arXiv:2301.03159v1 [math.FA] 9 Jan 2023

数值半径不等式与多项式零点估计

SUVENDU JANA[1], PINTU BHUNIA[2] 和 KALLOL PAUL[2]

Abstract. 设 A 是定义在复希尔伯特空间上的有界线性算子，且 $|A| = (A^*A)^{1/2}$ 是 A的正平方根。作为对众所周知的数值半径不等式 $w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\|$的进一步改进，我们证明：

$$\begin{aligned} w^2(A) &\leq \frac{1}{4}w^2\left(|A| + i|A^*|\right) + \frac{1}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{4}w\left(|A||A^*|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\|. \end{aligned}$$

此外，我们推导了涉及乘积算子之和的数值半径和谱半径不等式，由此得到以下不等式

$$w^p(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}w(|A|^p + i|A^*|^p) \leq \|A\|^p$$

对所有 $p \geq 1.$，此外，我们为复多项式的零点推导了新的界。

1. Introduction

设 $\mathscr{H}$为复希尔伯特空间，具有通常的内积 $\langle\cdot$，以及由该内积诱导的相应范数 $\|\cdot\|$。令 $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$上所有有界线性算子构成的 C^*-代数。对于 $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$，$|A| = (A^*A)^{1/2}$ 是 A的正平方根。 A的数值域记作 $W(A)$，定义为$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$. 令 $\|A\|$、 $r(A)$ 和 $w(A)$ 分别表示 A的算子范数、谱半径和数值半径。回顾一下，$w(A) = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$. $w(\cdot)$定义了 $\mathbb{B}(\mathscr{H})$上的一个范数（与算子范数 $\|\cdot\|$等价），并满足以下不等式

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|. \tag{1.1}$$

当 $A^2 = 0$ 时，第一个不等式变为等式；当 A 是正规算子时，第二个不等式变为等式。与算子范数类似，数值半径也满足幂不等式

2020 年数学主题分类。主要分类：47A12、26C10；次要分类：47A30、30C15。关键词和短语：数值半径、算子范数、弗罗贝尼乌斯伴随矩阵、多项式的零点。Pintu Bhunia 感谢印度政府 UGC 在 Kallol Paul 教授的指导下以高级研究奖学金的形式提供的资助。

:

$$w(A^n) \leq w^n(A) \text{ for every } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.2}$$

众所周知，对于 $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$,

$$r(A) \leq w(A). \tag{1.3}$$

不等式 (1.3) 是紧的。事实上，若 A 是正规算子，则 $r(A) = w(A) = \|A\|$。对于A, $B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$，我们有 $r(AB) = r(BA)$ 以及 $r(A^n) = r^n(A)$，对每个正整数n均成立。多年来，许多杰出数学家研究了
(1.1)，并得到了复多项式零点的各种界限，读者可参阅 [2, 3, 5, 7, 15, 18, 22, 23]及其中的参考文献。在 [14], Kittaneh 改进了 (1.1) 中的不等式，并证明了

$$\frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| \leq w^2(A) \leq \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\|. \tag{1.4}$$

本文中，我们对 (1.4) 中的第二个不等式给出了新的改进。我们得到了涉及乘积算子之和的数值半径和谱半径的不等式，并据此对经典不等式作出了很好的改进$w(A)$ $\leq \|A\|$。作为数值半径不等式的应用，我们给出了复首一多项式零点的新界限，优于现有界限。

2. Numerical radius inequalities

本节从以下引理开始。

引理 2.1. [13]（广义柯西-施瓦茨不等式）若 $A \in \mathcal{B}$（$\mathscr{H}$）且 $0 \leq \alpha \leq 1$，则

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle |A|^{2\alpha}x, x\rangle\langle |A^*|^{2(1-\alpha)}y, y\rangle$$

对所有 x、$y \in \mathscr{H}$，均有。

引理 2.2. [21]（霍尔德-麦卡锡不等式）设 $A \in \mathcal{B}$（$\mathscr{H}$）为正，则下列不等式成立：

$$\langle A^r x, x\rangle \geq \|x\|^{2(1-r)}\langle Ax, x\rangle^r, \quad when\ r \geq 1$$

$$\langle A^r x, x\rangle \leq \|x\|^{2(1-r)}\langle Ax, x\rangle^r, \quad when\ 0 \leq r \leq 1$$

对任意 $x \in \mathscr{H}$。

引理 2.3. [9]（Buzano不等式）设 x、e、$y \in \mathscr{H}$ 满足 $\|e\| = 1$，则

$$|\langle x, e\rangle\langle e, y\rangle| \leq \frac{1}{2}\left(\|x\|\|y\| + |\langle x, y\rangle|\right).$$

现在，我们可以给出本文的结果了。首先，我们推导数值半径的如下上界。

定理 2.4. 设 $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$。则

$$w^2(A) \leq \frac{1}{4}w^2\left(|A| + i|A^*|\right) + \frac{1}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{4}w\left(|A||A^*|\right).$$

