arXiv:2301.03181v1 [math.QA] 9 Jan 2023

组合 Fock 空间与量子对称对

MICHAEL EHRIG 和 Kaixuan Gan

Abstract. 构造量子化仿射代数 $\hat{U}_v(\mathfrak{sl}_\ell)$ 的自然表示的一种方法，是通过 Misra 和 Miwa 引入的变形福克空间。当 q 为单位根时，这将 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ 的 Weyl ˆ 模的等价类与 $U_v(\mathfrak{sl}_\ell)$ 在 N 趋于无穷大时的作用联系起来。本文研究类型 A之外的情形。在经典类型中，我们构造有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模的格罗滕迪克群到不同电荷的福克空间中的嵌入，并定义一个仿射量子对称对的作用，以发挥量子化仿射代数的作用。我们说明该作用如何与单位根处量子群的链结原理及张量积分解重数相关联。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 福克空间、仿射 Weyl 群与量子对称对 7 4. C 型 12 5. B 型 19 6. D 型及其他 28 参考文献 30

1. Introduction

零荷福克空间 $\mathbf{F}_0$ 源于数理物理。在表示论中，它为仿射卡茨–穆迪代数（例如 [Kac90，第 14] 章）的表示提供了一种特别优美的实现。其基由所有分拆标记，基元素可以自然地解释为 $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ 的不可约有限维最高权模 $L(\lambda)$ 的类；当 N趋于无穷时，这些模具有支配多项式最高权。一个重要步骤是考虑 $\mathcal{F}_0 = \mathbf{F}_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(v)$，即 $\mathbf{F}_0$ 的 $\mathbb{Q}(v)$-形变。本文以下各处， v 均为不定元。在这种情况下，Misra 和 Miwa[MM90], 遵循 Hayahsi [Hay90] 的工作，定义了量子化泛包络代数 $U_v(\mathfrak{sl}_\ell)$ 在 $\mathcal{F}$上的作用。这种作用的形式特别优美：一个切瓦莱生成元作用于一个分拆所得的像，其系数是 v中的单项式，且这些单项式易于组合描述。

反过来 $\mathcal{F}_0$ 可以通过仿射赫克代数实现，由此获得依赖于参数 ℓ 的 KL-模结构。这引出了第二个自然基，即卡兹丹–卢斯提格基。现在采用这样的观点：分拆的标准基对应于量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ 在 2ℓ' 的单位根处特化且 N 趋于无穷时的韦伊模 $\Delta_q(\lambda)$ 的类。卡兹丹–卢斯提格基对应于单位根情形下单模的类，而两个基之间的过渡矩阵在 1 处的取值给出了模的重数，这些重数由抛物仿射卡兹丹–卢斯提格模的取值表示，见 [LT00]。从李理论的角度来看，切瓦莱生成元作用的系数可以与 Shapovalov 行列式联系起来

如 [RT10] 所示。请注意，此处以及本文其余部分中，$\mathfrak{q}$ 是一个阶为 ℓ 的单位根，且 $\mathfrak{q}^2$ 。

组合 Fock 空间在 [LRS19] 中定义。经过标量扩张后，它与 $U_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{g})$ 的有限维表示的格罗滕迪克群同构，其中 $\mathfrak{g}$ 是任意有限维半单复李代数。该空间自然带有一个基，其元素对应于支配权，或通过上述同构对应于 Weyl 模的类。根据所采用的序， [LRS19] 在该空间上建立了 KL-模结构。这进而给出一个 Kazhdan–Lusztig 型基，对应于单模的类，其过渡矩阵由抛物仿射 Kazhdan–Lusztig 多项式给出。在 A_N 型中，随着 N 增大，这些 Fock 空间模型可以彼此嵌入，并在直极限中得到上文所述的空间 $\mathcal{F}_0$ 。

本文在以下意义上对这一框架作了推广。对于 A 型以外的情形，我们将组合 Fock 空间嵌入传统 Fock 空间中，后者起到 $\mathcal{F}_0$ 的作用。这是通过某些序列的组合学实现的；这些序列是 A 型中杨表的一种自然推广。随后，我们在该 Fock 空间上定义一个与 $U_v(\mathfrak{sl}_\ell)$ 相关的仿射量子对称对ˆ的作用。此类代数在非仿射情形下已有研究和分类（见 [Let02] 和 [Let03]），在 Kac–Moody 框架下也有研究（见 [Kol14]）。这一作用与单位根处量子群的链结原理相容，并描述了 Weyl 模的某些张量积分解重数，其方式类似于量子仿射代数在 A 型中的作用。粗略地说，生成元的作用在格罗滕迪克群中描述了平移函子作用于某个 Weyl 模所得的像；该平移函子是通过与 $\mathfrak{g}$ 的固定秩对应的“自然”表示取张量积而给出的。

本文结构如下。第 2 节回顾量子群权组合所需的定义、[LRS19], 中组合 Fock 空间的定义，以及关于单位根处量子群及其表示论的一些事实。第 3 节将类型 A 情形下 $\mathcal{F}_0$ 的类似物组合地定义为某类序列构成的空间，并介绍之后所需的大部分序列组合学。我们简要回顾以这些组合学语言表述的类型 A 情形。我们还介绍之后所需的仿射 Weyl 群和余室组合学的一些概念，以及在类型 A之外起作用的仿射量子对称对。第 4 节研究类型 C 情形。这是最简单、复杂性最少的情形。我们首先将组合学专门化到这一情形，然后把福克空间上的线性算子与类型 C 中的链结原理联系起来，接着定义仿射量子对称对的作用（定义 4.8）。定理 4.12 描述了该作用与张量积分解重数之间的关系，而命题 4.14 则讨论了此处令 N 趋于无穷的类似情形。第 5 节沿用相同结构，但研究的是类型 B。请注意，此处必须区分 ℓ 为偶数和 ℓ 为奇数的情形。作用的定义见定义 5.9 和定义 5.22。与张量积分解重数的关系分别由定理 5.14、5.15、5.24 和 5.25 讨论。对于 ℓ 为奇数的情形，令 N 趋于无穷的情况在命题 5.16 中及其之前有所描述。对于 ℓ 为偶数的情形，可以用类似方式推导相同结果。最后，第 6 节概述如何将这一构造应用于类型 D ，并说明相应结果的形式。我们还进一步说明本文为何未对该构造作完整详尽的阐述。

致谢。感谢 Daniel Tubbenhauer 提出的意见和建议。本研究得到国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12050410261。

2. Preliminaries

本部分回顾所涉及的三个主要对象的基本定义：半单李代数的权组合、组合 Fock 空间，以及与非例外复半单李代数相对应的单位根处的量子群。全文中，我们使用一个整数 ℓ，它是第 2.3 节中单位根的阶。一般而言，我们假设

$$\ell > 3.$$

这样做是为了避免量子对称对在 ℓ较小时出现特殊情形。

2.1. 李代数与权组合。我们固定 $\mathfrak{g}$ 一个有限维半单复李代数。在下文中，我们只关注非例外情形。因此，从现在起，我们假设 $\mathfrak{g}$为 A_N、 B_N、 C_N或 D_N型。下文中，我们用 X_N 表示这一类型。为避免处理低秩情形下的各种同构，我们假设 $N > 1$ 为 B_N型， $N > 2$ 为 C_N 型，且 $N > 3$ 为 D_N 型。

注 2.1. 第 4 节和第 5 节之外的所有构造都可以推广到例外李代数。我们将在第 6 节进一步说明为何将讨论范围限制在经典情形。

固定一个卡当子代数 $\mathfrak{h}$ 和一个包含 $\mathfrak{h}$的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$。选定 $\mathfrak{h}$ 后，我们用 Φ 表示 $\mathfrak{g}$ 的根系，用 Φ^+ 表示相对于 $\mathfrak{b}$的正根。我们用 W 表示对应于 $\mathfrak{g}$的 Weyl 群。固定一个非退化的 W-不变双线性形式 $(-,-)$： $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$。对于 $\alpha \in \Phi^+$，相应的余根定义为 $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$。我们将 Φ^+ 中的单根标记为 α_1、……、 α_N。整权格记作

$$X = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}, \text{ for } \alpha \in \Phi^+\}.$$

满足 $(\omega_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ 的元素 $\omega_i \in X$ 称为基本权。在权格中，我们固定支配权集合

$$X^+ = \{\lambda \in X \mid (\lambda, \alpha^\vee) \geq 0, \text{ for } \alpha \in \Phi^+\}.$$

在 X 上有 Weyl 群 W 的作用，其反射 s_α 由 $s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha$ 给出，其中 $\alpha \in \Phi^+$。

2.2. 组合 Fock 空间。固定元素 $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$ 以及 ρ-移位支配权集合 $X_\rho^+ = X^+ + \rho$。我们用 $\mathbb{Q}(v)$ 表示 $\mathbb{Q}$ 上的有理函数。

按照 [LRS19，第 1 节1],，类型为 X_N 的组合 Fock 空间 $\mathcal{F}(X_N)$ 是一个以 $\{\underline{\lambda} = \lambda + \rho \mid \lambda \in X^+\}$ 为基的$\mathbb{Q}(v)$-向量空间。

注 2.2. 在 [LRS19] 中，Fock 空间最初定义为由以 X 为指标的元素生成的 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-模，并满足某些关系；但 [LRS19，定理 1.1] 表明，以 X^+ 为指标的元素构成一个自由 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-模的基。我们只需将基元素的指标集平移 ρ，并将标量扩张到域 $\mathbb{Q}(v)$。

我们不使用这种描述，但应当指出， [LRS19] 的一项主要且最复杂的成果，是赋予组合 Fock 空间 $\mathcal{F}(X_N)$ KL- 模结构。另一种构造方式是从仿射赫克代数出发。为此，必须引入仿射魏尔群的一个作用，而该作用取决于整数 ℓ。因此，与 [LRS19] 相比，我们在 Fock 空间的记号中省略标签 ℓ，因为我们不使用通过仿射赫克代数给出的描述。

2.3. 单位根处的量子群。以一个固定的、类型为 X_N 的半单复李代数为起点，我们按照 [Lus10] 定义相应的量化包络代数。对于 $1 \le i, j \le N$，令 $a_{ij} = (\alpha_j, \alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}$。对于 $1 \le i \le N$，若 α_i 是短根，则取 $d_i = 1$；若 α_i 是长根，则取 $d_i = 2$。令 $v_i = v^{d_i} \in \mathbb{Q}(v)$。通过规定当 α 与 α_i 属于同一个 Weyl 群轨道时 $d_\alpha = d_i$，即可将其扩展到所有根。

注 2.3. 注意，在 A_N 型和 D_N 型中，所有单根都是短根。对于非单边情形，Dynkin 图如下

$$B_N: \quad \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\cdots-\!\!\bullet\!\!\Rightarrow\!\!\bullet \qquad \text{and} \qquad C_N: \quad \bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\cdots-\!\!\bullet\!\!\Leftarrow\!\!\bullet .$$

因此，在 B_N 型中，恰有一个短单根 α_N，它对应于上图中最右侧的顶点；而在 C_N 型中，恰有一个长单根，它同样对应于上图中最右侧的顶点。对于 $(d_1, \dots, d_N)$，其中 d_i 对应于上图中从左数第 i 个节点，在 B_N 型中，我们有向量 (2,2, . . . , 2, 1)；在 C_N 型中，我们有向量 (1, 1, . . . , 1, 2)。

为明确量子整数的记号，我们为 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 中定义以下元素

$$[n]_v = \frac{v^n - v^{-n}}{v - v^{-1}},\ [n]_v! = \prod_{m=1}^{n} \frac{v^m - v^{-m}}{v - v^{-1}},\ \text{and}\ \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}_v = \prod_{m=1}^{n} \frac{v^{k+1-m} - v^{-k-1+m}}{v^m - v^{-m}}.$$

若将 v 替换为 v_i 或一个域中的元素，我们也使用相同的记号。

量化包络代数 $U_v(\mathfrak{g})$ 是定义在 $\mathbb{Q}(v)$ 上、由元素 $\{E_i, F_i, K_i^{\pm 1} \mid 1 \le i \le N\}$ 生成的结合代数，并满足对所有 $1 \le i, j \le N$成立的以下关系

(1) $K_i K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} K_i$, $K_i K_j = K_j K_i$,
(2) $K_i E_j = v_i^{a_{ij}} E_j K_i$, $K_i F_j = v_i^{-a_{ij}} F_j K_i$,
(3) $E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{v_i - v_i^{-1}}$ (commutator relation),
(4) $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k E_i^{(1-a_{ij}-k)} E_j E_i^{(k)} = 0$, for $i \ne j$ (quantum Serre relations),
(5) $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k F_i^{(1-a_{ij}-k)} F_j F_i^{(k)} = 0$, for $i \ne j$ (quantum Serre relations),

其中 $E_i^{(k)} = E_i^k / [k]_{v_i}!$ 和 $F^{(k)}{}_i = F_i^k / [k]_{v_i}!$ 是幂除元。

对于一个 $U_v(\mathfrak{g})$-模 M 和 $\lambda \in X$，我们将 λ-权空间固定为

$$M_\lambda = \left\{ m \in M \mid K_i m = v_i^{(\lambda, \alpha_i^\vee)} m \right\}.$$

我们用 $U_v(\mathfrak{g})$-mod 表示有限维 $U_v(\mathfrak{g})$-模的全子范畴，其中包含类型 1 的模 M，即满足 $M = \bigoplus_{\lambda \in X} M_\lambda$ 的有限维模。我们用 $[U_v(\mathfrak{g})\text{-mod}]$ 表示 $U_v(\mathfrak{g})$-mod 的格罗滕迪克群。为避免记号冗杂，我们假设格罗滕迪克群的标量从 $\mathbb{Z}$ 扩张到 $\mathbb{Q}(v)$。

沿用 [Lus90], 的做法，我们固定子环 $A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \subset \mathbb{Q}(v)$，并用 $U_A(\mathfrak{g})$ 表示 $U_v(\mathfrak{g})$ 的 A- 形式，即由幂除元 $E_i^{(k)}$、$F_i^{(k)}$、$K_i^{\pm 1}$ 以及下列元素生成的 $U_v(\mathfrak{g})$ 的 A 子代数

$$\begin{bmatrix} K_i; c \\ k \end{bmatrix} = \prod_{s=1}^{k} \frac{K_i v_i^{c+1-s} - K_i^{-1} v_i^{s-1-c}}{v_i^s - v_i^{-s}} \ \text{for}\ c \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

注意，对于 $k = 1$ 和 $c = 0$，这恰好等于 $[E_i, F_i]$；而这种形式的其他元素通常出现在幂除元的交换子关系的广义版本中。

取 $\mathfrak{q} \in \mathbb{C}$，其中 $\mathfrak{q}^2$ 是一个本原的 ℓ 次单位根，并考虑 $U_{\mathrm{q}} = U_A(\mathfrak{g}) \otimes_A \mathbb{C}$，其中 $v \in A$ 在 $\mathbb{C}$ 中的作用是乘以 $\mathfrak{q}$。对于一个 U_{q}-模 M 以及 $\lambda \in X$，我们定义

$$M_\lambda = \left\{ m \in M \mid K_i m = \mathrm{q}^{d_i(\lambda, \alpha_i^\vee)} m, \begin{bmatrix} K_i; 0 \\ k \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} (\lambda, \alpha_i^\vee) \\ k \end{bmatrix}_{\mathrm{q}^{d_i}} m \right\}$$

