arXiv:2301.03177v1 [math.AC] 9 Jan 2023

多项式的显式华林分解族

KANGJIN HAN 和 HYUNSUK MOON

ABSTRACT. 本文建立了一个多项式恒等式，它给出了域 $\Bbbk$ 上任意单项式 $X_0^{a_0}X_1^{a_1}\cdots X_n^{a_n}$ 的一族显式 Waring 分解。这为给定单项式的华林秩提供了一个上界，并自然导出任意齐次形式的显式 Waring 分解，最终还可通过（去）齐次化得到任意多项式的显式分解。值得注意的是，这种分解在多项式计算、对称张量问题等诸多应用中都非常有用。我们将本文结果的若干计算方面与其他已知方法进行比较，并在最后介绍一个可供实际使用的计算机实现。

1. INTRODUCTION

在全文中，设 $\Bbbk$ 为一个无限域，$R=\Bbbk[X_0,\dots,X_n]=\bigoplus_{d\geq 0}R_d$ 为 $\Bbbk$ 上的多项式环，R_d 为次数为 d 的齐次多项式（或形式）构成的 $\Bbbk$-向量空间。对于给定的 $F\in R_d$，定义 F 在 $\Bbbk$ 上的 Waring 分解为如下和式

$$F=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i L_i^d\ , \tag{1}$$

其中 $\lambda_i\in\Bbbk$ 和 L_i 是 $\Bbbk$上的线性形式。使这种分解存在的最小数目 r 称为 $\Bbbk$ 上 F 的 Waring 秩，记作 $\mathrm{rank}_{\Bbbk}(F)$。

关于 Waring 分解和 Waring 秩的早期研究始于 Sylvester 等人的工作，可追溯到 19 世纪（历史背景见 [9] ）。然而，尽管历史悠久，关于复数域上一般形式的 Waring 秩这一领域长期存在的猜想，直到 20 世纪 90 年代才由 [1] 解决；而单项式这一特定类型多项式的复数 Waring 秩，则是最近才被确定的 [3, 5]。一般而言，除了一些已知情形（例如见 [7]及其中的参考文献）外，确定一个形式的秩是一项非常困难的任务。

在实数域上，通常计算 Waring 秩更加困难。对于一些基本情形，已知具有 $a_i>0$ 的单项式 $X_0^{a_0}X_1^{a_1}\cdots X_n^{a_n}$ 的实华林秩；当 $n=1$ [4] 时，它等于次数；而当 $\min(a_i)=1$ [6] 时，则为 $\frac{1}{2}\prod_{i=0}^{n}(a_i+1)$。在 [6], 中，作者还给出了任意单项式 $\frac{1}{2a_j}\prod_{i=0}^{n}(a_i+a_j)$的实秩上界，其中 a_j 是 $\min(a_i)$，但一般而言该上界并不紧。最近，[8] 中的作者得到了目前最好的结果，具体如下：

Theo注 1.1（[8]）。对于每个 $a_i>0$ 都有 $X_0^{a_0}X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}$ 的单项式，成立：

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(X_0^{a_0}X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n})\leq\frac{1}{2}\left\{\prod_{i=0}^{n}(a_i+1)-\prod_{i=0}^{n}(a_i-1)\right\}\ . \tag{2}$$

此外，同样的结果也适用于秩$\mathbb{Q}(X_0^{a_0}X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n})$。

本文证明了一个关于任意单项式的显式 Waring 分解的恒等式。该恒等式可用于直接导出界（2）。原则上，通过“对偶性”，可以利用湮灭理想 M 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}$ 中出现的子理想，求出给定单项式的 Waring 分解。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14P99, 12D05, 13P10, 14A25, 15A21, 14N15.*Key words and phrases.* 华林秩、Waring 分解、单项式、对称张量、复杂度。

但一般来说，这需要对一个大型系统进行大量线性代数计算，以确定分解的全部系数，因此在许多情况下实际上并不容易得到结果。

这里我们证明了一些 Waring 型恒等式，这些恒等式由无限基域 $\Bbbk$ 中的大多数元素参数化，并且具有有趣的组合性质（见定理 2.4 和推论 2.5）。因此，我们可以得到 M 的 Waring 分解的更直接公式，而无需依赖大规模的线性代数计算。

我们讨论第 2 节中的恒等式在寻找不仅是单项式、而且是任意齐次形式的显式 Waring 分解方面的一些推论（对于任意多项式，也可以通过（去）齐次化过程轻松应用）。特别地，在第 3 节中，我们考察其计算方面；事实证明，与 [2] 中使用已知分解的方法相比，我们的方法在加项数量方面具有更优的渐近性能（有关进一步讨论，见注 3.3）。我们还在第 4 节中给出了例 2.8 中恒等式的一个示例，以及使用符号计算机代数系统 Macaulay2 [10] 的软件实现。

最后，我们想指出，本文中的几乎所有结果在特征相对较大的有限域上也成立。不过，为求简洁，我们这里只讨论无限域 $\Bbbk$ 的情形。

2. Main Result

定义与记号 2.1. 首先，我们定义一些概念，并为其设定记号。

(1) 设 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ 是一个由 $n+1$ 非负整数组成的序列（注意，这样的 $\mathbf{a}$ 自然对应于一个单项式 $X_0^{a_0}X_1^{a_1}\cdots X_n^{a_n} \in \Bbbk[X_0,\ldots,X_n]$）。$|\mathbf{a}|$ 表示其和 $\sum_0^n a_i$，而 $\binom{|\mathbf{a}|}{\mathbf{a}}$ 表示多项式系数 $\binom{|\mathbf{a}|}{a_0\ a_1\ \ldots\ a_n}$。

(2) 对于给定的 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$，我们令 $Z_{\mathbf{a}} := \{i \mid a_i = 0\}$ 为零指标集合，$E_{\mathbf{a}} := \{i \mid a_i$ 为偶数$\}$，即偶指标集合；并令 $m_i = \lfloor \frac{a_i - 1}{2} \rfloor$，其中 $i = 0, \ldots, n$。

(3) 固定一个 $\in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$。对于任意满足 $Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}$的集合 A，我们考虑有序倍数集合K_A:$= \{(k_i)_{i\notin A} \mid k_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq k_i \leq m_i$，其中 $i \notin A\}$ 且 $S_A := \{(s_i)_{i\notin A} \mid s_i \in \{0,1\}\}$，它是所有符号的有序倍数组成的集合。作为对每个集合的约简，我们还定义两个特定子集

$$\overline{K_A} := \{(k_i)_{i\notin A} \mid k_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq k_i \leq m_i \text{ for } i \notin A \text{ and } \min\{k_i\}_{i\notin A} = 0\} \subset K_A\ ,$$
$$\overline{S_A} := \{(s_i)_{i\notin A} \mid s_i \in \{0,1\}, s_{\min\{i:i\notin A\}} = 0\} \subset S_A\ .$$

(4) 对于给定的三元组$(A, \mathbf{k}, \mathbf{s})$，其中 A 是满足 $Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}$的集合，$\mathbf{k} \in K_A$ 且$\mathbf{s} \in S_A$，我们设$\ell_{A,\ \mathbf{k},\ \mathbf{s}} := \sum_{i\notin A}(-1)^{s_i}t^{k_i}X_i$，它是 $\Bbbk[X_0, X_1, \ldots, X_n]$中的一个线性形式。

(5) 最后，我们需要定义以下依赖于a_i取值的组合函数；

$$F_i(y) := \begin{cases} \prod_{j=1}^{m_i}(y - t^{a_i-2j}) & \text{, for } m_i > 0 \\ 1 & \text{, if } m_i = -1 \text{ or } 0 \end{cases}\ .$$

那么，$F_i(y)$ 是 $\Bbbk[y]$ 中的多项式函数，其次数为 m_i，除非 $m_i = -1$。对于单项式 M 和 $\Bbbk[y]$ 中的多项式 f，我们将多项式 f 中 M 的系数记为 $c(M, f)$。

为证明定理 2.4，我们还将证明一个关于符号和的引理。

引理 2.2. 对于整数序列 $J \in \mathbb{Z}^k$,

$$\sum_{I\in\{0,1\}^k} (-1)^{\sum_{i=1}^k J_i\cdot I_i} = \prod_{i=1}^k (1+(-1)^{J_i}) = \begin{cases} 2^k, \text{ if all the } J_i \text{ are even} \\ 0, \text{ if at least one of } J_i \text{ is odd} \end{cases},$$

