arXiv:2301.03152v1 [math.FA] 9 Jan 2023

幂零李群上与平移生成系统相关的重构公式

苏迪普塔·萨卡尔和尼拉杰·K·舒克拉

Abstract. 设 G 是一个连通单连通幂零李群，其不可约酉表示模中心平方可积。我们给出了 $L^2(G)$中与左平移生成系统相关的重构公式的刻画结果。与此前关于幂零李群上离散框架的研究不同，本研究采用连续框架的设定，因此所得重构公式以积分表示而非离散求和的形式给出。作为我们关于海森堡群的结果的推论，我们得到了 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的正交归一 Gabor 系统所对应的重构公式。

1. 引言

调和分析中最引人关注的研究领域之一，是通过一种称为重构公式的公式，从给定的函数集合中重构函数。由于这类公式在时频分析、数学物理、量子力学、量子光学等诸多领域有着广泛应用，因此人们在欧几里得空间和局部紧阿贝尔（LCA）群框架下，对 Gabor、小波和平移生成系统等多种情形进行了研究（参见 [3, 4, 7, 8, 10, 11]）。一般而言，目标是针对给定系统 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$，寻找 $\{\psi_i\}_{i\in I}$，其中 I 是可数的，使得下述重构公式

$$f = \sum_{i\in I, k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_i(\cdot - k)\rangle \varphi_i(\cdot - k), \quad \text{for all } f \in \overline{\text{span}}\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$$

成立，前提是系统 $\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$ 和 $\{\psi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$ 均为 Bessel 系统。系统 $\{\psi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$称为 $\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$的交替对偶，其中 $\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$ 是满足上述公式的框架序列。值得注意的是，对 f 进行上述稳定分解，使得我们可以灵活地为框架 $\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$选择不同类型的对偶。当框架序列 $\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$ 成为 Riesz 基时，ψ_i 的选择是唯一的，而系统 $\{\psi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$ 是 $\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$的双正交对偶。一般而言，研究者会考虑 span $\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$ = span$\{\psi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$，但有时选择空间 span$\{\varphi_i(\cdot - k)\}_{i,k}$ 之外的 ψ_i，能够在时域和频域中带来更好的局部化性质。这类需求促使研究者定义框架的各种对偶，例如斜对偶、I 型和 II 型对偶等。更多详情请参见 [7, 9, 10, 11]。

我们的主要目标是描述与 $L^2(G)$ 中左平移生成的连续框架系统相关的重构公式。特别地，我们假设 G 是一个具有李代数 $\mathfrak{g}$ 的连通单连通幂零李群，并且 Z 是 G 的中心。那么，如果 G 的几乎所有不可约表示都是模中心平方可积（SI）的，G 就是一个 SI/Z 群。若不可约表示 π 满足以下条件，则称其为 G 的模中心平方可积表示：

$$\int_{G/Z} |\langle \pi(g)u, v\rangle|^2 d\dot{g} < \infty, \text{ for all } u, v.$$

本研究的动机有两方面：首先，它涉及幂零李群的非阿贝尔结构，这种结构被认为具有较高的非阿贝尔程度；其次，它涵盖了非离散平移。因此，该理论适用于 d 维海森堡群 $\mathbb{H}^d$，这是一种二步幂零李群。事实上，我们的工作延续了 Currey 等人 [6] 关于 $L^2(G)$ 的一系列研究，以及 Barbieri 等人 [2] 关于 $L^2(\mathbb{H}^d)$ 的研究。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 22E25、22E30、43A60、43A80。*Key words and phrases.* 幂零李群与海森堡群、框架与 Riesz 基、重构公式、双正交系统与斜对偶、平移不变空间。S. Sarkar 和 N. K. Shukla 的研究分别得到了 CSIR（新德里）研究资助 [09/1022(0037)/2017-EMR-I]和 NBHM-DAE [02011/19/2018-NBHM(R.P.)/R&D II/14723], 的支持。1

我们先简要介绍 $L^2(G)$ 中的左平移生成系统：对于函数序列 $\mathscr{A} = \{\varphi_k : k \in I\}$，其中 $L^2(G)$，以及 G 的子集 Λ，我们通过 Λ 的作用定义 Λ-平移生成（Λ-TG）系统$\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 及其对应的 Λ-平移不变（Λ-TI）空间 $\mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A})$，如下所示：

$$\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}) := \{L_\lambda \varphi : \lambda \in \Lambda, \varphi \in \mathscr{A}\}, \text{ and } \mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A}) := \overline{\text{span}}\ \mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}), \tag{1.1}$$

其中，对每个 $\lambda \in G$，$L^2(G)$ 上的左平移算子 L_λ 由 $L_\lambda f(x) = f(\lambda^{-1}x)$定义，其中 $x \in G$。若 $f \in V$蕴含对所有 $\lambda \in \Lambda$都有 $L_\lambda f \in V$，则 $L^2(G)$ 的闭子空间 V称为 Λ-TI 空间。我们将 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}) = \mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$和 $\mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A}) = \mathcal{S}^\Lambda(\varphi)$ 分别记为 $\mathscr{A} = \{\varphi\}$。对于幂零李群 G中心中的整数格 Λ_0，我们特别考虑$\Lambda = \{\lambda_1\lambda_0 : \lambda_i \in \Lambda_i, \ i = 0, \ 1\}$，其中 Λ_1 是 G的一个子集（不一定是离散的）。

鉴于连续框架在调和分析、数学物理、量子力学、量子光学等诸多领域得到广泛应用，我们讨论与一般集合 Λ_1 相关的 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 重构公式，而该集合不必是离散的。本研究全面探讨了 $\mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A})$的连续框架 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 的对偶。在连续情形下，我们给出了连续框架 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$的交替对偶及其斜交、I 型和 II 型等子类的逐点刻画，并证明对偶的全局性质可以传递到局部。与欧几里得情形 [11], 不同，值得一提的是，逐点刻画结果取决于 Λ_1。通过对连续框架进行采样，可以得到离散框架的结果；由于计算简便，离散框架具有广泛的应用。此外，对于离散集合 Λ_1，我们讨论了与单生成系统 $\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 和 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi)$ 相关的重构公式，这些系统具有双正交性质，其中 φ，$\psi \in L^2(G)$。此处我们指出，欧几里得群和局部紧阿贝尔群中使用的技术受到限制，因为幂零李群的对偶空间取代了频域，而函数的普朗歇尔变换是算子值的。

为说明当前关于海森堡群 $\mathbb{H}^d$的工作，我们首先指出，$\mathbb{H}^d$ 是一个 SI/Z 幂零李群，可与 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$等同。$d$维海森堡群记为 $\mathbb{H}^d$，是 SI/Z群的一个例子。群 $\mathbb{H}^d$可在群运算 (x下与 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 等同，其中y, w).(x', y', w') =($x + x', y + y', w + w' + x \cdot y$), $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^d$, $w, w' \in \mathbb{R}$，“$\cdot$”表示标准点积。迄今为止得到的结果，可以通过与 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的薛定谔表示相关联的纤维化映射，以自然的方式转化为适用于 $L^2(\mathbb{H}^d)$ 的结果。在这种情况下，我们可以选取形式为$\Lambda_1 = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \{0\}$ 的 Λ_1, Λ_0 以及 $\Lambda_0 = \{(0, 0) \times m\mathbb{Z}\}$，其中 Γ_1, Γ_2 是 $\mathbb{R}^d$ 和 $m \in \mathbb{N}$的加法子群。作为我们关于海森堡群的结果的推论，可以得到与 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的正交归一 Gabor 系统相关联的重构公式。

本文组织如下：第 2 节简要讨论 SI/Z 幂零李群的普朗歇尔变换。第 3 节利用值域函数，构造由多个函数的非离散平移生成的连续框架所对应的重构公式。第 4 节先使用普朗歇尔变换，再进行周期化，讨论具有双正交性质的单生成离散系统 $\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 和 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi)$ 的重构公式。

2. Plancherel transform for SI/Z nilpotent Lie group

设 G 是一个连通单连通幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。由于指数映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 是解析微分同胚，我们将 G 与$\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ 等同，其中 $n =$ 维数为 $\mathfrak{g}$。为李代数 $\mathfrak{g}$选取一组基，我们考虑由$\mathfrak{g}$ 的理想构成的 Jordan-H¨older 序列 $(0) \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$，使得对于 $j = 0$=1, . . . , n，有 dim $\mathfrak{g}_j = j$，且对所有 $X \in \mathfrak{g}$，当X、$Y \in \mathfrak{g}$时，$\text{ad}(X)(Y) = [X\,Y]$，其中 X和 Y的李括号。现在，对每个 $j = 1$=2, . . . , n，选取 $X_j \in \mathfrak{g}_j \backslash \mathfrak{g}_{j-1}$，使得集合 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$构成一组 Jordan-H¨older 基。于是，由 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j X_j \mapsto \exp(\sum_{j=1}^n x_j X_j)$定义的映射 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow G$是一个微分同胚，因此 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度可视为 G [5]上的哈尔测度。

