arXiv:2301.03176v1 [math.NT] 9 Jan 2023

关于项涉及截断退化指数的无穷级数的注记

DAE SAN KIM、HYEKYUNG KIM 和 TAEKYUN KIM

摘要。退化指数在近期关于许多特殊数与多项式、退化伽马函数、退化 umbral 演算以及退化 q-umbral 演算的退化版本的研究中发挥着重要作用。本文旨在考察项中涉及截断退化指数以及若干特殊数的无穷级数，并求出其值或将其表示为有限和的其他形式。

1. 引言

退化指数在近期关于许多特殊数和多项式的退化版本的研究中发挥着重要作用（见 [1]）。其中许多对象是通过在其生成函数中以退化指数替代普通指数而引入的。这些对象包括第二类退化斯特林数、退化伯努利多项式、退化欧拉多项式、部分退化贝尔多项式以及退化中心阶乘数等。不仅如此，退化伽马函数也是通过在通常伽马函数的积分表示中以退化指数替代普通指数而引入的（见 [18]）。此外，作为“经典”umbral 演算的一种退化版本，λ-umbral 演算（也称为退化 umbral 演算）再次通过在谢弗序列的生成函数中作同样的替换而得到发展。事实证明，在处理退化特殊数和多项式时，退化 umbral 演算（见 [11]）比 umbral 演算更为方便。同样， λ-q-umbral 演算（也称为退化 q-umbral 演算）近期通过以λ-q-指数替代 q-指数而引入（见 [19]）。总之，我们可以说，关于退化版本的研究成果颇丰（见 [2-4,10-19,21]）。

本文旨在考察若干项中含有截断退化指数函数 $e_\lambda(y) - (1)_{k\lambda}\, y - \cdots - (1)_{n,\lambda}\, n!\, y^n$, $(n \geq 0)$ 的无穷级数，并求出它们的值或将它们表示为有限和的其他形式。其中一些无穷级数还涉及其他特殊数，即二项式系数、广义下降阶乘（见 (2)）以及第二类退化斯特林数（见 (4)、(5)）。

对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，退化指数定义如下

$$e_\lambda^x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_{n,\lambda}}{n!} t^n, \quad \text{and} \quad e_\lambda(t) = e_\lambda^1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_{n,\lambda}}{n!} t^n, \tag{1}$$

其中广义下降阶乘定义为

$$(x)_{0,\lambda} = 1, \quad (x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)(x-2\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda), \quad (n \geq 1), \quad (\text{see } [10,15]). \tag{2}$$

2010年数学主题分类：11B83；11B65；11B73。关键词和短语：截断退化指数函数；第二类退化斯特林数；广义下降阶乘。

由（1）可知，$\lim_{\lambda\to 0} e_{\lambda}^{x}(t) = e^{x}$. 第二类斯特林数定义为

$$x^{n} = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k)(x)_k, \quad (n \geq 0), \quad (\text{see } [10]), \tag{3}$$

其中 $(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1), (k \geq 1), (x)_0 = 0$。

在 [10], 中，第二类退化斯特林数定义为

$$(x)_{n,\lambda} = \sum_{k=0}^{n} S_{2,\lambda}(n,k)(x)_k, \quad (n \geq 0). \tag{4}$$

由 (4)，我们注意到 $\lim_{\lambda\to 0} S2,\ \lambda(n,k) = S_2(n,k)$。

由 (4)，我们容易得到

$$\frac{1}{k!}\Big(e_{\lambda}(t)-1\Big)^{k} = \sum_{n=k}^{\infty} S_{2,\lambda}(n,k)\frac{t^{n}}{n!}, \quad (k \geq 0), \quad (\text{see } [10,16,17]). \tag{5}$$

后向差分算子 $\bigtriangledown$定义为

$$\bigtriangledown f(x) = f(x) - f(x-1), \quad (\text{see } [17]). \tag{6}$$

由（6），我们注意到

$$\binom{x-1}{n-1} = \bigtriangledown \binom{x}{n} = \binom{x}{n} - \binom{x-1}{n}, \quad (n \geq 1). \tag{7}$$

因此，由（7）可得

$$\binom{x}{n} = \binom{x+1}{n} - \binom{x}{n-1}, \quad (n \geq 0), \quad (\text{see } [3,4,5,6,7]). \tag{8}$$