其中, $\{0,1\}^k$ 表示由 k 各项为 0 或 1 的所有序列组成的集合。证明。

$$\begin{aligned}
\sum_{I\in\{0,1\}^k} (-1)^{\sum_{i=1}^k J_i\cdot I_i} &= \sum_{I\in\{0,1\}^k} \prod_{i=1}^k (-1)^{J_i\cdot I_i} \\
&= \sum_{0\le I_1\le 1} \sum_{0\le I_2\le 1} \cdots \sum_{0\le I_k\le 1} (-1)^{J_1\cdot I_1}(-1)^{J_2\cdot I_2}\cdots(-1)^{J_k\cdot I_k} \\
&= \sum_{0\le I_1\le 1} (-1)^{J_1\cdot I_1} \cdots \sum_{0\le I_k\le 1} (-1)^{J_k\cdot I_k} \\
&= \prod_{i=1}^k \sum_{0\le I_k\le 1} (-1)^{J_i\cdot I_i} = \prod_{i=1}^k (1+(-1)^{J_i})
\end{aligned}$$

□

下面给出一个引理 2.2 中等式的简单示例。

例 2.3。设 $J = (3, 4, 5)$。则 $k = 3$, 集合 $\{0,1\}^3$ 为

$$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

对于每个 $I \in \{0,1\}^3$, $\sum_{i=1}^3 I_i \cdot J_i = I_1J_1 + I_2J_2 + I_3J_3$ 表示为

$$0, 5, 4, 9, 3, 8, 7, \text{ and } 12\ .$$

因此, 一方面我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{I\in\{0,1\}^3} (-1)^{\sum_{i=1}^3 I_i\cdot J_i} &= (-1)^0 + (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^9 + (-1)^3 + (-1)^8 + (-1)^7 + (-1)^{12} \\
&= 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0
\end{aligned}$$

而在另一边

$$\prod_{i=1}^k (1+(-1)^{J_i}) = (1+(-1)^3)(1+(-1)^4)(1+(-1)^5) = 0\ .$$

现在我们证明主要定理。

定理 2.4. 设 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{n+1}$为一个由 $n+1$ 非负整数构成的序列, 且满足 $d = |\mathbf{a}|$。那么, 有

$$D_{\mathbf{a}} \cdot X_0^{a_0} X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} = \sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}} \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{s})\in K_A\times\overline{S_A}} C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}} (\ell_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}})^d \tag{3}$$

其中

$$D_{\mathbf{a}} = (-1)^{|Z_{\mathbf{a}}|}\cdot 2^n \cdot \binom{d}{\mathbf{a}} \cdot \prod_{i\notin Z_{\mathbf{a}}} F_i(t^{a_i})$$

and

$$C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}} = (-1)^{|A|}\cdot 2^{|A|}\cdot (-1)^{\sum_{i\notin A} a_i\cdot s_i} \prod_{i\in A} F_i(1) \prod_{i\notin A} c(y^{k_i}, F_i)$$

证明。

$$(\ell_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}})^d = \big(\sum_{i\notin A}(-1)^{s_i}t^{k_i}X_i\big)^d = \sum_{|\mathbf{b}|=d, A\subset Z_{\mathbf{b}}}\binom{d}{\mathbf{b}}\prod_{i\notin A}(-1)^{s_i\cdot b_i}(t^{k_i})^{b_i}X_i^{b_i}.$$

将等式右侧的　　及其系数和次数为 d 的单项式重写如下

$$\begin{aligned}
&\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}}\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{s})\in K_A\times\overline{S_A}} C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}\Big(\sum_{|\mathbf{b}|=d,A\subset Z_{\mathbf{b}}}\binom{d}{\mathbf{b}}\prod_{i\notin A}(-1)^{s_i\cdot b_i}(t^{k_i})^{b_i}X_i^{b_i}\Big)\\
&=\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}}\sum_{|\mathbf{b}|=d,A\subset Z_{\mathbf{b}}}\binom{d}{\mathbf{b}}\prod_{i\notin A}X_i^{b_i}\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{s})\in K_A\times\overline{S_A}} C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}\Big(\prod_{i\notin A}(-1)^{s_i\cdot b_i}(t^{k_i})^{b_i}\Big)\\
&=\sum_{|\mathbf{b}|=d}\binom{d}{\mathbf{b}}\prod_{i=0}^{n}X_i^{b_i}\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}},A\subset Z_{\mathbf{b}}}\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{s})\in K_A\times\overline{S_A}} C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}\Big(\prod_{i\notin A}(-1)^{s_i\cdot b_i}(t^{k_i})^{b_i}\Big)
\end{aligned}$$

Let

$$T_{\mathbf{b}} = \sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}},A\subset Z_{\mathbf{b}}}\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{s})\in K_A\times\overline{S_A}} C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}\Big(\prod_{i\notin A}(-1)^{s_i\cdot b_i}(t^{k_i})^{b_i}\Big)$$

then

$$\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}}\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{s})\in K_A\times\overline{S_A}} C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}(\ell_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}})^d = \sum_{|\mathbf{b}|=d}\binom{d}{\mathbf{b}}\cdot T_{\mathbf{b}}\cdot X_0^{b_0}X_1^{b_1}\cdots X_n^{b_n}$$

我们要证明，除 $\mathbf{b}\neq\mathbf{a}$ 和 $\binom{d}{\mathbf{a}}T_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{a}}$ 之外，所有 $T_{\mathbf{b}}=0$ 都满足这一点。

步骤 1

由于所有线性形式 $\ell_{A,\ \mathbf{k},\ \mathbf{s}}$ 都不含变量 X_i，且 $i\in Z_{\mathbf{a}}$，$T_{\mathbf{b}}=0$，对任意满足 $Z_{\mathbf{a}}\not\subset Z_{\mathbf{b}}$ 的 $\mathbf{b}$ 均成立。因此我们可以假设 $Z_{\mathbf{a}}\subset Z_{\mathbf{b}}$。这样我们就可以化简

$$T_{\mathbf{b}} = \sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{s})\in K_A\times\overline{S_A}} C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}\Big((-1)^{\sum_{i\notin A}s_i\cdot b_i}\prod_{i\notin A}(t^{k_i})^{b_i}\Big)$$

步骤 2

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{b}} = &\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}\sum_{\mathbf{k}\in K_A}\sum_{\mathbf{s}\in\overline{S_A}}\Big\{(-1)^{|A|}\cdot 2^{|A|}\cdot(-1)^{\sum_{i\notin A}a_i\cdot s_i}\cdot\prod_{i\in A}F_i(1)\prod_{i\notin A}c(y^{k_i},F_i)\\
&\cdot(-1)^{\sum_{i\notin A}b_i\cdot s_i}\prod_{i\notin A}(t^{k_i})^{b_i}\Big\}\\
=&\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}(-1)^{|A|}\cdot 2^{|A|}\cdot\prod_{i\in A}F_i(1)\cdot\Big\{\sum_{\mathbf{k}\in K_A}\prod_{i\notin A}c(y^{k_i},F_i)\prod_{i\notin A}(t^{k_i})^{b_i}\\
&\cdot\sum_{\mathbf{s}\in\overline{S_A}}(-1)^{\sum_{i\notin A}a_i\cdot s_i}(-1)^{\sum_{i\notin A}b_i\cdot s_i}\Big\}
\end{aligned}$$

根据引理 2.2,

$$\sum_{\mathbf{s}\in\overline{S_A}}(-1)^{\sum_{i\notin A}a_i\cdot s_i}(-1)^{\sum_{i\notin A}b_i\cdot s_i} = \sum_{\mathbf{s}\in\overline{S_A}}(-1)^{\sum_{i\notin A}(a_i+b_i)\cdot s_i} = \begin{cases}2^{n-|A|}, & a_i+b_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\text{ for all}\\ & i\notin A, i\neq\min\{i: i\notin A\}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

因为 $s_{\min\{i\notin A\}}=0$。令 δ为从 $\mathbb{Z}^2$到 $\{0,1\}$的映射，使得 $\delta(x,y)=\begin{cases}1,\\0,\end{cases}$当 $x\equiv y(\text{mod}2)$时；当 $x\not\equiv y$ (mod2)时

.