注意，李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心 $\mathfrak{z}$ 是非平凡的，并且它映射到 G的中心 $Z := \exp \mathfrak{z}$。李群 G 分别通过伴随作用 $\exp(Ad(x)X) := x\exp(X)x^{-1}$ 和余伴随作用$(Ad^*(x)\ell)(X) = \ell(Ad(x^{-1})X)$作用于 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$，其中 $x \in G$、$X \in \mathfrak{g}$和 $\ell \in \mathfrak{g}^*$。$\mathfrak{g}^*$ 表示 $\mathfrak{g}$上所有实值线性泛函构成的向量空间。对于 $\ell \in \mathfrak{g}^*$，稳定子 $R_\ell = \{x \in G : (Ad^*x)\ell = \ell\}$ 是一个李群，其对应的李代数为 $r_\ell := \{X \in \mathfrak{g} : \ell[Y, X] = 0,$ 对所有 $Y \in \mathfrak{g}\}$均成立。

我们的目标是讨论基里洛夫理论 [5]，以定义 SI/Z 群的普朗歇尔变换。给定任意 $\ell \in \mathfrak{g}^*$，存在一个子代数 $\mathfrak{h}_\ell$（称为极化子代数或极大从属子代数），它在满足性质 $\ell[\mathfrak{h}_\ell, \mathfrak{h}_\ell] = 0$ 的所有子代数中是 $\mathfrak{g}$ 的极大子代数。于是，映射 $\mathcal{X}_\ell$: $\exp(\mathfrak{h}_\ell) \to \mathbb{T}$ 定义为 $\mathcal{X}_\ell(\exp X) = e^{2\pi i \ell(X)}$,

$X \in \mathfrak{h}_\ell$是 $\exp(\mathfrak{h}_\ell)$ 上的一个特征，因此由 $\mathcal{X}_\ell$, $\pi_\ell := \mathrm{ind}_{\exp \mathfrak{h}_\ell}^{G} \mathcal{X}_\ell$ 诱导的表示具有以下性质：

(i) π_ℓ 是 G的一个不可约酉表示。(ii) 假设 $\mathfrak{h}'_\ell$ 是另一个子代数，且相对于性质 $\ell[\mathfrak{h}'_\ell, \mathfrak{h}'_\ell] = 0$是极大的，那么 $\mathrm{ind}_{\exp \mathfrak{h}_\ell}^{G} \mathcal{X}_\ell \cong \mathrm{ind}_{\exp(\mathfrak{h}'_\ell)}^{G} \mathcal{X}_{\ell'}$。(iii) $\pi_{\ell_1} \cong \pi_{\ell_2}$ 当且仅当 ℓ_1 和 ℓ_2 属于同一个余伴随轨道。(iv) 假设 π 是 G的一个不可约酉表示，那么存在 $\ell \in \mathfrak{g}^*$ 使得 $\pi \cong \pi_\ell$。

$\hat{}$ $\hat{}$因此存在一个双射 $\mathfrak{t}^* : \mathfrak{g}^*/Ad^*(G) \to G$，它同时也是一个博雷尔同构，其中 G 是 G的所有不可约酉表示的集合。

$\hat{}$对于一个不可约表示 $\pi \in G$，令 O_π 表示与 π的等价类相对应的余伴随轨道。于是，SI/Z 表示的轨道刻画为： π 模中心平方可积，当且仅当对于 $\ell \in O_\pi$， $r_\ell = \mathfrak{z}$ 和 $O_\pi = \ell + \mathfrak{z}^\perp$。若 SI/Z $\neq \phi$，则 SI/Z=$\widehat{G}_{max}$，其中$\hat{}$ $\hat{}$博雷尔子集 $G_{max} \subseteq G$ 对应于最大维数的余伴随轨道，并且相对于 Plancherel $\hat{}$ $\hat{}$测度类是余零的。因此，当 G 是一个 SI/Z 群时，G_{max} 由 $\mathfrak{z}^*$的一个子集参数化。若 $\pi \in G_{\max}$，则 $\dim\ O_\pi = n - \dim\ \mathfrak{z}$；由于 O_π 是辛流形，其维数为偶数，记为 $\dim O_\pi = 2d$。根据舒尔引理， π 在 Z 上的限制是一个特征，因此是唯一元素 $\sigma = \sigma_\pi \in \mathfrak{z}^*$（记作），且 $\pi(z) = e^{2\pi i \langle \sigma,\ log z \rangle} I$，其中 I 是恒等算子。这表明 $O_\pi = \{l \in \mathfrak{g}^* :\ l|_{\mathfrak{z}} = \sigma\}$ 且 $\pi \mapsto \sigma_\pi$是单射。

设 G 为一个 SI/Z 群， $\mathcal{W} = \{\sigma \in \mathfrak{z}^* : \mathrm{Pf}(\sigma) \neq 0\}$ 为最大维数余伴随轨道的一个截面，其中 Pfaff 行列式 $\mathrm{Pf} :\ \mathfrak{z}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ 由 $\ell \mapsto \sqrt{|\det(\ell[X_i, X_j])_{i,\ j=r\ldots n}|}$给出。那么，对于固定的 $\sigma \in \mathcal{W}$， $p(\sigma) = \sum_{j=1}^{d} \mathfrak{g}_j(\sigma|_{\mathfrak{g}_j})$ 是 σ 的一个极大从属子代数，相应的诱导表示 π_σ 自然地实现于 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中，其中 $n = r + 2d$ 对某个 d 成立。对于每个 $\varphi \in L^1(G) \cap L^2(G)$， φ 的傅里叶变换由

$$\widehat{\varphi}(\sigma) = \int_G \varphi(x) \pi_\sigma(x) dx, \quad \sigma \in \mathcal{W}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^d)$上定义了一个迹类算子，其内积为 $\langle A, B \rangle_{\mathcal{B}_2} = tr(B^* A)$。这个空间记作 $\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))$。当 $d\sigma$ 经过适当归一化后，

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathcal{W}} \|\widehat{\varphi}(\sigma)\|^2_{\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))} |\mathbf{Pf}(\sigma)| d(\sigma).$$

傅里叶变换可酉延拓为 $\mathcal{F}$ ——普朗歇尔变换，

$$\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\mathfrak{z}^*, \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)), |\mathbf{Pf}(\sigma)| d\sigma)), \quad \mathcal{F}f = \widehat{f}.$$

注意，普朗歇尔变换 $\mathcal{F}$ 满足关系

$$\mathcal{F}(L_\lambda f)(\sigma) = \pi_\sigma(\lambda) \mathcal{F}f(\sigma), \text{ for } \lambda \in G, \ a.e.\ \sigma \in \mathfrak{z}^*, \text{ and } f \in L^2(G),$$

其中， L_λ 上的左平移算子 $L^2(G)$ 由 $L_\lambda f(x) = f(\lambda^{-1} x)$给出。

对 $\mathcal{F}$进行周期化后，存在一个酉映射（参见 [6, 12]）： $\mathscr{F}$： $L^2(G) \to L^2(\mathbb{T}^r;\ \ell^2(\mathbb{Z}^r, \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))))$

$$\mathscr{F}f(\alpha)(m) = \mathcal{F}f(\alpha + m) |\mathbf{Pf}(\alpha + m)|^{1/2}, \text{ for all } f \in L^2(G), \ m \in \mathbb{Z}^r, \text{ a.e. } \alpha \in \mathbb{T}^r. \tag{2.1}$$

此外， $\mathscr{F}$ 满足以下交织性质：由 Λ 的作用进行左平移，并与表示$\tilde{\pi}$ 相对应：

$$\mathscr{F}(L_\lambda f)(\alpha) = e^{2\pi i \langle \alpha, \lambda_0 \rangle} \tilde{\pi}(\lambda_1) \mathscr{F}f(\alpha), \quad \text{a.e. } \alpha \in \mathbb{T}^r, \tag{2.2}$$

其中，对于 $\lambda_0 \in \Lambda_0$ 和 $\lambda_1 \in \Lambda_1$，记作 $\lambda = \lambda_1 \lambda_0$；对于 $g \in G$ 和 $h \in L^2(\mathbb{T}^r;\ \ell^2(\mathbb{Z}^r、\ \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))))$、$\tilde{\pi}(g)h(\alpha) = \tilde{\pi}_\alpha(g)h(\alpha)$，几乎处处 $\alpha \in \mathbb{T}^r$。表示 $\tilde{\pi}_\alpha(g)$ 定义在 $\ell^2(\mathbb{Z}^r、\ \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)))$ 上，其定义为 $\tilde{\pi}_\alpha(g) z(m) = \pi_{\alpha+m}(g) \circ z(m)$，其中 $m \in \mathbb{Z}^r$，且 $(z(m)) \in \ell^2(\mathbb{Z}^r、\ \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)))$、$\circ$ 表示$\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))$ 中的算子复合，而 $\pi_{\alpha+m}(g)$ 是定义在 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的希尔伯特–施密特算子。

3. Reproducing formulas associated to continuous frames

在本节中，我们假设 G 是一个连通单连通幂零李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。G 上的哈尔测度可实现为 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度。进一步假设一个任意的可测子集

$$\Lambda_1 \subseteq \exp \mathbb{R}X_{r+1} \dots \exp \mathbb{R}X_n \text{ (not necessarily discrete)}$$

