquad \overline{\mathbb{J}}_m^\times(n) = \overline{\mathbb{J}}_m(n) \backslash \{0\}, \qquad \widetilde{\mathbb{J}}^\times(n) = \widetilde{\mathbb{J}}(n)) \backslash \{0\}, \\
\mathbb{J}_m^+(n) &= \{r \in \mathbb{J}_m(n) \mid r > 0\}, \\
\overline{\mathbb{J}}_m^+(n) &= \{r \in \overline{\mathbb{J}}_m(n) \mid r > 0\}, \\
\widetilde{\mathbb{J}}^+(n) &= \Big\{r \in \widetilde{\mathbb{J}}(n) \;\Big|\; r > 0\Big\}.
\end{aligned}$$

我们令 $\widetilde{V}(n)$、$V_m(n)$、$\overline{V}_m(n)$、$\widetilde{V}^\times(n)$、$V_m^\times(n)$ 和 $\overline{V}_m^\times(n)$ 为 $\widetilde{V}$的子空间，其有序基为 $\{v_i\}$，分别由 $\widetilde{\mathbb{J}}(n)$、$\mathbb{J}_m(n)$、$\overline{\mathbb{J}}_m(n)$、$\widetilde{\mathbb{J}}^\times(n)$、$\mathbb{J}_m^\times(n)$ 和 $\overline{\mathbb{J}}_m^\times(n)$ 编号。由此得到李超代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数 $\mathfrak{gl}(\widetilde{V}(n))$、$\mathfrak{gl}(V_m(n))$、$\mathfrak{gl}(\overline{V}_m(n))$、$\mathfrak{gl}(\widetilde{V}^\times(n))$、$\mathfrak{gl}(V_m^\times(n))$ 和 $\mathfrak{gl}(\overline{V}_m^\times(n))$ $\widetilde{\quad}$ $\widehat{\quad}$。令 $\mathfrak{b} := \bigoplus_{r\le s, r,s\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathbb{C}E_{r,s}$ 表示 $\mathfrak{gl}(V)$ 的标准 Borel 子代数。

若 $n=\infty$，我们将省略符号 (n)。例如，$\mathbb{J}_m := \mathbb{J}_m(\infty)$。定义 $\mathbb{J}_m$ 和 $\overline{\mathbb{J}}_m$ 上的全序如下:

$$\begin{aligned}\dots <_{\mathbb{J}_m} -3 <_{\mathbb{J}_m} -2 <_{\mathbb{J}_m} -1 <_{\mathbb{J}_m} -(m-\frac{1}{2}) <_{\mathbb{J}_m} \dots <_{\mathbb{J}_m} -\frac{3}{2} <_{\mathbb{J}_m} -\frac{1}{2}\\ <_{\mathbb{J}_m} 0 <_{\mathbb{J}_m} \frac{1}{2} <_{\mathbb{J}_m} \frac{3}{2} <_{\mathbb{J}_m} \dots <_{\mathbb{J}_m} m-\frac{1}{2} <_{\mathbb{J}_m} 1 <_{\mathbb{J}_m} 2 <_{\mathbb{J}_m} 3 <_{\mathbb{J}_m} \dots\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\dots <_{\overline{\mathbb{J}}_m} -\frac{5}{2} <_{\overline{\mathbb{J}}_m} -\frac{3}{2} <_{\overline{\mathbb{J}}_m} -\frac{1}{2} <_{\overline{\mathbb{J}}_m} -m <_{\overline{\mathbb{J}}_m} \dots <_{\overline{\mathbb{J}}_m} -2 <_{\overline{\mathbb{J}}_m} -1\\ <_{\overline{\mathbb{J}}_m} 0 <_{\overline{\mathbb{J}}_m} 1 <_{\overline{\mathbb{J}}_m} 2 <_{\overline{\mathbb{J}}_m} \dots <_{\overline{\mathbb{J}}_m} m <_{\overline{\mathbb{J}}_m} \frac{1}{2} <_{\overline{\mathbb{J}}_m} \frac{3}{2} <_{\overline{\mathbb{J}}_m} \frac{5}{2} <_{\overline{\mathbb{J}}_m} \dots,\end{aligned}$$

分别。由这些序得到标准 Borel 子代数

$$\mathfrak{b}[m] := \bigoplus_{\substack{r\le_{\mathbb{J}_m} s,\\ r,s\in\mathbb{J}_m}} \mathbb{C}E_{r,s} \quad \text{and} \quad \overline{\mathfrak{b}}[m] := \bigoplus_{\substack{r\le_{\overline{\mathbb{J}}_m} s,\\ r,s\in\overline{\mathbb{J}}_m}} \mathbb{C}E_{r,s}$$

分别对应于 $\mathfrak{gl}(V_m)$ 和 $\mathfrak{gl}(\overline{V}_m)$。

$\widetilde{\quad}$2.1 一般线性超代数 $\mathcal{G}^\mathfrak{a}$

设 $\widetilde{V}^+(n)$、$V_m^+(n)$ 和 $\overline{V}_m^+(n)$ 是 $\widetilde{V}$的子空间，其有序基为 $\{v_i\}$，分别以 $\widetilde{\mathbb{J}}^+(n)$、$\mathbb{J}_m^+(n)$ 和 $\overline{\mathbb{J}}_m^+(n)$ 为索引。令 $\widetilde{\mathcal{G}}_n^\mathfrak{a}$ 表示 $\mathfrak{gl}(\widetilde{V})$ 中以 $\{E_{i,j}\,|\,i,j\in\widetilde{\mathbb{J}}^+(n)\}$ 为基的李子代数。记 $\widetilde{\mathcal{G}}^\mathfrak{a} := \widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\mathfrak{a}$。令 $\mathcal{G}^\mathfrak{a}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^\mathfrak{a}[m]_n$ 分别表示 $\widetilde{\mathcal{G}}^\mathfrak{a}$ 中以 $\{E_{i,j}\,|\,i,j\in\mathbb{J}_m^+(n)\}$ 和 $\{E_{i,j}\,|\,i,j\in\overline{\mathbb{J}}_m^+(n)\}$ 为基的李子代数。李（超）代数 $\mathcal{G}^\mathfrak{a}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^\mathfrak{a}[m]_n$ 同构于 $\mathfrak{gl}(m|n)$。令 $\widetilde{\mathfrak{b}}^\mathfrak{a} := \widetilde{\mathcal{G}}^\mathfrak{a} \cap \widehat{\mathfrak{b}}$、$\mathfrak{b}^\mathfrak{a}[m]_n := \mathcal{G}^\mathfrak{a}[m]_n \cap \mathfrak{b}[m]$ 和 $\mathfrak{b}^\mathfrak{a}[\underline{m}]_n := \overline{\mathcal{G}}^\mathfrak{a}[m]_n \cap \mathfrak{b}[m]$ 分别表示 $\widetilde{\mathcal{G}}^\mathfrak{a}$、$\mathcal{G}^\mathfrak{a}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^\mathfrak{a}[m]_n$的标准 Borel 子代数。相应的 Cartan子代数 $\widetilde{\mathfrak{h}}^\mathfrak{a}$、$\mathfrak{h}^\mathfrak{a}[m]_n$ 和 $\mathfrak{h}^\mathfrak{a}[\underline{m}]_n$的基分别为 $\{E_i^\mathfrak{a} := E_{i,i}\,|\,i\in\frac{1}{2}\mathbb{N}\}$、$\{E_{\underline{i}}^\mathfrak{a}\,|\,i\in\mathbb{J}_m^+(n)\}$ 以及 $\{E_{\underline{i}}^\mathfrak{a}\,|\,i\in\overline{\mathbb{J}}_m^+(n)\}$。令 $\{\epsilon_i\}$ 表示具有相应索引的 Cartan 子代数的对偶基。

$\widetilde{\quad}$2.2 正交辛超代数 $\mathcal{G}^\mathfrak{c}$ 及其子代数

在 $V^\times$ 上定义一个非退化斜超对称双线性型 $(\cdot|\cdot)$：

$$(v_i|v_j) = -(v_j|v_i) = \mathrm{sgn}(i)\delta_{i,-j}, \qquad i,j\in\mathbb{Z}^*; \tag{2.3}$$

$$(v_r|v_s) = (v_s|v_r) = \delta_{r,-s}, \qquad r,s\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}; \tag{2.4}$$

$$(v_i|v_r) = (v_r|v_i) = 0, \qquad i\in\mathbb{Z}^*, r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}; \tag{2.5}$$

其中，当 $i > 0$ 时，$\mathrm{sgn}(i) = 1$；当 $i < 0$时，$\mathrm{sgn}(i) = -1$。该双线性型在 $V_m^{\times}(n)$和 $\overline{V}_m^{\times}(n)$上诱导出非退化双线性型。

Let $\widetilde{\mathcal{G}}_n^{\mathfrak{c}}$（分别为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$）是李超代数 $\mathfrak{gl}(\widetilde{V}^{\times}(n))$（分别为 $\mathfrak{gl}(V_m^{\times}(n))$ 和 $\mathfrak{gl}(\overline{V}_m^{\times}(n))$），它们保持双线性型 $(\cdot|\cdot)$。李超代数 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}} := \widetilde{\mathcal{G}}_{\infty}^{\mathfrak{c}}$由以下元素张成（$i$、$j \in \mathbb{Z}^*$和 r、$s \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$）：

$$
\begin{aligned}
E_{i,j}^{\mathfrak{c}} &:= -E_{-j,-i}^{\mathfrak{c}} := E_{i,j} - E_{-j,-i}, && ij > 0;\\
E_{i,j}^{\mathfrak{c}} &:= E_{-j,-i}^{\mathfrak{c}} := E_{i,j} + E_{-j,-i}, && ij < 0;\\
E_{r,s}^{\mathfrak{c}} &:= -E_{-s,-r}^{\mathfrak{c}} := E_{r,s} - E_{-s,-r}; &&\\
E_{i,r}^{\mathfrak{c}} &:= E_{-r,-i}^{\mathfrak{c}} := E_{i,r} + E_{-r,-i}, && i > 0;\\
E_{i,r}^{\mathfrak{c}} &:= -E_{-r,-i}^{\mathfrak{c}} := E_{i,r} - E_{-r,-i}, && i < 0.
\end{aligned}
$$

子代数 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 由 $E_{i,j}^{\mathfrak{c}}$ 张成，其中 i、$j \in \mathbb{J}_m^{\times}(n)$ 和 $\overline{\mathbb{J}}_m^{\times}(n)$ 分别对应。注意，$\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 同构于 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$，而 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 同构于$\mathfrak{spo}(2m|2n)$。

我们用 $\widetilde{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} := \widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}} \cap \widetilde{\mathfrak{b}}$、$\mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}[m]_n := \mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n \cap \mathfrak{b}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}[m]_n := \overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n \cap \mathfrak{b}[m]$ 分别表示 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}$、$\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 的标准 Borel 子代数。相应的 Cartan 子代数 $\widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{c}}$、$\mathfrak{h}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 的基分别为 $\{E_i^{\mathfrak{c}} := E_{i,\,i} - E_{-i,\,-i} \mid i \in \frac{1}{2}\mathbb{N}\}$、$\{E_i^{\mathfrak{c}} \mid i \in \mathbb{J}_m^{+}(n)\}$ 和 $\{E_i^{\mathfrak{c}} \mid i \in \overline{\mathbb{J}}_m^{+}(n)\}$。令 $\{\epsilon_i\}$ 表示具有相应指标的 Cartan 子代数的对偶基。

2.3 正交辛超代数 $\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}$ 及其子代数

在 $V^{\times}$ 上定义非退化超对称双线性型 $(\cdot|\cdot)$：

$$
\begin{aligned}
(v_i|v_j) &= (v_j|v_i) = \delta_{i,-j}, && i,j \in \mathbb{Z}^*; && (2.6)\\
(v_r|v_s) &= -(v_s|v_r) = \mathrm{sgn}(r)\delta_{r,-s}, && r,s \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}; && (2.7)\\
(v_i|v_r) &= (v_r|v_i) = 0, && i \in \mathbb{Z}^*, r \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}. && (2.8)
\end{aligned}
$$

双线性型在 $V_m^{\times}(n)$ 和 $\overline{V}_m^{\times}(n)$ 上诱导出非退化双线性型。

令 $\widetilde{\mathcal{G}}_n^{\mathfrak{d}}$（分别为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$）为李超代数 $\mathfrak{gl}(\widetilde{V}^{\times}(n))$（分别为 $\mathfrak{gl}(V_m^{\times}(n))$ 和 $\mathfrak{gl}(\overline{V}_m^{\times}(n))$）中保持双线性型 $(\cdot|\cdot)$ 的子代数。李超代数 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}} := \widetilde{\mathcal{G}}_{\infty}^{\mathfrak{d}}$ 由以下元素（i、$j \in \mathbb{Z}^*$ 和 r、$s \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$）张成：

$$
\begin{aligned}
E_{i,j}^{\mathfrak{d}} &:= -E_{-j,-i}^{\mathfrak{d}} := E_{i,j} - E_{-j,-i}; &&\\
E_{r,s}^{\mathfrak{d}} &:= -E_{-s,-r}^{\mathfrak{d}} := E_{r,s} - E_{-s,-r}, && rs > 0;\\
E_{r,s}^{\mathfrak{d}} &:= E_{-s,-r}^{\mathfrak{d}} := E_{r,s} + E_{-s,-r}, && rs < 0;\\
E_{i,r}^{\mathfrak{d}} &:= E_{-r,-i}^{\mathfrak{d}} := E_{i,r} + E_{-r,-i}, && r > 0;\\
E_{i,r}^{\mathfrak{d}} &:= -E_{-r,-i}^{\mathfrak{d}} := E_{i,r} - E_{-r,-i}, && r < 0.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 的子代数由 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}$ 中的$E_{i,j}^{\mathfrak{d}}$ 张成，其中分别有 i、$j \in \mathbb{J}_m^{\times}(n)$和 $\overline{\mathbb{J}}_m^{\times}(n)$。注意，$\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 同构于 $\mathfrak{spo}(2m|2n)$，而 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 同构于$\mathfrak{osp}(2m|2n)$。