Then

$$\sum_{\mathbf{s}\in\overline{S_A}}(-1)^{\sum_{i\notin A}a_i\cdot s_i}(-1)^{\sum_{i\notin A}b_i\cdot s_i}=2^{n-|A|}\prod_{i\notin A,i\neq\min\{i:i\notin A\}}\delta(a_i,b_i)$$

因为 $i\in A\subset E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{a}}$、$a_i$和 b_i都是偶数。因此，$d=\sum_{i=0}^{n}a_i=\sum_{i=0}^{n}b_i$意味着 $\sum_{i\notin A}a_i\equiv\sum_{i\notin A}b_i$。所以，如果对于所有 $i\notin A$，a_i和 b_i的奇偶性相同，且 $i\neq\min\{i:\ i\notin A\}$，那么 $a_{\min\{i:i\notin A\}}$和$b_{\min\{i:i\notin A\}}$的奇偶性也相同。这意味着

$$\prod_{i\notin A,i\neq\min\{i:i\notin A\}}\delta(a_i,b_i)=\prod_{i\notin A}\delta(a_i,b_i)$$

由于 $2^{|A|}\cdot 2^{n-|A|}=2^n$与任何求和都无关，而 $\prod_{i\notin A}\delta(a_i,b_i)$仅取决于 A,

$$T_{\mathbf{b}}=2^n\cdot\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}(-1)^{|A|}\prod_{i\in A}F_i(1)\prod_{i\notin A}\delta(a_i,b_i)\Big\{\sum_{\mathbf{k}\in K_A}\prod_{i\notin A}c(y^{k_i},F_i)\prod_{i\notin A}(t^{k_i})^{b_i}\Big\}$$

步骤 3 令 $\{0,\dots,n\}\backslash A=\{i_1,i_2,\dots,i_p\}$，其中 $p=n+1-|A|$。则

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{k}\in K_A}\prod_{i\notin A}c(y^{k_i},F_i)\prod_{i\notin A}(t^{k_i})^{b_i}\\
&=\sum_{0\le k_{i_1}\le m_{i_1}}\sum_{0\le k_{i_2}\le m_{i_2}}\cdots\sum_{0\le k_{i_p}\le m_{i_p}}\prod_{j=1}^{p}c(y^{k_{i_j}},F_{i_j})(t^{k_{i_j}})^{b_{i_j}}\\
&=\sum_{0\le k_{i_1}\le m_{i_1}}c(y^{k_{i_1}},F_{i_1})(t^{k_{i_1}})^{b_{i_1}}\cdots\sum_{0\le k_{i_p}\le m_{i_p}}c(y^{k_{i_p}},F_{i_p})(t^{k_{i_p}})^{b_{i_p}}\\
&=\prod_{j=1}^{p}\sum_{0\le k_{i_j}\le m_{i_j}}c(y^{k_{i_j}},F_{i_j})(t^{k_{i_j}})^{b_{i_j}}=\prod_{i\notin A}\sum_{0\le k_i\le m_i}c(y^{k_i},F_i)(t^{k_i})^{b_i}\\
&=\prod_{i\notin A}\sum_{0\le k_i\le m_i}c(y^{k_i},F_i)(t^{b_i})^{k_i}
\end{aligned}$$

由于每个 F_i的次数都是 m_i，对于 $i\notin A$, $\sum_{0\le k_i\le m_i}c(y^{k_i},F_i)(t^{b_i})^{k_i}=F_i(t^{b_i})$。因此

$$T_{\mathbf{b}}=2^n\cdot\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}(-1)^{|A|}\prod_{i\in A}F_i(1)\prod_{i\notin A}F_i(t^{b_i})\prod_{i\notin A}\delta(a_i,b_i)$$

步骤 4

由于对于 $i\in E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}$, $F_i(t^{b_i})=F_i(1)$,

$$\prod_{i\in A}F_i(1)\prod_{i\notin A}F_i(t^{b_i})=\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}F_i(1)\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}F_i(t^{b_i}).$$

此外，由于对于 $i\in E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}$, a_i和 b_i都是偶数，$\prod_{i\notin A}\delta(a_i,b_i)=\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}\delta(a_i,b_i)$。因此，唯一剩下的取决于 A 的项是 $(-1)^{|A|}$。

$$T_{\mathbf{b}}=2^n\cdot\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}F_i(1)\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}F_i(t^{b_i})\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}\delta(a_i,b_i)\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}\cap Z_{\mathbf{b}}}(-1)^{|A|}$$

步骤 5

如果 $Z_{\mathbf{a}} \neq E_{\mathbf{a}} \cap Z_{\mathbf{b}}$，那么 $\sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}} \cap Z_{\mathbf{b}}} (-1)^{|A|} = (-1)^{|Z_{\mathbf{a}}|}(1-1)^{|E_{\mathbf{a}} \cap Z_{\mathbf{b}} \setminus Z_{\mathbf{a}}|} = 0$。这意味着$T_{\mathbf{b}} = 0$ 当 $Z_{\mathbf{a}} \neq E_{\mathbf{a}} \cap Z_{\mathbf{b}}$。

我们可以假设 $Z_{\mathbf{a}} = E_{\mathbf{a}} \cap Z_{\mathbf{b}}$。由于 $\sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}} \cap Z_{\mathbf{b}}} (-1)^{|A|} = (-1)^{|Z_{\mathbf{a}}|}$,

$$T_{\mathbf{b}} = (-1)^{|Z_{\mathbf{a}}|} \cdot 2^n \cdot \prod_{i \notin Z_{\mathbf{a}}} F_i(t^{b_i}) \prod_{i \notin Z_{\mathbf{a}}} \delta(a_i, b_i)$$

对于某个 $i \notin Z_{\mathbf{a}}$，如果 a_i 和 b_i 的奇偶性不同，那么 $\delta(a_i, b_i) = 0$，这意味着 $T_{\mathbf{b}} = 0$。

现在我们可以假设，对于所有 $i \notin Z_{\mathbf{a}}$，$a_i \equiv b_i$ (模 2)。假设存在一个指标 i，使得 $a_i \neq 0$ 且 $b_i = 0$。由于 a_i 和 b_i 具有相同的奇偶性，a_i 是偶数。这意味着 $i \in E_{\mathbf{a}}$ 和$i \in Z_{\mathbf{b}}$。但是 $i \in E_{\mathbf{a}} \cap Z_{\mathbf{b}} = Z_{\mathbf{a}}$ 与假设矛盾。这意味着 $Z_{\mathbf{a}} = Z_{\mathbf{b}}$。

如果 $a_i = 1$，那么 $b_i \neq 0$，因此 $b_i \geq a_i$。如果 $a_i = 2$，那么 $b_i \neq 0$ 且 $b_i \equiv 0$ (模 2)。因此 $b_i \geq 2 = a_i$。假设对于某个 $i \notin Z_{\mathbf{a}}$，$a_i > 2$ 且 $b_i < a_i$。那么，由于 a_i和 b_i具有相同的奇偶性，且 $0 < b_i < a_i$，对于某个 $1 \leq j \leq m_i = \lfloor \frac{a_i - 1}{2} \rfloor$，有 $b_i = a_i - 2j$。这意味着对于某个 $i \notin Z_{\mathbf{a}}$，$F_i(t^{b_i}) = \prod_{j=1}^{m_i} (t^{b_i} - t^{a_i - 2j}) = 0$。因此

$$T_{\mathbf{b}} = (-1)^{|Z_{\mathbf{a}}|} \cdot 2^n \cdot \prod_{i \notin Z_{\mathbf{a}}} F_i(t^{b_i}) = 0$$

因此，只有当所有 $i \notin Z_{\mathbf{a}}$ 都满足 $b_i \geq a_i$ 时，$T_{\mathbf{b}}$ 才非零。由于总次数 $\sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} a_i = d$ 相同，只有当所有 i 都满足 $b_i = a_i$ 时，$T_{\mathbf{b}}$ 才非零。