以及整数格 $\Lambda_0 = \exp\ \mathbb{Z}X_1 \dots \exp \mathbb{Z}X_r$ in G。对于可数函数族 $\mathscr{A} = \{\varphi_k : k \in I\}$ 和 $\mathscr{A}' = \{\psi_k :\ k \in I\}$ in $L^2(G)$, 我们回顾 Λ-平移生成系统

$$\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}) = \{L_\lambda \varphi_k : \lambda \in \Lambda, k \in I\} \text{ and } \mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}') = \{L_\lambda \psi_k : \lambda \in \Lambda, k \in I\},$$

其中 $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_0 = \{\lambda_1\lambda_0 :\ \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_0 \in \Lambda_0\}$。集合 $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_0$ 是可测的。

本节旨在发展具有多个生成元的连续情形下重构公式的理论。若两个贝塞尔族 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 和 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 满足以下条件，则称它们为对偶框架:

$$< f, g >= \sum_{k\in I} \int_{\Lambda} < f, L_\lambda \psi_k >< L_\lambda \varphi_k, g > d\lambda, \text{ for all } f, g \in L^2(G).$$

在这种情况下，重构公式（在弱意义下）为

$$f = \sum_{k\in I} \int_{\Lambda} < f, L_\lambda \psi_k > L_\lambda \varphi_k d\lambda, \text{ for all } f \in L^2(G), \tag{3.1}$$

根据柯西－施瓦茨不等式，系统 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 和 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 都将成为 $L^2(G)$ 的连续框架。Bessel族 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 是指存在一个 $B > 0$，使得

$$\sum_{k\in I} \int_{\Lambda} | < f, L_\lambda \varphi_k > |^2 d\lambda \leqslant B\|f\|^2, \text{ for all } f \in L^2(G).$$

此外，若存在一个 $0 < A \leqslant B < \infty$，使得 $A\|f\|^2$ 是上述表达式的下界，则它也是 $L^2(G)$ 的连续框架。若对所有 $f \in \mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$, 下界不等式和上界不等式均成立，则 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 是 $\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 的框架。对于可数集 Λ 和计数测度 μ_Λ，表达式 (3.1) 变为

$$f = \sum_{k\in I} \sum_{\lambda\in\Lambda} < f, L_\lambda \psi_k > L_\lambda \varphi_k, \text{ for all } f \in L^2(G).$$

重构公式 (3.1) 在对 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 和 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 的限制弱得多的条件下也可能成立。假设 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 是 $\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 的连续框架，且 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 是 Bessel族，因此重构公式 (3.1) 对所有 $f \in \mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 都成立，则称系统 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 是 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 的交替对偶。在这种情况下，$\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 可能不是 $\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 的连续框架，且 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 不必是 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 的交替对偶。若确实如此，则交替对偶 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 是 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 的斜对偶。为了在选择交替对偶时拥有更大的灵活性，我们进一步根据分析算子的值域将其分为另外两类，即 I 型和 II 型对偶。若 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 是 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 的交替对偶，且 $\text{range}(T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')}) \subset \text{range}(T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})})$ （$\text{range}(T_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')}) \subset \text{range}(T_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})})$），则称 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 是 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 的 I 型（II 型）对偶，其中与 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 相关的分析算子和合成算子 $T_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})}$、$T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})}$ 定义如下:

$$T_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})} f(k, \lambda) = \langle f, L_\lambda \varphi_k \rangle, \text{ and } \langle T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})} g, f \rangle = \sum_{k\in I} \int_G g(\lambda, k) \langle L_\lambda \varphi_k, f \rangle \, d\lambda,$$

分别对所有 $k \in I$、$\lambda \in \Lambda$、$g \in L^2(I \times \Lambda)$、$f \in L^2(G)$成立。对所有 $f \in \mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$, 重构公式 (3.1) 可表示为

$$T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})} T_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')}\big|_{\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})} = I_{\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})}$$

算子形式，其中 $I_{\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})}$ 是限制在 $\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$ 上的恒等算子。在欧几里得框架中，许多作者（包括 [10, 11] ）都研究过离散框架的这类对偶框架。

我们陈述本节的主要结果，这些结果刻画了幂零李群框架下的交错（斜）对偶和 I 型（II 型）对偶。我们的刻画基于与表示 $\tilde{\pi}_\alpha$ 相关的 SI/Z 李群的值域函数技术。值域函数是一个从 $\mathbb{T}^r$ 到 $\ell^2(\mathbb{Z}^r, \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)))$ 的闭子空间集合的可测映射。

定理 3.1. 对于几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，我们考虑值域函数

$$J_{\mathscr{A}}(\alpha)=\overline{\operatorname{span}}\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi(\alpha):\varphi\in\mathscr{A},\lambda_1\in\Lambda_1\}\subseteq\ell^2(\mathbb{Z}^r,\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))), \tag{3.2}$$

与表示 $\tilde{\pi}_\alpha$相关。则 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}')$ 是 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 的交错（斜）对偶，当且仅当对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，系统 $\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi(\alpha):\psi\in\mathscr{A}',\lambda\in\Lambda_1\}$ 是连续框架 $\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi(\alpha):\varphi\in\mathscr{A},\lambda_1\in\Lambda_1\}$ 关于 $J_{\mathscr{A}}(\alpha)$的交错（斜）对偶，即对所有 $h\in J_{\mathscr{A}}(\alpha)$,

$$h=\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle h,\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha)\rangle\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)d\lambda_1.$$

还可以注意到，下面关于 I 型和 II 型对偶的刻画与交错（斜）对偶的定理 3.1 类似，而 I 型和 II 型对偶是交错（斜）对偶的特殊情形。

定理 3.2. $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}')$ 是 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 的 I 型（II 型）对偶，当且仅当对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，系统$\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi(\alpha):\psi\in\mathscr{A}',\lambda\in\Lambda_1\}$是连续框架 $\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi(\alpha):\varphi\in\mathscr{A},\lambda_1\in\Lambda_1\}$关于 $J_{\mathscr{A}}(\alpha)$的 I 型（II 型）对偶，其中值域函数 $J_{\mathscr{A}}(\alpha)$ 由式 (3.2) 对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$定义。

注 1. 对于海森堡群 $\mathbb{H}^d$，将其识别为 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$，考虑

$$\Lambda_1=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\{0\}\ and\ \Lambda_0=\{(0,0)\}\times\mathbb{Z},$$

于是集合 $\Lambda=\Lambda_1\Lambda_0$ 可识别为 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}$。对于几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}$，我们考虑值域函数

$$J_{\mathscr{A}}(\alpha)=\overline{\operatorname{span}}\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi(\alpha):\varphi\in\mathscr{A},\lambda_1\in\Lambda_1\}\subseteq\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)))$$

与表示 $\tilde{\pi}_\alpha$ 相关联，其定义如下:

$$\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)z(m):=\pi_{\alpha+m}(\lambda_1)\circ z(m),where\ (z(m))\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))).$$

对于 $\sigma\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 和 $u=(x、y、z)\in\mathbb{H}^d$，在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的薛定谔表示 $\pi_\sigma(u)$ 对于 $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$定义如下:

$$\pi_\sigma(u)f(x')=\pi_\sigma(x,y,z)f(x')=e^{2\pi i\sigma z}e^{-2\pi i\sigma y.x'}f(x'-x),\ x,y,x'\in\mathbb{R}^d\ and\ z\in\mathbb{R}.$$

对于 $\varphi\in L^1(\mathbb{H}^d)\cap L^2(\mathbb{H}^d)$，傅里叶变换定义为:

$$\mathcal{F}\varphi(\sigma)=\int_{\mathbb{H}^d}\varphi(x)\pi_\sigma(x)dx,\ \sigma\in\mathbb{R}^*,$$

纤维化映射 $\mathscr{F}$: $L^2(\mathbb{H}^d)\to L^2(\mathbb{T};\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))))$ 定义如下:

$$\mathscr{F}(\varphi)(\alpha)(m)=|\alpha+m|^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}\varphi(\alpha+m).$$

对于 $\mathscr{A}\subset L^2(\mathbb{H}^d)$，由 Λ 生成的系统 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 将具有以下形式

$$\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})=\{L_{\lambda_1\lambda_0}\varphi:\varphi\in\mathscr{A},\lambda_1\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\{0\},\lambda_0\in\{(0,0)\}\times\mathbb{Z}\}.$$

由此，我们可以针对连续情形陈述定理 3.1 和定理 3.2。
类似地，也可以针对形式为 $\Lambda_1=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\{0\}$ 和 $\Lambda_0=\{(0、0)\times m\mathbb{Z}\}$的 Λ_1 推导相应结果，其中Γ_1、Γ_2 是 $\mathbb{R}^d$ 和 $m\in\mathbb{N}$ 的加法子群。

首先，我们如下定义每个 $\lambda_1\in\Lambda_1$、$k\in I$ 以及几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$ 所对应的术语 $G^k_{\lambda_1}(\alpha)$ 和 $H^k_{\lambda_1}(\alpha)$:

$$G^k_{\lambda_1}(\alpha):=\langle\mathscr{F}f(\alpha),\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\text{ and }H^k_{\lambda_1}(\alpha):=\langle\mathscr{F}g(\alpha),\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha)\rangle,\text{ for }f,g\in L^2(G). \tag{3.3}$$

命题 3.3。对于每个 $k\in I$ 和 $\lambda_1\in\Lambda_1$，函数 $G^k_{\lambda_1}$ 和 $H^k_{\lambda_1}$ 属于 $L^1(\mathbb{T}^r)$，其傅里叶⌒ ⌒变换 $G^k_{\lambda_1}$ 和 $H^k_{\lambda_1}$ 分别属于 $\ell^2(\mathbb{Z}^r)$。