我们用 $\widetilde{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{d}} := \widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}} \cap \widehat{\mathfrak{b}}$、$\mathfrak{b}^{\mathfrak{d}}[m]_n := \mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n \cap \mathfrak{b}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{d}}[m]_n := \overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n \cap \overline{\mathfrak{b}}[m]$ 分别表示 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}$、$\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 的标准 Borel 子代数。相应的 Cartan 子代数 $\widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{d}}$、$\mathfrak{h}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 和 $\mathfrak{h}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 的基分别为 $\{E_i^{\mathfrak{d}} := E_{i,\,i} - E_{-i,\,-i} \mid i \in \frac{1}{2}\mathbb{N}\}$、$\{E_i^{\mathfrak{d}} \mid i \in \mathbb{J}_m^+(n)\}$ 和 $\{E_i^{\mathfrak{d}} \mid i \in \overline{\mathbb{J}}_m^+(n)\}$。用 $\{\epsilon_i\}$ 表示相应指标的 Cartan 子代数的对偶基。

$\widetilde{\ }$在超空间 $V^{\times}$ 上定义一个次数为 1 的线性自同构 φ，如下：

$$\varphi(v_{\pm r}) := \begin{cases} v_{\pm(r-\frac{1}{2})}, & \text{if } r \in \mathbb{N}; \\ v_{\pm(r+\frac{1}{2})}, & \text{if } r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+. \end{cases} \tag{2.9}$$

$\widetilde{\ }$自同构 φ 在李超代数 $\mathfrak{gl}(V^{\times})$ 上诱导出一个自同构 $\widehat{\varphi}$。由 (2.6)、(2.7) 和 (2.8) 定义在 $V^{\times}$ 上的 $\widetilde{\ }$超对称双线性型，恰好是通过 φ 由在 $V^{\times}$ 上根据 (2.3)、$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$(2.4) 和 (2.5) 定义的斜超对称双线性型所诱导的双线性型 $\widetilde{\ }$。将 $\widehat{\varphi}$ 限制在 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}$ 上，可得到从 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}$ 到 $\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}$ 的同构，进而得到从 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n$（分别为 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$）到 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$（分别为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n$）的同构。显然，$\widehat{\varphi}$ 保持相应的 Borel 子代数和 Cartan 子代数不变。$\widehat{\varphi}$ 的限制也记作 $\widehat{\varphi}$。我们将结果总结为以下引理。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$引理 2.2. 存在一个同构 $\widehat{\varphi}$，从 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}$ 到 $\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}$，由下式给出

$$\widehat{\varphi}(E_{r,s}^{\mathfrak{c}}) = \begin{cases} E^{\mathfrak{d}}_{r-\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}, & \text{if } r,s \in \mathbb{N} \cup (-(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_+)); \\ E^{\mathfrak{d}}_{r+\frac{1}{2},s+\frac{1}{2}}, & \text{if } r,s \in -\mathbb{N} \cup (\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_+); \\ E^{\mathfrak{d}}_{r-\frac{1}{2},s+\frac{1}{2}}, & \text{if } r \in \mathbb{N} \cup (-(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_+)), s \in -\mathbb{N} \cup (\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_+); \\ E^{\mathfrak{d}}_{r+\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}}, & \text{if } r \in -\mathbb{N} \cup (\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_+), s \in \mathbb{N} \cup (-(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_+)). \end{cases} \tag{2.10}$$

$\widehat{\varphi}$ 到 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 上的限制分别给出同构 $\widehat{\varphi}: \mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n \longrightarrow \overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 和 $\widehat{\varphi}: \overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n \longrightarrow \mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n$。

2.4 Dynkin 图

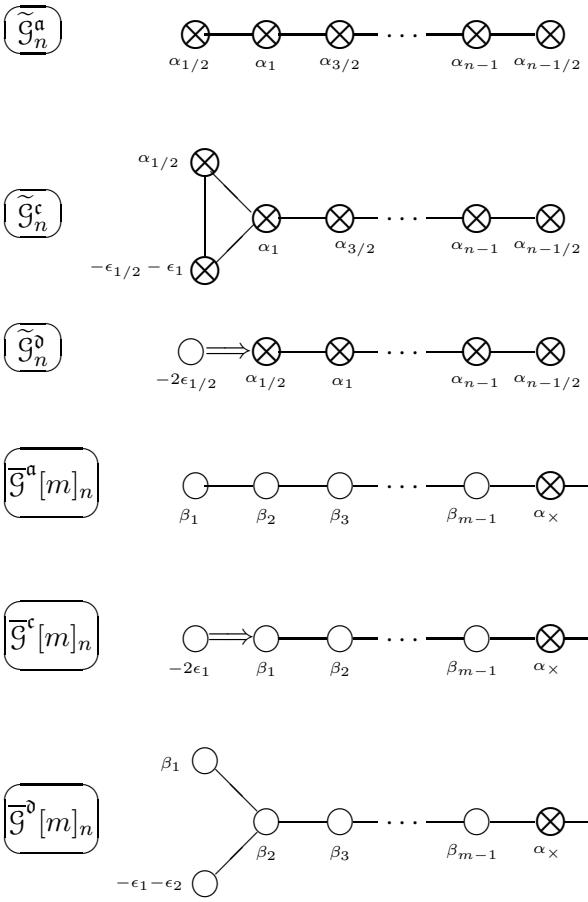
考虑以 $\{\epsilon_r \mid r \in \frac{1}{2}\mathbb{N}\}$ 为基的自由阿贝尔群。其上定义了一个对称双线性型 $(\cdot,\cdot)$，如下所示：

$$(\epsilon_r, \epsilon_s) = (-1)^{2r}\delta_{r,s}, \qquad r,s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}.$$

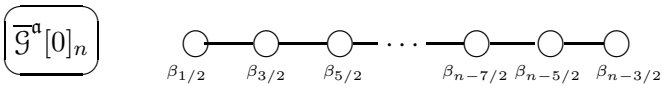
The ϵ_r 的宇称定义如下：$|\epsilon_r| = 0$ 对应 $r \in \mathbb{N}$，而 $|\epsilon_r| = 1$ 对应 $r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+$。令

$$\alpha_{\times} = \epsilon_m - \epsilon_{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_r = \epsilon_r - \epsilon_{r+\frac{1}{2}}, \quad \beta_r = \epsilon_r - \epsilon_{r+1}, \quad r \in \frac{1}{2}\mathbb{N}.$$

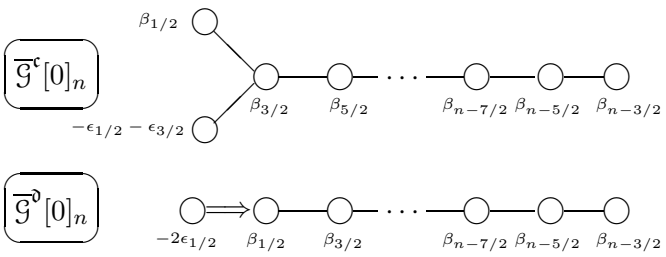
对于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$、$\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$，李超代数 $\widetilde{\mathcal{G}}_n^{\mathfrak{x}}$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$（其中 $m \in \mathbb{N}$）的 Dynkin 图及其指定的基本系列于下文（参见 [K, 第 2.5] 节）。下文中，$\bigcirc$ 和 $\bigotimes$ 分别表示偶单根和奇各向同性单根。



李代数 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[0]_n$ 的 Dynkin 图如下：



对于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$，李代数 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[0]_n$ 的 Dynkin 图与 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 的略有不同，其中 $m \in \mathbb{N}$。事实上，$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[0]_n \cong \mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[0]_n \cong \mathfrak{so}(2n)$ 以及 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[0]_n \cong \mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[0]_n \cong \mathfrak{sp}(2n)$。



从此处起，令 $\widetilde{\Phi}_n^{\mathfrak{x}+}$（分别为 $\Phi^{\mathfrak{x}}[m]_n^+$和$\overline{\Phi}^{\mathfrak{x}}[m]_n^+$）表示$\widetilde{\mathcal{G}}_n^{\mathfrak{x}}$（分别为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）的正根集合。

2.5 中心扩张

~对于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$、$\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$，考虑由一维中心 $\mathbb{C}K$作出的 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}$ （分别为$\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）的中心扩张 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$ （分别为 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和$\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）。该扩张继承自由（2.1）中给出的 2-余循环确定的 $\mathfrak{gl}$（V）的中心扩张$\widehat{\ }$ ~ ~（ $\mathfrak{gl}$（V））。同构 ι 在 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}} \oplus \mathbb{C}K$（分别为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n \oplus \mathbb{C}K$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n \oplus \mathbb{C}K$）上的限制是如下给出的同构$\iota$： $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}} \oplus \mathbb{C}K \to \widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$ （分别为 ι：$\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n \oplus \mathbb{C}K \to \mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 ι： $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n \oplus \mathbb{C}K \to \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）。

$$\iota(A) = A + \mathrm{Str}(JA)K \quad \text{and} \quad \iota(K) = K \tag{2.11}$$

对于 $A \in \widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}$ （分别为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）。

注意，对于所有 $A \in$， $[J, A] = 0$ $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}$。因此，当 2-余循环限制于 t 时，它为零 o $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}} \times \mathcal{G}^{\mathfrak{a}}$，因此

$$[A, B]_{\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}} = [A, B], \qquad \text{for } A, B \in \widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}},$$

其中， $[\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}}$ 表示 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}$上的李括号。为统一记号，我们仍考虑 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}$、$\mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$。

~注 2.3. 每个 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$（分别地， $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和$\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）-模都可以通过同构（2.11）视为一个 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}$（分别地，$\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）-模。

我们用 $\widetilde{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{x}}$:= ~$\mathfrak{b}^{\mathfrak{x}} \oplus \mathbb{C}K$、 $\mathfrak{b}^{\mathfrak{x}}[m]_n$:=$\mathfrak{b}^{\mathfrak{x}}[m]_n \oplus \mathbb{C}K$和$\overline{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$:=$\overline{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{x}}[m]_n \oplus \mathbb{C}K$分别表示 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$、$\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$的标准 Borel 子代数，并用 $\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}}$、 $\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和$\overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 表示由基 $\{K, E_r^{\mathfrak{x}}\}$张成的 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$、 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 的 Cartan子代数；这些基在受限对偶 $\widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{x}*}$、 $\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$和 $\overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$ 中有对偶基 $\{\Lambda_0, \epsilon_r\}$，其中 r 分别遍历指标集$\frac{1}{2}\mathbb{N}$、 $\mathbb{J}_m^+$（n）和 $\overline{\mathbb{J}}_m^+$（$n$）。这里， Λ_0是 $\widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{x}*}$（分别地，$\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$ 和$\overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$）中的元素，其定义为

$$\Lambda_0(K) = 1 \quad \text{and} \quad \Lambda_0(E_r^{\mathfrak{x}}) = 0$$

对所有 $r \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ （分别地，$\mathbb{J}_m^+(n)$ 和 $\overline{\mathbb{J}}_m^+(n)$）。

~容易看出，由 (2.9) 中定义的 φ 诱导的 $\mathfrak{gl}(V^\times)$ 上的自同构 $\widehat{\varphi}$ 可扩张到 $\mathfrak{gl}(V^\times)$ 的中心扩张 $\mathfrak{gl}(V^\times)$。由引理 2.2，得到以下引理。

~ ~引理 2.4. 同构 $\widehat{\varphi}$: $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}} \longrightarrow \mathcal{G}^{\mathfrak{d}}$ 可扩张为从 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}$ 到 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}$ 的同构，该同构也记作 $\widehat{\varphi}$，由 (2.10) 以及下式给出

$$\widehat{\varphi}(K) = -K.$$

$\widehat{\varphi}$ 将 $\widehat{\varphi}$ 限制到 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$，分别得到同构 $\widehat{\varphi}$: $\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 和 $\widehat{\varphi}$: $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n$。

2.6 抛物 BGG 范畴与超对偶

关于本小节所涉材料的详细内容，请读者参阅 [CL2 第 2 节和第 3] 节（适用于类型 $\mathfrak{a}$），以及 [CLW1 第 2 节和第 3] 节（适用于类型 $\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$）（另见 [CW 第 6.1 节和第 6.2] 节，以及 [CaL 第 2.4] 节）。

Let $\widetilde{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{x}}$、 $\mathfrak{l}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 分别是由下式定义的 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$、 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 的 Levi 子代数

$$\widetilde{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{x}} := \widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}} \cap \widehat{\mathfrak{l}}, \quad \mathfrak{l}^{\mathfrak{x}}[m]_n := \mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n \cap \widehat{\mathfrak{l}}, \quad \text{and} \quad \overline{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{x}}[m]_n := \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n \cap \widehat{\mathfrak{l}},$$

并且令 $\widetilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{x}} = \widetilde{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{x}} + \widetilde{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{x}}$、 $\mathfrak{p}^{\mathfrak{x}}[m]_n = \mathfrak{l}^{\mathfrak{x}}[m]_n + \mathfrak{b}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{x}}[m]_n = \overline{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{x}}[m]_n + \overline{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 为相应的抛物子代数，其中 $\mathfrak{l} := \bigoplus_{rs>0,\ \mathbb{C}E_{r,\ s} \oplus \mathbb{C}K}$。注意到$_{r,\ s\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^*}$

$$\mathfrak{l}^{\mathfrak{x}}[m]_n \cong \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[m]_n \cong \mathfrak{gl}(m|n) \oplus \mathbb{C}K \qquad \text{and} \qquad \overline{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{x}}[m]_n \cong \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[m]_n \cong \mathfrak{gl}(m|n) \oplus \mathbb{C}K.$$

对于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$，我们有 $\widetilde{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{l}^{\mathfrak{a}}[m]_n = \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{a}}[m]_n = \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$。

在论文的其余部分中，若无歧义，我们将省略上标 $\mathfrak{x}$ 和~下标 ∞。例如，我们分别用 $\mathcal{G}$、 $\mathcal{G}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}[m]_n$表示 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}$、 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$，并用 $\tilde{\mathfrak{g}}$、 $\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$ 表示 $\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}$、 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$，其中 $\mathfrak{x}$ 表示 $\mathfrak{a}$、 $\mathfrak{c}$、 $\mathfrak{d}$中的一个固定类型。此外，我们分别用 $\mathfrak{g}[m]$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]$ 表示 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_\infty$ 和$\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_\infty$。

给定一个分拆 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$，令 μ'表示 μ的共轭分拆。我们用 $\theta(\mu)$表示 μ的修正的弗罗贝尼乌斯坐标:

$$\theta(\mu) := (\theta(\mu)_{1/2}, \theta(\mu)_1, \theta(\mu)_{3/2}, \theta(\mu)_2, \ldots),$$

其中

$$\theta(\mu)_{i-1/2} := \max\{\mu'_i - i + 1, 0\}, \quad \theta(\mu)_i := \max\{\mu_i - i, 0\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