证明. 设 $x \in \mathscr{H}$ 且 $\|x\| = 1$。则有

$$\begin{aligned}
& |\langle Ax, x\rangle|^2 \\
\leq\ & \langle |A|x, x\rangle\langle |A^*|x, x\rangle \ (by\ Lemma\ 2.1) \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left(\langle |A|x, x\rangle + \langle |A^*|x, x\rangle\right)^2 \\
=\ & \frac{1}{4}\left(\langle |A|x, x\rangle^2 + \langle |A^*|x, x\rangle^2 + 2\langle |A|x, x\rangle\langle |A^*|x, x\rangle\right) \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left\{|\langle |A|x, x\rangle + i\langle |A^*|x, x\rangle|^2 + \||A|x\|\||A^*|x\| + |\langle |A|x, |A^*|x\rangle|\right\} \ (by\ Lemma\ 2.3) \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left\{|\langle (|A| + i|A^*|)x, x\rangle|^2 + \frac{1}{2}\||A|x\|^2 + \frac{1}{2}\||A^*|x\|^2 + |\langle |A^*||A|x, x\rangle|\right\} \\
\leq\ & \frac{1}{4}w^2\left(|A| + i|A^*|\right) + \frac{1}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{4}w\left(|A||A^*|\right).
\end{aligned}$$

对所有满足 $\|x\| = 1$ 的 $x \in \mathcal{H}$ 取上确界，可得所需的不等式。 □

显然，我们可以看到

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}w^2\left(|A| + i|A^*|\right) + \frac{1}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{4}w\left(|A||A^*|\right) \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{4}\||A||A^*|\| \\
=\ & \frac{3}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{4}\left\|A^2\right\| \\
\leq\ & \frac{3}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| + \frac{1}{8}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\| \\
=\ & \frac{1}{2}\left\||A|^2 + |A^*|^2\right\|.
\end{aligned}$$

因此，我们想指出，定理 2.4 中得到的上界改进了（1.4）中的第二个不等式。接下来的结果如下。

定理 2.5. 设 $X, Y \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$，且 $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$。那么对每个满足 $\|x\| = 1$ 的 $x \in \mathscr{H}$，

$$\begin{aligned}
& |\langle Xx, x\rangle\langle Yx, x\rangle| \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left\|\alpha|X|^2 + (1-\alpha)|X^*|^2 + \beta|Y|^2 + (1-\beta)|Y^*|^2\right\| + \frac{1}{8}\left\||X|^2 + |Y^*|^2\right\| + \frac{1}{4}w(YX).
\end{aligned}$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}
& |\langle Xx,x\rangle\langle Yx,x\rangle| \\
\leq\ & \frac{1}{4}\{|\langle Xx,x\rangle|+|\langle Yx,x\rangle|\}^2 \\
=\ & \frac{1}{4}\left\{|\langle Xx,x\rangle|^2+|\langle Yx,x\rangle|^2+2|\langle Xx,x\rangle||\langle Yx,x\rangle|\right\} \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left\{\langle|X|^{2\alpha}x,x\rangle\langle|X^*|^{2(1-\alpha)}x,x\rangle+\langle|Y|^{2\beta}x,x\rangle\langle|Y^*|^{2(1-\beta)}x,x\rangle+2|\langle Xx,x\rangle||\langle x,Y^*x\rangle|\right\} \\
& \quad (\textit{using Lemma 2.1}) \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left\{\langle|X|^2x,x\rangle^{\alpha}\langle|X^*|^2x,x\rangle^{(1-\alpha)}+\langle|Y|^2x,x\rangle^{\beta}\langle|Y^*|^2x,x\rangle^{(1-\beta)}+\|Xx\|\|Y^*x\|+|\langle Xx,Y^*x\rangle|\right\} \\
& \quad (\textit{using Lemma 2.2 and Lemma 2.3}\ ) \\
\leq\ & \frac{1}{4}\left\{\alpha\langle|X|^2x,x\rangle+(1-\alpha)\langle|X^*|^2x,x\rangle+\beta\langle|Y|^2x,x\rangle+(1-\beta)\langle|Y^*|^2x,x\rangle\right\} \\
& +\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(\langle|X|^2x,x\rangle+\langle|Y^*|^2x,x\rangle\right)+|\langle YXx,x\rangle|\right\} \\
\leq\ & \frac{1}{4}\|\alpha|X|^2+(1-\alpha)|X^*|^2+\beta|Y|^2+(1-\beta)|Y^*|^2\|+\frac{1}{8}\||X|^2+|Y^*|^2\|+\frac{1}{4}w(YX).
\end{aligned}$$

□

应用定理中的不等式2.5 可得数值半径的以下上界。

推论 2.6. 若 $A\in\mathcal{B}(\mathscr{H})$，则

$$w^2(A)\leq\frac{1}{4}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|+\frac{1}{8}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|+\frac{1}{4}w(A^2),$$

对于 $0\leq\mu\leq 2$.