证明。应用柯西-施瓦茨不等式，并利用 $\mathscr{F}$ 的性质，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^r}|G^k_{\lambda_1}(\alpha)|d\alpha&\leqslant\left(\int_{\mathbb{T}^r}\sum_{m\in\mathbb{Z}^r}\|\mathscr{F}f(\alpha)(m)\|^2d\alpha\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{T}^r}\sum_{m\in\mathbb{Z}^r}\|\mathscr{F}L_{\lambda_1}\varphi_k(\alpha)(m)\|^2d\alpha\right)^{1/2}\\&=\|\mathscr{F}f\|\|\mathscr{F}L_{\lambda_1}\varphi_k\|=\|f\|\|\varphi_k\|<\infty,\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{F}(L_{\lambda_1}\varphi_k)(\alpha)=e^{2\pi i\langle\alpha,\ 0\rangle_{\mathbb{T}^r}}\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi(\alpha)=\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi(\alpha)$且左平移 L_{λ_1}是等距变换。因此 $G^k_{\lambda_1}\in L^1(\mathbb{T}^r)$。类似地，$H^k_{\lambda_1}\in L^1(\mathbb{T}^r)$。$G^k_{\lambda_1}$ 和 $H^k_{\lambda_1}$ 在 $\lambda_0\in\Lambda_0$ 处的傅里叶变换为

$\widehat{\ }$ $\frown$由 $G^k_{\lambda_1}(\lambda_0) = \int_{\mathbb{T}^r} G^k_{\lambda_1}(\alpha) e^{-2\pi i\langle \alpha,\ \lambda_0\rangle} d\alpha$给出，且 $H^k_{\lambda_1}(\lambda_0) = \int_{\mathbb{T}^r} H^k_{\lambda_1}(\alpha) e^{-2\pi i\langle \alpha,\ \lambda_0\rangle} d\alpha$. 然后，通过在以下计算中观察到 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 的贝塞尔性质以及 $\mathscr{F}$(2.1) 的性质，得到序列$\frown\{G^k_{\lambda_1}(\lambda_0)\}_{\lambda_0\in\Lambda_0} \in \ell^2(\mathbb{Z}^r)$

$$\begin{aligned}\infty > \sum_{k\in I}\int_\Lambda |\langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle|^2 d\lambda &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\left|\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle e^{-2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle} d\alpha\right|^2 d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0} |\widehat{G^k_{\lambda_1}}(\lambda_0)|^2 d\lambda_1.\end{aligned}$$

$\frown$类似地，我们有 $\{H^k_{\lambda_1}(\lambda_0)\}_{\lambda_0\in\Lambda_0} \in \ell^2(\mathbb{Z}^r)$。 □

命题 3.4. 对所有 f、 $g \in L^2(G)$，我们有

$$\sum_{k\in I}\int_\Lambda \langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle\langle L_\lambda\psi_k, g\rangle d\lambda = \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r} G^k_{\lambda_1}(\alpha)\overline{H^k_{\lambda_1}(\alpha)} d\alpha d\lambda_1,$$

其中 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$ 和 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}')$ 是贝塞尔系统。

证明。利用映射 $\mathscr{F}$ 的性质，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}\int_\Lambda \langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle\langle L_\lambda\psi_k, g\rangle d\lambda &= \sum_{k\in I}\int_\Lambda \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}L_\lambda\varphi_k\rangle\langle \mathscr{F}L_\lambda\psi_k, \mathscr{F}g\rangle d\lambda\\ &= \sum_{k\in I}\int_\Lambda \left(\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \mathscr{F}L_\lambda\varphi_k(\alpha)\rangle d\alpha\right)\left(\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}L_\lambda\psi_k(\alpha), \mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha\right) d\lambda\\ &= \sum_{k\in I}\int_\Lambda\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle d\alpha \int_{\mathbb{T}^r}\langle \tilde{\pi}_\alpha(\lambda)\mathscr{F}\psi_k(\alpha), \mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha d\lambda.\end{aligned}$$

令 $\lambda = \lambda_1\lambda_0$，其中 $\lambda_1 \in \Lambda_1$、 $\lambda_0 \in \Lambda_0$，则得 $\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1\lambda_0) = e^{2\pi i\langle\alpha,\ \lambda_0\rangle}\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)$，因此上式可写为

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}\int_\Lambda \langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle\langle L_\lambda\psi_k, g\rangle d\lambda &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\left(\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1\lambda_0)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle d\alpha\right)\left(\int_{\mathbb{T}^r}\langle \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1\lambda_0)\mathscr{F}\psi_k(\alpha), \mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha\right) d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\left(\int_{\mathbb{T}^r} e^{-2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle d\alpha\right)\left(\int_{\mathbb{T}^r} e^{2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}\langle \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha), \mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha\right) d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\left(\int_{\mathbb{T}^r} e^{-2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle} G^k_{\lambda_1}(\alpha) d\alpha\right)\left(\int_{\mathbb{T}^r} e^{2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}\overline{H^k_{\lambda_1}(\alpha)} d\alpha\right) d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\widehat{G^k_{\lambda_1}}(\lambda_0)\overline{\widehat{H^k_{\lambda_1}(\lambda_0)}} d\lambda_1 = \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle\widehat{G^k_{\lambda_1}}, \widehat{H^k_{\lambda_1}}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}^r)} d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle G^k_{\lambda_1}, H^k_{\lambda_1}\rangle d\lambda_1 = \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r} G^k_{\lambda_1}(\alpha)\overline{H^k_{\lambda_1}(\alpha)} d\alpha d\lambda_1.\end{aligned}$$

因此结论得证。 □

定理 3.1 的证明。我们先证明交替对偶的情形，采用类似的方法即可得出斜对偶的情形。对于 $f, g \in \mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A})$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}\int_\Lambda \langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle\langle L_\lambda\psi_k, g\rangle d\lambda &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r} G^k_{\lambda_1}(\alpha)\overline{H^k_{\lambda_1}(\alpha)} d\alpha d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\langle \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha), \mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha d\lambda_1,\end{aligned} \tag{3.4}$$

根据命题 3.4。假设系统 $\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha)\colon k \in I, \lambda_1 \in \Lambda_1\}$ 是连续框架 $\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\colon k \in I, \lambda_1 \in \Lambda_1\}$ 的一个交替对偶，对几乎处处的 $\alpha \in \mathbb{T}^r$，即，

$$\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle a, \tilde{\pi}_{\lambda_1}(\alpha)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\langle\tilde{\pi}_{\lambda_1}(\alpha)\mathscr{F}\psi_k(\alpha), b\rangle d\lambda_1 = \langle a, b\rangle, \text{ for all } a, b \in J_{\mathscr{A}}(\alpha).$$

利用 (3.4)，我们得到 $\sum_{k\in I}\int_\Lambda\langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle\langle L_\lambda\psi_k, g\rangle d\lambda = \int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha = \langle f, g\rangle$，因为 $f \in \mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A})$意味着对几乎处处的 $\alpha \in \mathbb{T}^r$都有 $\mathscr{F}f(\alpha) \in J_{\mathscr{A}}(\alpha)$。因此， $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}')$是 $\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})$的一个交替对偶。

反过来，假设 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')$ 是 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$的一个交替对偶，即对于所有 $f,g\in\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$，都有 $\sum_{k\in I}\int_{\Lambda}\langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle\langle L_\lambda\psi_k, g\rangle d\lambda=\langle f,g\rangle$。现在利用 (3.4)，我们得到

$$\begin{aligned}(3.5)\qquad \int_{\mathbb{T}^r}\langle\mathscr{F}f(\alpha),\mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha &=<f,g>=\sum_{k\in I}\int_{\Lambda}\langle f,L_\lambda\varphi_k\rangle\langle L_\lambda\psi_k,g\rangle d\lambda\\ &=\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r}\langle\mathscr{F}f(\alpha),\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\langle\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha),\mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\alpha d\lambda_1.\end{aligned}$$

那么，对于几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r.$，表达式 $\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle\mathscr{F}f(\alpha),\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\langle\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha),\mathscr{F}g(\alpha)\rangle d\lambda_1$ 等于 $\langle\mathscr{F}f(\alpha),\mathscr{F}g(\alpha)\rangle$。假设这不成立。那么存在一个正测度可测集 $\mathscr{D}\subseteq\mathbb{T}^r$，使得对于几乎处处的 $\alpha\in\mathscr{D}$，两者不相等。

令 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\ell^2(\mathbb{Z}^r,\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)))$ 的一个可数稠密子集，并令 $P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)$ 为 $J_{\mathscr{A}}(\alpha)$ 上的一个正交投影。显然，$\{P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $J_{\mathscr{A}}(\alpha)$ 中稠密。对于每个 $i,j\in\mathbb{N}$，我们考虑集合

$$S_{i,j}=\Big\{\alpha\in\mathbb{T}^r:\rho_{i,j}(\alpha):=\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_i,\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\langle\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha),P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_j\rangle d\lambda_1-\langle P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_i,P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_j\rangle\neq\{0\}\Big\}.$$