给定一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 和 $d \in \mathbb{C}$，我们定义

$$\widetilde{\lambda} := \sum_{r\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \theta(\lambda)_r \epsilon_r + d\Lambda_0 \in \tilde{\mathfrak{h}}^*, \tag{2.12}$$

$$\lambda[m] := \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i \epsilon_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \lambda_j - m \rangle \epsilon_j + d\Lambda_0 \in \mathfrak{h}[m]^*, \tag{2.13}$$

$$\overline{\lambda}[m] := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \epsilon_i + \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle \lambda'_j - m \rangle \epsilon_{j-\frac{1}{2}} + d\Lambda_0 \in \overline{\mathfrak{h}}[m]^*. \tag{2.14}$$

这里$\widetilde{\ }\langle r \rangle := \max\{r, 0\}$。

令 $\mathcal{P}^+(d) \subseteq \mathfrak{h}^*$、 $\mathcal{P}[m]^+(d) \subseteq \mathfrak{h}[m]^*$ 和$\overline{\mathcal{P}}[m]^+(d) \subseteq \overline{\mathfrak{h}}[m]^*$ 分别表示所有形如 (2.12)、(2.13) 和 (2.14) 的~权的集合。令 $\mathcal{P}^+ = \cup_{d\in\mathbb{C}}\mathcal{P}^+(d)$、 $\mathcal{P}[m]^+ = \cup_{d\in\mathbb{C}}\mathcal{P}[m]^+(d)$ 和 $\overline{\mathcal{P}}[m]^+ = \cup_{d\in\mathbb{C}}\overline{\mathcal{P}}[m]^+(d)$。根据定义，我们有双射

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{P}}^+ & \longrightarrow & \mathcal{P}[m]^+ \\ \widetilde{\lambda} & \mapsto & \lambda[m] \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{P}}^+ & \longrightarrow & \overline{\mathcal{P}}[m]^+ \\ \widetilde{\lambda} & \mapsto & \overline{\lambda}[m] \end{array} \tag{2.15}$$

回忆一下，若分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 满足 $\lambda_{m+1} \leq n$，则称其为一个 $(m|n)$-钩分拆。令 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}(m|n)$ 分别表示分拆的集合和 $(m|n)$-钩分拆的集合。显然， $\mathcal{P}(m|\infty) = \mathcal{P}$。给定 $d \in \mathbb{C}$ 和 $\lambda \in \mathcal{P}$，且满足 $\lambda' \in \mathcal{P}(m|n)$（分别地，$\lambda \in \mathcal{P}(m|n)$），我们可以用自然的方式将 $\lambda[m] \in \mathfrak{h}[m]^*_n$（分别地，$\overline{\lambda}[m] \in \overline{\mathfrak{h}}[m]^*_n$）视为.....。所有此类权的集合记为 $\mathcal{P}[m]^+_n$（分别地，$\overline{\mathcal{P}}[m]^+_n$）。

对于 $\mu \in$~$\mathfrak{h}^*$，令 $L(\mathfrak{l}, \mu)$ 为最高权为μ的不可约最高权 $\mathfrak{l}$-模。记 $\Delta(\tilde{\mathfrak{g}}, \mu) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\mathfrak{p}}}^{\tilde{\mathfrak{g}}} L(\tilde{\mathfrak{l}}, \mu)$ 为抛物 Verma $\tilde{\mathfrak{g}}$-模，并记 $L(\tilde{\mathfrak{g}}, \mu)$ 为 $\Delta(\tilde{\mathfrak{g}}, \mu)$ 的唯一不可约商 $\tilde{\mathfrak{g}}$-模。对于 $\mu \in \mathfrak{h}[m]^*_n$，模 $L(\mathfrak{l}[m]_n, \mu)$ 和 $\Delta(\mathfrak{g}[m]_n, \mu)$，以及对于 $\mu \in \overline{\mathfrak{h}}[m]^*_n$，模 $L(\overline{\mathfrak{l}}[m]_n, \mu)$ 和 $\Delta(\overline{\mathfrak{g}}[m]_n, \mu)$，定义如下

类似地。对于 $\mu \in \mathfrak{h}[m]_n^*$（分别为 $\overline{\mathfrak{h}}[m]_n^*$），记 $\Delta(\mathfrak{g}[m]_n, \mu)$（分别为 $\Delta(\overline{\mathfrak{g}}[m]_n, \mu)$）的唯一不可约商 $\mathfrak{g}[m]_n$（分别为 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）-模为 $L(\mathfrak{g}[m]_n, \mu)$（分别为 $L(\overline{\mathfrak{g}}[m]_n, \mu)$）。注意，对于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$， $\Delta(\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}, \mu) = L(\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}, \mu) = L(\mathfrak{l}^{\mathfrak{a}}, \mu)$， $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[m], \mu) = L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[m], \mu) = L(\mathfrak{l}^{\mathfrak{a}}[m], \mu)$，且 $\Delta(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[m], \mu) = L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[m], \mu) = L(\overline{\mathfrak{l}}^{\mathfrak{a}}[m], \mu)$。

~与 [CL2、CLW1、CLW2], 类似，设 $\mathcal{O}$（分别地， $\mathcal{O}[m]_n$ 和$\overline{\mathcal{O}}[m]_n$）为 $\sim\tilde{\mathfrak{g}}$（分别地， $\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）-模的范畴，其中 M 满足以下条件： M 是一个半单的 $\mathfrak{h}$（分别地， $\mathfrak{h}[m]_n$ 和$\sim\overline{\mathfrak{h}}[m]_n$）-模，其权子空间 M_γ 是有限维的；对于 $\gamma \in \mathfrak{h}^*$（分别地， $\mathfrak{h}[m]_n^*$ 和$\overline{\mathfrak{h}}[m]_n^*$），满足以下条件：

~ - ~(i) M 在 $\mathfrak{l}$（分别地， $\mathfrak{l}[m]_n$ 和 $\mathfrak{l}[m]_n$）上分解为 $L(\mathfrak{l}, \mu)$（分别地，$\sim L(\mathfrak{l}[m]_n, \mu)$和 $L(\overline{\mathfrak{l}}[m]_n, \mu)$）的直和，其中 $\mu \in \mathcal{P}^+$（分别地， $\mathcal{P}[m]_n^+$和 $\overline{\mathcal{P}}[m]_n^+$）。

(ii) 存在有限多个权 λ^1、λ^2、.....、$\lambda^k \in \widetilde{\mathcal{P}}^+$（分别地， $\mathcal{P}[m]_n^+$和$\overline{\mathcal{P}}[m]_n^+$）（取决于 M），使得若 γ是 M的一个权，则对于某个 i， $\lambda^i - \gamma$是系数属于 $\mathbb{Z}_+$ 的单根的线性组合。

这些范畴中的态射是偶模同态，且这些范畴是阿贝尔的。每个范畴中的模都带有自然的 $\mathbb{Z}_2$-分次，并具有相应李（超）代数的相容作用，后文将对此进行定义。令

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Xi}_n &= \sum_{r \in \widetilde{\mathbb{J}}^+(n)} \mathbb{Z}_+ \epsilon_r + \mathbb{C}\Lambda_0, \\
\Xi[m]_n &= \sum_{r \in \mathbb{J}_m^+(n)} \mathbb{Z}_+ \epsilon_r + \mathbb{C}\Lambda_0, \\
\overline{\Xi}[m]_n &= \sum_{r \in \overline{\mathbb{J}}_m^+(n)} \mathbb{Z}_+ \epsilon_r + \mathbb{C}\Lambda_0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

~对于 $\varepsilon = 0$ 或 1 以及 $\Theta = \Xi, \Xi[m]_n$ 或 $\overline{\Xi}[m]_n$，我们定义

$$\Theta(\bar{\varepsilon}) := \Big\{ \mu \in \Theta \;\Big|\; \sum_{r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+} \mu(E_r) \equiv \varepsilon \pmod 2 \Big\},$$

其中求和遍历所有在 $\mu(E_r)$有定义时的 $r \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+$。回忆一下，$\mathfrak{l}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{l}}[m]_n$ 都同构于 $\mathfrak{gl}(m|n) \oplus \mathbb{C}K$。对于 $M \in \mathcal{O}[m]_n$（分别地， $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$）， M 的每个权都是 $\mathfrak{l}[m]_n$（分别地， $\overline{\mathfrak{l}}[m]_n$）上的一个最高权模的权，其最高权为 $\mu \in \mathcal{P}[m]_n^+$（分别地，$\overline{\mathcal{P}}[m]_n^+$），且该最高权属于 $\Xi[m]_n$（分别地， $\overline{\Xi}[m]_n$）（例如参见 [CW，命题 3.26]）。根据 [CW], 中定理 6.4 之前的段落，~ ~ ~M 的权包含于 Ξ，其中 $M \in \mathcal{O}$。对于 $M \in \mathcal{O}$， $M = M_{\overline{0}} \bigoplus M_{\overline{1}}$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$- 分次向量空间，使得

$$M_{\overline{0}} := \bigoplus_{\mu \in \Xi(\overline{0})} M_\mu \qquad \text{and} \qquad M_{\overline{1}} := \bigoplus_{\mu \in \Xi(\overline{1})} M_\mu. \tag{2.17}$$

显然， $\mathbb{Z}_2$在 M 上的分次与 $\tilde{\mathfrak{g}}$的作用相容。类似地，对于 $M \in \mathcal{O}[m]_n$（分别为 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$），我们可以在 M上定义一个 $\mathbb{Z}_2$分次，并使其与 $\mathfrak{g}[m]_n$（分别为 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）的作用相容。根据 [CW、定理 3.27 和定理 6.4]（另见 [Lus 的~定理 6.2.2]的证明）， $\mathcal{O}$、 $\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$ 是张量范畴。特别地，$\widetilde{\mathcal{O}}^{\mathfrak{a}}$、 $\mathcal{O}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 是半单张量范畴。注意， $\mathbb{Z}_2$分次

$M \otimes N$ 由 (2.17) 给出，而 $M \otimes N$ 上的 $\mathbb{Z}_2$分次则由 M 和 N 上的 $\mathbb{Z}_2$分次$\widetilde{\ }$诱导，它们在 M、$N \in \mathcal{O}$ （分别为 $\mathcal{O}[m]_n$ 和$\overline{\mathcal{O}}[m]_n$）的情形下相同。我们在下面的命题中总结这些结果。

命题 2.5。设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。则：

(i) $\widetilde{\ }$ $\mathcal{O}$ 中模的权（分别为 $\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\mathcal{O}[m]_n$）包含于 Ξ （分别为$\Xi[m]_n$ 和 $\overline{\Xi}[m]_n$）。(ii) $\widetilde{\ }$阿贝尔范畴 $\mathcal{O}$、$\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$ 是张量范畴。(iii) $\widetilde{\mathcal{O}}^{\mathfrak{a}}$、$\mathcal{O}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 是半单张量范畴。

我们还有以下命题。

命题 2.6。设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。则：

(i) $\widetilde{\ }$对所有 $\lambda \in \mathcal{P}^+$，模 $\Delta(\tilde{\mathfrak{g}}, \lambda)$ 和 $L(\tilde{\mathfrak{g}}, \lambda)$ 都属于 $\mathcal{O}$。(ii) 对所有 $\lambda \in \mathcal{P}[m]_n^+$，模 $\Delta(\mathfrak{g}[m]_n, \lambda)$ 和 $L(\mathfrak{g}[m]_n, \lambda)$ 都属于 $\mathcal{O}[m]_n$。(iii) 对所有 $\lambda \in \overline{\mathcal{P}}[m]_n^+$，模 $\Delta(\overline{\mathfrak{g}}[m]_n, \lambda)$ 和 $L(\overline{\mathfrak{g}}[m]_n, \lambda)$ 都属于 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$。

证明。(i) 由 [CW, 命题 6.7(3)] 得出。我们证明 (ii)。对于 $m = 0$，由 [CW, 命题 6.7(1)] 得出。对于 $m \neq 0$，证明与 [CW, 命题 6.7(3)]，的证明类似，但这里我们使用 [CW, 定理 3.27] （对 $n = \infty$ 也成立），而不是 [CW, 定理 6.4]。(iii) 的证明类似。 □

我们在此记录一个简单但有用的观察，它可由 (2.16) 中模的权的描述看出，本质上就是 [CaL, 引理2.3]。

$\widetilde{\ }$引理 2.7。设 $M, N \in \mathcal{O}$ （分别地， $\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$）。假设 μ 和 γ 分别是 M 和 N 的权。那么

$$(\mu + \gamma)(E_r) = 0 \quad \textit{if and only if} \quad \mu(E_r) = 0 \textit{ and } \gamma(E_r) = 0,$$

对于 $r \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ （分别地，$\mathbb{I}_m^+(n)$ 和 $\overline{\mathbb{I}}_m^+(n)$）。

回顾一下，当 $n = \infty$ 时，我们省略下标 n。例如，我们记 $\Xi[m] = \Xi[m]_\infty$ 和 $\mathcal{O}[m] = \mathcal{O}[m]_\infty$。由 (2.16) 可立即得到以下结论（参见 [CaL, 引理 2.5]）。

$\widetilde{\ }$引理 2.8。设 μ, $\gamma \in \Xi$。则：

(i) $\mu + \gamma \in \Xi[m]$ 当且仅当 $\mu \in \Xi[m]$ 且 $\gamma \in \Xi[m]$。

(ii) $\mu + \gamma \in \overline{\Xi}[m]$ 当且仅当 $\mu \in \overline{\Xi}[m]$ 且 $\gamma \in \overline{\Xi}[m]$。

设 $0 \leq k < n \leq \infty$。对于 $M \in \mathcal{O}[m]_n$，我们记作 $M = \bigoplus_{\mu \in \Xi[m]_n} M_\mu$。截断函子 $\mathfrak{tr}_k^n \colon \mathcal{O}[m]_n \to \mathcal{O}[m]_k$ 定义为

$$\mathfrak{tr}_k^n(M) = \bigoplus_{\nu \in \Xi[m]_k} M_\nu. \tag{2.18}$$

对于每个 $f \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{O}[m]_n}(M, N)$， $\mathfrak{tr}_k^n(f)$ 定义为 f 在 $\mathfrak{tr}_k^n(M)$ 上的限制。截断函子 $\overline{\mathfrak{tr}}_k^n : \overline{\mathcal{O}}[m]_n \to \overline{\mathcal{O}}[m]_k$ 也可以用类似方式定义。显然，$\mathfrak{tr}_k^n$ 和 $\overline{\mathfrak{tr}}_k^n$ 是正合函子。由引理 2.7，立即得到以下引理。