我们将 U_{q} 简称为单位根处的量子群。

类比于一般情形，我们用 U_{q}-模表示由有限维 U_{q}-模组成的全子范畴，其中的模 M 满足 $M = \bigoplus_{\lambda \in X} M_\lambda$。我们仍用 [$U_{\mathrm{q}}$-模] 表示格罗滕迪克群，并假设标量从 $\mathbb{Z}$ 扩张至 $\mathbb{Q}(v)$。

对于 $U_v(\mathfrak{g})$-模和 U_{q}-模这两种情形，模的特征均定义为 $\mathrm{ch}(M) = \sum_{\lambda \in X} \dim(M_\lambda) \mathrm{e}^\lambda$，其中 e^λ 为形式符号，维数分别取在相应的域 $\mathbb{Q}(v)$ 和 $\mathbb{C}$ 上。将维数替换为在 A 上的秩，即可得到一个作为 A-模自由的 $U_A(\mathfrak{g})$-模的特征。

在一般情形下，对于 $\lambda \in X^+$，我们用 $\Delta_v(\lambda) = L_v(\lambda)$ 表示最高权为 λ 的不可约最高权模，并固定 $x_\lambda \in L_v(\lambda)$ 作为一个最高权向量。按照 [Tan04，第 7]，节中的做法，可以通过定义 $\Delta_A(\lambda)$ 为由 x_λ 生成的 $U_A(\mathfrak{g})$-子模，将其提升为 A-形式。或者，[APW91] 将该模构造为对 $U_A(\mathfrak{g})$ 定义的 Verma 模的商。于是 $\Delta_A(\lambda)$ 是一个自由的 A-模，并且有 $\Delta_v(\lambda) = \Delta_A(\lambda) \otimes_A \mathbb{Q}(v)$。特别地，由 [APW91 的命题 1.22], 可得

$$\mathrm{ch}(\Delta_v(\lambda)) = \mathrm{ch}(\Delta_A(\lambda)),$$

二者均由 Weyl 特征公式给出。正如 [APW91, Remark 1.25] 所指出的，这并不遵循代数群领域构造 Weyl 模的通常做法。在那些情形下，人们会从反 Borel 子群诱导，以得到对偶 Weyl 模，然后再利用对偶性得到 Weyl 模。这种更复杂的方法有许多优点，但由于我们只关心 Grothendieck 群中 Weyl 模的类，因此这里采用这种更简单的构造。

由于 $\Delta_A(\lambda)$ 是 A 上的自由模，我们可以令 $\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) = \Delta_A(\lambda) \otimes_A \mathbb{C}$，并自然地

$$\mathrm{ch}(\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)) = \mathrm{ch}(\Delta_A(\lambda)) = \mathrm{ch}(\Delta_v(\lambda)). \tag{1}$$

模 $\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)$ 称为最高权为 λ 的 Weyl 模。根据构造，它是最高权为 λ 的相应 Verma 模 $M_{\mathrm{q}}(\lambda)$ 的一个商，而 $\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)$ 有唯一的不可约商 $L_{\mathrm{q}}(\lambda)$。注意，U_{q}-mod 中的每个单对象都可以如此得到。

注记 2.4. 由于 $\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)$ 的头为 $L_{\mathrm{q}}(\lambda)$，并且根据最高权理论，所有其他合成因子均具有 $L_{\mathrm{q}}(\mu)$ 的形式，其中 $\lambda - \mu$ 是正根之和且非零，因此类 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)]$ 对于 $\lambda \in X^+$ 构成格罗滕迪克群 [U_{q}-模] 的一组基。

Weyl 模在我们这里的情形中发挥着关键作用。以下观察对于专家而言是众所周知的，但由于它是我们论证的核心，我们仍在此予以表述。

命题 2.5. 设 λ，$\mu \in X^+$ 并考虑张量积分解

$$\Delta_v(\lambda) \otimes_{\mathbb{Q}(v)} \Delta_v(\mu) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \Delta_v(\nu_i)$$

对于某些支配权 ν_1、……、ν_r，在 $U_v(\mathfrak{g})$-模中成立。于是，在格罗滕迪克群 [U_{q}-模]中有

$$[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \Delta_{\mathrm{q}}(\mu)] = \sum_{i=1}^{r} [\Delta_{\mathrm{q}}(\nu_i)].$$

证明。考虑张量积 $\Delta_A(\lambda)\otimes_A\Delta_A(\mu)$。那么，根据（1），有

$$\mathrm{ch}(\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)\otimes\Delta_{\mathrm{q}}(\mu))=\mathrm{ch}(\Delta_A(\lambda)\otimes_A\Delta_A(\mu))=\mathrm{ch}(\Delta_v(\lambda)\otimes_{\mathbb{Q}(v)}\Delta_A(\mu))$$

由于 Weyl 模的类构成 $[U_{\mathrm{q}}\text{-mod}]$ 和 (1) 的一组基，因此我们得到：一般情形下特征的分解（即张量积分解）给出了单位根情形下格罗滕迪克群中的分解。□

我们只需要命题 2.5 中关于格罗滕迪克群的陈述，但在范畴中也成立一个更强的陈述。

注记2.6. 采用命题 2.5 中相同的记号，$\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)\otimes_{\mathbb{C}}\Delta_{\mathrm{q}}(\mu)$ 有一个滤过，其子商同构于形如 $\Delta_{\mathrm{q}}(\nu_i)$ 的 Weyl 模，其中 ν_1、……、ν_r 为某些支配权。

关于以 Weyl 模为子商的滤过的存在性，可以通过不同方式从文献中推得。在 [AST18]（见 arXiv 附录，断言 3.10.1）中，这一结果针对单边情形和对偶 Weyl 模进行了推导（因此需要应用对偶性）。在 [Par94, 定理 3.3] 中，可以在更一般的良滤过这一名称下找到该结果，再通过对偶得到由 Weyl 模构成的滤过。要确定滤过中出现哪些 Weyl 模，可以使用上文命题 2.5 中关于特征的同一论证。

与作为半单范畴的 $U_v(\mathfrak{g})$-mod 不同，U_{q}-mod 并非半单范畴。为了判定两个单模或两个 Weyl 模何时可以属于同一个块，我们在 X 上引入一个仿射反射群的作用。具体而言，对于 $\alpha\in\Phi^+$，定义 $\ell_\alpha=\ell/\gcd(\ell,d_\alpha)$。然后记 W_ℓ 为由以下形式的仿射反射生成的群

$$s_{\alpha,k}\cdot\lambda=s_\alpha\cdot\lambda+k\ell_\alpha\alpha,$$

对于 $\alpha\in\Phi^+$、$k\in\mathbb{Z}$ 和 $w\cdot\lambda=w(\lambda+\rho)-\rho$，这是 $w\in W$ 在 X 上的 W 点作用。

注 2.7。注意，在我们的情形中，d_α 只能是 1 或 2，因此当 ℓ 为奇数时，对所有 α 都有 $\ell_\alpha=\ell$。此时，W_ℓ 是与 W 相对应的仿射 Weyl 群，只是在平移 ρ 后，作用按因子 ℓ 缩放。当 ℓ 为偶数时，对于长根 α，有 $\ell_\alpha=\ell/2$。在这种情况下，群 W_ℓ 作为对偶根系的仿射 Weyl 群作用，经过 ρ 平移并按因子 ℓ 缩放。

如果存在一个元素 $w\in W_\ell$ 使得 $\lambda=w\cdot\mu$，我们就称两个权 λ、$\mu\in X^+$ 相连。这与单模之间的扩张之间的关系如下。

定理 2.8. [And03, 定理 4.3] 设 $\lambda,\mu\in X^+$。若 $\mathrm{Ext}^1(L_{\mathrm{q}}(\lambda)\ L_{\mathrm{q}}(\mu))\neq0$，则 λ 和 μ 相连且不相等。

由于 $\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)$ 对于 $\lambda\in X^+$ 是不可分解的，因此我们得到：若 $\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)$ 和 $\Delta_{\mathrm{q}}(\mu)$ 属于同一个块，则 λ 和 μ 相连。

如前所述，$L_{\mathrm{q}}(\lambda)$ 对于 $\lambda\in X^+$ 构成了 U_{q}-模中一组完备的不可约模。从现在起，我们固定以下对应关系，以便将韦伊模的类视为相应组合 Fock 空间的基元素。

引理 2.9. $\mathbb{Q}(v)$-向量空间 $\mathcal{F}(X_N)$ 与 $[U_{\mathrm{q}}\text{-mod}]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}(v)$ 之间存在一个同构，它将基向量 $\underline{\lambda}=\lambda+\rho$ 映射为 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)]$。

注意，将 $\mathcal{F}(X_N)$ 解释为 [LRS19] 中的 KL-模，可以将 $\mathcal{F}(X_N)$ 的 KL-基与 $[U_{\mathrm{q}}\text{-mod}]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}(v)$ 中由不可约模的类给出的基对应起来。

3. Fock spaces, affine Weyl groups, and quantum symmetric pairs

本节介绍序列所需的组合学，以定义 $\mathcal{F}(X_N)$ 嵌入其中的空间。

用 $\mathbb{H} = 1/2 + \mathbb{Z}$ 表示半整数。由于 $\mathbb{Z}$ 通过加法作用于 $\mathbb{H}$，对于正整数 r，我们考虑陪集 $\mathbb{H}/r\mathbb{Z}$。对于 $p \in \mathbb{H}$，用 $\overline{p}$ 表示它在 $\mathbb{H}/r\mathbb{Z}$ 中的陪集；对于 $p \in \mathbb{Z}$，用 $\overline{p}$ 表示它在 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 中的陪集。

考虑以下序列集合

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} = \{\underline{a} : \mathbb{Z} \to \{0,1\} \mid \underline{a}(i) = 0 \text{ for } i \gg 0,\ \underline{a}(i) = 1 \text{ for } i \ll 0\} \text{ and}$$
$$\mathcal{S}_{\mathbb{H}} = \{\underline{a} : \mathbb{H} \to \{0,1\} \mid \underline{a}(i) = 0 \text{ for } i \gg 0,\ \underline{a}(i) = 1 \text{ for } i \ll 0\}.$$

我们称 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ 为支撑在整数上的序列，称 $\mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ 为支撑在半整数上的序列。于是，用 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1$ 表示以 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ 为基的 $\mathbb{Q}(v)$- 向量空间，用 $\mathcal{F}^{1/2}$ 表示以 $\mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ 为基的 $\mathbb{Q}(v)$- 向量空间。我们将 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{1/2}$ 简称为福克空间。对于类型 B，需要使用记号 $\mathcal{F}^1$，以便区分此情形下的福克空间。

注 3.1. 虽然它们被定义为映射，但我们将其视为 $\{0,1\}$-序列，其指标标记为 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{H}$。我们将值 $\underline{a}(i)$ 称为位置 i 处的项，并称该位置在 $\underline{a}(i) = 0$ 时为“空”，在 $\underline{a}(i) = 1$时为“占据”。

由于该集合中的序列在正半部分只有有限个非零项，在非正半部分只有有限个零项，以下定义对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$是良定义的，对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$也同样成立

$$\mathrm{ch}(\underline{a}) = \sum_{i>0} \underline{a}(i) - \sum_{i\le 0} (1 - \underline{a}(i)).$$

我们称其为 $\underline{a}$ 的电荷，电荷为 N 的所有序列构成的集合分别记为 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z},N}$ 和 $\mathcal{S}_{\mathbb{H},N}$。相应的子空间，即电荷为 N的福克空间，由电荷为 N 的序列张成，记为 $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}^1_N$ 和 $\mathcal{F}^{1/2}_N$。

3.1. 移动算子与计数统计。我们定义福克空间上的两个基本算子，它们将一个 1 项向左或向右移动。

定义 3.2. 对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，令 $i \in \mathbb{H}$；对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$，令 $i \in \mathbb{Z}$。

- 通过 $\underline{b}(i-1/2) - \underline{b}(i+1/2) = 1$ 和 $\underline{b}(j) = \underline{a}(j)$（对于 $j \neq i \pm 1/2$）定义序列 $\underline{b}$。那么

$$\mathrm{e}_i\underline{a} = \begin{cases} \underline{b} & \text{if } \underline{a}(i+1/2) - \underline{a}(i-1/2) = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 通过 $\underline{c}(i+1/2) - \underline{c}(i-1/2) = 1$ 和 $\underline{c}(j) = \underline{a}(j)$（对于 $j \neq i \pm 1/2$）定义序列 $\underline{c}$。那么

$$\mathrm{f}_i\underline{a} = \begin{cases} \underline{c} & \text{if } \underline{a}(i-1/2) - \underline{a}(i+1/2) = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这些在 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{1/2}$ 上都定义了线性算子，我们称之为移动算子。根据定义，e_i 和 f_i 保持电荷不变，因此限制为 $\mathcal{F}_N$ 和 $\mathcal{F}^{1/2}_N$ 上的线性算子。我们说，e_i 将一个项 1 从位置 $i+1/2$ 移到位置 $i-1/2$，若无法移动则为零；而 f_i 则将一个项 1 朝相反方向移动。

对于 A 型量子仿射代数作用或其他类型中的量子对称对作用的定义，我们需要若干计数统计，现介绍如下。它们以不同组合形式出现在所有作用中。

定义 3.3。固定 $r \in \mathbb{Z}_+$。对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，令 $j \in \mathbb{H}$；对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，令 $j \in \mathbb{Z}$。然后定义

$$R_r^e(j,\underline{a}) = \#\{k \in j + r\mathbb{Z}_{>0} \mid \mathrm{e}_k\underline{a} \neq 0\}, \quad R_r^f(j,\underline{a}) = \#\{k \in j + r\mathbb{Z}_{>0} \mid \mathrm{f}_k\underline{a} \neq 0\},$$
$$L_r^e(j,\underline{a}) = \#\{k \in j - r\mathbb{Z}_{>0} \mid \mathrm{e}_k\underline{a} \neq 0\}, \quad L_r^f(j,\underline{a}) = \#\{k \in j - r\mathbb{Z}_{>0} \mid \mathrm{f}_k\underline{a} \neq 0\}.$$

为简化记号，我们还引入

$$R_r^{e-f}(j,\underline{a}) = R_r^e(j,\underline{a}) - R_r^f(j,\underline{a}), \quad R_r^{f-e}(j,\underline{a}) = R_r^f(j,\underline{a}) - R_r^e(j,\underline{a}),$$
$$L_r^{e-f}(j,\underline{a}) = L_r^e(j,\underline{a}) - L_r^f(j,\underline{a}), \quad L_r^{f-e}(j,\underline{a}) = L_r^f(j,\underline{a}) - L_r^e(j,\underline{a}).$$

此外，对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，令 $\overline{i} \in \mathbb{H}/r\mathbb{Z}$；对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，令 $\overline{i} \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$。然后定义

$$T_r^e(\overline{i},\underline{a}) = \#\{j \in \overline{i} \mid \mathrm{e}_j\underline{a} \neq 0\} \text{ and }, \quad T_r^f(\overline{i},\underline{a}) = \#\{j \in \overline{i} \mid \mathrm{f}_j\underline{a} \neq 0\},$$
$$T_r^{e-f}(\overline{i},\underline{a}) = T_r^e(\overline{i},\underline{a}) - T_r^f(\overline{i},\underline{a}), \quad T_r^{f-e}(\overline{i},\underline{a}) = T_r^f(\overline{i}-\underline{a}) - T_r^e(\overline{i},\underline{a}).$$

这种繁琐的记号是必要的，因为不同情形下生成元的作用既取决于序列 $\underline{a}$，也取决于位置 j，在该位置可以分别作用算子 e_j 或 f_j。在大多数情况下，指标 r 为 $r = \ell$；但在类型 B，甚至 ℓ 的情形下，作用时必须将其替换为 $r = \ell/2$，因此定义中还加入了指标 r。