总之，

$$D_{\mathbf{a}} = \binom{d}{\mathbf{a}} \cdot T_{\mathbf{a}} = \binom{d}{\mathbf{a}} \cdot (-1)^{|Z_{\mathbf{a}}|} \cdot 2^n \cdot \prod_{i \notin Z_{\mathbf{a}}} F_i(t^{a_i})$$

□

使用 (3) 的分解中会出现多少个线性形式？若 $E_{\mathbf{a}} \neq \{0, \ldots, n\}$，定理 2.4 中线性形式的数量为

$$\begin{aligned}
&\sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} |K_A||\overline{S_A}| = \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} 2^{n-|A|} \prod_{i \notin A} (m_i + 1) = \frac{1}{2} \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} \prod_{i \notin A} 2(m_i + 1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} \prod_{i \notin E_{\mathbf{a}}} (a_i + 1) \prod_{i \notin A, i \in E_{\mathbf{a}}} (a_i) = \frac{1}{2} \prod_{i \notin E_{\mathbf{a}}} (a_i + 1) \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} \prod_{i \notin A, i \in E_{\mathbf{a}}} (a_i) \\
&= \frac{1}{2} \prod_{i \notin E_{\mathbf{a}}} (a_i + 1) \prod_{i \in E_{\mathbf{a}} \setminus Z_{\mathbf{a}}} (a_i + 1) = \frac{1}{2} \prod_{i \notin Z_{\mathbf{a}}} (a_i + 1).
\end{aligned}$$

若 $E_{\mathbf{a}} = \{0, \ldots, n\}$（即所有元素 a_i 都是偶数），则不应计入选择 $A = \{0, \ldots, n\}$，因为它没有对应的线性形式。因此，线性形式的总数可计算为

$$\frac{1}{2} \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \not\subset \{0, \ldots, n\}} \prod_{i \notin A} (a_i) = \frac{1}{2} (\prod_{i \notin Z_{\mathbf{a}}} (a_i + 1) - 1) \cdots (*).$$

由于在上述论证中，我们没有考虑集合 K_A 中各项因对应线性形式的非零缩放而产生的平移，因此数量（$*$）大于论文 [8] 中给出的上界。为解决这个问题，我们需要选择 k_i 个，而不是 K_A，它们来自

$$\overline{K_A} = \{(k_i)_{i \notin A} \mid k_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq k_i \leq m_i \text{ for } i \notin A, \min\{k_i\}_{i \notin A} = 0\},$$

它是平移下每个等价类的一组代表元。然后，根据定理 2.4，我们可以得到如下更优化的结果（即尽可能减少线性形式的数量）。

推论 2.5. 设 $\in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$a 是一个由 $n+1$ 非负整数构成的序列，且满足 $|\mathsf{a}| = d$。那么，我们有

$$D_{\mathbf{a}} \cdot X_0^{a_0} X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} = \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} \sum_{\mathbf{k} \in \overline{K_A}} \sum_{\mathbf{s} \in \overline{S_A}} \overline{C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}} (\ell_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}})^d \tag{4}$$

其中

$$D_{\mathbf{a}} = (-1)^{|Z_{\mathbf{a}}|} \cdot 2^n \cdot \binom{d}{\mathbf{a}} \cdot \prod_{i \notin Z_{\mathbf{a}}} F_i(t^{a_i})$$

and

$$\overline{C_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}} = \sum_{j=0}^{\min\{m_i - k_i\}_{i \notin A}} t^{d \cdot j} C_{A,\mathbf{k}+j\cdot\mathbf{1},\mathbf{s}} \ .$$

证明。由定理 2.4,

$$D_{\mathbf{a}} \cdot X_0^{a_0} X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} = \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} \sum_{\mathbf{g} \in K_A} \sum_{\mathbf{s} \in \overline{S_A}} C_{A,\mathbf{g},\mathbf{s}} (\ell_{A,\mathbf{g},\mathbf{s}})^d.$$

对于集合 (*A*, g,s)，其中 $Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}$,g $\in K_A$, s $\in \overline{S_A}$，令 $m = \min\{g_i\}_{i \notin A}$。于是

$$\ell_{A,\mathbf{g},\mathbf{s}} = \sum_{i \notin A} (-1)^{s_i} t^{g_i} X_i = t^m \big(\sum_{i \notin A} (-1)^{s_i} t^{g_i - m} X_i \big) = t^m \ell_{A,\mathbf{h},\mathbf{s}}$$

其中 h $= (g_i - m)_{i \notin A}$. 由于 $\min\{h_i\}_{i \notin A} = \min\{g_i\} - \min\{g_i\} = 0$, h $\in \overline{K_A}$。因此

$$\begin{aligned} &\sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} \sum_{\mathbf{g} \in K_A} \sum_{\mathbf{s} \in \overline{S_A}} C_{A,\mathbf{g},\mathbf{s}} (\ell_{A,\mathbf{g},\mathbf{s}})^d \\ &= \sum_{Z_{\mathbf{a}} \subset A \subset E_{\mathbf{a}}} \sum_{\mathbf{h} \in \overline{K_A}} \sum_{\mathbf{s} \in \overline{S_A}} \sum_{\substack{\mathbf{g} \in K_A, \\ \mathbf{g} - \min\{g_i\} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{h}}} C_{A,\mathbf{g},\mathbf{s}} (t^{\min\{g_i\}} \cdot \ell_{A,\mathbf{h},\mathbf{s}})^d, \end{aligned}$$

and

$$\sum_{\substack{\mathbf{g} \in K_A, \\ \mathbf{g} - \min\{g_i\} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{h}}} C_{A,\mathbf{g},\mathbf{s}} \cdot t^{\min\{g_i\} \cdot d} = \sum_{\mathbf{h} + m \cdot \mathbf{1} \in K_A} C_{A,\mathbf{h}+m\cdot\mathbf{1},\mathbf{s}} \cdot t^{m \cdot d} \ . \tag{5}$$

由于 h $+ m \cdot \mathbf{1} \in K_A$ 当且仅当 $0 \leq h_i + m \leq m_i$ 对 $i \notin A$,

$$0 = \max\{-h_i\}_{i \notin A} \leq m \leq \min\{m_i - h_i\}_{i \notin A} \ .$$

现在，求和式 (5) 变为

$$\sum_{m=0}^{\min\{m_i - h_i\}_{i \notin A}} C_{A,\mathbf{h}+m\cdot\mathbf{1},\mathbf{s}} \cdot t^{m \cdot d} =: \overline{C_{A,\mathbf{h},\mathbf{s}}} \ .$$

□

注 2.6（任意无限域 $\mathbb{k}$上的单项式的华林秩与分解）。我们想指出，推论 2.5 中的华林型恒等式给出了华林秩的上界:

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{k}}(M) \leq \frac{1}{2} \Big(\prod_{i=0}^{n} (a_i + 1) - \prod_{i=0}^{n} (a_i - 1) \Big) \ . \tag{6}$$

对于无限域 $\Bbbk$ 上的任意单项式 $M = X_0^{a_0}X_1^{a_1}\dots X_n^{a_n}$with $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$，与 [8] 中的方法相比，这种方式更为直接；也就是说，只需数出给定显式分解中的线性形式即可。这是因为式 (4) 中出现的线性形式总数为

$$\begin{aligned}
&\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}} |\overline{K_A}||\overline{S_A}| = \sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}} \left(\prod_{i\notin A}(m_i+1) - \prod_{i\notin A}(m_i)\right)\cdot 2^{n-|A|}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}} \left(\prod_{i\notin A} 2(m_i+1) - \prod_{i\notin A} 2(m_i)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}} \left(\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}}(a_i+1)\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\setminus A}(a_i) - \prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}}(a_i-1)\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\setminus A}(a_i-2)\right)\\
&= \frac{1}{2}\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}}(a_i+1)\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}}\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\setminus A}(a_i) - \frac{1}{2}\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}}(a_i-1)\sum_{Z_{\mathbf{a}}\subset A\subset E_{\mathbf{a}}}\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\setminus A}(a_i-2)\\
&= \frac{1}{2}\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}}(a_i+1)\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\setminus Z_{\mathbf{a}}}(a_i+1) - \frac{1}{2}\prod_{i\notin E_{\mathbf{a}}}(a_i-1)\prod_{i\in E_{\mathbf{a}}\setminus Z_{\mathbf{a}}}(a_i-1)\\
&= \frac{1}{2}\left(\prod_{i\notin Z_{\mathbf{a}}}(a_i+1) - \prod_{i\notin Z_{\mathbf{a}}}(a_i-1)\right),
\end{aligned}$$