证明。将 $X=Y=A$代入定理 2.5，然后对所有满足 $x\in\mathscr{H}$且 $\|x\|=1$的情形取上确界，得到

$$w^2(A)\leq\frac{1}{4}\left\|(\alpha+\beta)|A|^2+(2-\alpha-\beta)|A^*|^2\right\|+\frac{1}{8}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|+\frac{1}{4}w(A^2),$$

对于 $0\leq\alpha,\beta\leq 1$。这就得到了所需的上界。 □

由推论 2.6 可得

$$w^2(A)\leq\frac{1}{4}\min_{\mu\in[0,2]}\left\|\mu|A|^2+(2-\mu)|A^*|^2\right\|+\frac{1}{8}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|+\frac{1}{4}w(A^2). \tag{2.1}$$

注 2.7. 显然，我们有

$$\begin{aligned}
&\min_{\mu\in[0,2]} \frac{1}{4}\left\||A|^2+(2-\mu)|A^*|^2\right\|+\frac{1}{8}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|+\frac{1}{4}w(A^2)\\
\leq\ & \frac{1}{4}\||A|^2+|A^*|^2\|+\frac{1}{8}\||A|^2+|A^*|^2\|+\frac{1}{4}w(A^2)\ \ (by\ taking\ \mu=1)\\
=\ & \frac{3}{8}\||A|^2+|A^*|^2\|+\frac{1}{4}w(A^2)\\
\leq\ & \frac{3}{8}\||A|^2+|A^*|^2\|+\frac{1}{4}w^2(A)\\
\leq\ & \frac{3}{8}\||A|^2+|A^*|^2\|+\frac{1}{8}\||A|^2+|A^*|^2\|\ \ (using\ the\ second\ inequality\ of\ (1.4))\\
=\ & \frac{1}{2}\||A|^2+|A^*|^2\|.
\end{aligned}$$

因此，我们想指出，不等式（2.1）强于（1.4）中的不等式。我们还注意到，对于 $\mu=1.$，最小值并不总能取到。例如，考虑矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$. 则，$\min_{\mu\in[0,2]}\|\mu|A|^2+$（$2-\mu)\,|A^*|^2\|=\frac{32}{7}$ 对于 $\mu=\frac{8}{7}$，由此可见

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\min_{\mu\in[0,2]}\left\|\mu|A|^2+(2-\mu)|A^*|^2\right\|+\frac{1}{8}\left\||A|^2+|A^*|^2\right\|+\frac{1}{4}w(A^2) &= \frac{113}{56}\approx 2.01785714\\
&< \frac{5}{2}=\frac{1}{2}\||A|^2+|A^*|^2\|.
\end{aligned}$$

为了证明下一个结果，我们需要以下两个引理。第一个是引理2.1中不等式的推广，第二个被称为玻尔不等式。

引理 2.8。（[19, 定理 5]）设 $A,B\in\mathbb{B}(\mathscr{H})$，且 $|A|B=B^*|A|$。设 f,g 是 $[0,\infty)$ 上的两个非负连续函数，使得对所有 $t\geq 0.$，$f(t)g(t)=t$。则

$$|\langle ABx,y\rangle|\leq r(B)\|f(|A|)x\|\|g(|A^*|)y\|,$$

对于所有 $x,y\in\mathscr{H}$.

引理 2.9. ([24]) 对于 $i=1,2,\cdots,n$，令 $a_i\geq 0$。则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p\leq n^{p-1}\sum_{i=1}^n a_i^p,$$

对于所有 $p\geq 1$.

利用上述引理，我们证明下面这个涉及数值半径和谱半径的不等式。

定理 2.10。设 A_i、$B_i \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ 满足：当 $i = 1$、2、$\cdots$ 时，$|A_i|B_i = B_i^*|A_i|$ n那么

$$w^p\left(\sum_{i=1}^n A_iB_i\right) \leq \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}} w\left(\sum_{i=1}^n r^p(B_i)\left(f^{2p}(|A_i|) + ig^{2p}(|A_i^*|)\right)\right),$$