注 3.4. 固定一个序列 $\underline{a}$，它属于 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ 或 $\mathcal{S}_{\mathbb{H}}$。那么，$R_r^e(j,\underline{a})$ 统计对于 $k \in j + r\mathbb{Z}_{>0}$（即在 j 的右侧），$\underline{a}(k - 1/2) = 0$ 且 $\underline{a}(k + 1/2) = 1$ 的情形出现了多少次。类似地，$R_r^f(j,\underline{a})$ 统计 $\underline{a}(k - 1/2) = 1$ 且 $\underline{a}(k + 1/2) = 0$ 的情形出现的次数；而 $L_r^e(j,\underline{a})$ 和 $L_r^f(j,\underline{a})$ 则统计这些情形在 $k \in j - r\mathbb{Z}_{>0}$ 中出现的次数，即在 j 的左侧。另一方面，形如 $T_r^e(\overline{i},\underline{a})$ 的统计量统计这类情形在整个 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{H}$ 中出现的位置。这应该能让人容易记住各个算子分别统计什么，以及相对于固定位置的统计方向。

3.2. A 型。这里简要回顾 A 型中福克空间上的作用定义A_∞。通常我们通过分拆来定义福克空间，但这里我们使用序列。

固定 $X = \oplus_{i=1}^N \mathbb{Z}\varepsilon_i$ $\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ 的整权格。这里也可以使用 $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$，但从组合学的角度来看，一般线性情形更为方便。在 X 中，我们有

$$X^+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in X \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N\} \text{ and}$$
$$P^+ = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in X^+ \mid \lambda_N \geq 0\},$$

$\mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$ 的支配权集合和多项式权集合。应将 P^+视为 $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ 中支配权的类比。此外，固定元素 $\rho = (0, -1, \ldots, -(N-1))$。与 $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ 不同，这里我们有所选择；为使其与通常的分拆定义以及添加具有特定剩余类的方格很好地对应，我们固定这个特定的ρ。

对于 $\lambda \in P^+$，我们关联序列 $\underline{a_\lambda} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，其定义为

$$\underline{a_\lambda}(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \leq -N, \\ 1 & \text{if there exists } 1 \leq j \leq N \text{ s.t. } i = \underline{\lambda}_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

也就是说，我们在$\underline{\lambda}$中作为条目出现的所有位置上都置 1；由于我们加上了 $\underline{\lambda} = \lambda + \rho$，这些位置彼此不同，因此定义良好。此外，我们将 $i \leq -N$ 的所有值都设为 1。注意，对于零权重 $\underline{0} = (0, -1, \ldots, -(N-1))$，因此与零权重对应的序列在所有非正整数处的值均为 1，在所有正整数处的值均为 0。

注意，这将 $\mathcal{F}(A_\infty)$ 嵌入到电荷为零的福克空间 $\mathcal{F}_0$ 中。

注 3.5。若要转到 $\mathcal{F}_0$ 的分拆描述，参见例如 [Ari02] 或 [RT10],。固定一个荷为0的序列 $\underline{a}$ 。设 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 满足： $\underline{a}(\lambda_1)$ 是最右边等于 1 的项， $\underline{a}(\lambda_2 - 1)$ 是从右往左第二个等于 1 的项，以此类推，其中 $\underline{a}(\lambda_i - (i-1))$ 是从右往左第 i 个等于 1 的项。根据构造，$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 是一个弱递减的非负整数序列，并且经过有限步后最终稳定为 0，因此它是一个分拆。

对于 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$ 和 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，在 $\mathcal{F}$ 上定义线性算子

$$\hat{\mathrm{E}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = \sum_{j \in \overline{p}} v^{R_\ell^{e-f}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\,\underline{a}, \quad \hat{\mathrm{F}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = \sum_{j \in \overline{p}} v^{L_\ell^{f-e}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\,\underline{a}, \text{ and } \hat{\mathrm{K}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = v^{T_\ell^{f-e}(\overline{p},\underline{a})}\underline{a}.$$

将这些算子限制到子空间 $\mathcal{F}_0$ 上，便得到众所周知的 $\mathcal{F}_0$作用，参见例如 [Ari02], ；利用注记 3.5 可将其转换为序列而非分拆来表述。

定理 3.6。 [Ari02，定理 10.6] 线性算子 $\{\hat{}\mathrm{E}_{\overline{p}}、\hat{}\mathrm{F}_{\overline{p}}、\hat{}\mathrm{K}_{\overline{p}}^{\pm 1}\}$ 定义了量子仿射代数 $U_v(\hat{}\mathfrak{sl}_\ell)'$ 在 $\mathcal{F}_0$上的作用。

注意，对于任意整数 m， Ψ_m 与 $\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_m$ 之间存在自然同构，只需将序列平移 m 步即可，即 $\Psi_m(\underline{a})(i) = \underline{a}(i-m)$。根据构造

$$\Psi_m(\hat{\mathrm{E}}_{\overline{p}}\underline{a}) = \hat{\mathrm{E}}_{\overline{p+m}}\Psi_m(\underline{a}),\ \Psi_m(\hat{\mathrm{F}}_{\overline{p}}\underline{a}) = \hat{\mathrm{F}}_{\overline{p+m}}\Psi_m(\underline{a}),\ \text{and}\ \Psi_m(\hat{\mathrm{K}}_{\overline{p}}\underline{a}) = \hat{\mathrm{K}}_{\overline{p+m}}\Psi_m(\underline{a}).$$

由于量子仿射代数的所有关系在旋转下不变，这便定义了 $U_v(\hat{}\mathfrak{sl}_\ell)'$ 在所有 $\mathcal{F}_m$、 $m \in \mathbb{Z}$上的作用，且由相同的公式给出。真正唯一的区别是，对于指标 $\overline{p}$， $\hat{}\mathrm{F}_{\overline{p}}$ 在“最高权序列”上并不作用为零；在该序列中，所有的 1 都尽可能靠左排列，即所有 $\mathrm{E}_{\overline{p}}$ 作用为零的序列。

3.3. 仿射 Weyl 群组合。为了介绍仿射 Weyl 群的胞腔几何，我们定义 $X_{\mathbb{R}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。接着，对于 $\alpha \in \Phi^+$，我们考虑仿射超平面

$$H_{\alpha,k} = \{x \in X_{\mathbb{R}} \mid (\lambda + \rho, \alpha^\vee) = k\ell_\alpha\}.$$

此仿射超平面上的仿射反射恰为 $s_{\alpha,\ k}$ 而所有此类超平面上的反射给出了 W_ℓ的作用。我们用 $\mathcal{H}$ 表示所有此类仿射超平面的集合；反过来，对于超平面 $H \in \mathcal{H}$，我们用 s_H 表示相应的仿射反射。本节中的陈述和定义可见于大多数关于仿射反射群的教科书，例如 [Hum90]。

定义 3.7。考虑 $\mathcal{H}$中所有仿射超平面的补集

$$X_{\mathbb{R}}^{\mathrm{reg}} = X_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$

$X_{\mathbb{R}}^{\mathrm{reg}}$ 的一个连通分支称为开 alcove。 $X_{\mathbb{R}}$ 中一个连通分支的闭包称为一个（闭）alcove。我们用 $\mathcal{A}$表示所有（闭）alcove 的集合。

注意， W_ℓ 在集合 $\mathcal{A}$上单纯传递地作用。开 alcove 中的点的稳定子平凡，而开 alcove 边界上的点的稳定子非平凡。

每个仿射超平面 $H \in \mathcal{H}$ 都会划分出两个闭半空间。对于固定的单房 $A \in \mathcal{A}$，我们将包含 A的半空间记为 H_A^+。此外，对于两个单房 A 和 A'，若 $H_A^+ \neq H_{A'}^+$，则称超平面 $H \in \mathcal{H}$ 位于 A 与 A' 之间。由此可定义距离函数

$$d(A, A') = \#\{H \in \mathcal{H} \mid H \text{ between } A \text{ and } A'\},$$

对于 A、$A' \in \mathcal{A}$。

引理 3.8. 设 $H \in \mathcal{H}$ 是位于单房 A、$A' \in \mathcal{A}$之间的超平面。则 $d(A, A') > d(s_H A, A')$ 且 $d(A, A') > d(A, s_H A')$。

对于一个单房 $A \in \mathcal{A}$，考虑与 A 相交且维数最大的超平面集合 $\mathcal{H}_A$，这些超平面称为 A的墙。则 $S_A = \{s_H \mid H \in \mathcal{H}_A\}$ 是 W_ℓ 作为 Coxeter 群的生成集。相对于这些生成元，我们可以将距离视为长度函数 l 关于 S_A的无选取替代形式；也就是说，设 A' 是另一个单房，则

$$d(A, A') = l(w) \text{ for } wA = A'.$$

注 3.9. 由距离与长度相等可知，对于固定的单房 A和 $H \in \mathcal{H}_A$，超平面 H 是 A 与 $s_H A$之间唯一的超平面。

这引出了（最短）廊道的组合学。

定义 3.10. 若存在某个 $H \in \mathcal{H}_A$使得 $A' = s_H A$，则称两个单房 A、$A' \in \mathcal{A}$ 相邻。若单房序列 $\Gamma =$（A_0、A_1、A_2、$\ldots, A_r$）满足 A_i与 A_{i+1}相邻，则称其为从 A_0到 A_r的（单房）廊道。若廊道 $\Gamma =$（A_0、A_1、A_2、$\ldots, A_r$）满足 $r = d$（A_0、A_r），则称其为最短廊道。注意，在最短廊道 Γ的情形下，A_{i-1} 与 $A_i\}$ 之间的墙集合 $\{H_i \mid H_i$ 恰好是 A_0 与 A_r 之间的超平面集合。我们称这些超平面为廊道 Γ所穿过的超平面。

由于权可能位于超平面上，我们需要对两个单房之间的超平面采用更严格的概念。

定义 3.11. 对于 $\lambda \in X$，记 A_λ 为包含 λ的一个单房。对于 λ、$\mu \in X$ 以及单房 A_λ 和 A_μ的选取，若超平面 $H \in \mathcal{H}$ 位于 A_λ 和 A_μ 之间，且 H位于 A_λ 和 A_μ 之间，并且 $H \cap \{\lambda, \mu\} = \varnothing$，则称该超平面严格位于二者之间。

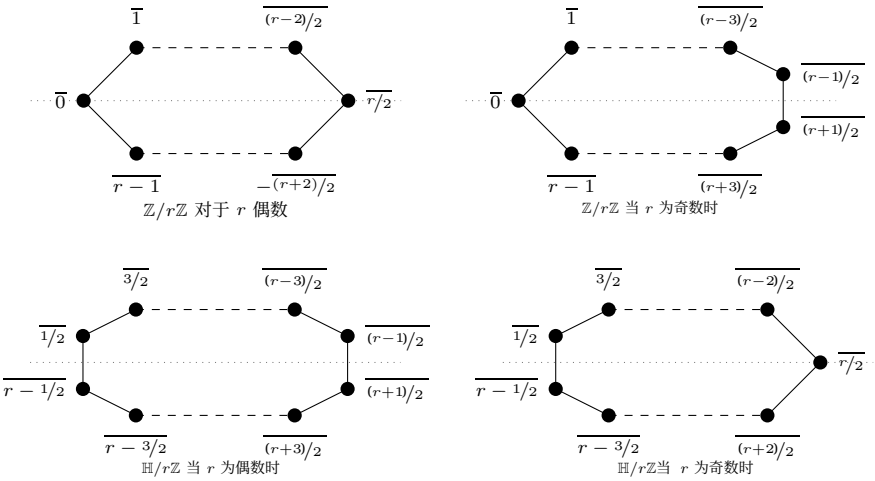
注意，在定义 3.11 中，当且仅当 λ 位于某个单房的内部时，单房 A_λ 的选取才是唯一的。否则，可能有多个选项。我们经常利用下面的引理来作出一个特别合适的选取。

引理 3.12. 设 λ、$\mu \in X$ 满足 $\lambda \in W_\ell \mu$。那么，可以选取单房 A_λ 和A_μ，使得从 A_λ 到 A_μ 的最短廊道 Γ 只穿过严格位于 A_λ 和 A_μ之间的超平面

证明。令 A_λ 和 A_μ 是满足 $\lambda \in A_\lambda$ 和 $\mu \in A_\mu$ 的单房的任意选择。令 Γ 为一条最短廊道，并假设存在一个超平面 H 位于 A_λ 和 A_μ 之间，但并非严格位于两者之间。不失一般性，假设 $\lambda \in H$（否则只需重新命名），于是$\lambda \in s_H A_\lambda$，因此 $s_H A_\lambda$ 也是包含 λ 的单房的一种选择。由引理 3.8 可得 $d(A_\lambda, A_\mu) > d(s_H A_\lambda, A_\mu)$。因此，我们可以用 $s_H A_\lambda$ 替换 A_λ，而 A_μ 与新的 A_λ 之间的距离（即最短廊道的长度）严格减小。由于距离以下界 0 为界，这个过程必定在有限步后终止；此时，最短廊道所穿过的所有超平面都严格位于最终的 A_λ 和 A_μ 之间。□

3.4. 仿射量子对称对。本节固定 $r > 3$。为定义所需的量子对称对，我们考虑形如 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{H}/r\mathbb{Z}$ 的集合。对 $r > 3$ 的限制是为了不考虑较小 r 的特殊情形。一般而言，也可以为 $r = 2$ 和 $r = 3$ 定义类似的代数。在这些情形中，关系会略有不同。

ˆ 我们考虑类型为 A_{r-1} 的 Dynkin 图，其指标可以用 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{H}/r\mathbb{Z}$ 中的元素标记



对于这两个指标集，我们考虑由 $\Theta(\overline{p}) = -\overline{p}$ 给出的自同构 Θ。因此，在图示的每个 Dynkin 图中，它都是沿虚线水平线的水平反射。根据 r 是偶数还是奇数，以及考虑指标集 $\mathbb{H}/r\mathbb{Z}$ 还是 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$，Θ 在图的左侧或右侧有零到两个不动点。

对于 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{H}/r\mathbb{Z}$ 两种情况，如果 $\overline{p} = \overline{q \pm 1}$，我们称陪集 $\overline{p}$ 和 $\overline{q}$ 相连；也就是说，仿射 Dynkin 图中相应的节点之间有一条边。

为简化量子对称对的记号，我们将一种量子 Serre 关系改写为非交换多项式的形式

$$\mathrm{SR}_v(x,y) = x^2y - [2]_v xyx + yx^2,$$

ˆ，所涉及的非交换变量为 x、y，定义在 $\mathbb{Q}(v)$ 上。与通常的量子群 $U_v(\mathfrak{sl}_r)$ 不同，量子对称对的生成元所满足的量子 Serre 关系取决于该生成元在 Dynkin 图中的节点类型，即它们不具有指标平移不变性。

定义 3.13。$\overline{p} \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 分别称为 $\overline{p} \in \mathbb{H}/r\mathbb{Z}$

（1）若 $\Theta(\overline{p}) = \overline{p}$，则称为固定指标；（2）若 $\Theta(\overline{p})$ 与 $\overline{p}$ 相连，则称为 Θ-相连指标；（3）若既不是固定指标，也不是 Θ-相连指标，则称为标准指标。