那么存在 $i_0,j_0\in\mathbb{N}$，使集合 $E:=S_{i_0,j_0}\cap\mathscr{D}$ 具有正测度，因此以下集合之一，即 $E_1=\{\alpha\in\mathbb{T}^r:\mathrm{Re}(\rho_{i_0,j_0})>0\}$, $E_2=\{\alpha\in\mathbb{T}^r:\mathrm{Re}(\rho_{i_0,j_0})<0\}$, $E_3=\{\alpha\in\mathbb{T}^r:\mathrm{Im}(\rho_{i_0,j_0})>0\}$ 和 $E_4=\{\alpha\in\mathbb{T}^r:\mathrm{Im}(\rho_{i_0,j_0})<0\}$，必有正测度。假设是 E_1。通过选取 $\mathscr{F}f(\alpha)=\chi_{E_1}P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_{j_0}$ 和 $\mathscr{F}g(\alpha)=\chi_{E_1}P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_{i_0}$，我们得到 $f,g\in\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$，结合 (3.5)，便得出矛盾，因为 $\mathscr{D}$ 的测度为正。对于其他集合 E_2,E_3 和 E_4，同样可以得到矛盾。因此，交替对偶的情形也得证。□

命题 3.5. 对于 $k\in I$ 和 $\lambda_1\in\Lambda_1$，设可测的 $\mathbb{Z}^r$-周期函数 $p^k_{\lambda_1}$ 满足$\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r}|p^k_{\lambda_1}(\alpha)|^2d\alpha d\lambda_1<\infty$。那么，对于 Bessel 系统 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})$，以下条件等价:

$$(i)\ \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r}G^k_{\lambda_1}(\alpha)p^k_{\lambda_1}(\alpha)d\alpha d\lambda_1=0.\qquad (ii)\ \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}G^k_{\lambda_1}(\alpha)p^k_{\lambda_1}(\alpha)d\lambda_1=0,\ \textit{for a.e. }\alpha\in\mathbb{T}^r.$$

证明。假设 (i)。为证明 (ii)，我们采用反证法。若 (ii) 不成立，则存在一个正测度的可测集 $\mathscr{D}\subseteq\mathbb{T}^r$，使得对几乎处处的 $\alpha\in\mathscr{D}$，$\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}G^k_{\lambda_1}(\alpha)p^k_{\lambda_1}(\alpha)d\lambda_1\neq 0$。设 $\ell^2(\mathbb{Z}^r$ 中有一个可数稠密子集 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，$\mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)))$；对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，令 $P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)$ 为到 $J_{\mathscr{A}}(\alpha)$ 上的正交投影。于是 $\{P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $J_{\mathscr{A}}(\alpha)$ 中稠密，并且存在一个 $i_0\in\mathbb{N}$，使得$h(\alpha)$：在 $\mathscr{D}$ 中某个正测度可测集 Y 上，$=\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle P_{J_{\mathscr{A}}}(\alpha)x_{i_0},$ $\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi(\alpha)\rangle p^k_{\lambda_1}(\alpha)d\lambda_1\neq 0$。现在，考虑实部和虚部，并通过选择适当的函数，即可按照定理 3.1 证明中的方法完成证明。反过来，假设 (ii)。对环面 $\mathbb{T}^r$ 上的 (ii) 积分，即可轻易得到 (i) 部分。□

定理 3.2 的证明。我们先证明 I 型对偶的情形，再证明 II 型对偶的情形。设 $T_{\mathscr{A}(\alpha)}$和 $T_{\mathscr{A}'(\alpha)}$ 分别是与贝塞尔系统 $\mathscr{A}(\alpha):=\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha):\ k\in I,\lambda_1\in\Lambda_1\}$ 和 $\mathscr{A}'(\alpha):=\{\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha):\ k\in I,\lambda_1\in\Lambda_1\}$ 相关联的分析算子。其伴随算子为 $T^*_{\mathscr{A}(\alpha)}$和 $T^*_{\mathscr{A}'(\alpha)}$。

对于 I 型对偶：根据定理 3.1，只需证明值域 $T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')}\subseteq$值域 $T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})}$ 当且仅当值域 $T^*_{\mathscr{A}'(\alpha)}\subseteq$值域 $T^*_{\mathscr{A}(\alpha)^\circ}$ 等价地，$\Big[T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')}(L^2(I\times\Lambda))\Big]\cap\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A}')\subseteq\Big[T^*_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})}(L^2(I\times\Lambda))\Big]\cap S^{\Lambda}(\mathscr{A})$，当且仅当对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，$\Big[T^*_{\mathscr{A}'(\alpha)}(L^2(I\times\Lambda_1))\Big]\cap J_{A'}(\alpha)\subseteq\Big[T^*_{\mathscr{A}(\alpha)}(L^2(I\times\Lambda_1))\Big]\cap J_{\mathscr{A}}(\alpha).$成立。为此，只需对生成元 $\varphi_k,\psi_k,L_\lambda\varphi_k$ 和 $L_\lambda\psi_k$验证，其中 $k\in I$ 和 $\lambda\in\Lambda$。然后只需观察到以下事实即可得出结论：$L_\lambda\psi_k\in\mathcal{S}^{\Lambda}(\mathscr{A})$，对于 $k\in I$ 和 $\lambda\in\Lambda$成立，当且仅当对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$, $\mathscr{F}L_{\lambda_1}\psi_{k'}(\alpha)\in J_{\mathscr{A}}(\alpha)$，对于$k'\in I,\lambda_1\in\Lambda_1$成立。

对于 II 型对偶：根据定理 3.1，只需证明值域 $T_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A}')}\subseteq$值域 $T_{\mathcal{E}^{\Lambda}(\mathscr{A})}$ 当且仅当对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，值域 $T_{\mathscr{A}'(\alpha)}\subseteq$值域 $T_{\mathscr{A}(\alpha)^\circ}$。首先假设值域 $T_{\mathscr{A}'(\alpha)}\subseteq$值域 $T_{\mathscr{A}(\alpha)}$，对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$ 成立。然后，$L^2(I\times\Lambda_1)$ 中的族 $\{a_{k,\lambda_1}\}_{k\in I,\ \lambda_1\in\Lambda_1}$ 对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$ 满足

$$(3.6)\quad \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle h,\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\overline{a_{k,\lambda_1}}d\lambda_1=0,\forall h\in J_{\mathscr{A}}(\alpha)\implies\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle h,\tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha)\rangle\overline{a_{k,\lambda_1}}d\lambda_1=0,\forall h\in J_{\mathscr{A}}(\alpha)$$

为证明值域 $T_{\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}')} \subseteq$ 值域 $T_{\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})}$，我们对 $\{c_{k,\lambda}\}_{k\in I,\lambda\in\Lambda} = \{c_{k,\lambda_0,\lambda_1}\}_{k\in I,\lambda_0\in\Lambda_0,\lambda_1\in\Lambda_1}$ 在 $L^2(I\times\Lambda)$ 中作如下计算：

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}\int_\Lambda \langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle\overline{c_{k,\lambda}}d\lambda &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \mathscr{F}L_{\lambda_1\lambda_0}\varphi_k(\alpha)\rangle\overline{c_{k,\lambda_1,\lambda_0}}d\alpha d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \mathscr{F}L_{\lambda_1}\varphi_k(\alpha)\rangle e^{-2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}\overline{c_{k,\lambda_1,\lambda_0}}d\alpha d\lambda_1\\ &= \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\overline{p^k_{\lambda_1}(\alpha)}d\alpha d\lambda_1,\end{aligned}$$

其中 $p^k_{\lambda_1}(\alpha) = \sum_{\lambda_0\in\Lambda_0} c_{k,\lambda_1,\lambda_0}e^{2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}$ 满足

$$\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r}|p^k_{\lambda_1}(\alpha)|^2d\alpha d\lambda_1 = \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}|c_{k,\lambda_1,\lambda_0}|^2d\lambda_1 < \infty.$$

类似地，我们可以得到 $\sum_{k\in I}\int_\Lambda\langle f, L_\lambda\psi_k\rangle c_{k,\lambda}d\lambda = \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{T}^r}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k)(\alpha)\rangle\overline{p^k_{\lambda_1}(\alpha)}d\alpha d\lambda_1$.