此外，退化 Bell 多项式定义为

$$\phi_{n,\lambda}(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k)_{n,\lambda}}{k!}x^{k} = \sum_{k=0}^{n} S_{2,\lambda}(n,k)x^{k}, \quad (n \geq 0), \quad (\text{see } [10,16]).$$

2. 项中含有截断退化指数函数的无穷级数

在本节中，我们将研究各项涉及截断退化指数函数的无穷级数。我们首先观察到

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1}\Big(e_{\lambda}(xy)-e_{\lambda}(y)\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^{k}\left(\frac{x^{k}-1}{x-1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_{k+1,\lambda}}{(k+1)!}y^{k+1}\sum_{n=0}^{k}x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^{k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\left(e_{\lambda}(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^{2}\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^{n}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

在（9）中令 x $\to 1$ 趋于无穷，我们得到

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad & \sum_{n=0}^{\infty}\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)\\
&=\lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^k\left(\frac{x^k-1}{x-1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^k k\\
&=y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\lambda)_{k,\lambda}}{k!}y^k=ye_\lambda^{1-\lambda}(y)=\frac{y}{1+\lambda y}e_\lambda(y).
\end{aligned}
$$

因此，由 (9) 和 (10)，我们得到以下定理。

定理 2.1. 以下恒等式成立。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x-1}\big(e_\lambda(xy)-e_\lambda(y)\big)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)x^n,\\
&\frac{y}{1+\lambda y}e_\lambda(y)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right).
\end{aligned}
$$

退化双曲余弦定义为

$$\cosh_\lambda(x)=\frac{e_\lambda(-x)+e_\lambda(x)}{2}.$$

注意，$\lim_{\lambda\to 0}\cosh_\lambda(x)=\cosh(x)$。下一个推论可由定理 2.1 直接得出。

推论 2.2。以下恒等式成立。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(e_\lambda(1)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}\right)x^n=\frac{e_\lambda(x)-xe_\lambda(1)}{x-1}+1,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(e_\lambda(1)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}\right)=1-\frac{\lambda}{1+\lambda}e_\lambda(1),
\end{aligned}
$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e_\lambda(1)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}\right)(-1)^n=1-\cosh_\lambda(1).$$

由（8）可知,

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{p}\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)\\
&=\sum_{n=p}^{\infty}\binom{n}{p}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^k=\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^k\sum_{n=p}^{k-1}\binom{n}{p}\\
&=\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^k\sum_{n=p}^{k-1}\left(\binom{n+1}{p+1}-\binom{n}{p+1}\right)=\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(1)_{k,\lambda}}{k!}y^k\binom{k}{p+1}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_{k+p+1,\lambda}}{(k+p+1)!}y^{k+p+1}\binom{k+p+1}{p+1}=\frac{y^{p+1}(1)_{p+1,\lambda}}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-(p+1)\lambda)_{k,\lambda}}{k!}y^k\\
&=\frac{y^{p+1}}{(p+1)!}(1)_{p+1,\lambda}e_\lambda^{1-(p+1)\lambda}(y)=\frac{y^{p+1}}{(p+1)!}(1)_{p+1,\lambda}(1+\lambda y)^{-(p+1)}e_\lambda(y).
\end{aligned}
$$

因此，由 (11) 可得以下定理。

定理 2.3. 对于 $p\geq 0$，有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{p}\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)\\
&\qquad=\frac{y^{p+1}}{(p+1)!}(1)_{p+1,\lambda}(1+\lambda y)^{-(p+1)}e_\lambda(y).
\end{aligned}
$$

特别地，对于 $y=1$，可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{p}\left(e_\lambda(1)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}\right)\\
&\qquad=\frac{(1)_{p+1,\lambda}}{(p+1)!}(1+\lambda)^{-(p+1)}e_\lambda(1).
\end{aligned}
$$

由定理 2.3 可知

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad &\sum_{n=0}^{\infty}(n)_p\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)\\
&\qquad=\frac{y^{p+1}}{p+1}(1)_{p+1,\lambda}(1+\lambda y)^{-(p+1)}e_\lambda(y).
\end{aligned}
$$