仿射量子对称对即为如下的结合代数。

定义 3.14。[Kol14] 令 $\mathrm{I} \in \{\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}, \mathbb{H}/r\mathbb{Z}\}$。仿射量子对称对 ˆ$B_v(\mathrm{I}, \Theta)$ 定义为在 $\mathbb{Q}(v)$ 上由 $\{\mathrm{B}_{\overline{p}} \mid \overline{p} \in \mathrm{I}\}$ 以及 ˆ$\{\mathrm{L}_{\overline{q}} \mid \overline{q} \in \mathrm{I},\ \overline{q} \neq \Theta(\overline{q})\}$ 生成的结合代数，并满足以下关系：

对于未固定的 $\overline{p}$、$\overline{q}$，有

$$\hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} = \hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}}, \quad \hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{L}}_{\Theta(\overline{p})} = 1.$$

对于 $\overline{p}$ 标准、$\overline{r}$ Θ相连、$\overline{s}$ 固定和 $\overline{q}$ 非固定的情形，成立

$$\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}} = \begin{cases} v^2\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{p} = \overline{q} \\ v^{-2}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{p} = \Theta(\overline{q}), \\ v^{-1}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{p}, \overline{q} \text{ linked}, \\ v\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{p}, \Theta(\overline{q}) \text{ linked}, \\ \hat{\mathrm{B}}_{\overline{q}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{r}} = \begin{cases} v^3\hat{\mathrm{B}}_{\overline{r}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{r} = \overline{q}, \\ v^{-3}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{r}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{r} = \Theta(\overline{q}), \\ v^{-1}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{r}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{r}, \overline{q} \text{ linked}, \overline{q} \neq \Theta(\overline{r}) \\ v\hat{\mathrm{B}}_{\overline{r}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{if } \overline{r}, \Theta(\overline{q}) \text{ linked}, \overline{q} \neq \overline{r} \\ \hat{\mathrm{B}}_{\overline{r}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}} & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{s}} = \hat{\mathrm{B}}_{\overline{s}}\hat{\mathrm{L}}_{\overline{q}}.$$

ˆ ˆ 生成元 B$\overline{p}$ 和 B$\overline{q}$ 交换，除非

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{B}}_{\Theta(\overline{p})} - \hat{\mathrm{B}}_{\Theta(\overline{p})}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}} = \frac{\hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}} - \hat{\mathrm{L}}_{\Theta(\overline{p})}}{v - v^{-1}} \text{ for } \overline{p} \text{ standard}$$

or

$$\mathrm{SR}_v(\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}, \hat{\mathrm{B}}_{\overline{q}}) = \begin{cases} 0 & \overline{p},\overline{q} \text{ linked, not fixed, and } \Theta(\overline{p}) \neq \overline{q}, \\ 0 & \overline{p},\overline{q} \text{ linked, } \overline{p} \text{ standard, } \overline{q} \text{ fixed}, \\ \hat{\mathrm{B}}_{\overline{q}} & \overline{p},\overline{q} \text{ linked, } \overline{p} \text{ fixed, } \overline{q} \text{ standard}, \\ -[2]_v\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}(v\hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}} + v^{-2}\hat{\mathrm{L}}_{\Theta(\overline{p})}) & \overline{p},\overline{q}\ \Theta\text{-linked }, \overline{q} = \Theta(\overline{p}). \end{cases}$$

从 [Kol14] 推导这些定义还需要作一些澄清。ˆB$_{\underline{p}}$ 之间的关系见 [Kol14 定理 7。4], 请注意，在我们的表述中， [Kol14] 中出现的所有 c_i 都等于 1，而元素 $\mathcal{Z}_j$ =Lj 的指标 j 属于 Dynkin 图。ˆ ˆ B$\overline{p}$ 与 L$\overline{a}$ 之间的交换子关系见 [Kol14, （7.7）]。

将 B_v(I Θ) 视为 [Let03 第 7] 节中 AIII 型量子对称对的仿射类似物，会更容易理解。AIII 型量子对称对的关系与通常量子群的关系几乎相同，正如我们的情形一样。要么有一个特殊生成元，对应于一个固定指标；要么有两个特殊生成元，对应于一对 Θ-固定指标，它们的行为不同于通常的量子群生成元。与非仿射情形相比，现在有两种这样的情况。在上面的 Dynkin 图中，这两种情况对应于虚线与圆相交的两个区域。

注 3.15. 将此定义与 [ES18 命题 7.17 和命题 7.18] 中非仿射量子对称对的定义（若不存在 Θ相连指标，则与[BSWW18] 中的幂等元版本）进行比较，可以发现局部关系相同。 [ES 18] 关系中的 ˇ E_i 和 ˇ F_i ，分别对应于$\overline{p}$ standard 中的 ˆB$\overline{p}$ 和 ˆB$^{\Theta(\overline{p})}$ 。由于我们的生成元按循环方式排列，因此在这类生成元对中选择一个“正”生成元和一个“负”生成元并不合理。 [ES18 命题 7.18] 中的生成元 ˇB ，对应于固定指标的 ˆB$\overline{p}$ ； 而 [ES18 命题 7.17] 中的生成元对 ˇ B_+ 和 ˇB_- ，则对应于$\overline{p}$ being Θ-相连时的 ˆB$\overline{p}$ 和 ˆB$^{\Theta(\overline{p})}$ 。

与 [ES18] 不同，我们采用半单 Cartan 的类似结构，而 [ES18] 采用约化 Cartan 的类似结构。这只是为了简化记号。只需稍作修改定义，就可以将每个生成元 B$\overline{a}$ 写成两个生成元的乘积，类似于 [ES18]中的定义。

关系唯一不同之处在于定义 3.14 中最后一个变形量子 Serre 关系，其中 $\overline{p}$ 与 Θ相连，且 $\overline{q} = \Theta(\overline{p})$。这是因为 [ES18 中定义 7.8] 里的线性算子 $B_{1/2}$ 和 $B_{-1/2}$ 分别给出 ˇ B_+ 和 ˇ B_- 的作用，而它们的定义并不对称。这样做是为了匹配 $\mathcal{O}$ 在 [ES18], 中分次范畴的分次，但在我们的情形下并无此必要。

4. 类型 C

对于类型 C_N ($N > 2$)，我们取 $X = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{Z}\varepsilon_i$，其中 ε_i 是对角矩阵的 Cartan 子代数中第 i 个对角元对应的投影，且该子代数包含于 $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$。$W$-不变双线性形式 $(-,-)$ 的定义使得 ε_i 构成标准正交基。作为 X中的根系 Φ 的正根，我们取：

$$\Phi^+ = \{\beta^{\pm}_{i,j} = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq N\} \cup \{\beta_i = 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq N\}.$$

这一选择对应的单根为 $\alpha_i = \beta^{-}_{i,\,i+1}$ ，其中 $1 \leq i < N$ 对应 $\alpha_N = \beta_N$。相应的余根在 X 中为

$$(\beta^{\pm}_{i,j})^{\vee} = \beta^{\pm}_{i,j} \text{ and } \beta_i^{\vee} = \varepsilon_i.$$

根据第 2.3 节的定义，元素 $d_i = 1$ 对应 $1 \le i < N$ 和 $d_N = 2$，因为 α_N 是唯一的简单长根。若存在某个 i 使得 $\beta = \beta_i$，则令 $d_\beta = 2$；否则令其为 1，从而将此定义推广到所有正根。

采用这些选择，基本权为 $\omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$。因此，支配整权为

$$X^+ = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, \lambda_i \ge \lambda_{i+1}, \text{ and } \lambda_N \ge 0\},$$

其中，我们相对于基 $\{\varepsilon_i\}_{1 \le i \le N}$ 用行向量表示。于是

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \omega_i = N\varepsilon_1 + (N-1)\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N \in X^+$$

因此

$$X^+_\rho = \{(\underline{\lambda}_1, \ldots, \underline{\lambda}_N) \mid \underline{\lambda}_i \in \mathbb{Z}, \underline{\lambda}_i > \underline{\lambda}_{i+1}, \text{ and } \underline{\lambda}_N > 0\}.$$

（回顾一下约定：对于 $\lambda \in X^+$，$\underline{\lambda} = \lambda + \rho$。）

由于存在满足 $d_\beta \neq 1$ 的根，因此我们必须区分 ℓ 为奇数和 ℓ 为偶数这两种情况，如第 2.3 节所述。当 ℓ 为奇数时，W_ℓ 是类型 C_N 的仿射魏尔群，只是缩放了因子 ℓ。而当 ℓ 为偶数时，W_ℓ 是对偶根系的类型 B_N 的仿射魏尔群，并缩放因子为 ℓ；也就是说，将 β_i 替换为 ε_i，并以余根 $2\varepsilon_i$ 取代。

对于 $[U_\mathrm{q}\text{-mod}]$ 上的作用，我们考虑函子 $-\otimes_{\mathbb{C}} \Delta_\mathrm{q}(\omega_1)$，它是与自然表示的量子类似物的特化取张量积。

由于自然表示是极小的，在一般情形下可得到以下张量积分解。

命题 4.1. [HK02, 命题 8.6.3] 设 $\lambda \in X^+$。则在 $U_v(\mathfrak{g})$-mod 中，有

$$\Delta_v(\lambda) \otimes \Delta_v(\omega_1) \cong \bigoplus_{i:\lambda+\varepsilon_i \in X^+} \Delta_v(\lambda + \varepsilon_i) \oplus \bigoplus_{i:\lambda-\varepsilon_i \in X^+} \Delta_v(\lambda - \varepsilon_i).$$

在此情形下，张量积分解很直接：若 $\lambda + \varepsilon_i$ 是支配的，则相应的不可约模会出现；$\lambda - \varepsilon_i$ 也类似。

4.1. 序列与算子的 Fock 空间。为了将 $\mathcal{F}(C_N)$ 嵌入 $\mathcal{F}_N$，我们将 $\underline{\lambda}$ 映射到序列 $\underline{a}_{\underline{\lambda}}$，使得

$$\underline{a}_{\underline{\lambda}}(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i \le 0, \\ 1 & \text{if there exists } 1 \le j \le N \text{ s.t. } i = \underline{\lambda}_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，按构造，序列 $\underline{a}$ 中所有非正项都是 1，并且严格正部分中恰有 N 个项等于 1。因此，序列 $\underline{a}_{\underline{\lambda}}$ 的电荷为 N。该映射显然是单射。为简便起见，我们也用 $\underline{\lambda}$ 表示该序列，并将 $\mathcal{F}(C_N)$ 与其像等同。

Lo查看定义 3.2 中的线性算子，我们立即得到如下结论。

引理 4.2。设 $\underline{\lambda} \in \mathcal{F}(C_N)$ 和 $r \in \mathbb{H}$。则 $\mathsf{e}_r\underline{\lambda} \in \mathcal{F}(C_N)$，此外，$\mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 非零当且仅当 $\lambda - \varepsilon_i$ 对于 $r = \underline{\lambda}_i - 1/2$ 是支配的。

$\mathsf{f}_r\underline{\lambda} \in \mathcal{F}(C_N)$, f对于 $r \not= 1/2$, 和 $\lambda + \varepsilon_i$ 是支配的 f 当且仅当 $f\,\mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 非零对于 $r = \underline{\lambda}_i + 1/2$。类似地，

注意，所有算子 e_r 都保持子空间 $\mathcal{F}(C_N)$ 不变，其中 e_r 对所有$r \le 1/2$的作用为零。另一方面，算子 f_r 也保持该子空间不变，除了 $\mathsf{f}_{1/2}$。显而易见，这是因为 $\mathsf{f}_{1/2}$ 可以将位置 0 处的 1 移到位置 1，从而离开子空间 $\mathcal{F}(C_N)$。

4.2. 链接与算子。现在我们考虑：在序列保持在 $\mathcal{F}(C_N)$ 内这一假设下，通过应用上述算子中的两个算子从$\underline{\lambda}$ 得到的两个权何时相连。

注 4.3. 下文中我们常简略地说：假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 有定义。其意为，$\mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 是由 $\mathcal{F}(C_N)$ 的嵌入得到的一个序列。

尽管 C 型的根与 A 型的根不同，但以下引理的证明与 A 型中的证明大致相同，因为只有形如 β_{ij}^- 的根起作用。

引理 4.4. 设 $\underline{\lambda} \in X_\rho^+$。假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathsf{e}_s\underline{\lambda}$对 $r \neq s$ 有定义。那么 μ与 ν 相连，当且仅当 $r \in s + \ell\mathbb{Z}$。

假设 $\underline{\mu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_s\underline{\lambda}$对 $r \neq s$有定义。那么 μ 与 ν 相连，当且仅当 $r \in s + \ell\mathbb{Z}$。

证明. 有 $\underline{\mu} = \underline{\lambda} - \varepsilon_i$，其中 i 由$\underline{\lambda}_i = r + 1/2$确定。类似地，$\mathsf{e}_s$ 确定了 j，使得 $\underline{\lambda}_j = s + 1/2$。由于 $s \neq r$，我们可以假设 $i < j$。

现在假设这两个权相连。利用引理 3.12，固定两个单房 $A_{\underline{\mu}}$ and$A_{\underline{\nu}}$，使得最短廊道 $A_{\underline{\mu}} = A_0, \ldots, A_t = A_{\underline{\nu}}$只穿过严格位于 $A_{\underline{\mu}}$ 和 $A_{\underline{\nu}}$之间的墙。

成立

$$(\underline{\nu} - \underline{\mu}, \beta^\vee) = \begin{cases} 2 & \text{if } \beta = \beta_{i,j}^-, \\ 1 & \text{if } \beta \in \{\beta_{i,k}^-, \beta_{i,k}^+, \beta_{k,i}^+ \mid k \neq j\} \cup \{\beta_i\}, \\ -1 & \text{if } \beta \in \{\beta_{k,i}^- \mid k < i\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于我们假设 $\underline{\mu} \neq \underline{\nu}$，但 μ 和 ν 相连，最短廊道的长度至少为 1。因此， $A_{\underline{\lambda}}$ 和 $A_{\underline{\mu}}$之间必定存在一个超平面；否则这两个单房相同，这与 W_ℓ 在单房集合上的单传递作用矛盾。

观察上面的数值 $(\underline{\nu} - \underline{\mu}, \beta^\vee)$，唯一可能在 $A_{\underline{\mu}}$ 和 $A_{\underline{\nu}}$ 之间有仿射超平面的根是 $\beta = \beta_{ij}^-$。因此，最短廊道的长度恰为 1，并且对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，有$\underline{\nu} = s_{\beta_{ij}^-,\, m}\underline{\mu}$。令 $H = H_{\beta_{ij}^-,\, m}$ 为这个超平面。因此

$$1 + m\ell = (\underline{\mu}, (\beta_{i,j}^-)^\vee) = \underline{\lambda}_i - \underline{\lambda}_j + 1.$$

因此我们得到 $\underline{\lambda}_i = \underline{\lambda}_j + m\ell$，从而 $r \in s + \ell\mathbb{Z}$。

现在假设 $r \in s+\ell\mathbb{Z}$。那么对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $\underline{\lambda}_i-\underline{\lambda}_j = m\ell$。因此，$(\underline{\nu}, (\beta_{ij}^-)^\vee) = 1+m\ell$，于是$s_{\beta_{ij}^-,\, m}(\underline{\nu}) = \underline{\mu}$，所以权 μ 和 ν 相连。

对于 f 算子，证明完全类似。 □

逐字应用引理 4.4 可知，在类型 A 中，指标模 ℓ同余的算子会得到相连权。

引理 4.5。设 $\underline{\lambda} \in X_\rho^+$。假设$\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_s\underline{\lambda}$对于 $r + 1 \neq s$有定义。那么，μ 和 ν 相连，当且仅当 $r \in -s + \ell\mathbb{Z}$。