引理 2.9. 对于 $0 \leq k < n \leq \infty$、 $\mathfrak{tr}_k^n$ 和 $\overline{\mathfrak{tr}}_k^n$，它们是张量函子。

下面的命题将在后文中发挥作用。其证明方式与 [CLW1 引理 3.2] 的证明类似。

命题 2.10. 设 $0 \leq k < n \leq \infty$ and $\mu \in \mathcal{P}[m]_n^+$。假设 $V_i = \Delta(\mathfrak{g}[m]_i, \mu)$ 或 $L(\mathfrak{g}[m]_i, \mu)$，其中 $i = k, n$。那么

$$\mathfrak{tr}_k^n(V_n) = \begin{cases} V_k & if \ \ \mu \in \mathcal{P}[m]_k^+; \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

对 $\overline{\mathfrak{tr}}_k^n$，也有类似的结论。

~给定 $M = \bigoplus_{\gamma \in \tilde{\mathfrak{h}}^*} M_\gamma \in \mathcal{O}$，定义

$$T_{[m]}(M) = \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{h}[m]^*} M_\gamma \qquad \text{and} \qquad \overline{T}_{[m]}(M) = \bigoplus_{\gamma \in \overline{\mathfrak{h}}[m]^*} M_\gamma.$$

~对于 $M, N \in \mathcal{O}$ and $f \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{O}}}(M, N)$， $T_{[m]}(f)$ 和 $\overline{T}_{[m]}(f)$ 分别定义为 f 在 $T_{[m]}(M)$ 和 $\overline{T}_{[m]}(M)$ 上的限制。注意， $T_{[m]}(f) : T_{[m]}(M) \to T_{[m]}(N)$ 和 $\overline{T}_{[m]}(f) : \overline{T}_{[m]}(M) \to \overline{T}_{[m]}(N)$ 分别是一个 $\mathfrak{g}[m]$- 同态和一个 $\sim$ $\overline{\mathfrak{g}}[m]$- 同态。此外，函子 $T_{[m]} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}[m]$ 和 $T_{[m]} : \mathcal{O} \to \overline{\mathcal{O}}[m]$ 是正合的（参见 [CW，命题 6.15]）。

由引理 2.8 可知，对于所有的 $M, N \in \mathcal{O}$， $T_{[m]}(M \otimes N) = T_{[m]}(M) \otimes T_{[m]}(N)$，且 $\overline{T}_{[m]}(M \otimes N) = \sim\overline{T}_{[m]}(M) \otimes \overline{T}_{[m]}(N)$，因此 $T_{[m]}$ 和 $\overline{T}_{[m]}$ 是张量函子。我们有以下结果。

定理 2.11. 以下陈述成立：

~(i) 对每个 $m \in \mathbb{Z}_+$, $T_{[m]} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}[m]$ 是张量范畴等价。

~(ii) 对每个 $m \in \mathbb{Z}_+$, $\overline{T}_{[m]} : \mathcal{O} \to \overline{\mathcal{O}}[m]$ 是张量范畴等价。

此外， $T_{[m]}$ 和 $\overline{T}_{[m]}$ 将抛物 Verma 模映为抛物 Verma 模，并将~ ~不可约模映为不可约模。更具体地，对于 $\lambda \in \mathcal{P}^+$，我们有

$$\begin{aligned} &T_{[m]}\big(\Delta(\tilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\lambda})\big) = \Delta(\mathfrak{g}[m], \lambda[m]), \quad T_{[m]}\big(L(\tilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\lambda})\big) = L(\mathfrak{g}[m], \lambda[m]), \\ &\overline{T}_{[m]}\big(\Delta(\tilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\lambda})\big) = \Delta(\overline{\mathfrak{g}}[m], \overline{\lambda}[m]), \quad \overline{T}_{[m]}\big(L(\tilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\lambda})\big) = L(\overline{\mathfrak{g}}[m], \overline{\lambda}[m]). \end{aligned}$$

定理 2.11 可参照 [CL2, CLW1] 中超对偶的证明思路，利用 [CLW2] 中的技巧来证明（尤其参见 [CLW2, 第 7] 节）。此处省略证明。我们也将定理 2.11 称为超对偶。本文只需要 $T_{[m]}$ 和 $\overline{T}_{[m]}$ 是张量函子。注意， $T_{[0]}$ 和 $\overline{T}_{[0]}$ 是 [CL2, CLW1] 中定义的退化情形下的函子 T 和 $\overline{T}$。定理 2.11 还表明，对于 $m \in \mathbb{N}$，李代数的张量范畴 $\mathcal{O}[0]$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[0]$ 与李超代数的张量范畴 $\mathcal{O}[m]$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]$ 等价。

3 可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$-模

可酉化模的概念将在我们对（超）Gaudin 哈密顿量的研究中发挥重要作用。本节首先介绍 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$ 上的 $*$-结构。随后，我们将描述本文要研究的可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$-模。

我们首先回顾关于 $*$-超代数及其可酉化模的一些基本事实。 $*$-超代数是一个结合超代数 A ，并配有一个次数为 0 的反线性反自同 involution $\omega\colon A \to A$。 $f\colon (A,\omega) \to (A',\omega')$ 是 $*$-超代数的同态，当且仅当它是满足 $\omega' \circ f = f \circ \omega$ 的超代数同态。设 (A,ω) 是一个 $*$-超代数，且 V 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次的 A-模。若厄米形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 满足对所有 $a \in A, v, v' \in V$，均有 $\langle av|v'\rangle = \langle v|\omega(a)v'\rangle$，则称其在 V 上是反变的。配备正定反变厄米形式的 A-模称为可酉化的 A-模。

若李超代数 $\mathfrak{g}$ 配备了一个次数为 0 的反线性反自同 involution ω ，则称其具有 $*$-结构。在这种情况下， ω 也称为 $\mathfrak{g}$上的 $*$-结构。具有 $*$-结构的李超代数之间的同态 $f\colon (\mathfrak{g},\omega) \to (\mathfrak{g}',\omega')$，是满足 $\omega' \circ f = f \circ \omega$的李超代数同态。此外，显然， $\mathfrak{g}$ 上的 $*$-结构 ω 成立，当且仅当将 ω 自然延拓到$\mathfrak{g}$ 的泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 后，所得映射是反线性反自同 involution。设 $(\mathfrak{g},\omega)$ 是具有 $*$-结构的李超代数， V 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次的 $\mathfrak{g}$-模。若 V 上的厄米形式 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 满足$\langle xv|v'\rangle = \langle v|\omega(x)v'\rangle$，对所有 $x \in \mathfrak{g}$、 v、 $v' \in V$均成立，则称其为反变的。配备正定反变厄米形式的 $\mathfrak{g}$-模称为可酉化 $\mathfrak{g}$-模。注意， $\mathfrak{g}$-模 V是可酉化的 $\mathfrak{g}$-模，当且仅当 V 是可酉化的 $U(\mathfrak{g})$-模。

3.1 $*$关于 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$的结构

$\widehat{\ }\ \widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$回顾一下，李超代数 $\mathfrak{gl}(V)$是 $\mathfrak{gl}(V)$的中心扩张，其基为$\{E_{i,j}, K \mid i,j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\}$。它具有一个由下式定义的 $*$结构 ω（参见 [LZ，第 421]页）

$$\sum_{i,j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} a_{ij}E_{i,j} \mapsto \sum_{i,j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} (-1)^{[i]+[j]}\overline{a}_{ij}E_{j,i} \qquad \text{and} \qquad K \mapsto K.$$

这里，$\overline{a}_{ij}$ 表示 $a_{ij} \in \mathbb{C}$ 的复共轭，并且

$$[i] := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad -i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+; \\ 0 & \text{if} \quad -i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\backslash(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}_+). \end{cases}$$

从李超代数 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}$、 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[m]_n$ 和$\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$ 的张成集（即第2.1、2.2和2.3节中描述的元素集合，再加上 K）显然可知， ω 在 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}$、 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$上的限制也记作 ω，为这些李超代数赋予了 $*$结构。

$\widehat{\ }\ \widetilde{\ }$ $\widehat{\ }\ \widetilde{\ }$由于 ω 是 $\mathfrak{gl}(V^\times)$上的 $*$结构，且 $\widehat{\varphi}$ 是 $\mathfrak{gl}(V^\times)$上的对合，因此映射 $\omega' := \widehat{\varphi} \circ \omega \circ \widehat{\varphi}$ 是 $\mathfrak{gl}(V^\times)$上的 $*$结构。更确切地说，

$$\omega'(E_{r,s}) = (-1)^{\tau_r+\tau_s}E_{s,r}, \quad \text{for } r,s \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}^*, \qquad \text{and} \qquad \omega'(K) = K,$$

其中

$$\tau_r := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad -r \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{if} \quad -r \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^*\backslash\mathbb{N}. \end{cases}$$

通过引理 2.4 中给出的同构 $\widehat{\varphi}:\ \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ ， $\mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n$ 上的反线性反自同 involution ω 拉回为$\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 上的反线性反自同 involution $\omega' := \widehat{\varphi}^{-1}\circ\omega\circ\widehat{\varphi}$；而通过同构 $\widehat{\varphi}^{-1}:\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}[m]_n \longrightarrow \mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n$， $\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 上的反线性反自同 involutionω 拉回为 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$上的反线性反自同 involution $\omega' := \widehat{\varphi}\circ\omega\circ\widehat{\varphi}^{-1}$。换言之，映射 $\widehat{\varphi}$ （分别地， $\widehat{\varphi}^{-1}$）给出了带有 $*$结构的李超代数同构，从 $(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n,\omega')$（分别地，$(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}[m]_n,\omega')$）到 $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n,\omega)$（分别地，$(\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n,\omega)$）。注意， $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$（分别地， $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$）上的 $*$结构 ω'是定义在 $\widehat{\mathfrak{gl}}$（$\widetilde{V}^{\times}$）上的 ω'的限制。

显然， $*$-结构 ω（分别地， ω'）在 $\mathfrak{gl}$（$\widetilde{V}^{\times}$）上诱导出一个 $*$-结构，也记作ω（分别地， ω'）。对于 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$，将 ω（分别地， ω'）限制到 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 上，得到一个 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 上的 $*$-结构，也记作 ω （分别地， ω'）。我们有如下命题。

命题 3.1。对于 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$，将由 (2.11) 定义的同构 $\iota:\ \overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n\oplus\mathbb{C}K \longrightarrow\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 限制到 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 上，得到两个带有 $*$-结构的李超代数单态射 $\tau:(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\omega)\longrightarrow(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\omega)$ 和 $\tau':(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\omega')\longrightarrow(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\omega')$。

从现在起，我们用 $L(\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\mu)$（分别用 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\mu)$）表示具有最高权 $\mu\in\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$ （分别为 $\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$）的不可约最高权 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ （分别为$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$） - 模。˜ 回顾第 2.6 节中定义的 $\mu\in\overline{\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}*}}$ （分别为 $\mathfrak{h}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$ 和 $\overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{x}}[m]_n^*$）的不可约模 $L(\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}},\mu)$（分别为 $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\mu)$ 和 $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n,\mu)$）。

3.2 可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$-模

(2.1) 中的 2-余循环限制在 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n\times\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 上时为零，因此我们可以将 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 视为 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 的子代数。因此， ω 在 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 上限制到 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 后，构成 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 上的一个 $*$-结构，我们仍记作 ω。更确切地说，

$$\omega(E_{i,j})=E_{j,i}\qquad\text{for}\quad i,j\in\overline{\mathbb{J}}_m^+(n).$$

回顾一下， $\mathcal{P}(m|n)$ 表示 $(m|n)$-钩分拆的集合。定义

$$\mathcal{Q}^{\mathfrak{a},I}(m|n):=\left\{\sum_{i=1}^m\lambda_i'\epsilon_{i-\frac12}+\sum_{j=1}^n\langle\lambda_j-m\rangle\,\epsilon_j\in\mathbf{h}^{\mathfrak{a}}[m]_n^*\;\middle|\;\lambda'\in\mathcal{P}(m|n)\right\},$$

$$\overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{a},I}(m|n):=\left\{\sum_{i=1}^m\lambda_i\epsilon_i+\sum_{j=1}^n\langle\lambda_j'-m\rangle\epsilon_{j-\frac12}\in\overline{\mathbf{h}}^{\mathfrak{a}}[m]_n^*\;\middle|\;\lambda\in\mathcal{P}(m|n)\right\}.$$

下面的命题是众所周知的（例如参见 [CLZ，定理 3.2 和 3.3] with$p=q=0$）。

命题 3.2. 对于 $\xi\in\overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{a},I}(m|n)$， $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n,\xi)$ 是一个关于 $*$-结构 ω 的可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$-模。

注 3.3. 上述命题中出现的模恰好是 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n$ 上的不可约多项式模（例如参见 [CW，命题 3.26]）。

回顾一下， $\lambda[m]$ 和 $\overline{\lambda}[m]$ 分别在 (2.13) 和 (2.14) 中定义。对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，令

$$Q^{\mathfrak{a}}(m|n):=\{\lambda[m]\in\mathfrak{h}^{\mathfrak{a}}[m]_n^*\mid\lambda'\in\mathcal{P}(m|n),\,d=0\},$$
$$\overline{Q}^{\mathfrak{a}}(m|n):=\{\overline{\lambda}[m]\in\overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{a}}[m]_n^*\mid\lambda\in\mathcal{P}(m|n),\,d=0\}.$$

当 $n=\infty$ 时， λ、λ' 属于 $\mathcal{P}(m|n)$ 的条件并非必需。(2.15) 中给出的双射的限制得到以下双射：

$$Q^{\mathfrak{a}}(m'|\infty) \leftrightarrow \widetilde{Q}^{\mathfrak{a}} := \widetilde{\mathcal{P}}^{+}(0) \leftrightarrow \overline{Q}^{\mathfrak{a}}(m|\infty) \qquad \text{for } m, m' \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.1}$$

这些集合将在第5节中使用。

3.3 关于 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$的可酉化模

在本小节中，我们将把注意力限制在 $\mathfrak{x}=\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$上。关于$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$，对应于上述定义的 $*$-结构 ω 和ω'，有两类可酉化最高权模。

在 [LZ] 中定义的李超代数 $\mathcal{C}^f$（分别为 $\mathcal{D}^f$）是我们的 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}$（分别为 $\widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}$），而 $\widehat{\mathcal{C}}^f$（分别为$\widehat{\mathcal{D}}^f$）是我们的 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}$（分别为 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}$）。此外，[命题 5.8][LZ]（分别为 [命题 5.9][LZ]）中描述的关于 $\mathcal{C}$（分别为 $\mathcal{D}$）的可酉化准有限不可约最高权模集合，就是关于 $\widehat{\mathcal{C}}^f$（分别为$\widehat{\mathcal{D}}^f$）的可酉化不可约最高权模集合。回顾一下，$\widetilde{\lambda}$ 在 (2.12) 中定义。令