假设对于所有 $f\in\mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A})$，$\sum_{k\in I}\int_\Lambda\langle f, L_\lambda\varphi_k\rangle c_{k,\lambda}d\lambda = 0$ 成立，并应用命题 3.5，可得对于几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，

$$\sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\varphi_k(\alpha)\rangle\overline{p^k_{\lambda_1}(\alpha)}d\lambda_1 = 0 \implies \sum_{k\in I}\int_{\Lambda_1}\langle \mathscr{F}f(\alpha), \tilde{\pi}_\alpha(\lambda_1)\mathscr{F}\psi_k(\alpha)\rangle\overline{p^k_{\lambda_1}(\alpha)}d\lambda_1 = 0, \tag{3.7}$$

由 (3.6) 得。因此，对于 $f\in\mathcal{S}^\Lambda(\mathscr{A})$，我们得到 $\sum_{k\in I}\int_{\lambda\in\Lambda}\langle f, L_\lambda\psi_k\rangle c_{k,\lambda}d\lambda = 0$。于是，值域 $T_{\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}')} \subseteq$ 值域 $T_{\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})}$。反过来，我们假设值域 $T_{\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A}')} \subseteq$ 值域 $T_{\mathcal{E}^\Lambda(\mathscr{A})}$。对于值域 $T_{\mathscr{A}'(\alpha)} \subseteq$ 值域 $T_{\mathscr{A}(\alpha)}$，几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，我们可以借助 (3.7) 并取 $p^k_{\lambda_1}(\alpha) = c_{k,\lambda_1}$ 对所有 $\alpha\in\mathbb{T}^r$ 进行推导。□

4. Reproducing formulas by the action of discrete translations

本节假设离散子集 $\Lambda_1 \subseteq \exp\mathbb{R}X_{r+1}\dots\exp\mathbb{R}X_n$ 以及整数格 $\Lambda_0 = \exp\mathbb{Z}X_1\dots\exp\mathbb{Z}X_r$ 位于 G中。我们的目标是利用括号映射，针对具有双正交性质的 Λ-平移生成系统，获得关于 Bessel 族重构公式的相关结果，其中 $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_0$。下文中，我们使用算子 $[\cdot,\cdot]\colon L^2(G)\times L^2(G)\to L^1(\mathbb{T}^r)$，称为括号映射，其定义如下，对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r, \varphi,\psi\in L^2(G)$:

$$[\varphi,\psi](\alpha) := \langle \mathscr{F}\varphi(\alpha), \mathscr{F}\psi(\alpha)\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}^r, \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d)))} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^r}\langle \mathcal{F}\varphi(\alpha+m), \mathcal{F}\psi(\alpha+m)\rangle|\mathbf{Pf}(\alpha+m)|,$$

以讨论与重构公式 [2] 相关的结果。回顾 (1.1) 中的 Λ-平移生成系统$\mathcal{E}^\Lambda(\varphi) = \{L_\lambda\varphi\colon \lambda\in\Lambda\}$ 及其对应的 Λ-平移不变空间 $\mathcal{S}^\Lambda(\varphi) = \overline{\operatorname{span}\ \mathcal{E}^\Lambda(\varphi)}$，它位于 $L^2(G)$ 中，其中 $\varphi\in L^2(G)$。接下来，为了研究与系统 $\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$相关的重构公式，我们考虑由离散平移生成的双正交系统。$\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 和 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi)$ 是双正交的，当且仅当 $\langle\varphi, L_\lambda\psi\rangle = \delta_{\lambda,\,0}$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$均成立。我们利用括号映射给出了平移生成系统满足双正交性和正交性的充要条件。

命题 4.1. 设 φ、$\psi\in L^2(G)$ 为非零函数。则以下结论成立：

(i) 当且仅当对所有 $\lambda_1\in\Lambda_1$，几乎处处有 $[\varphi, L_{\lambda_1}\psi](\alpha) = \delta_{\lambda_1,\,0}$ 时，$\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 与 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi)$ 双正交；(ii) 由 $\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 生成的子空间与 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi)$ 正交，当且仅当

$$[\varphi, L_{\lambda_1}\psi](\alpha) = 0,\ \textit{for all}\ \lambda_1\in\Lambda_1,\quad \textit{a.e.}\ \alpha\in\Omega_\varphi := \{\alpha\in\mathbb{T}^r : [\varphi,\varphi](\alpha)\neq 0\}.$$

特别地，$\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 是函数的正交系统，当且仅当正交性条件

$$\mathcal{O}_\varphi:\quad [\varphi, L_{\lambda_1}\varphi](\alpha) = 0,\ \textit{for all}\ \lambda_1\in\Lambda_1\backslash\{0\},\quad \textit{a.e.}\ \alpha\in\Omega_\varphi,\quad \textit{holds.} \tag{4.1}$$

命题 4.1 的证明可以采用文献 [1, 2] 中针对海森堡群所使用的相同方法来完成。根据命题 4.1，我们注意到，Λ-平移生成系统的双正交性（或正交性）等价于相应的 Λ_0-平移生成系统的双正交性（或正交性）。

现在，我们陈述关于 Λ 平移生成系统在 $L^2(G)$ 中形成重构公式的主要结果。与欧几里得框架的情形不同，我们发现，这里涉及一个必要条件，即与 Λ 平移生成函数系统的正交性有关。

定理 4.2. 设 φ、$\psi \in L^2(G)$ 是满足 (4.1) 中所述正交条件 $\mathcal{O}_\varphi$ 和 $\mathcal{O}_\psi$ 的两个函数。若 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi)$ 与 $\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 双正交，则以下重构公式成立：

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle f, L_\lambda\psi\rangle L_\lambda\varphi, \ \textit{for all } f \in \mathcal{S}^\Lambda(\varphi).$$

接下来，我们讨论由 Λ-平移生成系统的重构公式，并找到了一个易于验证的条件，以满足该重构公式。

定理 4.3. 设 $\varphi, \psi \in L^2(G)$ 满足条件，使得 φ 和 ψ 分别满足 (4.1) 中提到的正交条件 $\mathcal{O}_\varphi$ 和 $\mathcal{O}_\psi$，则以下命题等价：

(i) $f = \sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f, L_\lambda\psi\rangle L_\lambda\varphi$, *for all* $f \in \mathcal{S}^\Lambda(\varphi)$. *(ii)* $[\varphi,\psi](\alpha) = 1$, *a.e.* $\alpha \in \Omega_\varphi$.

作为海森堡群 $\mathbb{H}^d$ 上定理 4.3 的推论，接下来我们讨论与 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的正交归一 Gabor 系统相关的重构公式。对于 $y \in \mathbb{R}^*$，我们定义函数 v_y 和 w_y，它们来自 [2],，满足 $v_y(x) = |y|^{d/2}v(yx)$ 和 $w_y(x) = |y|^{d/2}w(yx), x \in \mathbb{R}^d$,，其中 v、$w \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\|v\| = 1$、$\|w\| = 1$。对于 v_y 和 w_y，我们考虑如下定义的秩一投影算子 $\mathcal{P}_y$ 和 $\mathcal{Q}_y$：

$\mathcal{P}_y = v_y \otimes v_y$： $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 由， $f \to \langle f,\ v_y\rangle v_y$和 $\mathcal{Q}_y = w_y \otimes w_y$： $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ 由 $f \to \langle f,\ w_y\rangle w_y$.接下来，对所有 $t \in (0,\ 1)$，我们定义

$$\mathscr{H}_t(y) = \begin{cases} \mathcal{P}_y & \text{for } y \in (t, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{G}_t(y) = \begin{cases} \mathcal{Q}_y & \text{for } y \in (t, 1] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么 $\mathscr{H}_t,\ \mathscr{G}_t \in L^2(\mathbb{R}^*,\ \mathcal{B}_2(L^2(\mathbb{R}^d))|\lambda|^d d\lambda)$，因为 $\|\mathscr{H}_t(y)\|_{\mathcal{B}_2} = \begin{cases} 1 & \text{对于 } y \in (t,\ 1], \text{其他情况为 } 0 \end{cases}$

$= \|\mathscr{G}_t(y)\|_{\mathcal{B}_2}$，因此对每个 $t \in (0,\ 1)$，$\varphi_t,\ \psi_t \in L^2(\mathbb{H}^d)$，其中 $\varphi_t = \mathcal{F}^{-1}\mathscr{H}_t$ 且 $\psi_t = \mathcal{F}^{-1}\mathscr{G}_t$.

定理 4.4. 设 $A,\ B \in GL(d,\ \mathbb{R})$ 满足 $AB^t \in \mathbb{Z}$。对于 $0 < \alpha \leqslant 1$，令其 Gabor系统 s

$$\{\pi_\alpha(m,n)v_\alpha : (m,n) \in A\mathbb{Z}^d \times B\mathbb{Z}^d\},\ \textit{and}\ \{\pi_\alpha(m,n)w_\alpha : (m,n) \in A\mathbb{Z}^d \times B\mathbb{Z}^d\}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中构成标准正交系。那么对于每个 $0 < t < \alpha \leqslant 1$，系统 $\mathcal{E}^\Lambda(\varphi_t)$ 和 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi_t)$ 满足重构公式

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f, L_\lambda\psi_t\rangle L_\lambda\varphi_t, \ \forall f \in \mathcal{S}^\Lambda(\varphi_t) \textit{ if and only if } \ |\langle v_\alpha, w_\alpha\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| = \frac{1}{\alpha^{d/2}},$$

其中 $\Lambda = A\mathbb{Z}^d \times B\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$。

为证明定理 4.2、4.3 和 4.4，我们首先注意到，命题 4.1 启发我们将主平移不变空间 $\mathcal{S}^\Lambda(\varphi)$ 分解为 Λ_1-平移的正交直和。

命题4.5. 设 $\varphi \in L^2(G)$ 满足 (4.1) 中提到的正交条件 $\mathcal{O}_\varphi$。对于 $\lambda_1 \neq \lambda_1' \in \Lambda_1$，由 $\mathcal{E}^{\Lambda_0}(L_{\lambda_1}\varphi)$生成的子空间与 $\mathcal{E}^{\Lambda_0}(L_{\lambda_1'}\varphi)$正交，因此 $\mathcal{S}^\Lambda(\varphi) = \bigoplus_{\lambda_1\in\Lambda_1}\mathcal{S}^{\Lambda_0}(L_{\lambda_1}\varphi)$。此外，当且仅当 $f \in S^\Lambda(\varphi)$时，

$$(\mathscr{F}f)(\alpha)(m) = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1} \mathfrak{p}_{\lambda_1}(\alpha)\mathscr{F}L_{\lambda_1}\varphi(\alpha)(m), \ \textit{for a.e. } \alpha \in \mathbb{T}^r, \ m \in \mathbb{Z}^r,$$