证明。成立：$\underline{\mu} = \underline{\lambda} - \varepsilon_i$，其中 i 由$\underline{\lambda}_i = r + 1/2$确定。类似地，$\mathsf{f}_s$ 定义了 j，使得 $\underline{\lambda}_j = s - 1/2$。由于 $s \neq r + 1$，因此 $i \neq j$。

假设这些权相连。通过引理 3.12 固定 $A_{\underline{\mu}}$ 和 $A_{\underline{\nu}}$，使得最短廊道只穿过严格位于这两个单房之间的超平面。

然后我们检查，对于选择 $\beta = \beta_{i,j}^+$， $|(\underline{\mu} - \underline{\nu}, \beta^\vee)| > 1$ 的唯一可能取值是 $(\underline{\mu} - \underline{\nu}, \beta^\vee) = 2$。（严格来说，$\beta_{i,j}^+$ 仅对 $i < j$ 有定义，因此对于 $i > j$，我们只需设定 $\beta_{i,j}^+ = \beta_{j,i}^+$。）

因此， $A_{\underline{\mu}}$ 与 $A_{\underline{\nu}}$ 之间唯一的仿射超平面具有如下形式： $H_{\beta_i^+,j,m}$ ，所以 $\underline{\nu} = s_{\beta_i^+,j,m}\underline{\mu}$ 成立。于是，权的公式为

$$1 + m\ell = (\underline{\mu}, (\beta_{i,j}^+)^\vee) = \underline{\lambda}_i + \underline{\lambda}_j + 1.$$

因此我们得到 $\underline{\lambda}_i = -\underline{\lambda}_j + m\ell$ ，从而 $r \in -s + \ell\mathbb{Z}$。

假设 $r \in -s + \ell\mathbb{Z}$，则对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $\underline{\lambda}_i + \underline{\lambda}_j = m\ell$。因此，$(\underline{\nu}, (\beta_{ij}^+)^\vee) = 1 + m\ell$，从而 $s_{\beta_{ij}^+,m}(\underline{\nu}) = \underline{\mu}$，所以权 μ 和 ν 相连。□

这是与类型 A 的主要区别。形如 $r \in -s + \ell\mathbb{Z}$ 的关系迫使我们固定一种原点类型。因此，在这种情况下， $\mathcal{F}(C_N)$ 的嵌入取决于 N。

引理 4.6. 设 ℓ 为奇数且 $\underline{\lambda} \in X_\rho^+$。假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_{r-1}\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 μ 和 ν 相连，当且仅当 $r \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$。

证明。在这种情况下，存在 i，使得对于由 $\underline{\lambda}_i = r - 1/2$ 确定的 i，有 $\underline{\mu} = \underline{\lambda} - \varepsilon_i$ 和 $\underline{\nu} = \underline{\lambda} + \varepsilon_i$。

假设这些权相连，并固定单房 $A_{\underline{\mu}}$ 和 $A_{\underline{\nu}}$，使得根据引理 3.12，最短廊道只穿过严格位于这两个单房之间的超平面。

检查 $(\underline{\nu} - \underline{\mu}, \beta^\vee)$ 的取值后可知，严格位于所选单房之间的超平面有多种选择。具体而言，我们有

$$(\underline{\nu} - \underline{\mu}, \beta^\vee) = \begin{cases} 2 & \text{if } \beta = \beta_i, \\ 2 & \text{if } \beta \in \{\beta_{i,j}^-, \beta_{i,j}^+, \beta_{j,i}^+ \mid j \neq i\}, \\ -2 & \text{if } \beta \in \{\beta_{j,i}^- \mid j \neq i\}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

记 $H_1 = H_{\gamma_1, m_1}$，……，$H_t = H_{\gamma_t, m_t}$ 为最短廊道穿过的超平面。根据构造，每个 H_i 都严格位于 $A_{\underline{\mu}}$ 和 $A_{\underline{\nu}}$ 之间，因此对每个 γ_i，都有 $(\underline{\mu} - \underline{\nu}, \gamma_i^\vee) = \pm 2$，特别地，$(\underline{\lambda}, \gamma_i^\vee) = m_i\ell$，即 $\underline{\lambda} \in H_i$。

现在我们逐一讨论 γ_1 的不同情形。

情况： $\gamma_1 = \beta_i$：在这种情况下，成立

$$1 + m_1\ell = (\underline{\nu}, \beta_i^\vee) = \underline{\lambda}_i + 1.$$

因此 $\underline{\lambda}_i \in \ell\mathbb{Z}$，所以 $r \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$。由于在这种情况下立即可得 $s_{\beta_i, m_1}\underline{\nu} = \underline{\mu}$ 故有 $s_{\beta_i, m_1}A_{\underline{\nu}} = A_{\underline{\mu}}$ 因此最短廊道的长度为 1。

情况： $\gamma_1 = \beta_{i,j}^-$ 其中某个 $j > i$：在这种情况下，方程为

$$1 + m_1\ell = (\underline{\nu}, (\beta_{i,j}^-)^\vee) = \underline{\lambda}_i - \underline{\lambda}_j + 1.$$

因此 $\underline{\lambda}_i = \underline{\lambda}_j + m_1\ell$，且成立 $s_{\beta_{i,j}^-, m_1}\underline{\nu} = \underline{\lambda} + \varepsilon_j$。对于每个超平面 H_q，当 $q > 1$ 且 $\gamma_q \neq \beta_{i,j}^+$ 时，成立 $m_q\ell = (\underline{\lambda}, \gamma_p^\vee) = (\underline{\lambda} + \varepsilon_j, \gamma_p^\vee)$，因此 $\underline{\lambda} + \varepsilon_j \in H_q$。于是应用 s_{γ_q, m_q} 会使 $\underline{\lambda} + \varepsilon_j$ 保持不变。由于 $\underline{\lambda} + \varepsilon_j \neq \mu$，必定存在 $p > 1$ 使得 $\gamma_p = \beta_{i,j}^+$。在这种情况下

$$1 + m_p\ell = (\underline{\lambda} + \varepsilon_i, (\beta_{i,j}^+)^\vee) = (\underline{\lambda} + \varepsilon_j, (\beta_{i,j}^+)^\vee) = \underline{\lambda}_i + \underline{\lambda}_j + 1.$$

因此 $\underline{\lambda}_i = -\underline{\lambda}_j + m_p\ell$。由此 $2\underline{\lambda}_i = (m_p + m_1)\ell$。由于 $2\underline{\lambda}_i$ 是偶整数，而 ℓ 是奇数，因此 $(m_p + m_1)$ 是偶数，所以 $\underline{\lambda}_i \in \ell\mathbb{Z}$，等价地， $r \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$。

情形： $\gamma_1 = \beta_{i,j}^+$ 对某个 $j > i$：这与前一种情形几乎完全相同。唯一的区别是，首先得到 $\underline{\lambda}_i \in -\underline{\lambda}_j + \ell\mathbb{Z}$；应用第一次反射后得到 $\underline{\lambda} - \varepsilon_j$；第二个所用的超平面为 $\beta_{i,j}^-$，由此得到 $\underline{\lambda}_i \in \underline{\lambda}_j + \ell\mathbb{Z}$。其余论证相同。

情形： $\gamma_1 = \beta_{j,i}^-$ 对于某个 $j < i$：在这种情形下，我们从

$$-1 + m_1\ell = (\underline{\nu}, (\beta_{j,i}^-)^\vee) = \underline{\lambda}_j - \underline{\lambda}_i - 1.$$

因此 $\underline{\lambda}_i \in \underline{\lambda}_j + \ell\mathbb{Z}$ 和 $s_{\gamma_1,\ m_1}(\underline{\nu}) = \underline{\lambda} + \varepsilon_j$，其余部分与前面的情形相同。

情形：$\gamma_1 = \beta_j^+,\ i$ 对于某个 $j < i$：这与前面的情形类似，可得此结论。

反过来，假设 $r \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$。那么对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $\underline{\lambda}_i = m\ell$。因此 $(\underline{\nu}, (\beta_i)^\vee) = 1 + m\ell$，从而 $s_{\beta_i,\ m}(\underline{\nu}) = \underline{\mu}$，所以权 μ 和 ν 相连。□

对于 ℓ 为奇数l的情形，引理 4.6 给出了引理 4.5 的一个特殊情形，其证明稍显精细。这个特殊情形将导出非标准指标的量子对称对的生成元。ℓ 为偶数的特殊情形将在下一条陈述中处理。

引理 4.7。设 ℓ 为偶数且 $\underline{\lambda} \in X_\rho^+$。假设 $\underline{\mu} = \mathrm{e}_{r-1}\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathrm{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 μ 和 ν 相连，当且仅当 $r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。

证明。证明中的论证与引理 4.6 的论证相同，因此我们只指出其中的差异。

情形：$\gamma_1 = \beta_i$：与引理 4.6 不同，现在我们得到 $\underline{\lambda}_i \in (\ell/2)\mathbb{Z}$ 因此 $r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。这当然是由于 $\ell_{\beta_i} = \ell/2$。

在所有其他情形下，我们像之前一样得到 $2\underline{\lambda}_i \in \ell\mathbb{Z}$，但现在只需将 ℓ 除以 2，即可得到 $\underline{\lambda}_i \in (\ell/2)\mathbb{Z}$，进而推出 $r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。

反过来，假设 $r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。那么对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，有 $\underline{\lambda}_i = m\ell/2$。因此 $(\underline{\nu}, (\beta_i)^\vee) = 1 + m\ell/2$，从而 $s_{\beta_i,\ m}(\underline{\nu}) = \underline{\mu}$，因为 $\ell_{\beta_i} = \ell/2$，所以权 μ 和 ν 相连。□

与引理 4.6 相比，在引理 4.7 中我们看到，对于 ℓ 偶数，e_{r-1} 和 f_r 产生相联权的情况对应两类位置：在 $\ell\mathbb{Z}$ 中某个位置上的 1，或在 $\ell/2 + \ell\mathbb{Z}$ 中某个位置上的 1。这反映为在第 3.4 节中，对于 $\mathbb{H}/\ell\mathbb{H}$ 和 ℓ 偶数的 Dynkin 图中存在两对 Θ-相连的指标。

4.3. 量子对称对作用。现在我们如下定义 $\mathcal{F}_N$ 上的算子。回顾第 3.4 节中的自同构 Θ: $\mathbb{H}/\ell\mathbb{Z} \to \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$，它改变符号。

定义 4.8. 设 $\underline{a} \in \mathcal{S}_\mathbb{Z}$ 和 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$。对于 $\Theta(\overline{p}) \neq \overline{p}$，我们定义

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = v^{T_\ell^{e-f}(\Theta(\overline{p}),\underline{a})} \sum_{j\in\overline{p}} v^{R_\ell^{e-f}(j,\underline{a})}\mathrm{e}_j\,\underline{a} + \sum_{j\in-\overline{p}} v^{L_\ell^{f-e}(j,\underline{a})}\mathrm{f}_j\,\underline{a} \ \ and$$

$$\hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}}\underline{a} = v^{T_\ell^{f-e}(\overline{p},\underline{a})} v^{T_\ell^{e-f}(\Theta(\overline{p}),\underline{a})}\underline{a}.$$

对于 $\Theta(\overline{p}) = \overline{p}$，即 $\overline{p} = \overline{\ell/2}$，我们定义

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{\ell/2}}\underline{a} = v^{-1} v^{T_\ell^{e-f}(\overline{\ell/2},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{\ell/2}} v^{R_\ell^{e-f}(j,\underline{a})}\mathrm{e}_j\underline{a} + \sum_{j\in\overline{\ell/2}} v^{L_\ell^{f-e}(j,\underline{a})}\mathrm{f}_j\underline{a}.$$

这定义了 $\mathcal{F}$ 上的线性算子；对于任意 N，它们限制为 $\mathcal{F}_N$。

正如第 3.2 节末尾所述，$U_v(\hat{\mathfrak{sl}}_\ell)'$ 的作用可以定义在任意 $\mathcal{F}_N$ 上，定义方式与 $\mathcal{F}_0$ 相同。因此，通过比较可得如下结论。

引理 4.9. 设 $\underline{a} \in \mathcal{S}_\mathbb{Z}$ 和 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$。对于 $\Theta(\overline{p}) \neq \overline{p}$

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = \hat{\mathrm{E}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{K}}_{-\overline{p}}^{-1}\underline{a} + \hat{\mathrm{F}}_{-\overline{p}}\,\underline{a} \quad and \quad \hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}}\underline{a} = \hat{\mathrm{K}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{K}}_{-\overline{p}}^{-1}\underline{a}$$

and

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{\ell/2}}\,\underline{a} = v^{-1}\hat{\mathrm{E}}_{\overline{\ell/2}}\hat{\mathrm{K}}_{\overline{\ell/2}}^{-1}\,\underline{a} + \hat{\mathrm{F}}_{\overline{\ell/2}}\,\underline{a}$$

$\hat{}$ 线性算子 $\mathrm{B}_{\overline{p}}$ 的定义正是我们不嵌入荷为0的 Fock 空间的原因（在类型 A 中便是如此）。线性算子 $\mathrm{B}_{\overline{p}}$ 涉及 $i \in \overline{p}$ 的 e_i，也涉及 $-j \in \overline{p}$ 的 f_j。因此，这一定义不像类型 A 作用下的线性算子定义那样，在任意平移下保持不变；它仅在平移量为 ℓ 的倍数时保持不变。

ˆ ˆ 注 4.10。注意，对于 $\underline{\lambda} \in \mathcal{F}(C_N)$，若 $-1/2 \notin \overline{p}$，则有 $\mathrm{B}_{\overline{p}\underline{\lambda}} \in \mathcal{F}(C_N)$。对于 $\mathrm{B}^{\overline{\ell/2}}$，只需考虑涉及 $\mathfrak{f}^{1/2}$ 的直和项，因为它可能产生一个不属于 $\mathcal{F}(C_N)$ 的序列。这与类型 A_{N-1} 中的情形完全平行：在那里可以 ˆ 应用算子 $\mathrm{F}_{\overline{r}}$，用杨图的语言来说，它会在第 $N+1$ 行创建一个方格，从而离开 $\mathfrak{gl}_N$ 的多项式权张成空间。

由算子间的关系，我们得到以下结论。

命题 4.11. 线性算子 $\{\mathrm{B}_{\overline{p}} \mid \overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}\}$ 和 $\{\mathrm{L}_{\overline{p}} \mid \overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}、\ \Theta(\overline{p}) \neq \overline{p}\}$ 满足定义 3.14 中给出的关系，只需将生成元替换为同名算子。

证明. 由于我们没有具体说明如何在 [Kol14], 中作出所有选择，下面简要说明如何快速验证这些关系确实成立。

$\mathrm{L}_{\overline{r}}$ 之间的关系由定义立即可得。它们都将一个基元素乘以一个固定标量，而 $\mathrm{L}_{\overline{r}}$ 和 $\mathrm{L}_{-\overline{r}}$ 对应的标量互为倒数。

$\mathrm{L}_{\overline{a}}$ 和 $\mathrm{B}_{\overline{r}}$ 之间的交换关系可利用上面的引理 4.9 通过直接计算得到。

显然，根据定义，除指定的指标取值外，$\mathrm{B}_{\overline{r}}$ 和 $\mathrm{B}_{\overline{a}}$ 交换。要么 $\mathrm{B}_{\overline{r}}$ 和 $\mathrm{B}_{\overline{a}}$ 的直和项作用于基向量的不同位置，即这些陪集不相连，因此直和项交换；要么，在 $\Theta(\overline{p})$ 和 $\overline{q}$ 相连的情况下，它们的直和项可以通过将一个 1 移向不同方向，或将两个 1 移到同一位置，来改变同一位置。在这种情况下，这些直和项的乘积总是零，因此它们交换。