对所有 $p \geq 1$。

证明。设 $x \in \mathscr{H}$满足 $\|x\| = 1$。则有

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle\left(\sum_{i=1}^n A_iB_i\right)x, x\right\rangle\right|^p \\
= &\left|\sum_{i=1}^n \langle A_iB_ix, x\rangle\right|^p \\
\leq &\left(\sum_{i=1}^n |\langle A_iB_ix, x|\right)^p \\
\leq &\left(\sum_{i=1}^n r(B_i)\|f(|A_i|)x\|\|g(|A_i^*|)x\|\right)^p \quad (by\ Lemma\ 2.8) \\
= &\left(\sum_{i=1}^n r(B_i)\langle f^2(|A_i|)x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^2(|A_i^*|)x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^p \\
\leq &\left(\sum_{i=1}^n r(B_i)\frac{\langle f^2(|A_i|)x, x\rangle + \langle g^2(|A_i^*|)x, x\rangle}{2}\right)^p \\
\leq &\ n^{p-1}\sum_{i=1}^n r^p(B_i)\left(\frac{\langle f^2(|A_i|)x, x\rangle + \langle g^2(|A_i^*|)x, x\rangle}{2}\right)^p \quad (by\ Lemma\ 2.9) \\
\leq &\ \frac{n^{p-1}}{2}\sum_{i=1}^n r^p(B_i)\left(\langle f^2(|A_i|)x, x\rangle^p + \langle g^2(|A_i^*|)x, x\rangle^p\right) \quad (by\ convexity\ of\ f(t) = t^p) \\
\leq &\ \frac{n^{p-1}}{2}\sum_{i=1}^n r^p(B_i)\left(\langle f^{2p}(|A_i|)x, x\rangle + \langle g^{2p}(|A_i^*|)x, x\rangle\right) \quad (by\ Lemma\ 2.2) \\
\leq &\ \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}}\left|\sum_{i=1}^n r^p(B_i)\left(\langle f^{2p}(|A_i|)x, x\rangle + i\langle g^{2p}(|A_i^*|)x, x\rangle\right)\right| \\
&\qquad\qquad (as\ |a+b| \leq \sqrt{2}|a+ib|\ for\ all\ a, b \in \mathbb{R}) \\
\leq &\ \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}}\left|\sum_{i=1}^n r^p(B_i)\langle\left(f^{2p}(|A_i|) + ig^{2p}(|A_i^*|)\right)x, x\rangle\right| \\
\leq &\ \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}} w\left(\sum_{i=1}^n r^p(B_i)\left(f^{2p}(|A_i|) + ig^{2p}(|A_i^*|)\right)\right).
\end{aligned}$$

现在，对所有 $x \in \mathscr{H}$、$\|x\| = 1$ 取上确界，得到:

$$w^p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i B_i\right) \leq \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}} w\left(\sum_{i=1}^{n} r^p(B_i)\left(f^{2p}(|A_i|) + i g^{2p}(|A_i^*|)\right)\right).$$

如所期望的。

□

注意，定理 2.10中的不等式确实不取决于n在 $p = 1$的情况下加数的个数。特别地，考虑 $p = n = 1$, $A_1 = A$, $B_1 = B$, $f(t) = g(t) = \sqrt{t}$，在定理 2.10中，我们得到以下推论。

推论 2.11. 设 $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ 满足 $|A|B = B^*|A|$。则

$$w(AB) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} r(B) w(|A| + i|A^*|).$$

特别地，对于 $B = I$，我们有以下不等式（亦见于 [8]）：

$$w(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} w(|A| + i|A^*|). \tag{2.2}$$

注意，界限 (2.2改进了 (1.4) 中的界限，参见 [8, 备注 2。16]。再次考虑$B_i = I$对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，在定理 2.10 中，我们得到以下关于算子和的不等式。

推论 2.12. 设 $A_i \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$，并设 f、g 是定义在 $[0, \infty)$ 上的两个非负连续函数，使得对所有 $t \geq 0.$, $f(t)g(t) = t$。则

$$w^p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \frac{n^{p-1}}{\sqrt{2}} w\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f^{2p}(|A_i|) + i g^{2p}(|A_i^*|)\right)\right),$$

对所有 $p \geq 1$。

特别地，对于 $n = 1$ 和 $f(t) = g(t) = \sqrt{t}$ 在推论 2.12中，我们得到数值半径的以下上界。

推论 2.13. 若 $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$，则

$$w^p(A) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} w(|A|^p + i|A^*|^p),$$

对所有 $p \geq 1.$

容易验证，$\frac{1}{\sqrt{2}} w(|A|^p + i|A^*|^p) \leq \|A\|^p$ 对所有 $p \geq 1.$ 因此，我们想指出，推论 2.13 改进了经典上界 $w(A) \leq \|A\|$ 对所有$p \geq 1.$

在本节末尾，我们给出一个关于 $w(A) = \frac{1}{2}\|A^*A + AA^*\|^{1/2}.$ 等式成立的充分条件。为此，我们先注意以下已知引理。

引理 2.14. [17] 设 $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ 为正数。那么，$\|A+B\| = \|A\| + \|B\|$ 当且仅当 $\|AB\| = \|A\|\|B\|$.