这与上界（6）中的数量相同。

注 2.7（通过对偶性得到的线性形式 $\ell_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}$'s）。本文中线性形式 $\ell_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}$'s 的选取源自利用理想 $J_{\mathbf{a}}(t) \subset (x_0^{a_0+1},\dots,x_n^{a_n+1})$ 进行的对偶性，该方法首次在 [8] 中引入。实数域 $\Bbbk$ 上射影 n 空间中零点集合 $V(J_{\mathbf{a}}(t))$ 的每个点，都恰好确定本文中的一个线性形式 $\ell_{A,\mathbf{k},\mathbf{s}}$，精确到非零缩放。

例 2.8（ $X_0^4X_1^3X_2^2$ 的情形）。设 $\mathbf{a} = \{4,3,2\}$。那么 $Z_{\mathbf{a}} = \emptyset$, $E_{\mathbf{a}} = \{0,2\}$ 和 $m_0 = 1, m_1 = 1, m_2 = 0$。共有四种情形 $A \subset \{0,2\}$，其中 $A = \emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}$，且对每个 i，我们有

$$F_0 = (y-t^2), \quad F_1 = (y-t), \quad F_2 = 1\ .$$

(1) $A = \emptyset$。然后，我们得到

$$\begin{aligned}
K_A = \overline{K_A} &= \{(k_0,k_1,k_2) \mid 0 \leq k_0 \leq 1, 0 \leq k_1 \leq 1, 0 \leq k_2 \leq 0\}\\
&= \{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}\\
\overline{S_A} &= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}.
\end{aligned}$$

由 (k, s) 索引的线性形式和系数如下表所示

$\ell_{\emptyset,\mathbf{k},\mathbf{s}} =$

	$\mathbf{s} = 000$	001	010	011
$\mathbf{k} = 000$	$X_0+X_1+X_2$	$X_0+X_1-X_2$	$X_0-X_1+X_2$	$X_0-X_1-X_2$
010	$X_0+tX_1+X_2$	$X_0+tX_1-X_2$	$X_0-tX_1+X_2$	$X_0-tX_1-X_2$
001	$X_0+X_1+tX_2$	$X_0+X_1-tX_2$	$X_0-X_1+tX_2$	$X_0-X_1-tX_2$
011	$X_0+tX_1+tX_2$	$X_0+tX_1-tX_2$	$X_0-tX_1+tX_2$	$X_0-tX_1-tX_2$

$C_{\emptyset,\mathbf{k},\mathbf{s}} = (-1)^0\cdot 2^0\cdot 1\cdot$

	$\mathbf{s} = 000$	001	010	011
$\mathbf{k} = 000$	t^3	t^3	$-t^3$	$-t^3$
010	$-t^2$	$-t^2$	t^2	t^2
001	$-t$	$-t$	t	t
011	1	1	-1	-1

(2) $A=\{0\}$ 于是

$$\begin{aligned}K_A=\overline{K_A}&=\{(k_1,k_2)\mid 0\le k_1\le 1,0\le k_2\le 0\}\\&=\{(0,0),(1,0)\}\\\overline{S_A}&=\{(0,0),(0,1)\}.\end{aligned}$$

线性形式的 f 式和由 (k, s) $\in K_A\times\overline{S_A}$ 定义的系数如下表所示 s

$\ell_{\{0\},\,\mathbf{k},\,\mathbf{s}}=$

-	$\mathbf{s}=00$	01
$\mathbf{k}=00$	X_1+X_2	X_1-X_2
10	tX_1+X_2	tX_1-X_2

$C_{\{0\},\mathbf{k},\mathbf{s}}=(-1)^1\cdot 2^1\cdot(1-t^2)\cdot$

-	$\mathbf{s}=00$	01
$\mathbf{k}=00$	$-t$	$-t$
10	1	1

(3) $A=\{2\}$ 于是

$$\begin{aligned}K_A&=\{(k_0,k_1)\mid 0\le k_0\le 1,0\le k_1\le 1\}\\&=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\\\overline{K_A}&=\{(k_0,k_1)\mid 0\le k_0\le 1,0\le k_1\le 1,\min\{k_0,k_1\}=0\}\\&=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}\\\overline{S_A}&=\{(0,0),(0,1)\}.\end{aligned}$$

由 (k, s) $\in K_A\times\overline{S_A}$ 定义的线性形式和系数见下表

$\ell_{\{2\},\mathbf{k},\mathbf{s}}=$

-	$\mathbf{s}=00$	01
$\mathbf{k}=00$	X_0+X_1	X_0-X_1
01	X_0+tX_1	X_0-tX_1
10	tX_0+X_1	tX_0-X_1
11	tX_0+tX_1	tX_0-tX_1

$C_{\{2\},\ \mathbf{k},\ \mathbf{s}}=(-1)^1\cdot 2^1\cdot 1\cdot$

-	$\mathbf{s}=00$	01
$\mathbf{k}=00$	t^3	$-t^3$
01	$-t^2$	t^2
10	$-t$	t
11	1	-1

由于 $tX_0\pm tX_1$ 和 $X_0\pm X_1$ 表示相同的线性形式，因此 $X_0\pm X_1$ 的正确系数为 $\mp\overline{2(t^3+t^9)}$,

(4) $A=\{0,2\}$ 然后

$$\begin{aligned}K_A&=\{(k_1)\mid 0\le k_1\le 1\}\\&=\{(0),(1)\}\\\overline{K_A}&=\{(k_1)\mid 0\le k_1\le 1,\min\{k_1\}=0\}\\&=\{(0)\}\\\overline{S_A}&=\{(0)\}.\end{aligned}$$

由 (k, s) $\in K_A\times\overline{S_A}$ 定义的线性形式和系数如下表所示

$\ell_{\{0,2\},\mathbf{k},\mathbf{s}}=$

-	$\mathbf{s}=0$
$\mathbf{k}=0$	X_1
1	tX_1

$$C_{\{0,2\},\mathbf{k},\mathbf{s}} = (-1)^2 \cdot 2^2 \cdot (1-t^2) \cdot 1 \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \text{-} & \mathbf{s}=0 \\ \hline \mathbf{k}=0 & -t \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

由于线性形式 X_1 和 tX_1 表示相同的线性形式，因此线性形式 X_1 的适当系数$C_{\{0,2\},\,(0),\,(0)}$ 为 $4(1-t^2)(-t+t^9) = -4t^{11}+4t^9+4t^3-4t$。

最后，我们计算

$$D_{\{4,3,2\}} = 2^2 \cdot \binom{9}{4,3,2} \cdot (t^4-t^2)(t^3-t) = 5040t^3(t^2-1)^2 \ .$$

因此，恒等式 (4) 得出

$$\begin{aligned}
5040t^3(t^2-1)^2 X_0^4 X_1^3 X_2^2 &= t^3(X_0+X_1+X_2)^9 + t^3(X_0+X_1-X_2)^9 - t^3(X_0-X_1+X_2)^9 \\
&- t^3(X_0-X_1-X_2)^9 - t^2(X_0+tX_1+X_2)^9 - t^2(X_0+tX_1-X_2)^9 + t^2(X_0-tX_1+X_2)^9 \\
&+ t^2(X_0-tX_1-X_2)^9 - t(X_0+X_1+tX_2)^9 - t(X_0+X_1-tX_2)^9 + t(X_0-X_1+tX_2)^9 \\
&+ t(X_0-X_1-tX_2)^9 + (X_0+tX_1+tX_2)^9 + (X_0+tX_1-tX_2)^9 - (X_0-tX_1+tX_2)^9 \\
&- (X_0-tX_1-tX_2)^9 - 2(1-t^2)(-t)(X_1+X_2)^9 - 2(1-t^2)(-t)(X_1-X_2)^9 \\
&- 2(1-t^2)(tX_1+X_2)^9 - 2(1-t^2)(tX_1-X_2)^9 - 2(t^3+t^9)(X_0+X_1)^2 + 2(t^3+t^9)(X_0-X_1)^9 \\
&- 2(-t^2)(X_0+tX_1)^9 - 2t^2(X_0-tX_1)^9 - 2(-t)(tX_0+X_1)^9 - 2t(tX_0-X_1)^9 \\
&+ 4(1-t^2)(-t+t^9)X_1^9
\end{aligned}$$