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}^{\mathfrak{c}} &:= \Big\{ \widetilde{\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{c}\,*} \;\Big|\; \lambda_1 \le d,\ \lambda \in \mathcal{P},\ d \in \mathbb{Z}_+ \Big\},\\
\widetilde{Q}^{\mathfrak{d}} &:= \Big\{ \widetilde{\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{d}\,*} \;\Big|\; \lambda_1+\lambda_2 \le 2d,\ \lambda \in \mathcal{P},\ d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+ \Big\}.
\end{aligned}$$

将 [LZ] 中的结果用我们的记号重新表述，可得以下命题。

命题 3.4. (i) 不可约最高权 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}$-模 M 关于 ω 可酉化，当且仅当对于某个 $\xi \in Q^{\mathfrak{c}}$，有 $M \cong L(\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}, \xi)$。

(ii) 不可约最高权 $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}$-模 M 关于 ω 可酉化，当且仅当对于某个 $\xi \in Q^{\mathfrak{d}}$，有 $M \cong L(\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}, \xi)$。

回忆一下，$\lambda[m]$ 和 $\overline{\lambda}[m]$ 分别在 (2.13) 和 (2.14) 中定义。对于 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，令 t

$$\begin{aligned}
Q^{\mathfrak{c}}(m|n) &:= \big\{ \lambda[m] \in \mathfrak{h}^{\mathfrak{c}}[m]_n^* \;\big|\; \lambda_1 \le d,\ \lambda' \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \mathbb{Z}_+ \big\},\\
Q^{\mathfrak{d}}(m|n) &:= \Big\{ \lambda[m] \in \mathfrak{h}^{\mathfrak{d}}[m]_n^* \;\Big|\; \lambda_1+\lambda_2 \le 2d,\ \lambda' \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+ \Big\},\\
\overline{Q}^{\mathfrak{c}}(m|n) &:= \Big\{ \overline{\lambda}[m] \in \overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{c}}[m]_n^* \;\Big|\; \lambda_1 \le d,\ \lambda \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \mathbb{Z}_+ \Big\},\\
\overline{Q}^{\mathfrak{d}}(m|n) &:= \Big\{ \overline{\lambda}[m] \in \overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{d}}[m]_n^* \;\Big|\; \lambda_1+\lambda_2 \le 2d,\ \lambda \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+ \Big\}.
\end{aligned}$$

当 $n=\infty$ 时，$\mathcal{P}(m|n)$ 中对 λ、λ' 的条件是不必要的。(2.15) 中给出的双射的限制给出以下双射：

$$Q^{\mathfrak{x}}(m'|\infty) \leftrightarrow \widetilde{Q}^{\mathfrak{x}} \leftrightarrow \overline{Q}^{\mathfrak{x}}(m|\infty) \qquad \text{for } \mathfrak{x}=\mathfrak{c},\mathfrak{d} \text{ and } m, m' \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.2}$$

以下内容的证明是显然的。

引理 3.5. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个带有 $*$-结构 σ 的李超代数。假设 $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，且 σ 在 $\mathfrak{u}$ 上的限制 $\sigma|_{\mathfrak{u}}$ 是 $\mathfrak{u}$ 上的一个 $*$- 结构。设 V 是关于 σ 的可酉化 $\mathfrak{g}$- 模。若 W 是 V 的一个 $\mathfrak{u}$-子模，则 W 是关于 $\sigma|_{\mathfrak{u}}$ 的一个可酉化 $\mathfrak{u}$-模。

下面的命题是命题 3.4 和引理 3.5 的直接推论。

命题 3.6。(i) 对于 $\xi \in Q^{\mathfrak{c}}(m|n)$, $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \xi)$ 是关于 ω的可酉化 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n$-模。

(ii) 对于 $\xi \in Q^{\mathfrak{d}}(m|n)$, $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n, \xi)$ 是关于 ω 的可酉化 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n$-模。(iii) 对于 $\xi \in \overline{Q}^{\mathfrak{c}}(m|n)$, $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \xi)$ 是关于 ω 的可酉化 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$-模。(iv) 对于 $\xi \in \overline{Q}^{\mathfrak{d}}(m|n)$, $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}[m]_n, \xi)$ 是关于 ω 的可酉化 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$-模。

证明。为证明 (iii)，令 $\lambda \in \mathcal{P}\ m|n \quad d \in \mathbb{Z}_+ \quad \lambda_1 \leq d \quad \overline{\lambda}[m] \in (\ )$，并满足条 $\overline{Q}^{\mathfrak{c}}\ m|n \quad L\ \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n\ \overline{\lambda}[m] = \overline{\mathfrak{tr}}_n^{\infty}(\overline{T}_{[m]}\ L\ \widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}\ \widetilde{\lambda}\ )$ $3\ 5\ \ L\ \overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n\ \overline{\lambda}[m]$ 件。则 ( ) 和 (,) ((,)) 。根据引理 。 , (,) 是关于 ω 的可酉化模。其余部分可用类似的论证证明。 □

定义 3.7. 对于 $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, 若一个 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$-模 M 关于 $*$-结构 ω （分别为 ω'）可酉化，则称其为 I 型（分别为 II 型）可酉化模。

Let

$$\mathbb{I}^{m|n} = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i - \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{j-\frac{1}{2}}.$$

对于 $\lambda \in \mathcal{P}(m|n)$, 我们定义

$$\overline{\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \epsilon_i + \sum_{j=1}^{n} \langle \lambda'_j - m \rangle \epsilon_{j-\frac{1}{2}}.$$

Let

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{c},I}(m|n) &:= \Big\{ \overline{\lambda} - d_{\mathbb{I}^{m|n}} \in \overline{\mathbf{h}}^{\mathfrak{c}}[m]_n^* \;\Big|\; \lambda_1 \leq d,\ \lambda \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \mathbb{Z}_+ \Big\}, \\
\overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{d},I}(m|n) &:= \Big\{ \overline{\lambda} - d_{\mathbb{I}^{m|n}} \in \overline{\mathbf{h}}^{\mathfrak{d}}[m]_n^* \;\Big|\; \lambda_1 + \lambda_2 \leq 2d,\ \lambda \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+ \Big\}, \\
\overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{c},II}(m|n) &:= \Big\{ \overline{\lambda} + d_{\mathbb{I}^{m|n}} \in \overline{\mathbf{h}}^{\mathfrak{c}}[m]_n^* \;\Big|\; \lambda'_1 + \lambda'_2 \leq 2d,\ \lambda \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+ \Big\}, \\
\overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{d},II}(m|n) &:= \Big\{ \overline{\lambda} + d_{\mathbb{I}^{m|n}} \in \overline{\mathbf{h}}^{\mathfrak{d}}[m]_n^* \;\Big|\; \lambda'_1 \leq d,\ \lambda \in \mathcal{P}(m|n),\ d \in \mathbb{Z}_+ \Big\}.
\end{aligned}$$

命题 3.8. (i) 对于 $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{c},I}(m|n)$, $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \xi)$ 是一个 I 型可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$-模。

(ii) 对于 $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{c},II}(m|n)$, $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \xi)$ 是一个 II 型可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$-模。(iii) 对于 $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{d},I}(m|n)$, $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n, \xi)$ 是一个 I 型可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$-模。(iv) 对于 $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{d},II}(m|n)$, $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n, \xi)$ 是一个 II 型可酉化 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$-模。

证明。为证明 (i)，设 $\lambda \in \mathcal{P}(m|n)$ 和 $d \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $\lambda_1 \leq d$。由命题 3.1 中给出的、带有 $*$-结构的李超代数单同态 $\overline{\iota} : (\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \omega) \longrightarrow (\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \omega)$ 所诱导的 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$-模结构，在 $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \overline{\lambda}[m])$ 上与 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \overline{\lambda} - d_{\mathbb{I}^{m|n}})$ 同构。由命题 3.6(iii)，(i) 部分得证。为证明 (ii)，设 $\lambda \in$

$\mathcal{P}(m|n)$ 和 $d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ 满足 $\lambda'_1 + \lambda'_2 \leq 2d$。命题 3.1 中给出的映射 $\overline{\imath}' : (\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \omega') \longrightarrow (\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \omega')$ 是带有 $*$-结构的李超代数单同态，并且我们已证明，引理 2.4 中给出的映射 $\widehat{\varphi}$ 是从 $(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \omega')$ 到 $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n, \omega)$ 的、带有 $*$- 结构的李超代数同构。由 $\widehat{\varphi} \circ \overline{\imath}'$ 在 $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{d}}[m]_n, \lambda'[m])$ 上诱导的 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$-模结构与 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \overline{\lambda} + d_{\mathbb{I}^{m|n}})$ 同构。由命题 3.6(ii)，(ii) 部分得证。其余部分可用类似论证证明。 □

注 3.9。对于 $n \in \mathbb{N}$、$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[0]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[0]_n$，它们是李代数；上述命题 (ii)（分别地，(iv)）中的最高权，恰好是 [EHW 第 8 节及 9] 中给出的、在整数值（分别地，半整数值和整数值）条件下对 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[0]_n$（分别地，$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[0]_n$）上无限维可酉化最高权模进行分类时出现的最高权（另见 [HLT，定理 2.5]）。

4 关于 $\widetilde{\mathfrak{g}}$、$\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$ 上模的 Gaudin 哈密顿量

本节中，我们为无限秩和有限秩的李（超）代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$、$\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$ 定义 Casimir 对称张量，并介绍与这些李（超）代数相关的（超）Gaudin 哈密顿量。我们的主要目标是证明，对于 $\tilde{\mathfrak{g}}$，每个 Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量集合与相应的、关于 $\mathfrak{g}[m]$（分别地，$\overline{\mathfrak{g}}[m]$）的 Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量集合之间存在一一对应关系。此外，在此一一对应关系下，每个特征向量及其对应的特征向量具有相同的特征值。我们还证明，对于 $n \in \mathbb{N}$，关于 $\mathfrak{g}[m]$（分别地，$\overline{\mathfrak{g}}[m]$）的 Gaudin 哈密顿量的奇异特征向量与关于 $\mathfrak{g}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）的奇异特征向量之间可通过截断函子建立联系。

回顾 $\widetilde{\Phi}$（分别为 $\Phi[m]_n^+$ 和 $\overline{\Phi}[m]_n^+$）表示 $\tilde{\mathfrak{g}}_n$（分别为 $\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）的正根集合。首先，我们有以下引理。它类似于 [CaL，引理 3.1]，证明方法也类似。

引理 4.1. 设 $0 \leq k < n \leq \infty$。若 v 是 $M \in \widetilde{\mathcal{O}}$（分别为 $\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$）中权为 μ 的权向量，且满足 $\mu \in \Xi_k$（分别为 $\Xi[m]_k$ 和 $\overline{\Xi}[m]_k$），则对所有 $\beta \in \widetilde{\Phi}^+ \backslash \widetilde{\Phi}_k^+$（分别为 $\Phi[m]_n^+ \backslash \Phi[m]_k^+$ 和 $\overline{\Phi}[m]_n^+ \backslash \overline{\Phi}[m]_k^+$），都有 $E_\beta v = 0$；并且当 $i > k$时，$E_i v = 0$。特别地，对于每个 $v \in M$ 和 $M \in \mathcal{O}$，若 $\mathcal{O}[m]$ 或 $\overline{\mathcal{O}}[m]$，则满足 $E_\beta v \neq 0$ 和 $E_i v \neq 0$的 E_β和 E_i 只有有限多个。

令 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $\mathfrak{gl}(V)$ 上定义的双线性型

$$(A, B) := \mathrm{Str}(AB) \quad \text{for } A, B \in \mathfrak{gl}(\widetilde{V}).$$

它是非退化不变偶超对称双线性型。上述双线性型在 $\mathcal{G}$（分别在 $\mathcal{G}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}[m]_n$）上的限制也是非退化不变偶超对称双线性型。记

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := (\cdot, \cdot) \text{ on } \widetilde{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}, \mathcal{G}^{\mathfrak{a}}[m]_n \text{ and } \overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n, \quad \text{and} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle := \tfrac{1}{2}(\cdot, \cdot) \text{ on the other cases.}$$

显然，对于任意 $i \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$，$\langle E_i, E_i \rangle = (-1)^{2i}$。对于每个根 $\beta \in \widetilde{\Phi}^+$（分别地，$\Phi[m]_n^+$ 和 $\overline{\Phi}[m]_n^+$），我们选取权分别为 β 和 $-\beta$ 的根向量 E_β 和 E^β，使得

$$\langle E_\beta, E^\beta \rangle = 1.$$

此外，$\langle E^\beta, E_\beta\rangle = (-1)^{|E_\beta|}$，其中 $|E_\beta|$ 是 E_β 的宇称。

通过将 $\mathcal{G}$（分别地，$\mathcal{G}_n$ 和 $\overline{\mathcal{G}}_n$）视为 $\tilde{\mathfrak{g}}$（分别地，$\mathfrak{g}_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}_n$）的子空间，$\tilde{\mathfrak{g}}$、$\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$ 的 Casimir 对称张量定义如下（参见 [CaL，第 3.1] 节）

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega} &:= \sum_{\beta\in\widetilde{\Phi}^+} (E^\beta\otimes E_\beta + (-1)^{|E_\beta|}E_\beta\otimes E^\beta)\\
&\quad + \sum_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \left((-1)^{2j}E_j\otimes E_j - (K\otimes E_j + E_j\otimes K)\right),\\
\Omega[m]_n &:= \sum_{\beta\in\Phi[m]_n^+} \left(E^\beta\otimes E_\beta + (-1)^{|E_\beta|}E_\beta\otimes E^\beta\right)\\
&\quad + \sum_{j\in\mathbb{J}_m^+(n)} \left((-1)^{2j}E_j\otimes E_j - (K\otimes E_j + E_j\otimes K)\right),\\
\overline{\Omega}[m]_n &:= \sum_{\beta\in\overline{\Phi}[m]_n^+} (E^\beta\otimes E_\beta + (-1)^{|E_\beta|}E_\beta\otimes E^\beta)\\
&\quad + \sum_{j\in\overline{\mathbb{J}}_m^+(n)} \left((-1)^{2j}E_j\otimes E_j - (K\otimes E_j + E_j\otimes K)\right).
\end{aligned}$$