.....之间的交换子关系 $\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}$ 和 ˆ

$\mathrm{B}^{\Theta(\overline{r})}$ 可直接利用引理 4.9 进行简单计算。

最后，变形与未变形的塞尔关系可由 [ES18] （更准确地说，由其中对 [Let03] 的使用）推出，因为对于相连的指标对 $\overline{p}$ 和 $\overline{q}$，塞尔关系与 Dynkin 图的其余部分无关。计算只涉及量化包络代数中指标 $\overline{p}$、$\overline{q}$、$\Theta(\overline{p})$ 和 $\Theta(\overline{q})$ 对应标准生成元之间的关系；这些关系是局部的，因此在仿射情形和 [ES18], 中相同，因为 $\ell > 3$。□

因此，将所有内容汇总起来，我们便得到了这一结论。

定理 4.12. 存在一个 $B_v(\mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}, \Theta)$ 在 $\mathcal{F}_N$ 上的作用，使得对于 $\lambda \in X^+$， $[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)]$ 在 $[U_{\mathrm{q}}$-模] 中关于 Weyl 模类的分解可由

$$\sum_{\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}\underline{\lambda}}$$

通过投影到子空间 $\mathcal{F}(C_N)$ 并计算 $v = 1$ 得到。此外，若 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\mu)]$ 和 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\nu)]$ 出现在分解中，且 μ 与 ν 相连，则存在唯一的 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$ˆ，使得 $\underline{\mu}$ 和 $\underline{\nu}$ 出现在 $\mathrm{B}_{\overline{p}\underline{\lambda}}$ 中。

证明. 该作用即命题 4.11 中的作用。分解由所有算子之和给出，这一点由命题 4.1 得出；再结合命题 2.5，可将分解转化为权组合，随后使用引理 4.2 以及算子本身的定义即可。

两个具有相联权的韦伊模的类由唯一算子 ˆ$\mathrm{B}_{\overline{r}}$ 得到，这一点可由引理 4.4、4.5、4.7 和 4.6 得出，。□

现在我们要探讨不同秩的情形下嵌入单个福克空间的问题。

在 A 型中，每个 $\mathcal{F}(A_N)$ 都可以嵌入到 $\mathcal{F}_0$ 中。从组合层面来看，由于选择了 $\mathfrak{gl}$ 而非 $\mathfrak{sl}$，因此能够选择元素 ρ，这很自然。

所作的选择使得权重 0 总是映射到这样一个序列：非正半轴上的项全为 1，正半轴上的项全为 0。从仿射算子和作用的角度来看，原点的任何平移，也就是嵌入到不同的 $\mathcal{F}_k$ 中，都没有区别，因为算子只涉及模 ℓ 同余的项。因此，嵌入到不同的 $\mathcal{F}_k$ 中，仅仅与所用算子的平移有关。在李理论方面，这只对应于对 ρ 的另一种选择。

如果我们限制在某些 N 上，就可以在类型 C 中进行类似的构造。虽然这更显得人为，因为在李理论一侧，元素 ρ 是固定的。

定义 4.13。设 $N = m\ell + k$，其中 $m \geq 0$ 且 $0 \leq k < \ell$。于是我们定义一个从$\mathcal{F}_N$ 到 $\mathcal{F}_k$ 的映射，通过 $\underline{a}^{(m)}(i) = \underline{a}(i + m\ell)$，其中$\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z},\ N}$。我们称 $\underline{a}^{(m)}$ 为平移了 $m\ell$ 步的序列。

这样，我们可以将 $\mathcal{F}(C_N)$ 视为 $\mathcal{F}_k$ 的一个子空间，并称之为 $\mathcal{F}(C_N)$ 的平移嵌入。

定义 4.13 中的映射是良定义的，这一点通过对电荷进行简单计算即可立即得出。由于它与 e_i 和 $\mathrm{e}_{i-m\ell}$ 的作用相互交织（f_i^ ^和 $\mathrm{f}_{i-m\ell}$ 也类似），定义在 $\mathcal{F}_N$ 和 $\mathcal{F}_k$ 上、由 $\mathcal{F}$ 限制而来的仿射算子 $\mathrm{B}^{\overline{p}}$ 和 $\mathrm{L}^{\overline{p}}$，与将序列平移 m 步的映射交换。就权而言，这相当于考察权 $\lambda + \rho - m\ell(1, \ldots, 1)$，对于大多数 m 来说，该权并不支配。

因此，对于固定的 $0 \leq k < \ell$，使用这个嵌入，我们可以将其表述如下。

命题 4.14. 设 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z},k}$ 和 $r \geq 0$。那么，对于 $m \gg 0$，$\underline{a} = \underline{\lambda}^{(m)}$ 是 λ 的一个支配权，其类型为 $C_{m\ell+k}$。此外，存在 Laurent 多项式 $d_{\lambda,\mu}(v)$，其系数为非负整数，且 μ对于 U_q 是支配的，使得

$$\sum_{(\mathbb{H}/\ell\mathbb{Z})^r} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}_1} \cdots \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}_r} \underline{\lambda}^{(m)} = \sum_{\mu \ dominant \ for \ U_q} d_{\lambda,\mu}(v) \underline{\mu}^{(m)},$$

and

$$[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)^{\otimes r}] = \sum_{\mu \ dominant \ for \ U_q} d_{\lambda,\mu}(1)[\Delta_{\mathrm{q}}(\mu)].$$

证明. 对于 $\underline{a}$，我们考察序列非正部分中最左边的 0。如果这个 0 位于位置 $-n'$，那么使用形如 e_i 的算子，可以将其化简为一个序列 $\underline{b}$，该序列的非正部分中没有 0，并且在位置 $1, \ldots, k$恰好有 k 1个。于是，对于 $m'\ell > n'$，$\underline{b}$是 $\mathcal{F}(C_{m'\ell+k})$在平移嵌入下的像。然后，按算子 e_i 的相反顺序应用算子 f_i，即可得到一个支配权 λ，且 $\underline{a} = \underline{\lambda}^{(m')}$。如果非正部分中没有 0，那么只需使用$m' = 0$即可。

支配权 λ 对于秩为 $m'\ell + k$ 的 U_{q}，可以视为 $m > m'$的秩为 $m\ell + k$ 的 U_{q}的支配权，只需在最后的（$m - m'$）ℓ 个项处填入 0。选取$m > m'$ 使得 $m\ell > n' + r$。根据引理 4.2 之后关于哪些 f_i 能够离开嵌入子空间 $\mathcal{F}_N$的讨论，我们知道，将 $\mathrm{B}^{\overline{p}_1} \cdots \mathrm{B}^{\overline{p}_r}$的任意乘积作用于 $\underline{a}$，都不会产生不属于 $\mathcal{F}$（$C_{m\ell+k}$）的平移嵌入的权，因为至多只能将位置 $-n' - 1$、.....、 $-n' - r$ 处的 1 向右移动。因此，结论由定理 4.12 得出。□

注意，命题 5.13 的证明明确给出了 m 所需满足的界；只需保证 $m\ell > n' + r$ 对于 n' 是最左侧的 0 所在的位置。

^ 注 4.15. 请注意，算子 $\mathrm{B}^{\overline{p}}$ 的定义并非唯一确定。正如注 3.15 中所述，可以更改生成元定义中的某些系数，从而得到略有修改的代数。

由于 A 类型中的定义也并非唯一，例如可参见 [RT10, 定理 3.1] 和 [Ari02, 第 10 节。1], 在 C 类型中也可以进行类似的修改。

5. Type B

在类型 B_N $(N > 1)$ 中，我们选择 $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ 中对角矩阵构成的卡当子代数到第 i 个对角项的投影。不变双线性形式 $(-,-)$ 取为使 ε_i 构成标准正交基的形式。对于正根，我们选择

$$\Phi^+ = \{\beta_{i,j}^{\pm} = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq N\} \cup \{\beta_i = \varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq N\}$$

与类型 C 类似，单根为 $\alpha_i = \beta_i^-$, $_{i+1}$（ $1 \leq i < N$），但此处 $\alpha_N = \beta_N$。对应的余根为

$$(\beta_{i,j}^{\pm})^\vee = \beta_{i,j}^{\pm} \text{ and } \beta_i^\vee = 2\varepsilon_i.$$

根据第 2.3 节，对于 $1 \leq i < N$ 和 $d_N = 1$，我们有 $d_i = 2$，因为 α_N 是此情形下唯一的短单根。通过 $d_\beta = 2$，这可推广到所有正根：当 i 时为 $\beta = \beta_i$，否则为 $d_\beta = 1$。

显著的变化体现在整权格上。基本权为$\omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$（对于 $i < N$）和 $\omega_N = 1/2$（$\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_N$）。因此，对于整权$X = \bigoplus_{i+1}^N \mathbb{Z}\omega_i$，支配权 X^+ 可以自然地分为两个子集

$$X^{1/2,+} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ and } \lambda_N \geq 0\} \text{ and}$$
$$X^{1,+} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \mid \lambda_i \in \mathbb{H}, \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ and } \lambda_N \geq 0\},$$

它们是相对于 $\{\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq N}$ 写成的行向量，位于 $\mathfrak{h}^*$之内。我们将 $X^{1/2,+}$ 称为整数权，以区别于整权；将 $X^{1,+}$ 称为半整数权。

将基本权相加，得到

$$\rho = \sum_{i=1}^N \omega_i = (N - 1/2)\varepsilon_1 + (N - 3/2)\varepsilon_2 + \ldots + 1/2\varepsilon_N \in X^{1/2,+}.$$

因此，加上 ρ 后，我们得到用于定义序列的集合，即

$$X_\rho^{1/2,+} = \{(\underline{\lambda}_1, \ldots, \underline{\lambda}_N) \mid \underline{\lambda}_i \in \mathbb{H}, \underline{\lambda}_i > \underline{\lambda}_{i+1}, \text{ and } \underline{\lambda}_N > 0\},$$
$$X_\rho^{1,+} = \{(\underline{\lambda}_1, \ldots, \underline{\lambda}_N) \mid \underline{\lambda}_i \in \mathbb{Z}, \underline{\lambda}_i > \underline{\lambda}_{i+1}, \text{ and } \underline{\lambda}_N > 0\},$$

再次回顾，$\underline{\lambda} = \lambda + \rho$ 适用于 $\lambda \in X^+$。

注 5.1. 这清楚地说明了我们的命名约定：将整数权集合命名为 $X^{1/2,+}$，将半整数权集合命名为 $X^{1,+}$（而不是反过来）。加上 ρ后，$X^{1/2}{}_{,\rho}{}^{+}$中的元素在 $\mathbb{H}$中有分量，而 $X^{1}{}_{,\rho}{}^{+}$中的元素在 $\mathbb{Z}$中有分量。因此，这一命名约定使人很容易辨认不同情形下序列的定义域。

ℓ 的奇偶性再次起着重要作用。当 ℓ 为奇数时，W_ℓ 是按因子 ℓ缩放的 B_N 型仿射魏尔群。当 ℓ 为偶数时，W_ℓ 是为对偶根系按因子 ℓ 缩放的 C_N 型仿射魏尔群；也就是说，在根系中将 $\beta_{ij}^{\pm}$ 替换为 $1/2\beta_{ij}^{\pm}$。

对于在 U_q-模上的作用，我们使用函子 $- \otimes_{\mathbb{C}} \Delta_q(\omega_1)$，它同样是与自然表示的量子类似物的特化的张量积。

注 5.2。注意，与 $U_v(\mathfrak{g})$ 为 A 型或 C 型的情形相比， $\Delta_v(\omega_1)$ 不是 $U_v(\mathfrak{g})$-模的张量生成元，因此还存在其他可能的有限维表示，例如旋量表示 $\Delta_{\mathrm{q}}(\omega_N)$ 的特化，它们可以在 U_{q}-模上给出有趣的作用。

在类型 B 中，自然表示不是极小的。因此，张量积分解会略有复杂。

命题 5.3. [HK02, 命题 8.6.3] 对于 $\lambda \in X^+$，在 $U_v(\mathfrak{g})$-模中成立

$$\Delta_v(\lambda) \otimes \Delta_v(\omega_1) \cong \bigoplus_{i:\lambda+\varepsilon_i \in X^+} \Delta_v(\lambda+\varepsilon_i) \oplus \bigoplus_{i:\lambda-\varepsilon_i \in X^+} \Delta_v(\lambda-\varepsilon_i) \oplus \Delta_v(\lambda)^{\oplus \delta_{\mathrm{pos}}},$$

其中， $\delta_{\mathrm{pos}} = 0$ 当 $\lambda_N = 0$ 时，以及 $\delta_{\mathrm{pos}} = 1$ 当 $\lambda_N > 0$时。

因此，在类型 B 中，对于 $X^{1,+}$ 中的权，张量积分解很直接；与类型 C 的唯一区别是会出现直和项 $\Delta_v(\lambda)$ 本身。甚至这些序列也与类型 C 的情形非常相似。

另一方面，对于 $X^{1/2,+}$ 中的权，张量积分解规则取决于 Weyl 模的具体权，也就是说，只有当$\lambda_N > 0$时才会出现直和项 $\Delta_v(\lambda)$。此外，在这种情形下，我们处理的是半整数上的序列。

5.1. 序列与算子的 Fock 空间。我们将福克空间分解为

$$\mathcal{F}(B_N) = \mathcal{F}^1(B_N) \oplus \mathcal{F}^{1/2}(B_N),$$

其中 $\mathcal{F}^1(B_N)$ 的基为 $\underline{\lambda} \in X^{1,\ +}$，而 $\mathcal{F}^{1/2}(B_N)$ 的基为 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,\ +}$。对于 $\mathcal{F}^1(B_N)$，我们可以使用与类型 C 中相同的序列和福克空间定义，并按照第 4.1 节将 $\mathcal{F}^1(B_N)$ 嵌入 $\mathcal{F}_N$。

对于 $\mathcal{F}^{1/2}(B_N)$ 的情形，我们使用第 3 节中的序列 $\mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ 及相应的福克空间 $\mathcal{F}^{1/2}$。因此，我们将 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,\ +}$ 映射到序列 $\underline{a_{\lambda}}$，使得

$$\underline{a_{\lambda}}(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i < 0, \\ 1 & \text{if there exists } 1 \le j \le N \text{ s.t. } i = \underline{\lambda}_j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

从而将 $\mathcal{F}^{1/2}(B_N)$ 嵌入 $\mathcal{F}^{1/2}$。和之前一样，显然其像包含在电荷为 N 的序列子空间 $\mathcal{F}_N^{1/2}$ 中。我们仍用 $\underline{\lambda}$ 表示该序列。

引理 4.2 的类似结论在类型 B 中也成立，即 e_i 保持子空间 $\mathcal{F}^1(B_N)$ 和 $\mathcal{F}^{1/2}(B_N)$，f_i 对 $i \notin \{0, 1/2\}$ 也如此，而 f_i 不保持 $i \in \{0, 1/2\}$ 的子空间。

与类型 C 不同， ℓ 奇数和偶数的情形必须分别处理。

5.2. 奇数 ℓ 的链接与算子。本节中，我们始终假设

$$\ell > 3 \text{ is odd.}$$

本节中的证明与第 4.2 节中的证明非常相似，但也存在一些微妙的差异。我们先陈述适用于整数权重和半整数权重两种情形的结论。

引理 5.4. 设 $\underline{\lambda} \in X_\rho^+$ 和 ℓ 为奇数。假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathsf{e}_s\underline{\lambda}$ 对于 $r \neq s$ 有定义。那么， μ 和 ν 相连当且仅当 $r \in s + \ell\mathbb{Z}$。