并且除以 $D_{\{4,3,2\}} = 5040t^3(t^2-1)^2$ 后，我们最终得到

$$\begin{aligned}
X_0^4 X_1^3 X_2^2 = \frac{1}{5040}\Bigg[&\frac{1}{(t^2-1)^2}(X_0+X_1+X_2)^9 + \frac{1}{(t^2-1)^2}(X_0+X_1-X_2)^9 - \frac{1}{(t^2-1)^2}(X_0-X_1+X_2)^9 \\
&- \frac{1}{(t^2-1)^2}(X_0-X_1-X_2)^9 - \frac{1}{t(t^2-1)^2}(X_0+tX_1+X_2)^9 - \frac{1}{t(t^2-1)^2}(X_0+tX_1-X_2)^9 \\
&+ \frac{1}{t(t^2-1)^2}(X_0-tX_1+X_2)^9 + \frac{1}{t(t^2-1)^2}(X_0-tX_1-X_2)^9 - \frac{1}{t^2(t^2-1)^2}(X_0+X_1+tX_2)^9 \\
&- \frac{1}{t^2(t^2-1)^2}(X_0+X_1-tX_2)^9 + \frac{1}{t^2(t^2-1)^2}(X_0-X_1+tX_2)^9 + \frac{1}{t^2(t^2-1)^2}(X_0-X_1-tX_2)^9 \\
&+ \frac{1}{t^3(t^2-1)^2}(X_0+tX_1+tX_2)^9 + \frac{1}{t^3(t^2-1)^2}(X_0+tX_1-tX_2)^9 - \frac{1}{t^3(t^2-1)^2}(X_0-tX_1+tX_2)^9 \\
&- \frac{1}{t^3(t^2-1)^2}(X_0-tX_1-tX_2)^9 - \frac{2}{t^2(t^2-1)}(X_1+X_2)^9 - \frac{2}{t^2(t^2-1)}(X_1-X_2)^9 \\
&+ \frac{2}{t^3(t^2-1)}(tX_1+X_2)^9 + \frac{2}{t^3(t^2-1)}(tX_1-X_2)^9 - \frac{2(t^6+1)}{(t^2-1)^2}(X_0+X_1)^2 + \frac{2(t^6+1)}{(t^2-1)^2}(X_0-X_1)^9 \\
&+ \frac{2}{t(t^2-1)^2}(X_0+tX_1)^9 - \frac{2}{t(t^2-1)^2}(X_0-tX_1)^9 + \frac{2}{t^2(t^2-1)^2}(tX_0+X_1)^9 - \frac{2}{t^2(t^2-1)^2}(tX_0-X_1)^9 \\
&- \frac{4(t^2+1)(t^4+1)}{t^2}X_1^9\Bigg] \ ,
\end{aligned}$$

这给出了 $X_0^4X_1^3X_2^2$ 的一维 Waring 分解族（即对于所有满足 $5040t^3(t^2-1)^2 \neq 0$ 的 $t \in \Bbbk$），该分解有 $12(5\cdot 4\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 1)$ 个 $= 27$ 加项。

3. Case of arbitrary homogeneous form

在本节中，我们考察第 2 节结果的一些推论。由于 $\Bbbk[X_0,\dots,X_n]$ 上的齐次形式可以写成同次数单项式的 $\Bbbk$-线性组合，

根据我们此前对单项式的分解，自然可以得到一族具有 $\Bbbk$ 系数的任意齐次多项式的显式 Waring 分解。对于给定次数的形式，求出其线性形式幂和表示，在数学的许多领域都十分重要。例如，当 $\Bbbk=\mathbb{Q}$ 时，这与在有理单纯形上对多项式函数进行积分的问题密切相关；该问题对于离散优化、数值分析中的有限元方法以及代数统计计算等应用都至关重要（例如参见 [2, 第 1] 节及其中的参考文献）。关于这一积分问题的计算复杂度，Waring 分解可用于构造多项式时间算法，以计算满足某些固定约束的多项式的积分（参见 [2, 3.3、3.4]）。下面简要回顾他们结果中的一些方面。

设 Δ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一个 k 维有理单纯形，且 $f\in\mathbb{Q}[X_0,\dots,X_n]$ 是一个系数为有理数的齐次多项式。为了计算 $\int_\Delta f\mathrm{d}m$，其中 $\mathrm{d}m$ 是单纯形仿射包 $\langle\Delta\rangle$ 上的积分勒贝格测度（精确定义见 [2, 2.1]），我们回顾 M. Brion 给出的一个有用公式如下。

命题 3.1.（Brion）设 Δ 是由（$k+1$ 个）仿射无关顶点 $\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2,\dots,\mathbf{s}_{k+1}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中构成的凸包单纯形。设 ℓ 是一个关于 Δ 正则的线性形式，即 $\langle\ell,\mathbf{s}_i\rangle\neq\langle\ell,\mathbf{s}_j\rangle$ 对任意一对 $i\neq j$ 均成立。那么我们有以下关系

$$\int_\Delta \ell^D\mathrm{d}m = k!\ \mathrm{vol}(\Delta,\mathrm{d}m)\frac{D!}{(D+k)!}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\langle\ell,\mathbf{s}_i\rangle^{D+k}}{\prod_{j\neq i}\langle\ell,\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_j\rangle}\right). \tag{7}$$

注意，即使 ℓ 不正则，积分仍存在类似的留数和展开（例如参见 [2, 推论 13]）。

因此，一旦我们将多项式表示为有理线性形式的幂之和，积分便可立即得到。对该和式中有理线性形式的数量进行界定，并找出其全部的 $\mathbb{Q}$-系数，是计算多项式在有理单纯形上积分的计算复杂度所涉及的主要问题之一。

现在，让我们考虑给定有理 Waring 分解中的加项数量，其中f_{gen}是 $(n+1)$-变量的一个次数为 D 的一般齐次多项式（这里，我们所说的“一般”形式，是指包含所有总次数为 D的单项式的形式）。

在 [2], 中，作者使用了以下众所周知的恒等式。从华林秩的角度来看，该恒等式略显朴素，作者借此考察了 f_{gen}的有理分解，

$$X_0^{a_0}X_1^{a_1}\cdots X_n^{a_n}=\frac{1}{D!}\sum_{0\le p_i\le a_i}(-1)^{D-(p_0+\cdots+p_n)}\binom{a_0}{p_0}\cdots\binom{a_n}{p_n}(p_0X_0+\cdots+p_nX_n)^D\ , \tag{8}$$

其中，$=(a_0,\dots,a_n)$，且 $D=|\mathbf{a}|=a_0+\cdots+a_n$。为了正确计算加项的数量，应当将 f_{gen}的整个分解中成比例的线性形式归为一组。本原向量的概念（即 $(p_0,\dots,p_n)\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}$，其中 $\gcd(p_0,\dots,p_n)=1$）恰好刻画了这一数量。设 $F(n,D)$ 表示使用（8）对 f_{gen} 进行有理 Waring 分解时的最少项数。于是，[2, 中的引理 16] 表明，$F(n,D)$ 等于 9
( )

$$|\{(p_0,\dots,p_n)\in\mathbb{Z}^n_{\ge0},\gcd(p_0,\dots,p_n)=1,1\le\sum_i p_i\le D\}|=\sum_{d=1}^{D}\mu(d)\cdot\left(\binom{n+1+\lfloor\frac{D}{d}\rfloor}{n+1}-1\right)\ ,$$

其中 μ 是 M¨ Möbius 函数。

现在，让我们估算在变量数固定时，总次数不断增加的情况下这个数值。随着 D 变大而 n 固定，根据 (9)，$F(n,D)$ 的渐近行为可计算为

$$F(n,D)=\frac{\delta(n,D)}{(n+1)!}D^{n+1}+O(D^n)\ , \tag{10}$$

其中 $\delta(n,D) = \sum_{d=1}^{D} \mu(d)\,\overline{d^{n+1}}$。由于生成莫比乌斯函数的狄利克雷级数是黎曼ζ函数 $\zeta(s)$ 的倒数，且当 $Re(s) > 1$ 时收敛，因此我们看到，在此情形下，当 $D \to \infty$ 时， $\delta(n,D) \to \zeta^{-1}(n+1)$，而 $F(n,D)$ 的渐近阶为 D^{n+1}。