注 4.2. 对于 $\beta\in\Phi[m]_n^+$，要么 $\beta\in\widetilde{\Phi}^+$，要么 $-\beta\in\widetilde{\Phi}^+$。假设 $-\beta\in\widetilde{\Phi}^+$。那么 β 是一个奇根。我们很容易看出，存在某个非零标量 a，使得 $E_{-\beta}=aE^\beta$ 和 $E^{-\beta}=-a^{-1}E_\beta$。由此可得 $E^{-\beta}\otimes E_{-\beta}-E_{-\beta}\otimes E^{-\beta}=E^\beta\otimes E_\beta-E_\beta\otimes E^\beta$。换言之，$\widetilde{\Omega}[m]_n$ 是 Ω 的一个部分和。同样，$\Omega[m]_n$ 也是 Ω 的一个部分和。

根据引理 4.1，Casimir 对称张量 Ω、$\Omega[m]_n$ 和 $\Omega[m]_n$ 分别是在 $M\otimes N$ 上的良定义算子，其中 M、$N\in\mathcal{O}$、$\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$。

固定 $\ell\in\mathbb{N}$，使得 $\ell\geq 2$。对于 M_1、...、$M_\ell\in\mathcal{O}$，令

$$M := M_1\otimes\cdots\otimes M_\ell.$$

我们再引入一些记号。对于 $x\in\tilde{\mathfrak{g}}$（分别地，对于 $\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）以及 $i=1$、...、ℓ，令

$$x^{(i)} = \underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1\otimes \overset{i}{x}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1}_{\ell}.$$

对于任意算子 $A=\sum_{r\in I}x_r\otimes y_r$，其中 x_r、$y_r\in\widetilde{\mathfrak{g}}$（分别地，$\mathfrak{g}[m]_n$ 和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$），以及任意不同的 i、$j\in\{1,\dots,\ell\}$，定义

$$A^{(ij)} = \sum_{r\in I} x_r^{(i)}y_r^{(j)}. \tag{4.1}$$

对于任意的 $i=1,\dots,\ell$ 以及任意互不相同的复数 $z_1,\dots,z_\ell$，(二次) Gaudin 哈密顿量 $\widetilde{\mathcal{H}}^i$ 定义为

$$\widetilde{\mathcal{H}}^i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\ell} \frac{\widetilde{\Omega}^{(ij)}}{z_i-z_j}. \tag{4.2}$$

注意，它是 M 上的一个线性自同态。Gaudin 哈密顿量 $\mathcal{H}^i[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]_n$ 分别通过将 $\widetilde{\Omega}$ 替换为 $\Omega[m]_n$ 和 $\Omega[m]_n$ 来定义；对于分别属于 $\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$ 的 $M_1,\dots,M_\ell$，它们是 $M_1\otimes\cdots\otimes M_\ell$ 上定义良好的线性自同态。

对于任意 $N\in\widetilde{\mathcal{O}}$（分别地，$\mathcal{O}[m]_n$ 和$\overline{\mathcal{O}}[m]_n$），令

$$N^{\mathrm{sing}}:=\{v\in N\mid E_\beta v=0 \text{ for all } \beta\in\widetilde{\Phi}^+ \text{ (resp., } \Phi[m]_n^+ \text{ and } \overline{\Phi}[m]_n^+)\}$$

表示 N中由奇异向量张成的子空间。对于 N的任意权 μ，根据 $\mathcal{O}$（分别地，$\mathcal{O}[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{O}}[m]_n$）的定义，$\widetilde{}$权空间 N_μ 是有限维的。记 $N_\mu^{\mathrm{sing}}:=N_\mu\cap N^{\mathrm{sing}}$。

通过与 [CaL 的命题 3.5 和 3.7], 的证明类似的论证，可以证明 $\widetilde{\mathcal{H}}^i$（分别地，$\mathcal{H}^i[m]_n$ 和 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]_n$）彼此交换，且它们是 $i=1$、.....、ℓ的$\tilde{\mathfrak{g}}$（分别地，$\mathfrak{g}[m]_n$和 $\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）-同态。我们立即看到，对于 M的任意权 μ，M^{sing}和有限维子空间 M_μ^{sing}都是 $\widetilde{\mathcal{H}}^i$-不变的。因此，我们可以将 $\widetilde{\mathcal{H}}^i$ 视为 M_μ^{sing}上的线性自同态。类似地，对于 M_1、.....、$M_\ell\in\mathcal{O}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathcal{O}}[m]_n$）以及 $M_1\otimes\cdots\otimes M_\ell$的任意权 μ，$\mathcal{H}^i[m]_n$（分别地，$\overline{\mathcal{H}}^i[m]_n$）可视为$(M_1\otimes\cdots\otimes M_\ell)_\mu^{\mathrm{sing}}$上的线性自同态。

$\widetilde{}$引理 4.3. 设 N_1、$N_2\in\mathcal{O}$，并设 $v\in N_1\otimes N_2$ 是权为 μ的权向量 .

$\widetilde{}$(i) 若 $\mu\in\Xi[m]$，则 $\Omega(v)=\Omega[m](v)$。
$\widetilde{}$(ii) 若 $\mu\in\overline{\Xi}[m]$，则 $\Omega(v)=\Omega[m](v)$。

证明。证明与 [CaL，引理 3.11] 类似，只需稍作修改。为完整起见，我们在此给出证明。我们只证明 (i)，(ii) 的证明类似。不妨设 $v=v_1\otimes v_2$，其中 $v_i\in N_i$ 是关于 $i=1$、2 的权为 μ_i 的权向量，并且 $\mu_1+\mu_2=\mu$。对于 $i=1$，由引理 2.8 可得 2，$\mu_i\in\Xi[m]$。对所有 $k\in\frac{1}{2}\mathbb{N}\backslash\mathbb{J}_m^+$和$i=1$，2，$\mu_i(E_k)=0$，因此 $E_k(v_i)=0$。根据注 4.2，只需考虑满足 $\pm\beta\notin\Phi[m]^+$的 $\beta\in\widetilde{\Phi}^+$。对于这样的 β，存在某个 $i\in\frac{1}{2}\mathbb{N}\backslash\mathbb{J}_m^+$，使得 $\beta(E_i)\neq 0$。由此可知，$E_\beta v_1$或 $E^\beta v_2$的权不属于 $\widetilde{\Xi}$。因此，$E_\beta v_1=0$或$E^\beta v_2=0$，从而 $E_\beta\otimes E^\beta(v_1\otimes v_2)=0$。类似地，$E^\beta\otimes E_\beta(v_1\otimes v_2)=0$。因此，$\widetilde{}\Omega(v_1\otimes v_2)=\Omega[m](v_1\otimes v_2)$。

□

因此，我们得到以下引理。

$\widetilde{}$引理 4.4. 设 $M_1,\dots,M_\ell\in\mathcal{O}$，且设 $v\in M_1\otimes\cdots\otimes M_\ell$为权为$\mu$的权向量。

(i) *If* $\mu\in\Xi[m]$, *then* $\widetilde{\mathcal{H}}^i v=\mathcal{H}^i[m](v)$ *for all* $i=1,\dots,\ell$.

(ii) *If* $\mu\in\overline{\Xi}[m]$, *then* $\widetilde{\mathcal{H}}^i v=\overline{\mathcal{H}}^i[m](v)$ *for all* $i=1,\dots,\ell$.

我们想知道 $\mathcal{H}^i$、$\mathcal{H}^i[m]$ 和 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 的特征向量是否相关。为$\widetilde{}$回答这个问题，我们需要以下命题。回顾式（2.15）中的双射 $\lambda\leftrightarrow\lambda[m]\leftrightarrow\overline{\lambda}[m]$。

~ ~ ~ $\widetilde{}$命题 4.5. 设 $M\in\mathcal{O}$，且 $\tilde{\mu}\in\mathcal{P}^+$ 是 M的一个权。则：

(i) 存在 $A \in U(\tilde{\mathfrak{l}})$，使得映射 $\tilde{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]}\colon \widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\tilde{\mu}} \to T_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\mu[m]}$，定义为 $\tilde{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]}(v) = Av$ for $v \in \widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\tilde{\mu}}$，是一个线性同构。

(ii) 存在 $\bar{A} \in U(\tilde{\mathfrak{l}})$，使得映射 $\bar{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]}\colon \widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\tilde{\mu}} \to \overline{T}_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\overline{\mu}[m]}$（由 $\bar{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]}(v) = \bar{A}v$ 对 $v \in \widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\tilde{\mu}}$ 定义）是一个线性同构。

证明。我们只证明 (i)。(ii) 的证明类似。注意到存在一个线性同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathfrak{O}}}\left(\Delta(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mu}),\widetilde{M}\right) &\longrightarrow \widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\tilde{\mu}}\\ \varphi &\mapsto \varphi(v_{\tilde{\mu}})\end{aligned}$$

其中，$v_{\tilde{\mu}}$ 是 $\Delta(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mu})$ 的最高权向量。

另一方面，存在 $A \in U(\tilde{\mathfrak{l}})$ 使得 $v_{\mu[m]} = Av_{\tilde{\mu}}$（是 $\Delta(\mathfrak{g}[m],\mu[m]) = T_{[m]}(\Delta(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mu}))$ 中的最高权向量，其权为 $\mu[m]$。事实上，A 是 $\tilde{\mathfrak{l}}$ 中对应于一列奇反射的个元素的乘积（详见 [CL2 第 3.1] 节和 [CLW1 第 4] 节）。类似地，映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}[m]}\left(\Delta(\mathfrak{g}[m],\mu[m]),T_{[m]}(\widetilde{M})\right) &\longrightarrow T_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\mu[m]}\\ \phi &\mapsto \phi(v_{\mu[m]})\end{aligned}$$

是一个线性同构。由定理 2.11，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathfrak{O}}}\left(\Delta(\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mu}),\widetilde{M}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}[m]}\left(\Delta(\mathfrak{g}[m],\mu[m]),T_{[m]}(\widetilde{M})\right),$$

因此 $\widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\tilde{\mu}} \cong T_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\mu[m]}$。我们还可以看到，任意向量 $v \in \widetilde{M}_{\mathrm{sing}\tilde{\mu}}$ 在该同构下都对应于 $Av \in T_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\mu[m]}$，这表明该同构确实是所述的映射 $\tilde{\mathfrak{t}}^{\mu}_{[m]}$。

□

注 4.6. (i) 命题 4.5 中的元素 A 和 A 只依赖于权 $\tilde{\mu}$，而与模 M无关。

(ii) 存在 $B, \bar{B} \in U(\tilde{\mathfrak{l}})$，使得 $\tilde{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]}$ 和 $\bar{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]}$ 的逆分别由 $(\tilde{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]})^{-1}(v) = Bv$ 和 $(\bar{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]})^{-1}(w) = \bar{B}w$ 给出，其中任意 $v \in T_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\mu[m]}$ 和 $w \in \overline{T}_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\overline{\mu}[m]}$均成立。同样，$B$和 $\overline{B}$ 是 $\tilde{\mathfrak{l}}$中对应于奇反射序列的元素之积。

定理 4.7. 对于 $\widetilde{M}_1$、$\cdots$、$\widetilde{M}_\ell \in \widetilde{\mathcal{O}}$，令 $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \otimes \cdots \otimes \widetilde{M}_\ell$。假设 $v \in \widetilde{M}_{\text{为单}\tilde{\mu}}$，其中$\tilde{\mu} \in \tilde{\mathcal{P}}^+$。对于任意 m、$m' \in \mathbb{Z}_+$，令 $v_{m'} = \tilde{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m']}(v)$ 和 $\overline{v}_m = \bar{\mathfrak{t}}^{\tilde{\mu}}_{[m]}(v)$。对于每个 $i = 1, \ldots, \ell$，我们有：

(i) v 是 $\mathcal{H}^i$ 的特征值为 c 的特征向量，当且仅当 $v_{m'}$ 是$\mathcal{H}^i[m']$ 的特征值为 c的特征向量。此外，$\widetilde{\mathcal{H}}^i$ 在 $\widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\tilde{\mu}}$ 上可对角化，当且仅当 $\mathcal{H}^i[m']$ 在$T_{[m']}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\mu[m']}$上可对角化。在这种情况下，它们具有相同的谱。

~(ii) v 是 $\mathcal{H}^i$ 的特征值为 c 的特征向量，当且仅当 $\overline{v}_m$ 是$\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 的特征值为 c的特征向量。

此外， $\widetilde{\mathcal{H}}^i$ 在 $\widetilde{M}^{\mathrm{sing}}_{\widetilde{\mu}}$ 上可对角化，当且仅当 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 在$\overline{T}_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\overline{\mu}[m]}$上可对角化。在这种情况下，它们具有相同的谱。

因此， $\overline{\mathcal{H}}^i[m]$在 $\overline{T}_{[m]}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\overline{\mu}[m]}$上可对角化，当且仅当 $\mathcal{H}^i[m']$在 $T_{[m']}(\widetilde{M})^{\mathrm{sing}}_{\mu[m']}$上可对角化。在这种情况下，它们具有相同的谱。

证明。我们只证明 (i)。(ii) 的证明类似。根据命题 4.5，我们知道对于某个 $A \in U(\tilde{\mathfrak{l}})$，有 $v_{m'} = Av$ 。假设对于某个 $c \in \mathbb{C}$，有 $\widetilde{\mathcal{H}}^i v = cv$ 。根据引理 4.4，并结合 Av 是权为 $\mu[m'] \in \Xi[m']$的向量这一事实，我们得到

$$\mathcal{H}^i[m'](Av) = \widetilde{\mathcal{H}}^i(Av).$$

~由于 $\mathcal{H}^i$ 是一个 $\tilde{\mathfrak{g}}$-同态，因此

$$\mathcal{H}^i[m'](v_{m'}) = A\widetilde{\mathcal{H}}^i(v) = A(cv) = cv_{m'}.$$

~反之，设对于某个 $c \in \mathbb{C}$，有 $\mathcal{H}^i[m'](v_{m'}) = cv_{m'}$ 。利用 $\mathcal{H}^i$ 是一个 $\tilde{\mathfrak{g}}$-同态这一性质，并再次应用引理 4.4，我们得到

$$A\widetilde{\mathcal{H}}^i v = \widetilde{\mathcal{H}}^i(Av) = \mathcal{H}^i[m'](Av) = cv_{m'}.$$