其中 $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_{\lambda_1}\}_{\lambda_1\in\Lambda_1}$是加权空间 $L^2(\mathbb{T}^r, [\varphi,\varphi])$中的一个元素。此外，存在唯一的 $\varphi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_1}$属于 $\mathcal{S}^{\Lambda_0}(L_{\lambda_1}\varphi)$，使得

$$f = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\varphi_{\lambda_1}, \ g = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\psi_{\lambda_1}, \ \textit{and} \ \langle f, g\rangle = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\langle\varphi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_1}\rangle, \ \textit{for } f, g \in \mathcal{S}^\Lambda(\varphi).$$

上述命题4.5很容易证明。

现在我们给出正交条件下Bessel族的一个刻画。若$\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 满足 $\mathcal{S}^\Lambda(\varphi)$，则称序列 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle f,$ $L_\lambda\varphi\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \forall f \in \mathcal{S}^\Lambda(\varphi)$.在中是Bessel的

命题4.6. 设 $\varphi \in L^2(G)$ 满足 (4.1) 中提到的正交条件 $\mathcal{O}_\varphi$。则 $\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 是 $\mathcal{S}^\Lambda(\varphi)$中的 Bessel序列。此外，$\mathcal{E}^\Lambda(\varphi)$ 是 $\mathcal{S}^\Lambda(\varphi)$ 中的 Bessel序列等价于$\mathcal{E}^{\Lambda_0}(\varphi)$是 $\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$中的 Bessel序列。

证明. $\mathcal{E}^{\Lambda}(\varphi)$ 的贝塞尔条件由正交归一系统 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\varphi)$的帕塞瓦尔等式得出。为证明这一等价关系，设 $\mathcal{E}^{\Lambda_0}(\varphi)$是 $\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$ 中的 Bessel序列，其界为 B。对于 $f \in \mathcal{S}^{\Lambda}(\varphi)$，存在 φ_{λ_1}属于 $\mathcal{S}^{\Lambda_0}(L_{\lambda_1}\varphi)$，使得 $f = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\varphi_{\lambda_1}$，因此利用命题 4.5可得

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Lambda}|\langle f, L_\lambda\varphi\rangle|^2 &= \sum_{\eta_1\in\Lambda_1}\sum_{\eta_0\in\Lambda_0}|\langle\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\varphi_{\lambda_1}, L_{\eta_1}L_{\eta_0}\varphi\rangle|^2 = \sum_{\eta_1\in\Lambda_1}\sum_{\eta_0\in\Lambda_0}|\langle L_{\eta_1{}^{-1}}\varphi_{\eta_1}, L_{\eta_0}\varphi\rangle|^2\\ &\leqslant B\sum_{\eta_1\in\Lambda_1}\|L_{\eta_1{}^{-1}}\varphi_{\eta_1}\|^2 = B\sum_{\eta_1\in\Lambda_1}\|\varphi_{\eta_1}\|^2 = B\|f\|^2,\end{aligned}$$

因为 $L_{\eta_1^{-1}}\varphi_{\eta_1}\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$ 且 $L_{\eta_1{}^{-1}}$ 是等距变换。因此， $\mathcal{E}^{\Lambda}(\varphi)$ 在 $\mathcal{S}^{\Lambda}(\varphi$中也是 Bessel序列).

反过来，假设 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\varphi)$ 是 $\mathcal{S}^{\Lambda}(\varphi)$中的 Bessel序列。利用命题4.5，我们有 $\langle\varphi$、 $L_{\lambda_1}L_{\lambda_0}\varphi\rangle = 0$，对于 $\lambda_1 \neq 0$ 而言，取 $\varphi\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$，因此注意到

$$\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}|\langle\varphi, L_{\lambda_0}\varphi\rangle|^2 = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}|\langle\varphi, L_{\lambda_1}L_{\lambda_0}\varphi\rangle|^2 \leqslant B\|\varphi\|^2.$$

□

接下来，我们注意到，正交条件 (4.1) 将 Λ-平移生成系统的重构公式性质传递给 Λ_0-平移生成系统。

命题 4.7. 设 φ、 $\psi\in L^2(G)$ 是两个函数，使得 φ 和 ψ 分别满足 (4.1) 中提到的正交条件$\mathcal{O}_\varphi$ 和 $\mathcal{O}_\psi$ ，则以下命题等价:

(i) $\langle f, g\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f, L_\lambda\psi\rangle\langle L_\lambda\varphi, g\rangle$, $\forall f, g\in\mathcal{S}^{\Lambda}(\varphi)$.

(i) $\langle f, g\rangle = \sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f, L_{\lambda_0}\psi\rangle\langle L_{\lambda_0}\varphi, g\rangle$, $\forall f, g\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$.

证明。首先注意到，根据命题4.6，(i) 和 (ii) 中使用的求和均有定义，因为 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\varphi)$ 和 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\psi)$ 是 Bessel 的，而 φ 和 ψ 分别满足正交条件 $\mathcal{O}_\varphi$ 和 $\mathcal{O}_{\psi}$。

现在假设 (ii) 成立。通过选择 φ_{λ_1}、 $\psi_{\lambda_1}\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(L_{\lambda_1}\varphi)$ 使得 $f = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\varphi_{\lambda_1}$、 $g = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\psi_{\lambda_1}$，并利用命题(4.5)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f, L_\lambda\psi\rangle\langle L_\lambda\varphi, g\rangle &= \sum_{\eta_1\in\Lambda_1}\sum_{\eta_0\in\Lambda_0}\left\langle\sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\varphi_{\lambda_1}, L_{\eta_1}L_{\eta_0}\psi\right\rangle\left\langle L_{\eta_1}L_{\eta_0}\varphi, \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\psi_{\lambda_1}\right\rangle\\ &= \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\sum_{\eta_0\in\Lambda_0}\left\langle L_{\lambda_1^{-1}}\varphi_{\lambda_1}, L_{\eta_0}\psi\right\rangle\left\langle L_{\eta_0}\varphi, L_{\lambda_1^{-1}}\psi_{\lambda_1}\right\rangle.\end{aligned}$$

由于 $L_{\lambda_1^{-1}}\varphi_{\lambda_1}$、 $L_{\lambda_1^{-1}}\psi_{\lambda_1}\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$，根据假设 (ii)，我们得到 :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f, L_\lambda\psi\rangle\langle L_\lambda\varphi, g\rangle = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\left\langle L_{\lambda_1^{-1}}\varphi_{\lambda_1}, L_{\lambda_1^{-1}}\psi_{\lambda_1}\right\rangle = \sum_{\lambda_1\in\Lambda_1}\langle\varphi_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_1}\rangle = \langle f, g\rangle.$$

因此，(i) 成立。反过来，假设 (i) 成立。对于 f、 $g\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$，根据命题4.5，对所有 $\lambda_1\neq 0\in\Lambda_1$，我们有 $\langle f$、 $L_{\lambda_1}L_{\lambda_0}\varphi\rangle = 0$ 以及 $\langle g$、 $L_{\lambda_1}L_{\lambda_0}\varphi\rangle = 0$。于是结论立即成立。□

定理 4.2 的证明。由于 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\varphi)$ 和 $\mathcal{E}^{\Lambda}(\psi)$ 是双正交的，我们有 $\langle\varphi$,$L_{\lambda_0}\psi\rangle = \delta_{\lambda_0,\ 0}$，对于 $\lambda_0\in\Lambda_0$，因此对于 $f\in$ 张成的 $\mathcal{E}^{\Lambda_0}(\varphi)$，我们可以写成 $f = \sum_{\lambda_0\in\Lambda_0'}\langle f, L_{\lambda_0}\psi\rangle L_{\lambda_0}\varphi$，其中 Λ_0'是 Λ_0. 的一个有限子集。由于函数 $f\mapsto\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f, L_{\lambda_0}\psi\rangle L_{\lambda_0}\varphi$是连续的， f的展开式对所有 $f\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$都成立。因此结论由命题 4.7 得出。□

定理 4.3 的证明。设 (i) 成立。根据命题 4.7，这等价于对所有 $f\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$， $f = \sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f, L_{\lambda_0}\psi\rangle L_{\lambda_0}\varphi$。对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r$，在等式两边应用映射 $\mathscr{F}$，并利用关系 $(\mathscr{F}L_{\lambda_0}\varphi)(\alpha) =$

$e^{-2\pi i\langle\alpha,\ \lambda_0\rangle}\mathscr{F}\varphi(\alpha)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f,L_{\lambda_0}\psi\rangle L_{\lambda_0}\varphi\right)(\alpha)&=\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f,L_{\lambda_0}\psi\rangle(\mathscr{F}L_{\lambda_0}\varphi)(\alpha)=(\mathscr{F}\varphi)(\alpha)\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f,L_{\lambda_0}\psi\rangle e^{-2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}\\&=(\mathscr{F}\varphi)(\alpha)\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\int_{\mathbb{T}^r}\langle\mathscr{F}f(\alpha),\mathscr{F}L_{\lambda_0}\psi(\alpha)\rangle d\alpha e^{-2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}\\&=(\mathscr{F}\varphi)(\alpha)\sum_{\lambda_0\in\lambda_0}\int_{\mathbb{T}^r}e^{2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}[f,\psi](\alpha)d\alpha e^{-2\pi i\langle\alpha,\lambda_0\rangle}\\&=[f,\psi](\alpha)\,(\mathscr{F}\varphi)(\alpha),\ \text{for a.e. }\alpha\in\mathbb{T}^r,\end{aligned}$$