定理 2.15. 设 $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$。那么 $\|A\|^4 = \|\Re^2(A)\Im^2(A)\|$ 推出

$$w^2(A) = \frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\|.$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned} \|A\|^4 &= \|\Re^2(A)\Im^2(A)\| \leq \|\Re^2(A)\|\|\Im^2(A)\| = \|\Re(A)\|^2\|\Im(A)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|\Re(A)\|^4 + \|\Im(A)\|^4\right) \leq \max\left(\|\Re(A)\|^4, \|\Im(A)\|^4\right) \\ &\leq w^4(A) \leq \|A\|^4. \end{aligned}$$

这意味着

$$\|\Re^2(A)\Im^2(A)\| = \|\Re(A)\|^2\|\Im(A)\|^2. \tag{2.3}$$

此外，我们有

$$\frac{1}{2}\left(\|\Re(A)\|^4 + \|\Im(A)\|^4\right) = \max\left(\|\Re(A)\|^4, \|\Im(A)\|^4\right) = w^4(A). \tag{2.4}$$

这意味着

$$\|\Re(A)\| = \|\Im(A)\| = w(A). \tag{2.5}$$

现在，利用引理 2.14，由恒等式（2.3）可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\Re^2(A) + \Im^2(A)\| &= \frac{1}{2}\left(\|\Re^2(A)\| + \|\Im^2(A)\|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\Re(A)\|^2 + \|\Im(A)\|^2\right) \\ &= \|\Re(A)\|^2 = w^2(A) \ (using \ (2.5)). \end{aligned}$$

证明至此完成。□

这里需要指出，定理2.15 的逆命题通常并不成立。例如，考虑 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

于是，$w^2(A) = \frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| = \frac{9}{4}$，然而 $\|A\|^4 \neq \|\Re^2(A)\Im^2(A)\|$.

3. Estimation of zeros of polynomials

设 $p(z) = z^n + a_n z^{n-1} + \ldots + a_2 z + a_1$是一个次数为$n \geq 2$ 且 $a_1 \neq 0$的复首一多项式。通过将数值半径不等式应用于多项式 $p(z)$的弗罗贝尼乌斯伴随矩阵，得到了 $p(z)$的零点位置。多项式 $p(z)$的弗罗贝尼乌斯伴随矩阵为

$$C_p = \begin{pmatrix} -a_n & -a_{n-1} & .... & -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .... & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C_p 的特征多项式是多项式 $p(z)$。因此， $p(z)$的零点恰好是 C_p的特征值，见 [12, 第316]页。 C_p 的平方为

$$C_p^2 = \begin{pmatrix} b_n & b_{n-1} & ..... & b_3 & b_2 & b_1 \\ -a_n & -a_{n-1} & .... & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .... & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中，对于 $j = 1$、2、.....、 n， $b_j = a_n a_j - a_{j-1}$，
且 $a_0 = 0$。此外，

$$C_p^3 = \begin{pmatrix} c_n & c_{n-1} & ..... & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ b_n & b_{n-1} & ..... & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -a_n & -a_{n-1} & .... & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .... & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中，当 $j = 1$、2、.....、 n 时， $b_j = a_n a_j - a_{j-1}$和
$c_j = -a_n b_j + a_{n-1} a_j - a_{j-2}$， 且$a_0 = a_{-1} = 0$,

and

$$C_p^4 = \begin{pmatrix} d_n & d_{n-1} & ..... & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \\ c_n & c_{n-1} & ..... & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ b_n & b_{n-1} & ..... & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -a_n & -a_{n-1} & .... & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中，当 $j = 1$、2、.....、n 时，$b_j = a_n a_j - a_{j-1}$、$c_j = -a_n b_j + a_{n-1}a_j - a_{j-2}$ 和 $d_j = -a_n c_j - a_{n-1}b_{j-1} + a_{n-2}a_j - a_{j-3}$，且 $a_0 = a_{-1} = a_{-2} = 0$。

$\|C_p\|$ 的精确值众所周知（参见[18]），其表达式为

$$\|C_p\| = \sqrt{\frac{\alpha + 1 + \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4|a_1|^2}}{2}}, \tag{3.1}$$

其中 $\alpha = \sum_{j=1}^n |a_j|^2$。

$\|C_p^2\|$ 的一个估计见于[16]，如下所示

$$\|C_p^2\| \leq \sqrt{\frac{\delta + 1 + \sqrt{(\delta-1)^2 + 4\delta'}}{2}}, \tag{3.2}$$

其中 $\delta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4|\gamma|^2}\right)$ 且 $\delta' = \frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta' + \sqrt{(\alpha'-\beta')^2 + 4|\gamma'|^2}\right)$，$\alpha = \sum_{j=1}^n |a_j|^2$，$\beta = \sum_{j=1}^n |b_j|^2$，$\alpha' = \sum_{j=3}^n |a_j|^2$，$\beta' = \sum_{j=3}^n |b_j|^2$，$\gamma = -\sum_{j=1}^n \bar{a_j} b_j$，$\gamma' = -\sum_{j=3}^n \bar{a_j} b_j$.