~根据注 4.6， A 具有逆映射，因此我们推出 $\mathcal{H}^i(v) = cv$。这证明了 (i) 的第一部分。第二部分直接由第一部分得出。 □

命题 4.8. (i) 对于 M_1、.....、 $M_\ell \in \mathcal{O}[m]$，设 $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$。假设 $v \in M^{\mathrm{sing}}_\mu$且 $\mu \in \mathcal{P}[m]^+_n$。那么对于每个 $i = 1$、.....、 ℓ， v 是 $\mathcal{H}^i[m]$的特征向量且特征值为 c ，当且仅当 v 是 $\mathcal{H}^i[m]_n$ 的特征向量且特征值为 c。

此外， $\mathcal{H}^i[m]$ 在 M^{sing}_μ 上可对角化，当且仅当 $\mathcal{H}^i[m]_n$ 在 $\mathfrak{tr}^\infty_n(M)^{\mathrm{sing}}_\mu$ 上可对角化。在此情况下，它们具有相同的谱。

(ii) 对于 $\overline{M}_1$、.....、 $\overline{M}_\ell \in \overline{\mathcal{O}}[m]$，令 $\overline{M} = \overline{M}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{M}_\ell$。假设 $v \in \overline{M}_{\mathrm{sing}\overline{\mu}}$ with$\overline{\mu} \in \overline{\mathcal{P}}[m]^+_n$。对于每个 $i = 1$、.....、 ℓ，当且仅当 v 是 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]_n$ 的特征向量且特征值为 c 时， v 是 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 的特征向量且特征值为 c。

此外， $\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 在 $\overline{M}^{\mathrm{sing}}_\mu$ 上可对角化，当且仅当 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]_n$ 在 $\overline{\mathfrak{tr}}^\infty_n(\overline{M})^{\mathrm{sing}}_\mu$ 上可对角化。在此情况下，它们具有相同的谱。

证明。我们只证明 (i)。(ii) 的证明类似。注意，对于 $\mu \in \mathcal{P}[m]^+_n$，有 $\mathfrak{tr}^\infty_n(M)^{\mathrm{sing}}_\mu = M^{\mathrm{sing}}_\mu$。根据引理 4.1，我们有

$$\mathcal{H}^i[m](w) = \mathcal{H}^i[m]_n(w), \qquad \text{for all } w \in M^{\mathrm{sing}}_\mu.$$

The (i) 的第一部分得证。(i) 的第二部分由第一部分可直接推出。 □

5 $\overline{\mathcal{G}}[m]_n$上的模上的 Gaudin 哈密顿量

本节研究有限维李（超）代数的（二次）Gaudin 哈密顿量。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathcal{G}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathcal{G}}[m]_n$）的 Gaudin 哈密顿量与$\mathfrak{g}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathfrak{g}}[m]_n$）的 Gaudin 哈密顿量联系起来。此外，我们研究可酉化不可约最高权模的张量积上的 Gaudin 哈密顿量，并对这些算子的对角化给出肯定的回答。

设定 $\ell \in \mathbb{N}$，其中 $\ell \geq 2$。对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{G}[m]_n$ 和$\overline{\mathcal{G}}[m]_n$ 的 Casimir 对称张量定义为（参见 [CaL，第 3.4] 节）

$$\mathring{\Omega}[m]_n = \sum_{\beta \in \Phi[m]_n^+} \left(E^\beta \otimes E_\beta + (-1)^{|E_\beta|} E_\beta \otimes E^\beta\right) + \sum_{j \in \mathbb{J}_m^+(n)} (-1)^{2j} E_j \otimes E_j,$$

$$\overline{\mathring{\Omega}}[m]_n = \sum_{\beta \in \overline{\Phi}[m]_n^+} \left(E^\beta \otimes E_\beta + (-1)^{|E_\beta|} E_\beta \otimes E^\beta\right) + \sum_{j \in \overline{\mathbb{J}}_m^+(n)} (-1)^{2j} E_j \otimes E_j.$$

。 。显然，$\Omega[m]_n$和 $\Omega[m]_n$分别属于 $U(\mathcal{G}[m]_n) \otimes U(\mathcal{G}[m]_n)$ 和 $U(\overline{\mathcal{G}}[m]_n) \otimes U(\overline{\mathcal{G}}[m]_n)$。

对于任意 $i = 1,\ldots,\ell$ 以及任意互不相同的复数 $z_1, \ldots, z_n$，(二次) Gaudin 哈密顿量 $H^i[m]_n$ 和 $\overline{H}^i[m]_n$ 定义如下

$$H^i[m]_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{\mathring{\Omega}[m]_n^{(ij)}}{z_i - z_j} \qquad \text{and} \qquad \overline{H}^i[m]_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\ell} \frac{\overline{\mathring{\Omega}}[m]_n^{(ij)}}{z_i - z_j}. \tag{5.1}$$

设 $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$（分别为 $\overline{M} = \overline{M}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{M}_\ell$），其中每个 M_i（分别为 $\overline{M}_i$）都是一个 $\mathcal{G}[m]_n$（分别为$\overline{\mathcal{G}}[m]_n$）-模。注意，$M$ 上的 Gaudin 哈密顿量 $H^i[m]_n$（分别地，$\overline{M}$上的 $\overline{H}^i[m]_n$）彼此对易，并且它们是 $\mathcal{G}[m]_n$（分别为 $\overline{\mathcal{G}}[m]_n$）-同态。显然，对于 M（分别为 $\overline{M}$）的任意权 μ，子空间M_μ^{sing}（分别为 $\overline{M}_{\text{奇异}\mu}$）是 $H^i[m]_n$-不变的（分别为 $\overline{H}^i[m]_n$-不变的）。此处及下文中，$N_{\text{奇异}}$表示由相对于标准 Borel 子代数的 N 中的奇异向量张成的子空间，而 N_μ^{sing}表示对于任意 $\mathcal{G}[m]_n$（分别为 $\overline{\mathcal{G}}[m]_n$）-模 N 及其任意权 μ，权空间 N_μ 中的奇异向量所张成的子空间。

令 $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$、$\mathfrak{c}$、$\mathfrak{d}$。每个 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）-模都可以通过由 (2.11) 定义的同构 ι 视为一个 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）-模。显然，将模 N 视为 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）-模时，其中奇异向量的集合，等于将模 N 视为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[m]_n$（分别地，$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$）-模时，其中奇异向量的集合。

命题 5.1. (i) 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i = 1$、.....、ℓ，设 M_i 为一个 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}}[m]_n$-模，并设 $M = M_1 \otimes \cdots \otimes M_\ell$ 和 $v \in M^{\mathrm{sing}}$。那么，对于每个 $i = 1$、.....、ℓ，v 是 $\mathcal{H}^i[m]_n$ 的特征向量，当且仅当 v 是 $H^i[m]_n$ 的特征向量。因此，$\mathcal{H}^i[m]_n$ 在 M^{sing} 上可对角化，当且仅当 $H^i[m]_n$ 在 M_{sing} 上可对角化。

(ii) 对于 $n \in \mathbb{N}$和 $i = 1, \ldots, \ell$，设 $\overline{M}_i$是一个 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$-模，并设 $\overline{M} = \overline{M}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{M}_\ell$和 $v \in \overline{M}^{\mathrm{sing}}$。那么，对于每个 $i = 1, \ldots, \ell$，v 是 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]_n$的特征向量，当且仅当 v 是 $\overline{H}^i[m]_n$的特征向量。因此，$\overline{\mathcal{H}}^i[m]_n$ 在 $\overline{M}^{\mathrm{sing}}$ 上可对角化，当且仅当 $\overline{H}^i[m]_n$ 在 $\overline{M}^{\mathrm{sing}}$ 上可对角化。

证明。容易看出 $\iota\otimes\iota\big(\mathring{\Omega}[m]_n\big)=\Omega[m]_n-(m-n)K\otimes K$。因此

$$H^i[m]_n(v)=\mathcal{H}^i[m]_n(v)-(m-n)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\ell}\frac{K^{(i)}K^{(j)}}{z_i-z_j}(v).$$

右侧最后一项是一个固定标量乘以 v。这意味着 (i)。(ii) 的证明类似。

□

令 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。对于 $\xi_1,\dots,\xi_\ell\in\mathfrak{h}^{\mathfrak{r}}[m]_n^*$（分别地，$\overline{\xi}_1,\dots,\overline{\xi}_\ell\in\mathfrak{h}^{\mathfrak{r}}[m]_n^*$），我们设 $\underline{\xi}:=(\xi_1,\dots,\xi_\ell)$（分别地，$\underline{\overline{\xi}}:=(\overline{\xi}_1,\dots,\overline{\xi}_\ell)$），并且

$$L(\mathcal{G}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\xi}):=L(\mathcal{G}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\xi_1)\otimes\cdots\otimes L(\mathcal{G}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\xi_\ell)$$

$$\big(\text{resp., } L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\overline{\xi}}):=L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\overline{\xi}_1)\otimes\cdots\otimes L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\overline{\xi}_\ell)\big).$$

类似地，对于 $\xi_1,\dots,\xi_\ell\in\mathfrak{h}^{\mathfrak{r}}[m]_n^*$（分别地，$\overline{\xi}_1,\dots,\overline{\xi}_\ell\in\overline{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{r}}[m]_n^*$），我们设 $\underline{\xi}:=(\xi_1,\dots,\xi_\ell)$（分别地，$\underline{\overline{\xi}}:=(\overline{\xi}_1,\dots,\overline{\xi}_\ell)$），并且

$$L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\xi}):=L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\xi_1)\otimes\cdots\otimes L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\xi_\ell)$$

$$\big(\text{resp., } L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\overline{\xi}}):=L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\overline{\xi}_1)\otimes\cdots\otimes L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\overline{\xi}_\ell)\big).$$

我们再次省略下标 ∞。例如，我们将 $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[m],\underline{\xi})$ 记作 $:=L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[m]_\infty,\underline{\xi})$。以下定理由 [Ry, Main Corollary] 得出。

定理 5.2。设 $n\in\mathbb{N}$，并设 ξ_1、...、$\xi_\ell\in\mathfrak{h}^{\mathfrak{r}}[0]_n^*$ 为支配整权。对于每个 $i=1$、...、ℓ 以及一般的 z_1、...、z_ℓ，Gaudin 哈密顿量 $H^i[0]_n$ 在空间 $L(\mathcal{G}^{\mathfrak{r}}[0]_n,\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上可对角化。

注 5.3。 [Ry] 中的结果只涉及单李代数。然而，李代数 $\mathcal{G}^{\mathfrak{a}}[0]_n\cong\mathfrak{gl}(n)$ 不是半单的。当 $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}$ 时，结论仍然成立，因为 $\mathfrak{gl}(n)$ 上的不可约最高权模与 $\mathfrak{sl}(n)$ 上的不可约最高权模相同，并且对于 $\mathfrak{gl}(n)$，其 Gaudin 哈密顿量与 $\mathfrak{sl}(n)$ 的 Gaudin 哈密顿量之差是在空间 $L(\mathcal{G}^{\mathfrak{a}}[0]_n,\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上恒等算子的一个标量倍数。

回顾第 3.2 节和第 3.3 节中定义的 $Q^{\mathfrak{r}}(m|n)$、$\overline{Q}^{\mathfrak{r}}(m|n)$、$\overline{\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{r},\ I}(m|n)$ 和 $\overline{\mathfrak{Q}}^{\mathfrak{r},\ II}(m|n)$。

推论 5.4. 设 $\xi_1,\dots,\xi_\ell\in Q^{\mathfrak{r}}(0|\infty)$为.....。对于每个 $i=1,\dots,\ell$ 以及一般的 $z_1,\dots,z_\ell$，Gaudin 哈密顿量 $\mathcal{H}^i[0]$ 在空间 $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[0],\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$上可对角化。

证明. 注意，$\mathfrak{tr}_n^\infty(L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[0],\xi_i))$通过由 (2.11) 定义的同构 ι视为一个 $\mathcal{G}^{\mathfrak{r}}[0]_n$-模时，是一个具有支配整最高权的不可约模。给定 $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[0],\underline{\xi})$的一个权空间，我们可以选取足够大的 n，使得 $\mathfrak{tr}_n^\infty(L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[0],\underline{\xi}))$包含该权空间。因此，由命题 4.8、命题 5.1 和定理 5.2 可得此推论。

□

固定 $m\in\mathbb{Z}_+$。根据双射 (3.1) 和 (3.2)，任意权 $\xi\in Q^{\mathfrak{r}}(0|\infty)$ 都对应于一个权 $\overline{\xi}\in\overline{Q}^{\mathfrak{r}}(m|\infty)$，反之亦然。

定理 5.5。设 $\xi_1,\dots,\xi_\ell \in Q^{\mathfrak{r}}(0|\infty)$，并设 $\overline{\xi}_1,\dots,\overline{\xi}_\ell \in \overline{Q}^{\mathfrak{r}}(m|\infty)$ 为相应的权。对于每个 $i=1,\dots,\ell$ 以及一般的 $z_1,\dots,z_\ell$，Gaudin 哈密顿量 $\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 在空间 $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m],\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上可对角化；$\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 在 $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m],\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上的任意特征基，都可以由 $\mathcal{H}^i[0]$ 在 $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[0],\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上的某个特征基得到，反之亦然。此外，$\overline{\mathcal{H}}^i[m]$ 在 $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{r}}[m],\underline{\overline{\xi}})^{\mathrm{sing}}$ 上的作用与 $\mathcal{H}^i[0]$ 在 $L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{r}}[0],\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上的作用具有相同的谱。

证明。正如第 2.6 节所述，$T_{[0]}$ 和 $\overline{T}_{[m]}$ 是张量函子。对于 $n=\infty$，该定理由推论 5.4 和定理 4.7 连同 $m'=0$，以及 (3.1) 和 (3.2) 得出。 □

定理 5.6。设 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\xi_1,\dots,\xi_\ell \in \overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{r},I}(m|n)$。对于每个 $i=1,\dots,\ell$ 以及一般的 $z_1,\dots,z_\ell$，Gaudin 哈密顿量 $\overline{H}^i[m]_n$ 在空间 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上可对角化，并且其任一特征基均可由某些有限维不可约 $\mathcal{G}^{\mathfrak{r}}[0]_k$-模的张量积上的 Gaudin 哈密顿量 $H^i[0]_k$' 的奇异特征向量构造得到。