另一方面，若通过逐一考虑 f_{gen} 的每个单项式求和项，并应用我们的结果——即推论 2.5——来研究其有理 Waring 分解，那么渐近表示该多项式所需的线性形式会少得多。令 $K(n,D)$ 表示通过 (4) 得到的 f_{gen} 的有理 Waring 分解中的最少项数。

定理3.2. 设 $n \geq 1, D \geq 1$ 为正整数，且 $K(n,D)$ 如上所述。则有以下公式

$$K(n,D) = \sum_{r=1}^{n+1} \left\{ \binom{\lfloor \frac{D-r}{2} \rfloor + r}{r} - \binom{\lfloor \frac{D-r}{2} \rfloor}{r} \right\} \cdot 2^{r-1} \cdot \binom{n+1}{r}. \tag{11}$$

特别地，当 n 固定且 $D \to \infty$ 时，我们有

$$K(n,D) = \frac{n+1}{n!} D^n + O(D^{n-1}) \ , \tag{12}$$

其渐近阶为 D^n 。

证明. 令 $L_{\{i_1,\ldots,i_r\}}$ 为通过 (4) 得到的 f_{gen} 的 Waring 分解中出现的所有线性形式所构成的集合，其中 $L_{\{i_1,\ldots,i_r\}}$ 的每个成员都具有 $\lambda_1 X_{i_1} + \lambda_2 X_{i_2} + \cdots + \lambda_r X_{i_r}$ 的形式，其中某个 λ_u 为非零。于是，由推论 2.5 的证明可得

$$L_{\{i_1,\ldots,i_r\}} := \left\{ \sum_{j=1}^{r} (-1)^{s_{i_j}} t^{k_{i_j}} X_{i_j} \mid \sum_{j=1}^{r} a_{i_j} = D,\ 0 \leq k_{i_j} \leq m_{i_j} = \lfloor \frac{a_{i_j}-1}{2} \rfloor \right.$$
$$\left. , \min\{k_{i_j}\} = 0,\ s_{i_j} \in \{0,1\},\ \text{and } s_{i_1} = 0 \right\} .$$

在这个集合中，每个 $(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_r})$ 都应满足以下不等式

$$0 \leq \sum_{j=1}^{r} k_{i_j} \leq \sum_{j=1}^{r} m_{i_j} = \sum_{j=1}^{r} \lfloor \frac{a_{i_j}-1}{2} \rfloor \ \cdots \ (**)$$

并且注意，当 a_{i_p} 和 a_{i_q} 都是偶数时，$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$ 和 $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}-1, \ldots, a_{i_q}+1, \ldots, a_{i_r}\}$ 满足（$**$）的 k_{i_j} 的 r 元组相同。因此，我们可以假设 a_{i_j} 中至多有一个是偶数。若 $D \equiv r$（模 2）且所有 a_{i_j} 都是奇数，则 $\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{a_{i_j}-1}{2} = \frac{D-r}{2}$。若 $D \not\equiv r$（模 2）且除一个之外所有 a_{i_j} 都是奇数，则 $\sum_{j=1}^{r} m_{i_j} = \frac{D-r-1}{2}$ 。因此，对于给定的 D，我们得到

$$L_{\{i_1,\ldots,i_r\}} := \left\{ \sum_{j=1}^{r} (-1)^{s_{i_j}} t^{k_{i_j}} X_{i_j} \mid 0 \leq \sum_{j=1}^{r} k_{i_j} \leq \lfloor \frac{D-r}{2} \rfloor, \min\{k_{i_j}\} = 0, s_{i_j} \in \{0,1\},\ \text{and } s_{i_1} = 0 \right\}$$

因此， $L_{\{i_1,\ldots,i_r\}}$ 中元素的个数如下

$$|L_{\{i_1,i_2,\ldots,i_r\}}| = \left| \left\{ (k_{i_j}) \mid 0 \leq \sum_{j=1}^{r} k_{i_j} \leq \lfloor \frac{D-r}{2} \rfloor, \min\{k_{i_j}\} = 0 \right\} \right| \cdot \left| \left\{ (s_{i_j}) \mid s_{i_j} \in \{0,1\},\ \text{and } s_{i_1} = 0 \right\} \right|$$
$$= \left\{ \binom{\lfloor \frac{D-r}{2} \rfloor + r}{r} - \binom{\lfloor \frac{D-r}{2} \rfloor}{r} \right\} \cdot 2^{r-1} \ .$$

最后，将 $\binom{n+1}{r}$ 乘以指标 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{0, \ldots, n\}$ 的所有可能取值，即可得到方程（11）。

当固定 n 并增大 D 时，在 $r = n+1$ 的情况下， D 的最高次幂便会出现。因此，我们估计为

$$\begin{aligned} K(n,D) &\approx \left\{ \binom{\frac{D-(n+1)}{2}+n+1}{n+1} - \binom{\frac{D-(n+1)}{2}}{r} \right\} \cdot 2^n \cdot \binom{n+1}{n+1} = \left\{ \binom{\frac{D+(n+1)}{2}}{n+1} - \binom{\frac{D-(n+1)}{2}}{r} \right\} \cdot 2^n \\ &= \left(\frac{D^{n+1} + (n+1)^2 D^n + O(D^{n-1})}{2^{n+1}(n+1)!} - \frac{D^{n+1} - (n+1)^2 D^n + O(D^{n-1})}{2^{n+1}(n+1)!} \right) \cdot 2^n \\ &= \frac{n+1}{n!} D^n + O(D^{n-1}) \ , \end{aligned}$$

where 渐近阶为 D^n，在 $F(n,D)$ 的情形下优于 D^{n+1} . □

注 3.3. 我们对上述定理作几点说明。

(a) 公式 (11) 为任意有理齐次多项式的 $\mathbb{Q}$-华林秩给出了一个新的上界。遗憾的是，从渐近意义上看，这个上界并不优于朴素上界 $\binom{D+n}{n}$，后者由维数 $\dim \mathbb{Q}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ 得出。不过，后一种方法无法给出幂和分解的显式线性形式及其系数（请记住，为了求出它们，需要进行大量计算），而我们的方法确实给出了一个完全确定的（！）幂和分解。

(b) 注意，由 (10) 和 (12) 可知，在上述渐近表达式中， $F(n,D)$ 与 $K(n,D)$ 的阶不同（显著差异也见表 1 中的 $F(n,D)$ 与 $K(n,D)$ ）。

(c) 在 [3] 作者还给出了任意单项式在复数域 $\mathbb{C}$上的 Waring 分解，其系数是确定的。由于其秩优于界（2），因此，对于任意齐次形式的分解，采用他们的分解方法肯定优于通过（4）的方法。但是，值得注意的是，他们的系数公式在大多数情况下确实会出现复数（！），这严重限制了该方法在实数或有理数上应用的可行性。

(n, D)	(2, 10)	(2,50)	(2,100)	(3,10)	(3,50)	(3,100)	(5,30)	(5,50)	(5,100)
$F(n, D)$	205	18,970	144,871	831	286,893	4,207,287	1,884,921	31,651,125	1,669,982,466
$K(n, D)$	133	3,613	14,713	696	83,416	666,816	1,305,092	16,001,276	502,701,736

TABLE 1. 基于 [2] 中先前已知的方法（8）和本文中的方法（4），比较关于 $n+1$ 个变量上的 D 次一般齐次多项式 f_{gen}的两种华林分解的加项数目