由 (4) 和 (12) 可得

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad &\sum_{n=0}^{\infty}(n)_{p,\lambda}\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}S_{2,\lambda}(p,k)(n)_k\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)\\
&=\sum_{k=0}^{p}S_{2,\lambda}(p,k)\sum_{n=0}^{\infty}(n)_k\left(e_\lambda(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)\\
&=\sum_{k=0}^{p}S_{2,\lambda}(p,k)\frac{y^{k+1}}{k+1}(1)_{k+1,\lambda}(1+\lambda y)^{-(k+1)}e_\lambda(y).
\end{aligned}
$$

因此，由（13）可得以下定理。

定理 2.4。对于 $\mathrm{p} \geq 0$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n)_{p,\lambda}\left(e_{\lambda}(y)-1-\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^{2}-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^{n}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{p}S_{2,\lambda}(p,k)\frac{y^{k+1}}{k+1}(1)_{k+1,\lambda}(1+\lambda y)^{-(k+1)}e_{\lambda}(y).$$

特别地，当 $\mathrm{y}=1$ 时，我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n)_{p,\lambda}\left(e_{\lambda}(1)-1-\frac{(1)_{n,\lambda}}{1!}-\frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}-\cdots-\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{p}S_{2,\lambda}(p,k)\frac{(1)_{k+1,\lambda}}{k+1}(1+\lambda)^{-(k+1)}e_{\lambda}(1).$$

由 (5) 可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{2,\lambda}(n,k)\frac{t^{n}}{n!}=\sum_{n=k}^{\infty}S_{2,\lambda}(n,k)\frac{t^{n}}{n!}=\frac{1}{k!}\big(e_{\lambda}(t)-1\big)^{k} \tag{14}$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}e_{\lambda}^{j}(t)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(j)_{n,\lambda}}{n!}t^{n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(j)_{n,\lambda}\right)\frac{t^{n}}{n!}.$$

比较 (14) 两边的系数，我们得到

$$S_{2,\lambda}(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}(j)_{n,\lambda},\quad (n,k\geq 0). \tag{15}$$

在 (15) 中取 $\lambda\to 0$ 的极限，我们有

$$S_{2}(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^{n},\quad (n,k\geq 0). \tag{16}$$

利用 (16)，我们推导出如下结果：

$$\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\frac{e_{\lambda}(jy)-e_{\lambda}(y)}{j-1} \tag{17}$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^{n}\left(\frac{j^{n}-1}{j-1}\right)$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^{n}\sum_{l=0}^{n-1}j^{l}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^{n}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}j^{l}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^{n}\sum_{l=0}^{n-1}S_{2}(l,k)=\sum_{l=0}^{\infty}S_{2}(l,k)\sum_{n=l+1}^{\infty}\frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^{n}.$$

因此，由式 (17) 可得以下定理。

定理 2.5。当 $k \geq 0$ 时，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k)\left(e_\lambda(y) - 1 - \frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y - \frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2 - \cdots - \frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right)$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\frac{e_\lambda(jy) - e_\lambda(y)}{j-1}.$$

特别地，对于 $y = 1$，我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2,\lambda}(n,k)\left(e_\lambda(1) - 1\frac{(1)_{1,\lambda}}{1!} - \frac{(1)_{2,\lambda}}{2!} - \cdots - \frac{(1)n,\lambda}{n!}\right)$$
$$= \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\frac{e_\lambda(j) - e_\lambda(1)}{j-1}.$$

注 2.6. 我们可以自然地考虑以下问题。对于任意 $k \geq 0$，求出

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2,\lambda}(n,k)\left(e_\lambda(y) - 1 - \frac{(1)_{1,\lambda}}{1!}y - \frac{(1)_{2,\lambda}}{2!}y^2 - \cdots - \frac{(1)_{n,\lambda}}{n!}y^n\right).$$

注 2.7. 关于退化理论和截断理论，已有大量研究。这些理论在数学、工程学和物理学中有一些应用。感兴趣的研究者可参见 *[1-22]*。

3. 结论

在本文中，我们研究了各项涉及截断退化指数函数以及二项式系数、广义下降阶乘和第二类退化斯特林数的无穷级数，并确定了它们的值，或将其表示为其他形式的有限和。

近年来，我们见证了对退化版本的研究取得了许多令人着迷且富有成果的结果。我们希望继续研究许多特殊数和多项式的退化版本，并探索它们在物理学、科学和工程学中的一些应用。