证明。我们对 $\mathfrak{r}=\mathfrak{c}$ 证明该定理。其他情形可用类似方法证明。

对任意 $i=1,\dots,\ell$，$\xi_i=\overline{\lambda}_i-d_i\mathbb{1}_{m|n}$ 存在某个 $\lambda_i\in\mathcal{P}(m|n)$ 和 $d_i\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $(\lambda_i)_1\le d_i$。视为 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{c}}[m]_n$-模，其中作用通过同构 ι 在 (2.11) 中给出，$L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n,\underline{\xi})$ 同构于 $L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n,\overline{\lambda}_1[m])\otimes\cdots\otimes L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{c}}[m]_n,\overline{\lambda}_\ell[m])$，其中

$$\overline{\lambda}_i[m]:=\sum_{j=1}^{m}(\lambda_i)_j\epsilon_j+\sum_{j=1}^{n}\left\langle(\lambda_i)'_j-m\right\rangle\epsilon_{j-\frac{1}{2}}+d_i\Lambda_0\qquad\text{for } i=1,\dots,\ell.$$

因此 $\overline{\lambda}_1[m],\dots,\overline{\lambda}_\ell[m]\in\overline{Q}^{\mathfrak{c}}(m|\infty)$。现在由命题 4.8、命题 5.1 和定理 5.5 即可得到该定理。 □

注 5.7。(i) 模 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\xi})$ 是不可约最高权模的直和，因为它是可酉化的不可约最高权模的张量积。由于每个 $\overline{H}^i[m]_n$ 都与 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n$ 对易，我们可知 Gaudin 哈密顿量 $\overline{H}^i[m]_n$ 在空间 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\xi})$ 上可对角化。

(ii) 对于 $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}$ 以及每个作为自然模 $\mathbb{C}^{m|n}$的 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n,\xi_i)$，定理 5.6 中相应的结果已由 Mukhin、Vicedo 和 Young [MVY] 得到。

(iii) 我们有 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[0]_n\cong\mathfrak{so}(2n)$ 和 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[0]_n\cong\mathfrak{sp}(2n)$。定理 5.6 中的权 ξ_1，……，ξ_ℓ 是无限维可酉化不可约最高权模的最高权（见注 3.9）。

(iv) 对于正交辛李超代数 $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$，定理 5.6 也成立，只要 ξ_1，……，ξ_ℓ 是满足以下条件的最高权：对每个 $i=1$，……，ℓ，$\xi_i=\overline{\lambda}_i-d_i\mathbb{1}_{m|n}$ 对某个 $\lambda_i\in\mathcal{P}(m|n)$ 成立，且 $d_i\in\mathbb{Z}_+$ 满足 $(\lambda_i)_1\le d_i$。证明完全相同，此处略去。

定理 5.8. 设 $\mathfrak{r}=\mathfrak{c},\mathfrak{d}$，$n\in\mathbb{N}$ 和 $\xi_1,\dots,\xi_\ell\in\overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{r},II}(m|n)$。对于每个 $i=1,\dots,\ell$ 以及一般的 $z_1,\dots,z_\ell$，Gaudin 哈密顿量 $\overline{H}^i[m]_n$ 在空间 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{r}}[m]_n,\underline{\xi})^{\mathrm{sing}}$ 上可对角化，其任意特征基均可由某些有限维不可约 $\mathcal{G}^{\mathfrak{r}}[0]_k$-模张量积上的 Gaudin 哈密顿量 $H^i[0]_k$' 的奇异特征向量得到。

证明. 每个 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n$（分别为 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n$）-模 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{c}}[m]_n, \xi_i)$（分别为 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{d}}[m]_n, \xi_i)$）都可通过由 (2.10) 定义的同构 $\widehat{\varphi}$ 视为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{d}}[m]_n$（分别为 $\mathcal{G}^{\mathfrak{c}}[m]_n$）-模。结合定理 5.6 以及对所涉及最高权的明确描述，即可得出该定理。 □

我们预计，本文的结果或可提供一种方法，利用与李代数 $\mathcal{G}^{\mathfrak{x}}[0]_k$ 相关的 Gaudin 哈密顿量的公共特征向量，求得与李（超）代数$\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{x}}[m]_n$ 相关的 Gaudin 哈密顿量的公共特征向量，其中 $k \in \mathbb{N}$满足某些条件。

下面以 $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$为例作更详细的说明。对于每个 $i = 1, \dots, \ell$，考虑空间 $\overline{M}_{\overline{\mu}}^{\mathrm{sing}}$ 上的 Gaudin 哈密顿量 $\overline{H}^i[m]_n$，其中 $\overline{\mu}$ 是 $\overline{M}$的奇异权（即奇异向量的权），且 $\overline{M} := L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n, \overline{\xi}_1) \otimes \cdots \otimes L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n, \overline{\xi}_\ell)$，其中 $\overline{\xi}_1, \dots, \overline{\xi}_\ell \in \overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{a},I}(m|n)$。第 4 节和第 5 节中的论证使我们能够利用李代数 $\mathcal{G}^{\mathfrak{a}}[0]_k$的所有 Gaudin 哈密顿量 $H^i[0]_k$的公共特征向量，求得所有$\overline{H}^i[m]_n$的公共特征向量；其中 $k \in \mathbb{N}$满足某些条件，且这些向量位于 $L_1 \otimes \cdots \otimes L_\ell$中奇异向量所张成的空间上。在该空间中，$L_i$是一个有限维不可约 $\mathcal{G}^{\mathfrak{a}}[0]_k$模，它依赖于 $L(\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[m]_n, \overline{\xi}_i)$，其中$i = 1, \dots, \ell$。一种显式构造方法是对 $H^i[0]_k$的 Bethe 向量依次施加若干特定的奇反射；这些 Bethe 向量由 Bethe ansatz 方法构造（例如参见 [FFR，第 31]页）。这些奇反射依赖于权 μ，并且可以显式确定。假设我们要为奇异权 $\overline{\mu} := 3\epsilon_1 + 3\epsilon_{1/2}$，求出 $\overline{M}_{\overline{\mu}}^{\mathrm{sing}}$ 上 Gaudin 哈密顿量 $\overline{H}^i[1]_n$的公共特征向量。对于 $\mathfrak{a}$型，有 $d = 0$，因此我们可以将 $\overline{\mathcal{G}}^{\mathfrak{a}}[1]_n$（分别为$\overline{H}^i[1]_n$）的作用与 $\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[1]_n$（分别为 $\overline{\mathcal{H}}^i[1]_n$）的作用等同，并将 $\overline{\mathcal{Q}}^{\mathfrak{a},I}(1|n)$与 $\overline{Q}^{\mathfrak{a},I}(1|n)$等同。因此 $\overline{M} = L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[1]_n, \overline{\xi}_1) \otimes \cdots \otimes L(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}[1]_n, \overline{\xi}_\ell)$。用 μ（分别为 ξ_i）表示与权 $\overline{\mu}$（分别为 $\overline{\xi}_i$）对应的分拆。$\overline{M}_{\overline{\mu}}^{\mathrm{sing}}$ 上 $\overline{\mathcal{H}}^i[1]_n$的公共特征向量，对应于 $(L(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\xi}_1) \otimes \cdots \otimes L(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}}, \widetilde{\xi}_\ell))^{\mathrm{sing}}_{\widetilde{\mu}}$ 上的 $\widetilde{\mathcal{H}}^i$的公共特征向量，进而对应于 $(L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[0], \xi_1[0]) \otimes \cdots \otimes L(\mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[0], \xi_\ell[0]))^{\mathrm{sing}}_{\mu[0]}$，~上的 $\mathcal{H}^i[0]$的公共特征向量，其中 $\mu[0] = 3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 \leftrightarrow \widetilde{\mu} \leftrightarrow \overline{\mu} = \overline{\mu}[1]$ 和 $\xi_i[0] \leftrightarrow \xi_i \leftrightarrow \overline{\xi}_i = \overline{\xi}_i[1]$ 由 (3.1) 中的双射确定。更具体地说，对于某个 ，我们可以选取公共特征向量

$$\overline{v} = E_{1/2\,2}E_{1/2\,3}E_{1/2\,4}v \qquad v \qquad \mu[0] \qquad L\ \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[0]_k\ \xi_1[0]\ \otimes \cdots \otimes :,,,,$$
$$L\ \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}[0]_k\ \xi_\ell[0]\ ^{\mathrm{sing}} = L\ \mathcal{G}^{\mathfrak{a}}[0]_k\ \xi_1[0]\ \otimes \cdots \otimes L\ \mathcal{G}^{\mathfrak{a}}[0]_k\ \xi_\ell[0]\ ^{\mathrm{sing}} \qquad k$$

它们对应于权属于 ((,) (,)) ((,) (,)) 的所有 Bethe 向量。需要强调的是，尽管所有这些由奇反射得到的 $E_{i,j}$都属于 $U(\widetilde{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{a}})$，但每个所得向量 $\overline{v}$ 都是 $\overline{M}_{\overline{\mu}}^{\mathrm{sing}}$ 的一个元素。在这种情况下，我们可以选取 $k = 4$。

一般来说，应当预期以这种方式得到的特征向量形式会很复杂。若能知道这一过程是否与其他已知的构造特征向量的方法相关，将会很有意思。

致谢。我们感谢一位匿名专家提出的宝贵意见。第一作者部分工作获得台湾科技部 110-2115-M-006-006 号资助项目的资助。第二作者部分工作获得台湾科技部 109-2115-M-006-019-MY3 号资助项目的资助。

参考文献

[BF] H. M. Babujian, R. Flume, 《Gaudin 磁体的非壳上 Bethe Ansatz 方程及 Knizhnik-Zamolodchikov 方程的解》, 《现代物理快报 A》9 (1994), 第 22 期, 2029–2039.[CaL] B. Cao, N. Lam, 《超 Knizhnik-Zamolodchikov 方程的解》, 《数学物理快报》110 (2020), 第 7 期, 1799–1834.[CL1] S.-J. Cheng, N. Lam, 《无限维李超代数与钩 Schur 函数》, 《数学物理通讯》238 (2003), 95–118.[CL2] S.-J. Cheng, N. Lam, 《一般线性超代数的不可约特征与超对偶》, 《数学物理通讯》280 (2010), 645–672.[CLW1] S.-J. Cheng,N. Lam, W. Wang, 《正交辛李超代数的超对偶与不可约特征》, 《数学发明》183 (2011), 189–224.[CLW2] S.-J. Cheng, N. Lam, W. Wang, 《一般线性李超代数的超对偶及其应用》, 载于《李代数、群与表示论的最新进展》, 《纯数学研讨会论文集》第 86 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 2012, 113–136.[CLZ] S.-J. Cheng, N. Lam, R. Zhang, 《一般线性超代数无限维可酉化模的特征公式》, 《代数杂志》273 (2004), 第 2 期, 780–805.[CW] S.-J. Cheng, W. Wang, 《李超代数的对偶与表示》, 《数学研究生学习丛书》第 144 卷, 美国数学会, 2012.[EHW] T. J. Enright, R. Howe, N. R. Wallach, 《酉最高权模的分类》, 载于《约化群表示论》, Birkhäuser, 波士顿, 1983, 97–143.[EFK] P. I. Etingof, I. B. Frenkel, A. A. Kirillov, Jr., 《表示论与 Knizhnik-Zamolodchikov 方程讲义》, 《数学调查与专著》第 58 卷, 美国数学会, 1998.[FFR] B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, 《Gaudin 模型、Bethe Ansatz 与临界层》, 《数学物理通讯》166 (1994), 第 1 期, 27–62.[FFRy] B. Feigin, E. Frenkel, L. Rybnikov, 《具有不规则奇点的 opers 与自变量平移子代数的谱》, 《杜克数学杂志》155 (2010), 第 2 期, 337–363.[G1] M. Gaudin, 《一类自旋 Hamilton 算子的对角化》, 《物理学杂志》37 (1976), 第 10 期, 1089–1098.[G2] M. Gaudin, 《Bethe 波函数》, 《原子能委员会丛书：科学系列》, Masson, 巴黎, 1983.[HMVY] C. Huang, E. Mukhin, B. Vicedo, C. Young, 《 $\mathfrak{gl}_{M|N}$ Bethe Ansatz 方程的解与有理伪微分算子》, 《数学精选》（新系列）25 (2019), 第 4 期, 论文第 52 号, 34 页.[HLT] P.-Y. Huang, N. Lam, T.-M. To, 《李代数可酉化模的超对偶与同调》, 《数学科学研究所刊物》48 (2012), 第 1 期, 45–63.[K] V. G. Kac, 《李超代数》, 《数学进展》16 (1977), 8–96.[KZ] V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, 《二维中的流代数与 Wess-Zumino 模型》, 《核物理 B》247 (1984), 83–103。

[KuM] P. P. Kulish，N. Manojlovi´c，《osp(1|2) Gaudin 模型的 Bethe 向量》，《数学物理快报》55 (2001)，第 1 期，77–95 页。[LZ] N. Lam，R. Zhang，《无限秩李超代数的准有限模》，《美国数学会汇刊》358 (2006)，第 1 期，403–439 页。[L] K. Lu，《与 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 相关的 Gaudin 模型的 Bethe Ansatz 完备性》，《核物理 B》980 (2022)，论文编号 115790，共 23 页。[LM] K. Lu，E. Mukhin，《正交辛李超代数的 Bethe Ansatz 方程与自对偶超空间》，《亨利·庞加莱年刊》22 (2021)，第 12 期，4087–4130 页。[LMV] K. Lu，E. Mukhin，A. Varchenko，《关于与经典型李代数相关的 Gaudin 模型》，《数学物理杂志》57 (2016)，第 10 期，101703，共 23 页。[Lus] G. Lusztig，《量子群导论》，数学进展丛书第 110 卷，Birkhäuser，波士顿，1993。[MTV1] E. Mukhin，V. Tarasov，A. Varchenko，《舒伯特演算与一般线性群的表示》，《美国数学会杂志》22 (2009)，第 4 期，909–940 页。[MTV2] E. Mukhin，V. Tarasov，A. Varchenko，《关于变量分离及量子 $\mathfrak{gl}_N$ Gaudin 模型的 Bethe Ansatz 完备性》，《格拉斯哥数学杂志》51 (2009)，A 辑，137–145 页。[MV] E. Mukhin，A. Varchenko，《Bethe 向量的范数与主函数的海森矩阵》，《组合数学》141 (2005)，第 4 期，1012–1028 页。[MVY] E. Mukhin，B. Vicedo，C. Young，《$\mathfrak{gl}(m|n)$ 的 Gaudin 模型》，《数学物理杂志》56 (2015)，第 5 期，051704，共 30 页。[Ry] L. Rybnikov，《Gaudin Bethe Ansatz 猜想的一个证明》，《国际数学研究通知》IMRN (2020)，第 22 期，8766–8785 页。

国立成功大学数学系，台湾台南 701401 电子邮件地址：keng@ncku.edu.tw

国立成功大学数学系，台湾台南 701401 电子邮件地址：nlam@ncku.edu.tw