4. MACAULAY2 CODE FOR THE DECOMPOSITIONS

最后，我们给出一段 MACAULAY2[10] 代码，用于计算第 2 节中关于任意给定单项式的华林型多项式恒等式，并以 $X_0^4 X_1^3 X_2^2$（即例 2.8 中的情形）为例运行该代码。

```
+M2 —不–读取行 —打印–宽度 79
Macaulay2，版本 1.17
使用以下程序包：康威多项式、消元、整闭包、逆系统、LLL 基、极小素理想、素分
解、Rees 代数、饱和、切锥
```

```
i1:  --对于给定序列a，找出所有满足Akslister=method();的三元
组(A, k, s)

i2:Akslister(List):=a->(n:=#a-1; Akslist:={}; E:=for i from 0 to n list if(偶
数(ai)) then i else continue; Z:=for i from 0 to n list if(ai==0) then i else cont
inue; Alist0:=subsets(toList(set(E)-set(Z))); Alist:=for i from 0 to #A
ist0-1listsort(Z|Alist0i); for i1 from 0 to #Alist-1do if(#(Alisti1)!=n+1)
then(A:=Alisti1; notInA:=sorttoList(set(0..n)-set(A)); KA:=toList((for
i from 0 to #notInA-1list0)..(for i from 0 to #notInA-1listfloor((a(notIn Ai)
-1)/2))); KAbar:=for i from 0 to #KA-1list if(最小值(KAi)==0) then KAi else cont
inue; SA:=toList((for i from 0 to #notInA-1list0)..({0}|for i from 1 to #
notInA-1list1)); for i2 from 0 to #KAbar-1 do(kk:=KAbar i2; for i3 from 0 to #SA-1
do(ss:=SA i3; Akslist=append(Akslist, {A, notInA, kk, ss}))))else continue; Akslist);
```

```
i3:  --对于给定的三元组(A, k, s)，求线性形式l{A, k, s}linform=
method();

i4:linform(环, List):=(R, Aks)->((A, notInA, kk, I):=
toSequence(Aks); bR:=baseRing(R); t0:=sub(2,R);
if(生成元个数bR!=0) then t0=bR0; sum for i from 0 to #
notInA-1list(-1)^(Ii)*(t0)^(kki)*R(notInAi));

i5:  --对于给定的单项式，找出所有线性形式
```

线性形式=方法（）；

```
i6:linforms(环元素):=(mon)->(R:=ring mon;a:=(exponents mon)0;Akslist:=Akslister(a);for i from 0 to #Akslist-1 listlinform(R,Akslisti));
```

```
i7: --对于给定的序列a, 查找FiFlist=方法
();
```

```
i8:Flist(List,环,整数环):=(a,S,ind)->(mind:=floor((aind-1)/2);bS=baseRing(S);t0:=sub(2,S);if(生成元个数bS!=0) then t0=bS0;if(mind<=0) then sub(1,S) else sub(productfor i from 1 to mind listS 0-(t0)^(aind-2*i),S));
```

```
i9: --对于给定的数对(A,k,s), 求系数C {A,k,s}cfs=method();
```

```
i10:cfs(List,环,List):=(a,R,Aks)->((A,notInA,kk,ss):=toSequence(Aks); bR:=baseRing(R); S:=bR[Y]; C1:=(-2)^(#A)*productfor i from 0 to #A-1 list sub(Flist(a,S,Ai),sub(matrix{{1}},bR)); C2:=productfor i from 0 to #notInA-1 list sub(coefficient((S0)^(kki),Flist(a,S,notInAi)),bR); C3:=sub((-1)^(sum for i from 0 to #ss-1 list a(notInAi)*ssi),bR); C1*C2*C3);
```

```
i11: --对于给定的数对(A,k,s), 求一个主系数C {A,k,s}pcfs=方法();
```

```
i12:pcfs(列表,环,列表):=(a,实数域,Aks)->((A,notInA,kk,ss):=toSequence(Aks);bR:=baseRing(R);t0:=sub(2,R);
```

```
    if(生成元个数bR!=0) then t0:=bR0; sum for j from 0 to 最小值(for i
    from 0 to #notInA-1 list floor((a(notInA i)-1)/2) -kki) list(t0)^(j *
    (sum a)) *cfs(a, 实数域, {A, notInA, kk+(for i from 0 to #notInA-1 list j),
    ss})));
```

i13: --对于给定的单项式，查找系数 Da D:=method();

i14: D(环元素):=(mon)->(a:=(单项式的指数)0; R:=环 mon; bR:=基础环(R); S:=bR[Y]; t0:=
sub(2,R); if(生成元个数bR!=0) then t0:=bR0; Z:=for i from 0 to #a-1 list if(ai ==0) then iel
se continue; sub((-1)^(#Z)*2^(#a-1) *((sum a)!/(product for i from 0 to #a-1 list(ai

```
    (product for i from 0 to #a-1 list sub(Flist(a,S,i),
    matrix{{t0^(ai)}})),b 实数域);
```

i15: --对于给定的单项式，求出所有系数 coeffs:=method();

i16: coeffs(环元素):=(mon)->(实数域:=ring mon; a:
=(exponents(mon))0; pl:=Akslister(a); for i
from 0 to #pl -1 list pcfs(a, 实数域, pli));

i17: --测试多项式:=X0^4 X1^3 X2^2
--环 over a 分式域 有理数域[t]
T:=有理数域
有理数域[t]

o17 =T

o17 : 多项式Ring

i18 : fT:=frac T

o18 =fT

o18 : 分式域

i19 : 实数域=fT [X0..X 2]

o19 =实数域

o19 : 多项式环

i20 : m=X0^4*X1^3*X2^2

4 3 2
o20 = XXX
0 1 2

o20 : R

i21 : —与 mls=linformsm(m) 相关的线性形式;

i22 : —与 mcs=coeffsm(m) 相关的对应系数;

i23 : —检查推论的右端和左端是否相等 rhs=sum for i from 0 to #cs −1 list csi *(lsi)^((degree m)0)

7 5 3 4 3 2
o23 =(5040t − 10080t + 5040t)XXX
0 1 2

o23 : 实数域

i24 : 左边=D(m)*m

7 5 3 4 3 2
o24 =(5040t − 10080t + 5040t)XXX
0 1 2

o24: 实数域

i25 : lhs==rhs

o25 =true

Acknowledgments

第一作者获得韩国科学技术信息通信部资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号: 2021R1F1A104818611）的支持，第二作者获得韩国高等研究院（KIAS）的KIAS个人资助（MG083101）。

References

[1] J. Alexander 和 A. Hirschowitz, *Polynomial interpolation in several variables* 4 1995 2, , 《代数几何杂志》, 201, 222（）, 第 – 期。[2] Baldoni, V.、Berline, N.、De Loera, J.、K¨oppe, M. 和 Vergne, M., *How to integrate a polynomial over a simplex*, 《计算数学》, 80（第273期）, 297–325（2011）。[3] W. Buczy´nska、J. Buczy´nski、Z. Teitler, *Waring decompositions of monomials*, 《代数杂志》378, 45–57（2013）。[4] M. Boij、E. Carlini、A. V. Geramita, *Monomials as sums of powers: the real binary case*, 《美国数学会会刊》139, 3039–3043（2011）。[5] E. Carlini、M. V. Catalisano、A.V. Geramita, *The solution to Waring's problem for monomials and the sum of coprime monomials* 370, 5 14 2012 , 《代数杂志》– （）。[6] E. Carlini、M. Kummer、A. Oneto 和 E. Ventura, *On the real rank of monomials*, 《数学杂志》286（2017）, 571–577。[7] C. J. Hillar 和 L.-H. Lim, *Most tensor problems are NP-hard*, 《美国计算机学会杂志》60（6）（2013）, 1–39。[8] K. Han 和 H. Moon, *A New Bound for the Waring Rank of Monomials*, 《工业与应用数学学会应用代数与几何杂志》6（3）（2022）, 407–431。[9] A. Iarrobino 和 V. Kanev, *Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci*, 《数学讲义》第1721卷, 施普林格出版社, 柏林, 附录C由 Iarrobino 和 S.L. Kleiman 撰写, 1999。[10] D. R. Grayson 和 M. E. Stillman, Macaulay 2, *a software system for research in algebraic geometry*, http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。

Kangjin Han, School of Undergraduate Studies, Daegu-Gyeongbuk Institute of Science & Technology (DGIST), Daegu 42988, Republic of Korea*Email address*: kjhan@dgist.ac.kr

Hyunsuk Moon, School of Mathematics, Korea Institute for Advanced Study (KIAS), Seoul 02455, Republic of Korea*Email address*: hsmoon87@kias.re.kr, mhs@kaist.ac.kr