我们注意到

$$\|C_p^2\|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sqrt{\frac{\delta + 1 + \sqrt{(\delta-1)^2 + 4\delta'}}{2}}\right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{\alpha + 1 + \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4|a_1|^2}}{2}} = \|C_p\|.$$

受上述估计的启发，我们将在此得到对 $\|C_p^4\|^{1/4}$ 的估计。为此，首先注意到以下关于两个正算子之和的范数不等式。

引理3.1. [17] 若 $A, B \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ 为正，则

$$\|A + B\| \leq \frac{1}{2}\left(\|A\| + \|B\| + \sqrt{(\|A\| - \|B\|)^2 + 4\left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right\|^2}\right).$$

现在，我们可以对 $\|C_p^4\|^{1/4}$. 进行估计。令 $C_p^4 = R + S + T$，其中

$$R = \begin{pmatrix} d_n & d_{n-1} & ..... & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \\ c_n & c_{n-1} & ..... & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_n & b_{n-1} & ..... & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -a_n & -a_{n-1} & .... & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .... & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Now,

$$\begin{aligned} \|C_p^4\|^2 &= \|R+S+T\|^2 \\ &= \|(R+S+T)^*(R+S+T)\| \\ &= \|R^*R + S^*S + T^*T\| \,(since\ R^*S = R^*T = S^*R = S^*T = T^*R = T^*S = 0) \\ &\leq \|R^*R + S^*S\| + \|T^*T\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|R\|^2 + \|S\|^2 + \sqrt{(\|R\|^2 - \|S\|^2)^2 + 4\|RS^*\|^2}\right) + 1 \,(using\ Lemma\ 3.1). \end{aligned}$$

经简单计算可得

$$\begin{aligned} \|R\|^2 &= \|R^*R\| = \|RR^*\| \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + 4|\gamma_1|^2}\right) = \delta_1, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{n} |d_j|^2$、 $\beta_1 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$、 $\gamma_1 = \sum_{j=1}^{n} d_j \bar{c_j}$,

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= \|S^*S\| = \|SS^*\| \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4|\gamma|^2}\right) = \delta, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $\beta = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$, $\gamma = -\sum_{j=1}^{n} b_j \bar{a_j}$,

$$\begin{aligned} &\|RS^*\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(|\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2 + |\gamma_4|^2 + |\gamma_5|^2 + \sqrt{((|\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2) - (|\gamma_4|^2 + |\gamma_5|^2))^2 + 4|\gamma_2\bar{\gamma_4} + \gamma_3\bar{\gamma_5}|^2}\right) \\ &= \delta_2, \end{aligned}$$

其中 $\gamma_2 = \sum_{j=1}^{n} d_j b_j$, $\gamma_3 = \sum_{j=1}^{n} d_j \bar{a_j}$, $\gamma_4 = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j$, $\gamma_5 = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{a_j}$. 因此,

$$\|C_p^4\| \leq \sqrt{\frac{1}{2}\left(\delta_1 + \delta + \sqrt{(\delta_1 - \delta)^2 + 4\delta_2}\right) + 1}. \tag{3.3}$$

我们注意到, $\|C_p^4\|^{1/4}$ 在（3.3）中的估计与 $\|C_p^2\|^{1/2}$ 在（3.2）中的现有估计无法比较。在下述定理中，我们利用（3.2）和（3.3）中的估计，推导出弗罗贝尼乌斯伴随矩阵 C_p的谱半径上界。

定理 3.2. 以下不等式成立:

$$r(C_p) \leq \left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\delta + 1 + \sqrt{(\delta-1)^2 + 4\delta'}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\left(\delta_1 + \delta + \sqrt{(\delta_1 - \delta)^2 + 4\delta_2}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{4}},$$

where $\delta' = \frac{1}{2}\left(\alpha' + \beta' + \sqrt{(\alpha'-\beta')^2 + 4|\gamma'|^2}\right)$,
$\delta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta + \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4|\gamma|^2}\right)$,
$\delta_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \beta_1 + \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2 + 4|\gamma_1|^2}\right)$,
$\delta_2 = \frac{1}{2}\left(|\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2 + |\gamma_4|^2 + |\gamma_5|^2 + \sqrt{((|\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2) - (|\gamma_4|^2 + |\gamma_5|^2))^2 + 4|\gamma_2\bar{\gamma_4} + \gamma_3\bar{\gamma_5}|^2}\right)$,
$\alpha' = \sum_{j=3}^{n} |a_j|^2$, $\beta' = \sum_{j=3}^{n} |b_j|^2$, $\gamma' = -\sum_{j=3}^{n} \bar{a_j} b_j$,
$\alpha = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $\beta = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$, $\gamma = -\sum_{j=1}^{n} b_j \bar{a_j}$,
$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{n} |d_j|^2$, $\beta_1 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$, $\gamma_1 = \sum_{j=1}^{n} d_j \bar{c_j}$,
$\gamma_2 = \sum_{j=1}^{n} d_j \bar{b_j}$, $\gamma_3 = \sum_{j=1}^{n} d_j \bar{a_j}$, $\gamma_4 = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{b_j}$, $\gamma_5 = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{a_j}$.