参考文献

[1] Araci, S. 关于多指数函数及相关恒等式的一类新伯努利多项式。Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang) 31 (2021), no. 2, 195-204. [2] Aydin, M. S.; Acikgoz, M.; Araci, S. 与某些应用相关的退化赫尔维茨ζ函数的一种新构造。Proc. Jangjeon Math. Soc. 25 (2022), no. 2, 195–203. [3] Carlitz, L. 退化斯特林数、伯努利数和欧拉数。Utilitas Math. 15 (1979), 51-88. [4] Carlitz, L. 退化斯陶特-克劳森定理。Arch. Math. (Basel) 7 (1956), 28-33. [5] Comtet, L. 高级组合学：有限展开与无穷展开的艺术。修订增补版。D. Reidel Publishing Co., 多德雷赫特, 1974. xi+343 页。ISBN: 90-277-0441-4. [6] Flajolet, P.; Sedgewick, R. 解析组合学。剑桥大学出版社, 剑桥, 2009. xiv+810 页。[7] Furdui, O. 奇异的小数部分积分与欧拉常数。Analysis (Munich) 31 (2011), no. 3, 249–257. [8] Gun, G.; Simsek, Y. 涉及斯特林数、福比尼数、伯努利数及卡特兰数近似值的组合和。Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang) 30 (2020), no. 4, 503-513. [9] Kilar, N. ; Simsek, Y. 涉及斐波那契型多项式和切比雪夫多项式的特殊数与多项式恒等式。Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang) 30 (2020), no. 4, 493-502. [10] Kim, D. S.; Kim, T. 关于一种新型退化伯努利数的注记。Russ. J. Math. Phys. 27 2, 227 2020 235 ( ), no. - .[11] Kim, D. S.; Kim, T. 退化谢弗序列和

λ **493** 2021 1, -谢

124521

弗序列。J. Math. Anal. Appl. ( ), no. .

[12] Kim, H. K.; Baek, H.; Lee, D. S. 关于截断退化指数多项式的注记。Proc. Jangjeon Math. Soc. 24 (2021), no. 1, 63-76.[13] Kim, H. K.; Lee, D. S. 退化 r 扩展 Lah-Bell 多项式的一些恒等式。Proc. Jangjeon Math. Soc. 24 (2021), no. 1, 47–61.[14] Kim, T.; Kim, D. S. 与退化 Bell 多项式相关的截断多项式的一些恒等式。Russ. J. Math. Phys. 28 (2021), no. 3, 342–355. [15] Kim, T.; Kim, D. S. 退化零截断泊松随机变量。Russ. J. Math. Phys. 28 1, 66 2021 72 ( ), no. – .[16] Kim, T.; Kim, D. S.; Dowling 格的退化第一类和第二类 Whitney 数。Russ. J. Math. Phys. 29 (2022), no. 3, 358-377. [17] Kim, T.; Kim, D. S. 关于一些退化微分算子和退化差分算子的研究。Russ. J. Math. Phys. 29 (2022), no. 1, 37-46.[18] Kim, T.; Kim, D. S. 退化拉普拉斯变换与退化伽马函数。Russ. J. Math. Phys. 24 (2017), no. 2, 241-248.[19] Kim, T.; Kim, D. S.; Kim, H. K. λ-q-谢弗序列及其应用。Demonstr. Math. 55 (2022), 843–865. [20] Roman, S. umbral 演算。纯粹与应用数学, 第111卷。Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jo- vanovich, Publishers], 纽约, 1984. x+193 页 [21] Shtern, A. I. 群的退化有限维拟表示列表。Proc. Jangjeon Math. Soc. 20 (2017), no. 4, 671-674. [22] Simsek, Y. 与组合数和多项式相关的恒等式与关系。Proc. Jangjeon Math. Soc. 20 (2017), no. 1, 127-135. 西江大学数学系，首尔 121-742，大韩民国 电子邮箱：dskim@sogang.ac.kr 大邱天主教大学数学教育系，庆山 38430，大韩民国 电子邮箱：hkkim@cu.ac.kr 光云大学数学系，首尔 139-701，大韩民国 电子邮箱：tkkim@kw.ac.kr