假设对于 $r \neq s$， $\underline{\mu'} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu'} = \mathsf{f}_s\underline{\lambda}$ 均有定义。那么 μ' 和 ν' 相连，当且仅当 $r \in s + \ell\mathbb{Z}$。

证明。与引理 4.4 中一样，$\underline{\mu}=\underline{\lambda}-\varepsilon_i$ 与 $\underline{\lambda}_i=r+1/2$、$\underline{\nu}=\underline{\lambda}-\varepsilon_j$ 与 $\underline{\lambda}_j=s+1/2$，并假设 $i<j$。

现在假设 $\underline{\mu}$ 和 $\underline{\nu}$ 相连。利用引理 3.12，得到 alcove $A_{\underline{\mu}}$ 和 $A_{\underline{\nu}}$，使得存在一条最短廊道，且只穿过严格位于这两个 alcove 之间的墙。当 $\beta\in\{\beta_{ij}^-,\beta_i,\beta_j\}$ 时，$(\underline{\nu}-\underline{\mu},\beta^\vee)$ 的绝对值可以为 2。如果形如 $H_{\beta_{ij}^-,\,m}$ 的超平面严格位于这两个 alcove 之间，则如引理 4.4 中的推导可得 $r\in s+\ell\mathbb{Z}$。

因此，假设没有形如 $H_{\beta_{ij}^-,\,m}$ 的超平面严格位于这两个 alcove 之间。由于 $\underline{\nu}-\underline{\mu}=\varepsilon_i-\varepsilon_j$，又因为我们假设这些权相连，所以必定有一个形如 $H_{\beta_i,\,m'}$ 的超平面和一个形如$H_{\beta_j,\,m''}$ 的超平面严格位于这两个 alcove 之间。这意味着$2\underline{\lambda}_i=m'\ell$ 和 $2\underline{\lambda}_j=m''\ell$。因此 $2(\underline{\lambda}_i-\underline{\lambda}_j)=(m'-m'')\ell$。由于 ℓ 是奇数，$(m'-m'')$ 必须是偶数，因此 $H_{\beta_{ij}^-,\,(m'-m'')/2}$ 严格位于这两个 alcove 之间，矛盾。

反过来，假设 $r\in s+\ell\mathbb{Z}$。那么 $\underline{\lambda}_i-\underline{\lambda}_j$是 ℓ的倍数。因此，$(\underline{\lambda},(\beta_{ij}^-)^\vee)=\underline{\lambda}_i-\underline{\lambda}_j$是 ℓ的倍数，所以对于某个 $m\in\mathbb{Z}$，$(\underline{\nu},(\beta_{ij}^-)^\vee)=1+m\ell$。于是 $s_{\beta_{ij}^-,m}(\underline{\nu})=\underline{\mu}$，因此这些权相连。

对于 $\mathbf{f}_i$ 和 $\mathbf{f}j$，相应的结论也成立，证明也类似。 □

对于混合算子的情形，相应地可得。

引理 5.5. 设 $\underline{\lambda}\in X_\rho^+$和 ℓ 为奇数。假设 $\underline{\mu}=\mathbf{e}_r\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu}=\mathbf{f}_s\underline{\lambda}$ 对$r+1\neq s$有定义。那么，μ 和 ν相连，当且仅当 $r\in -s+\ell\mathbb{Z}$。

证明. 证明与引理 5.4 几乎完全相同。通过 $\underline{\mu}=\underline{\lambda}-\varepsilon_i$和 $\underline{\nu}=\underline{\lambda}+\varepsilon_j$固定 $i\neq j$。那么，对于 $(\underline{\nu}-\underline{\mu},\beta^\vee)=(\varepsilon_i+\varepsilon_j,\beta^\vee)$，使其绝对值严格大于 1 的根为 $\beta\in\{\beta_{ij}^+,\beta_i,\beta_j\}$。

假设这些权相连。像通常那样固定这些单房及相应的最短廊道，可见若对于某个 m，$H_{\beta_{ij}^+,m}$ 严格位于这些单房之间，则结论立即成立。若假设不存在这样的超平面，则可如引理 5.4 的证明那样得到矛盾。

若 $r\in -s+\ell\mathbb{Z}$ 成立，则 $(\underline{\lambda},(\beta_{ij}^+)^\vee)=\underline{\lambda}_i+\underline{\lambda}_j$ 是 ℓ 的倍数，因此对于某个 $m\in\mathbb{Z}$，有 $(\underline{\nu},(\beta_{ij}^-)^\vee)=1+m\ell$。于是 $s_{\beta_{ij}^+,m}(\underline{\nu})=\underline{\mu}$，因此这些权相连。□

作为引理 4.6 和 4.7 的对应结果，我们得到如下结论。

引理 5.6. 设 ℓ 为奇数。假设 $\underline{\lambda}\in X^{1,\,\rho\,+}$，且 $\underline{\mu}=\mathbf{e}_{r-1}\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu}=\mathbf{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 μ 与 ν 相连，当且仅当 $r\in 1/2+\ell\mathbb{Z}$。

假设 $\underline{\lambda}\in X^{1/2,\,\rho\,+}$，并且 $\underline{\mu}=\mathbf{e}_{r-1}\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu}=\mathbf{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义。当且仅当 $r\in(\ell+1)/2+\ell\mathbb{Z}$ 时，μ 和 ν 相连。

证明。分别通过 $\underline{\mu}=\underline{\lambda}-\varepsilon_i$和 $\underline{\nu}=\underline{\lambda}+\varepsilon_i$固定 i，即满足$\underline{\lambda}_i=r-1/2$。

假设 μ 和 ν相连。再次使用引理 3.12，得到单房 $A_{\underline{\mu}}$ 和 $A_{\underline{\nu}}$，以及一条只穿过严格位于这两个单房之间的墙的最短廊道。使绝对值 $|(\underline{\nu}-\underline{\mu},\beta^\vee)|>1$ 成立的可能正根为：当取值为 4 时是 $\beta=\beta_i$；当取值为 2 时，对于 $i<j$ 是 $\beta=\beta_{ij}^\pm$，对于 $j<i$ 是 $\beta=\beta_{ji}^\pm$。

令 $A_0,\dots,A_t$ 为连接 $A_{\underline{\mu}}$和 $A_{\underline{\nu}}$的最短廊道中的单房，并令 $H_1,\dots,H_t$ 为依次穿过的超平面；根据引理 3.12，它们都严格位于这些单房之间。固定正根和整数，使得 $H_p=H_{\gamma_p,\,m_p}$。回想一下，对所有这些情形，都有 $|(\underline{\nu}-\underline{\mu},\gamma_p^\vee)|>1$。

情形： $\gamma_1=\beta_i$和 $r=1$：那么 $(\underline{\nu},\beta_i^\vee)=2+m_1\ell$，因为我们需要满足 $s_{\beta_i,\,m_1}(\underline{\nu})=\underline{\mu}$。因此 $2\underline{\lambda}_i+2=2+m_1\ell$。若 $\underline{\lambda}\in X^{1,\,\rho\,+}$，则 m_1 必须为偶数（因为 ℓ 为奇数），所以$\underline{\lambda}_i\in\ell\mathbb{Z}$，或等价地 $r\in 1/2+\ell\mathbb{Z}$。另一方面，若 $\underline{\lambda}\in X^{1/2,\,\rho\,+}$，则 m_1必须为奇数，于是得到 $\underline{\lambda}_i\in\ell/2+\ell\mathbb{Z}$，或等价地 $r\in(\ell+1)/2+\ell\mathbb{Z}$。

情形：对于某个 j， $\gamma_1 = \beta_{ij}^-$：那么有 $(\underline{\nu}, (\beta_{ij}^-)^\vee) = 1 + m_1\ell$, $s_{\beta_{ij}^-}$, $m_1(\underline{\nu}) = \underline{\lambda} + \varepsilon_j \neq \underline{\mu}$, 且 $\underline{\lambda}_i - \underline{\lambda}_j = m_1\ell$。现在，对于 $q > 1$，有 $(\underline{\lambda} + \varepsilon_j, \gamma_q^\vee) \in \ell\mathbb{Z}$，因此 s_{γ_q}, $m_q(\underline{\lambda} + \varepsilon_j) = \underline{\lambda} + \varepsilon_j$, 除非 $\gamma_q \in \{\beta_i, \beta_{ij}^+\}$。因此， β_i 或 β_{ij}^+ 必须作为 γ_q 出现在 $q > 1$中。令 $p > 1$ 为满足 $\gamma_p \in \{\beta_i, \beta_{ij}^+\}$的最小值。

如果 $\gamma_p = \beta_{ij}^+$ 那么

$$(\underline{\lambda} + \varepsilon_j, (\beta_{ij}^+)^\vee) = (\underline{\nu}, (\beta_{ij}^+)^\vee) = 1 + m_p\ell.$$

因此 $\underline{\lambda}_i + \underline{\lambda}_j = m_p\ell$ 并且由此 $2\underline{\lambda}_i = (m_1 + m_p)\ell$。如上所述，对于 $\underline{\lambda} \in X^{1,}{}_\rho{}^+$，可得 $r \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$；对于 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,}{}_\rho{}^+$，可得 $r \in (\ell+1)/2 + \ell\mathbb{Z}$。此外，我们看到$\gamma_q \neq \beta_i$对所有 q都成立，因为在这种情况下我们已经有 $s_{\beta_{ij}^+, m'}(\underline{\lambda} + \varepsilon_j) = \underline{\mu}$。

如果 $\gamma_p = \beta_i$ 那么

$$(\underline{\lambda} + \varepsilon_j, (\beta_i)^\vee) = (\underline{\nu}, (\beta_i)^\vee) - 2.$$

但是，假设 H_{β_i, m_p} 严格位于这些单房之间，因此对于$k \in \{1, 2, 3\}$，$(\underline{\nu}, (\beta_i)^\vee) = k + m_p\ell$（$k = 4$ 不可能，因为在这种情况下 $\underline{\mu}$ 会落在 H_{β_i, m_p} 上）。于是 $(\underline{\lambda} + \varepsilon_j, (\beta_i)^\vee) = k - 2 + m_p\ell$。

(1) 若 $k = 1$，则 H_{β_i, m_p} 已经被穿过，这不可能成立。(2) 若 $k = 2$，则 $\underline{\lambda} + \varepsilon_j$ 位于 H_{β_i, m_p} 上，且在 s_{β_i, m_p} 作用下不变，因此 β_{ij}^+ 必须出现在后续的 γ 序列中，论证同上。(3) 若 $k = 3$，则有 $s_{\beta_i, m_p}(\underline{\lambda} + \varepsilon_j) = \underline{\lambda} + \varepsilon_j - \varepsilon_i$。但是，除 $\gamma_q = \beta_{ij}^+$ 外，$\underline{\lambda} + \varepsilon_j - \varepsilon_i$, $\gamma_q^\vee) = (\underline{\mu}, \gamma_q^\vee)$ 对于 $q > p$ 成立；对于 β_{ij}^+，则有 $(\underline{\lambda} + \varepsilon_j - \varepsilon_i, (\beta_{ij}^+)^\vee) = (\underline{\lambda}, (\beta_{ij}^+)^\vee)$。因此，对于所有满足 $q > p$ 和 $\gamma_q \neq \beta_{ij}^+$ 的 H_q，$\underline{\lambda} + \varepsilon_j - \varepsilon_i$ 已经与 $\underline{\mu}$ 位于同一半空间中；当 $q > p$ 和 $\gamma_q = \beta_{ij}^+$ 时，它位于超平面 H_q 上。因此，唯一尚未穿过的超平面是 H_{p+1}，且必有 $\gamma_{p+1} = \beta_{ij}^+$，但 $s_{\beta_{ij}^+, m_{p+1}}(\underline{\lambda} + \varepsilon_j - \varepsilon_i) = \underline{\lambda} + \varepsilon_j - \varepsilon_i \neq \underline{\mu}$，这与廊道的构造矛盾。

剩余情形：对于 γ_1，其余情形都可按照前一种情形以同样的方式处理，只需对出现的符号稍作调整，整体论证仍然相同。

反过来，对于 $\underline{\lambda} \in X^{1,}{}_\rho{}^+$和 $r \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$, $\underline{\lambda}_i = m\ell$，其中某个 m。因此 $(\underline{\lambda} + \varepsilon_i, \beta_i^\vee) = 2\underline{\lambda}_i + 2 = 2 + 2m\ell$。于是 $s_{\beta_i,\ 2m}(\underline{\nu}) = \underline{\mu}$，所以 ν 和 μ 相连。

对于 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,}{}_\rho{}^+$和 $r \in (\ell+1)/2 + \ell\mathbb{Z}$, $\underline{\lambda}_i = \ell/2 + m\ell$。因此 $(\underline{\lambda} + \varepsilon_i, \beta_i^\vee) = 2\underline{\lambda}_i + 2 = 2 + (2m + 1)\ell$。于是 $s_{\beta_i,\ 2m+1}(\underline{\nu}) = \underline{\mu}$，所以 ν 和 μ 相连。□

与类型 C 不同， λ 可以通过应用一个算子与权重 μ 相连。

引理 5.7. 设 $\underline{\lambda} \in X^{1,}{}_\rho{}^+$，且 ℓ 为奇数。假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 μ 和 λ 相连，当且仅当 $r \in \ell/2 + \ell\mathbb{Z}$。

假设 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 ν 和 λ 相连，当且仅当 $r \in \ell/2 + \ell\mathbb{Z}$。

证明. 取定 i，使其满足 $\underline{\mu} = \underline{\lambda} - \varepsilon_i$，其中 $\underline{\lambda}_i = r + 1/2$。

现在假设 μ 和 λ 相连。$(\underline{\lambda} - \underline{\mu}, \beta^\vee)$ 的绝对值只能在 $\beta = \beta_i$ 时为 2。因此存在一个超平面 $H_{\beta_i, m}$，严格位于二者之间，因而 $(\underline{\lambda}, \beta_i^\vee) = 2\underline{\lambda}_i = 1 + m\ell$。由于 $2\underline{\lambda}_i$ 是偶整数且 ℓ 为奇数， m 也是奇数。因此我们得到 $r = \ell/2 + \frac{m-1}{2}\ell \in \ell/2 + \ell\mathbb{Z}$。

如果 $r \in \ell/2 + \ell\mathbb{Z}$ 那么 $\underline{\lambda}_i = (\ell+1)/2 + m\ell$ 对于某个 $m \in \mathbb{Z}$。因此 $(\underline{\lambda}, \beta_i^\vee) = 1 + (2m + 1)\ell$，所以 λ和 μ 相连。

考虑到在这种情况下 $\mathsf{e}_r\underline{\nu} = \underline{\lambda}$， $\underline{\nu}$ 的情形也随之得出。 □

下一个引理的证明与引理 5.7 完全类似。

引理 5.8. 设 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,}{}_\rho{}^+$，且 ℓ 为奇数。假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么，当且仅当 $r \in \ell\mathbb{Z}$时， μ 和 λ相连。

假设 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 已定义。当且仅当 $r \in \ell\mathbb{Z}$ 时， ν 和 λ 相连。