证明。令 $A \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$。将 $A = A^2$ 代入不等式 $w^2(A) \leq \frac{1}{4}\|A^*A + AA^*\| + \frac{1}{2}w(A^2)$（参见 [1, 定理 2.4]），可得

$$w^2(A^2) \leq \frac{1}{4}\left\||A^2|^2 + |(A^*)^2|^2\right\| + \frac{1}{2}w(A^4).$$

由此可得

$$r^2(A) = r(A^2) \le w(A^2) \le \left\{ \frac{1}{4} \left\| |A^2|^2 + |(A^*)^2|^2 \right\| + \frac{1}{2} w(A^4) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

即,

$$r(A) \le \left\{ \frac{1}{4} \left\| |A^2|^2 + |(A^*)^2|^2 \right\| + \frac{1}{2} w(A^4) \right\}^{\frac{1}{4}}. \tag{3.4}$$

现在，由（3.4）和不等式$\|C_p^* C_p + C_p C_p^*\| \le \|C_p\|^2 + \|C_p^2\|$(见 [6,注 3。9]）可得

$$\begin{aligned} r(C_p) &\le \left\{ \frac{1}{4} \left\| |C_p^2|^2 + |(C_p^*)^2|^2 \right\| + \frac{1}{2} w(C_p^4) \right\}^{\frac{1}{4}} \\ &\le \left\{ \frac{1}{4} (\|C_p^2\|^2 + \|C_p^4\|) + \frac{1}{2} \|C_p^4\| \right\}^{\frac{1}{4}} \\ &\le \left\{ \frac{1}{4} \left\|C_p^2\right\|^2 + \frac{3}{4} \left\|C_p^4\right\| \right\}^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

因此，利用（3.2）和（3.3）中的估计，即可得到所需的不等式。

□

利用事实 $|\lambda_j(C_p)| \le r(C_p)$，其中 $\lambda_j(C_p)$ 是 C_p 的第 j 个特征值，我们可推得多项式 $p(z)$ 的零点的以下估计。

定理 3.3. 若 z 是 $p(z)$的任意一个零点，则

$$|z| \le \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\delta + 1 + \sqrt{(\delta-1)^2 + 4\delta'}}{2} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \left(\delta_1 + \delta + \sqrt{(\delta_1 - \delta)^2 + 4\delta_2} \right) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{4}},$$

其中 δ， δ_1， δ_2 和 δ' 与定理 3.2中的相同。

应用谱映射定理，我们得出：若 z 是 $p(z)$ 的任意一个零点，则$|z| \le \|C_p^4\|^{\frac{1}{4}}$。因此，利用不等式（3.3），我们得到了 $p(z)$ 的零点的另一个新估计。

定理 3.4. 若 z 是 $p(z)$的任意一个零点，则

$$|z| \le \left\{ \frac{1}{2} \left(\delta_1 + \delta + \sqrt{(\delta_1 - \delta)^2 + 4\delta_2} \right) + 1 \right\}^{\frac{1}{8}},$$

其中 δ， δ_1 和 δ_2 由定理 3.2给出。

再次，将 $A = A^2$ 代入不等式 $w(A) \le \frac{1}{2} \left(\|A\| + \|A^2\|^{\frac{1}{2}} \right)$ (参见 [16, 定理 1])，并按式(3.4)进行推导，可得

$$r(A) \le \left\{ \frac{1}{2} \|A^2\| + \frac{1}{2} \|A^4\|^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

仿照定理3.2 中的推导，利用式(3.5)、(3.2)和(3.3)中的不等式，可得到以下估计。

定理 3.5. 若 z 是 $p(z)$的任意一个零点，则

$$|z| \leq \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta+1+\sqrt{(\delta-1)^2+4\delta'}}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\delta_1+\delta+\sqrt{(\delta_1-\delta)^2+4\delta_2}\right)+1\right)^{\frac{1}{4}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 δ， δ_1， δ_1 以及 δ' 均在定理 3.2中给出。

最后，我们将本文得到的 $p(z)$零点界与已有结果进行比较。首先列出一些众所周知的已有界。设 z 是 $p(z)$的任意一个零点。然后 Linden [20]得到

$$|z| \leq \frac{|a_n|}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\left(n-1+\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2 - \frac{|a_n|^2}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montel [11,定理 3] 得到

$$|z| \leq \max\{1, |a_1|+\cdots+|a_n|\}.$$

Cauchy [12]得到

$$|z| \leq 1+\max\{|a_1|,\cdots,|a_n|\}.$$

Kittaneh [15] 证明了

$$|z| \leq \frac{1}{2}\left(|a_n|+1+\sqrt{(|a_n|-1)^2+4\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1}|a_j|^2}}\right).$$

Fujii 和 Kubo [10] 得到了

$$|z| \leq \cos\frac{\pi}{n+1} + \frac{1}{2}\left(|a_n|+\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2}\right).$$

Bhunia 和 Paul [4,定理 2.6] 证明了

$$|z|^2 \leq \cos^2\frac{\pi}{n+1} + |a_{n-1}| + \frac{1}{4}\left(|a_n|+\sqrt{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha-|a_n|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha},$$

其中 $\alpha = \sum_{j=1}^{n}|a_j|^2$.