因此，对于所有 $f\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi).$，我们得到 $\mathscr{F}f(\alpha)=\mathscr{F}\left(\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f,L_{\lambda_0}\psi\rangle L_{\lambda_0}\varphi\right)(\alpha)=(\mathscr{F}\varphi)(\alpha)[f,\psi](\alpha)$。取 $f=\varphi$，可得 $(\mathscr{F}\varphi)(\alpha)\,(1-[\varphi,\psi](\alpha))=0$，对几乎处处的 $\alpha\in\mathbb{T}^r.$成立。因此，对于几乎处处的 $\alpha\in\Omega_\varphi$，我们得到 $[\varphi,\psi](\alpha)=1$。

反过来，假设 (ii)，即 $[\varphi,\psi](\alpha)=1$，对几乎处处的 $\alpha\in\Omega_\varphi$成立。根据命题 4.7，只需证明对于所有 $f\in\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$，$f=\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f,L_{\lambda_0}\psi\rangle L_{\lambda_0}\varphi$成立。由于函数 $f\mapsto\sum_{\lambda_0\in\Lambda_0}\langle f,L_{\lambda_0}\psi\rangle L_{\lambda_0}\varphi$ 从 $\mathcal{S}^{\Lambda_0}(\varphi)$到 $L^2(G)$连续，只需证明结果对 $f=L_\eta\varphi,\ \eta\in\Lambda_0$成立。因此，由以下计算可得结论

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle L_\eta\varphi,L_\lambda\psi\rangle L_\lambda\varphi\right)(\alpha)&=(\mathscr{F}\varphi)(\alpha)[(L_\eta\varphi),\psi](\alpha)=e^{2\pi i\langle\alpha,\eta\rangle}(\mathscr{F}\varphi)(\alpha)[\varphi,\psi](\alpha)\\&=\mathscr{F}(L_\eta\varphi)(\alpha)[\varphi,\psi](\alpha)=\mathscr{F}(L_\eta\varphi)(\alpha).\end{aligned}$$

□

定理 4 的证明。 4. 注意，对于每个 $0<\alpha\leqslant 1$、$0<t<\alpha\leqslant 1$ 和 $\lambda_1\in\Lambda_1=A\mathbb{Z}^d\times B\mathbb{Z}^d$，我们有

$$\begin{aligned}[L_{\lambda_1}\varphi_t,\varphi_t](\alpha)&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle\mathcal{F}L_{\lambda_1}\varphi_t(\alpha+m),\mathcal{F}\varphi_t(\alpha+m)\rangle_{\mathcal{B}_2}|\alpha+m|^d\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle\pi_{\alpha+m}(\lambda_1)\mathscr{H}_t(\alpha+m),\mathscr{H}_t(\alpha+m)\rangle_{\mathcal{B}_2}|\alpha+m|^d\\&=\langle\pi_\alpha(\lambda_1)\mathscr{H}_t(\alpha),\mathscr{H}_t(\alpha)\rangle_{\mathcal{B}_2}|\alpha|^d=\langle\pi_\alpha(\lambda_1)v_\alpha,v_\alpha\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|\alpha|^d,\end{aligned}$$

因为 $\pi_\alpha(\lambda_1)\mathcal{P}_\alpha=(\pi_\alpha(\lambda_1)\mathcal{P}_\alpha v_\alpha)\otimes v_\alpha$ 和

$$\langle\pi_\alpha(\lambda_1)\mathscr{H}_t(\alpha),\mathscr{H}_t(\alpha)\rangle_{\mathcal{B}_2}=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{v_\alpha(s)}(\pi_\alpha(\lambda_1)v_\alpha(w))\overline{v_\alpha(w)}v_\alpha(s)dsdw=\langle\pi_\alpha(\lambda_1)v_\alpha,v_\alpha\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

类似地，我们可以计算 $[L_{\lambda_1}\psi_t,\ \psi_t](\alpha)=\langle\pi_\alpha(\lambda_1)w_\alpha,\ w_\alpha\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|\alpha|^d$。因此，对于每个 $0<t<\alpha\leqslant 1$，函数 φ_t 和 ψ_t 满足正交条件 $\mathcal{O}_{\varphi_t}$ 和 $\mathcal{O}_{\psi_t}$（见 (4.1)），这是由于正交归一 Gabor 系统 $\{\pi_\alpha(\lambda_1)v_\alpha:\lambda_1\in\Lambda_1\}$ 和 $\{\pi_\alpha(\lambda_1)w_\alpha:\lambda_1\in\Lambda_1\}$。

进一步注意到，$\mathcal{E}^\Lambda(\varphi_t)$ 是 Bessel 的，因为 $[\varphi_t,\ \varphi_t](\alpha)$ 有上界，这可由以下观察得出

$$[\varphi_t,\varphi_t](\alpha)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{F}\varphi_t(\alpha+m)\|^2_{\mathcal{B}_2}|\alpha+m|^d=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\|\mathscr{H}_t(\alpha+m)\|^2_{\mathcal{B}_2}|\alpha+m|^d=\|\mathscr{H}_t(\alpha)\|^2|\alpha|^d=\begin{cases}\alpha^d & t<\alpha\leqslant 1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

类似地 ，我们可以得到 $\mathcal{E}^\Lambda(\psi_t)$ 是一个 Bessel 系统。接下来，我们按如下方式计算 $[\varphi_t,\ \psi_t](\alpha)$：

$$\begin{aligned}[\varphi_t,\psi_t](\alpha)&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle\mathcal{F}\varphi_t(\alpha+m),\mathcal{F}\psi_t(\alpha+m)\rangle|\alpha+m|^d=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle\mathscr{H}_t(\alpha+m),\mathscr{G}_t(\alpha+m)\rangle|\alpha+m|^d\\&=\langle\mathscr{H}_t(\alpha),\mathscr{G}_t(\alpha)\rangle_{\mathcal{B}_2}|\alpha|^d=|\alpha|^d\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{v_\alpha(s)}v_\alpha(u)\overline{w_\alpha(u)}w_\alpha(s)dsdu\\&=|\langle v_\alpha,w_\alpha\rangle|^2|\alpha|^d.\end{aligned}$$

因此，结果 由定理 4.3 可知，只要 $[\varphi_t,\psi_t](\alpha)=1$，对于 $0<\alpha\leqslant 1$ 和 $0<t<\alpha\leqslant 1$. □

References

[1] S. Arati 和 R. Radha, *Orthonormality of wavelet system on the Heisenberg group*, 《纯粹与应用数学杂志》131(2019), 第 9 期, 171–192 页。[2] D. Barbieri、E. Hern´andez 和 A. Mayeli, *Bracket map for the Heisenberg group and the characterization of cyclic subspaces*, 《应用与计算调和分析》37 (2014), 第 2 期, 218–234 页。[3] M. Bownik 和 J.W. Iverson, *Multiplication-invariant operators and the classification of LCA group frames*, 《泛函分析杂志》280 (2021), 第 2 期, 108780。[4] O. Christensen 和 Y.C. Eldar, *Oblique dual frames and shift-invariant spaces*, 《应用与计算调和分析》17 (2004), 第 1 期, 48–68 页。[5] L. Corwin 和 F.P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications: part 1 basic theory and* , 卷 *examples* 18, 2004 Cambridge university press, 。[6] B. Currey、A. Mayeli 和 Y. Oussa, *Characterization of shift-invariant spaces on a class of nilpotent Lie groups with applications* **20** 2014 2, 384 400 , 《傅里叶分析与应用杂志》( ), 第 – 期。[7] J.-P. Gabardo 和 A.A. Hemmat, *Properties of oblique dual frames in shift-invariant systems*, 《数学分析与应用杂志》356 (2009), 第 1 期, 346–354 页。[8] D. Han 和 J.-P. Gabardo, *The uniqueness of the dual of Weyl-Heisenberg subspace frames*, 《应用与计算调和分析》17 (2004), 第 2 期, 226–240 页。[9] D. Han 和 D. R. Larson, *Frames, bases and group representations*, 第 697 卷, 美国数学会, 2000年。[10] C. Heil、Y. Y. Koo 和 J.K. Lim, *Duals of frame sequences*, 《应用数学学报》107 (2009), 第 1-3 期, 75–90 页。[11] A. A. Hemmat 和 J.-P. Gabardo, *The uniqueness of shift-generated duals for frames in shift-invariant subspaces*, 《傅里叶分析与应用杂志》13 (2007), 第 5 期, 589–606 页。[12] S. Sarkar 和 N.K. Shukla, *Characterizations of Extra-invariant spaces under the left translations on a Lie group*, https://arxiv.org/abs/2209.00313。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Indore, Simrol, Khandwa Road, Indore-453 552
Email address: sudipta.math7@gmail.com, nirajshukla@iiti.ac.in