我们考虑一个多项式 $p(z) = z^3+z^2+\frac{1}{2}z+1$。上文提到的这个多项式零点的模的不同上界如下表所示。

Linden [20]	1.9492
Montel[11]	2.5
Cauchy[12]	2
Kittaneh[15]	2.0547
Fujii 和 Kubo[10]	1.9571
Bhunia 和 Paul[4]	1.96761

然而，定理 3.3 给出 $|z| \leq 1.38047091798$，定理 3.4 给出 $|z| \leq 1.3798438819$而定理 3.5 给出 $|z| \leq 1.381095966$，这些结果优于上文提到的界。

声明与披露：

资助。作者声明，在准备本稿件期间未获得任何资金、补助或其他支持。

利益冲突。作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

数据可用性声明。本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

作者贡献。所有作者对稿件的准备贡献均等。

References

1. A. Abu-Omar 和 F. Kittaneh，数值半径的上界与下界及其在对合算子中的应用，Rocky Mountain J. Math. 45 (2015)，第 4 期，1055–1064。2. P. Bhunia、S.S. Dragomir、M.S. Moslehian 和 K. Paul，《数值半径不等式讲义》，Infosys 科学基金会数学科学系列，施普林格，（2022）。https://doi.org/10.1007/978-3-031-13670-2 3. P. Bhunia、S. Jana、M.S. Moslehian 和 K. Paul，通过笛卡尔分解改进数值半径不等式，Funct. Anal. Appl.（2022），即将出版。4. P. Bhunia 和 K. Paul，利用伴随矩阵得到多项式零点的环形界，Adv. Oper. Theory 7（2022），第 1 期，论文编号 8，共 19 页。5. P. Bhunia 和 K. Paul，对著名数值半径不等式的实质性改进及其应用。Results Math. 76（2021），第 4 期，论文编号 177，共 12 页。6. P. Bhunia 和 K. Paul，希尔伯特空间算子数值半径不等式的进一步发展，Arch. Math. (Basel) 117（2021），第 5 期，537–546。7. P. Bhunia、S. Bag 和 K. Paul，利用希尔伯特空间算子的数值半径估计多项式零点，Ann. Funct. Anal. 12（2021），第 2 期，论文编号 21，共 14 页。8. P. Bhunia 和 K. Paul，希尔伯特空间算子数值半径的新上界，Bull. Sci. Math. 167（2021），论文编号 102959，共 11 页。9. M.L. Buzano，Cauchy-Schwarz不等式的推广，Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Torino 31(1971/73)（1974）405–409。

10. M. Fujii 和 F. Kubo，Buzano不等式及代数方程根的界，Proc. Amer. Math. Soc. 117（1993），第 2 期，359–361。11. M. Fujii 和 F. Kubo，作为代数方程根的界的算子范数，Proc. Japan Acad. Sci. 49（1973），805–808。12. R.A. Horn 和 C.R. Johnson，《矩阵分析》，剑桥，1985年。13. T. Kato，关于线性算子若干不等式的札记，Math. Ann. 125（1952），208–212。14. F. Kittaneh，希尔伯特空间算子的数值半径不等式，Studia Math. 168（2005），第 1 期，73–80。15. F. Kittaneh，利用矩阵不等式估计多项式零点，Arch. Math. (Basel) 81（2003），第 5 期，601–608。16. F. Kittaneh，一个数值半径不等式及 Frobenius 伴随矩阵数值半径的估计，Studia Math. 158（2003），第 1 期，11–17。17. F. Kittaneh，正算子之和的范数不等式，《算子理论杂志》48（2002），95–103。18. F. Kittaneh，伴随矩阵的奇异值及多项式零点的界，《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》16（1995），333–340。19. F. Kittaneh，关于希尔伯特空间算子若干不等式的札记，《数理科学研究所刊物》24（1988），第 2 期，283–293。20. H. Linden，利用迹与行列式估计多项式零点，哈根远程大学数学系研讨会报告。69（2000），127–146。21. C.A. McCarthy，C_p，《以色列数学杂志》5（1967），249–271。22. S. Sahoo、N.C. Rout 和 M. Sababheh，若干扩展数值半径不等式，《线性与多重线性代数》69（2021），第 5 期，907–920。23. Y. Seo，与负幂几何平均相关的数值半径不等式，《算子与矩阵》13（2019），第 2 期，489–493。24. M.P. Vasi´c 和 D.J. Keˆcki´c，关于复数的若干不等式，《巴尔干数学》1（1971），282–286。
[1] Department of Mathematics, Mahisadal Girls' College, Purba Medinipur 721628,West Bengal, India电子邮箱：janasuva8@gmail.com
[2] Department of Mathematics, Jadavpur University, Kolkata 700032, West Bengal, India电子邮箱：pintubhunia5206@gmail.com 电子邮箱：kalloldada@gmail.com；kallol.paul@jadavpuruniversity.in