5.3. 奇数 ℓ 的量子对称对作用。与上一节一样，我们在本节中始终假设

$$\ell > 3 \text{ is odd.}$$

回顾第 3.1 节中的各种算子和计数统计。与类型C不同，我们需要对两类指标集都使用算子。

线性算子的定义与第 4.3 节中类型 C 的定义非常接近。唯一的区别在于，第 3.4 节定义的 $\mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 中被 Θ 固定的元素。注意，当 ℓ 为奇数时，$\Theta(\overline{i}) = \overline{i}$ 意味着，对于 $\overline{i} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$ 有 $\overline{i} = \overline{\ell/2}$，对于$\overline{i} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$有 $\overline{i} = \overline{0}$。这对应于第 3.4 节奇数型 Dynkin 图中的两个固定节点。

定义 5.9。假设 ℓ 为奇数。对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，令 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$；对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$，令 $\overline{p} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$。若$\Theta(\overline{p}) \neq \overline{p}$，则定义

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = v^{T_\ell^{e-f}(-\overline{p},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{p}} v^{R_\ell^{e-f}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\,\underline{a} + \sum_{j\in-\overline{p}} v^{L_\ell^{f-e}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\,\underline{a}.$$

$$\hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}}\underline{a} = v^{T_\ell^{f-e}(\overline{p},\underline{a})} v^{T_\ell^{e-f}(-\overline{p},\underline{a})} \underline{a}.$$

若 $\Theta(\overline{p}) = \overline{p}$ 定义

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\underline{a} = v^{-1} v^{T_\ell^{e-f}(\overline{p},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{p}} v^{R_\ell^{e-f}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\underline{a} + \sum_{j\in\overline{p}} v^{L_\ell^{f-e}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\underline{a} + v^{T_\ell^{e-f}(\overline{p},\underline{a})}\underline{a}.$$

最后，对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ 和 $z \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$，定义

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}^{[z]}\underline{a} = v^{-1} v^{T_\ell^{e-f}(\overline{0},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{0}} v^{R_\ell^{e-f}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\underline{a} + \sum_{j\in\overline{0}} v^{L_\ell^{f-e}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\underline{a} + \delta_{\underline{a}(z),0} v^{T_\ell^{e-f}(\overline{0},\underline{a})}\underline{a},$$

其中 $\delta_{\underline{a}(z),\,0} = 1 - \underline{a}(z)$。这定义了作用于 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}^{1/2}$ 上的线性算子；对于任意 N，它们分别限制在 $\mathcal{F}_N$和$\mathcal{F}_N^{1/2}$ 上。

线性算子 $\hat{}\mathrm{B}_{\overline{0}}^{[z]}$ 不属于仿射量子对称对的像。它是描述其与张量积分解之间关系所必需的。将此与引理 4.9 中的陈述进行比较，除$\Theta(\underline{p}) = \underline{p}$这一情形外，相同的对应关系均成立。

引理 5.10。设 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$（分别为 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$）和 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$（分别为 $\overline{p} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$），且$\Theta(\underline{i}) = \underline{i}$，则

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = v^{-1}\hat{\mathrm{E}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{K}}_{\overline{p}}^{-1}\,\underline{a} + \hat{\mathrm{F}}_{\overline{p}}\,\underline{a} + \hat{\mathrm{K}}_{\overline{p}}^{-1}\underline{a}$$

以及对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ 和 $z \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}^{[z]}\,\underline{a} = v^{-1}\hat{\mathrm{E}}_{\overline{p}}\hat{\mathrm{K}}_{\overline{p}}^{-1}\,\underline{a} + \hat{\mathrm{F}}_{\overline{p}}\,\underline{a} + \delta_{\underline{a}(z),0}\hat{\mathrm{K}}_{\overline{p}}^{-1}\underline{a}$$

注 5.11. 在 [Kol14] 中，使用形如 $v^{-1}\hat{}\mathrm{E}_{\overline{p}}\hat{}\mathrm{K}_{\overline{p}}^{-1} + \hat{}\mathrm{F}_{\overline{p}} + \hat{}\mathrm{K}_{\overline{p}}^{-1}$ 的生成元的量子对称对称为非标准量子对称对。而只使用类型 C 中出现的那种形式的生成元（即不含额外直和项 $\hat{}\mathrm{K}_{\overline{p}}^{-1}$）的量子对称对称为标准量子对称对。

分别对 $\mathcal{F}^1(B_N)$ 和 $\mathcal{F}^1(B_N)$ 作用生成元时，都有可能出现一个不属于该子空间的单一直和项。

注 5.12. 在 $\mathcal{F}_N$ 的情况下，算子 $\hat{}\mathrm{B}_{\overline{i}}$ 保持子空间 $\mathcal{F}^1(B_N)$ 不变，但 $\hat{}$ 除外。对于算子 $\mathrm{B}^{\overline{1/2}}$，原因同样是它包含一个不会保持 $\mathcal{F}^1(B_N)$ 不变的直和项 $\mathrm{f}^{1/2}$。而对于 $\mathcal{F}_N^{1/2}$，算子 $\hat{}\mathrm{B}^{\overline{0}}$ 和 $\hat{}\mathrm{B}_{\overline{0}}^{[1/2]}$ 不保持该子空间不变，这是由于直和项 f_0。

于是，算子之间的关系如下。

ˆ 命题 5.13. 假设 ℓ odd 且 I $\in \{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}\}$。线性算子 $\{\mathrm{B}_{\overline{p}} \mid \overline{p} \in \mathrm{I}\}$ˆ和 $\{\mathrm{L}_{\overline{p}} \mid \overline{p} \in \mathrm{I}$ $\Theta(\overline{p}) \neq \overline{p}\}$ 满足定义 3.14 中给出的 $B_v(\mathrm{I}\ \Theta)$ 的关系，其中以同名算子替换生成元。

ˆ 证明. 定义 3.14 中不涉及固定位置的算子 $\mathrm{B}_{\overline{p}}$ for$\overline{p}$ 的所有关系，与类型 C 中的关系完全相同，因此由命题 4.11 可知这些关系成立。注意，对于固定位置 $\overline{p}$，新算子 ˆ$\mathrm{B}_{\overline{p}}$ 仅比引理 4.9 中的描述多出一项 ˆ$\mathrm{K}_{\overline{p}}^{-1}$。它与所有 ˆ$\mathrm{L}_{\overline{a}}$ 的交换子关系显然成立。它与“相距较远”的 ˆ$\mathrm{B}_{\overline{a}}$ 的交换子关系也显然成立。因此，剩下的只有非平凡的量子 Serre 关系。只有两个关系涉及固定指标，验证它们只需进行几行简单计算。□

如同在类型 C 中一样，这一切最终结合为以下结果。对于 $X^{1,\,+}$ 中的权，结论完全类似于定理 4.12，证明也完全相同。

定理 5.14. 假设 ℓ 为奇数。存在 $B_v(\mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}, \Theta)$ 在 $\mathcal{F}_N$ 上的作用，使得对于 $\lambda \in X^{1,\,+}$，$[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)]$ 在 $[U_{\mathrm{q}}$-模$]$ 中按韦伊模类进行的分解可由以下结果得到

$$\sum_{\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}} \underline{\lambda}$$

通过投影到子空间 $\mathcal{F}(C_N)$ 并对 $v = 1$ 求值。

此外，若 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\mu)]$ 和 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\nu)]$ 出现在 μ 的分解中，且 ν 相连，那么存在唯一的 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$，使得 $\underline{\mu}$ 和 $\underline{\nu}$ 出现在 $\mathrm{B}_{\overline{p}}\underline{\lambda}$ 中。

对于 $\lambda \in X^{1/2,\,+}$，张量积分解规则对 λ_N 的依赖使得这一点不那么清晰。

定理 5.15。假设 ℓ 为奇数。存在 $\mathcal{F}_N^{1/2}$ 上的 $B_v(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, \Theta)$ 作用，使得对于 $\lambda \in X^{1/2,\,+}$，$[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)]$ 在 $[U_{\mathrm{q}}$-模$]$ 中关于韦伊模各类的分解可由以下结果得到

$$\sum_{\overline{p} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}} \underline{\lambda}$$

若 $\lambda_N > 0$，则由以下结果得到

$$\sum_{\overline{p} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, \overline{p} \neq \overline{0}} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}} \underline{\lambda} + \hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}^{[1/2]} \underline{\lambda}$$

若 $\lambda_N = 0$，则通过投影到子空间 $\mathcal{F}(C_N)$ 并计算 $v = 1$ 得到。

若 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\mu)]$ 和 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\nu)]$ 出现在 μ 的分解中，且 ν 相连，则存在唯一的 ˆ $\overline{p} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，使得 $\underline{\mu}$ 和 $\underline{\nu}$ 出现在 $\mathrm{B}_{\overline{p}}\underline{\lambda}$ 中。

证明。与定理 5.14 唯一的区别是，在 $\lambda \in X^{1/2,\,+}$ 的情况下，张量积 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)]$ 的类包含直和项 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)]$，当且仅当 $\lambda_N > 0$。但是 ˆ$\mathrm{B}_{\overline{0}}\underline{\lambda}$ 总是包含 $\underline{\lambda}$ 的非零倍数作为直和项，因此在 $\lambda_N = 0$ 的情况下必须改为应用 ˆ$\mathrm{B}_{\overline{0}}^{[1/2]}$。□

设 $0 \leq k < \ell$ 和 $N = m\ell + k$ 满足 $m \geq 0$。可以使用定义 4.13 中的映射将 $\mathcal{F}^1(B_{m\ell+k})$ 嵌入 $\mathcal{F}_k^1$。此时，命题 4.14 的类似结论立即成立。

在 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H},N}$ 的情况下，定义 4.13 中的映射将 $\mathcal{F}^{1/2}(B_{m\ell+k})$ 嵌入 $\mathcal{F}_k^{1/2}$。为表述相应的陈述，定义：若 $\overline{p} \neq \overline{0}$，则对 $z \in 1/2 + \ell\mathbb{Z}$，ˆ$\mathrm{B}_{\overline{p}}^{[z]} = $ ˆ$\mathrm{B}_{\overline{p}}$。

命题 5.16. 设 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H},k}$ 和 $r \geq 0$。则对于 $m \gg 0$，当 $\lambda \in X^{1/2,+}$ 时，$\underline{a} = \underline{\lambda}^{(m)}$ 是 U_{q} 的 $B_{m\ell+k}$ 型。此外，存在系数为非负整数的 Laurent 多项式 $d_{\lambda,\mu}(v)$，对于 $\mu \in X^{1/2,+}$，使得

$$\sum_{(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^r} \hat{\mathrm{B}}^{[z]}_{\overline{p}_1} \cdots \hat{\mathrm{B}}^{[z]}_{\overline{p}_r} \underline{\lambda}^{(m)} = \sum_{\mu \text{ dominant for } U_{\mathrm{q}}} d_{\lambda,\mu}(v) \underline{\mu}^{(m)},$$

与 $z = 1/2 - m\ell$ 和

$$[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)^{\otimes r}] = \sum_{\mu \text{ dominant for } U_{\mathrm{q}}} d_{\lambda,\mu}(1)[\Delta_{\mathrm{q}}(\mu)].$$

证明。注意，与命题 4.14 唯一的区别在于，这里必须使用 $\hat{\mathrm{B}}^{[z]}_{\overline{0}}$，而不是 $\mathrm{B}_{\overline{0}}$。我们已经知道，对于 $m \gg 0$，${}^{r}\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}_1} \cdots \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}_r} \underline{\lambda}^{(m)}$ 包含在 $\mathcal{F}^{1/2}(B_{m\ell+k})$ 的平移嵌入中，因此直和项 ${}^{r}\hat{\mathrm{B}}^{[z]}_{\overline{p}_1} \cdots \hat{\mathrm{B}}^{[z]}_{\overline{p}_r} \underline{\lambda}^{(m)}$ 也包含在其中。

在 $m \gg 0$ 的情况下，所有满足 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\nu)$ 出现在 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)^{\otimes s}]$ 中（对于 $0 \leq s < r$）的权 ν 都具有性质 $\nu_{k+m\ell} = 0$，因此 $\underline{\nu}(1/2) = 1$。因此，$[\Delta_{\mathrm{q}}(\nu) \otimes \Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)]$ 绝不会包含直和项 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\nu)]$。因此，根据定理 5.15，必须使用 $\hat{\mathrm{B}}^{[1/2]}_{\overline{0}} \underline{\nu}$ 来得到张量积分解。平移后，这就变成算子 $\hat{\mathrm{B}}^{[z]}_{\overline{0}} \underline{\nu}$。□

5.4. 偶数 ℓ 的链接与算子。ℓ 为偶数时，第一个不同之处在于，对于形如 $\beta = \beta^{\pm}_{\overline{ij}}$ 的根 $\ell_\beta = 2$。在奇数情形中，这些根导致所有指标都必须对 ℓ 取模才能得到算子，并且必须将 e_p 和 f_q 按照 $p + q \in \ell\mathbb{Z}$ 分组。现在，这被处处使用 $\ell/2$ 的类似陈述所取代。因此，我们必须在本节中始终作出以下假设

$$\ell \text{ is even and } \ell/2 > 3.$$

与之前一样，这是为了避免较小 $\ell/2$ 时出现量子对称对；关于链接的一般论证仍然相同。

具体而言，可以得到以下两个陈述。

引理 5.17。设 $\underline{\lambda} \in X^+_\rho$ 和 ℓ 均为偶数。假设对于 $r \neq s$，$\underline{\mu} = \mathrm{e}_r \underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathrm{e}_s \underline{\lambda}$ 均有定义。那么，μ 和 ν 相连，当且仅当 $r \in s + (\ell/2)\mathbb{Z}$。

假设对于 $r \neq s$，$\underline{\mu'} = \mathrm{f}_r \underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu'} = \mathrm{f}_s \underline{\lambda}$ 均有定义。那么，μ' 和 ν' 相连，当且仅当 $r \in s + (\ell/2)\mathbb{Z}$。

引理 5.18. 设 $\underline{\lambda} \in X^+_\rho$ 和 ℓ 为偶数。假设对于 $r + 1 \neq s$，$\underline{\mu} = \mathrm{e}_r \underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathrm{f}_s \underline{\lambda}$ 有定义。那么，μ 和 ν 相连，当且仅当 $r \in -s + (\ell/2)\mathbb{Z}$。

引理 5.6 的类似结论现在取决于 $\ell/2$ 本身是奇数还是偶数。考察第 2.3 节中 $r = \ell/2$ 对应的 Dynkin 图，就能理解这一点。对于 $X^{1,\ \rho\ +}$，具有 $\ell/2$ 个节点的 Dynkin 图总是满足 $\overline{1/2}$ 与 Θ 相连这一性质；但在 $\ell/2$ 为偶数的情况下，$\overline{\ell/4}$ 是否固定取决于 $\ell/2$ 的奇偶性；而在 $\ell/2$ 为奇数的情况下，$\overline{\ell-2/4}$ 是否也与 Θ 相连同样取决于此。类似地，对于 $X^{1/2,\ \rho\ +}$，具有 $\ell/2$ 个节点的 Dynkin 图中，0 总是固定的；但 Dynkin 图“另一侧”是否有另一个固定标签，还是有一对相连的 Θ，取决于 $\ell/2$ 的奇偶性。因此，引理 5.5 的类似结论有四种可能的组合。

引理 5.19. 设 ℓ 为偶数。

(1) 假设 $\ell/2$ 为奇数，$\underline{\lambda} \in X^{1,\ \rho\ +}$，且 $\underline{\mu} = \mathrm{e}_{r-1} \underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathrm{f}_r \underline{\lambda}$ 已定义。当且仅当 $r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$ 时，μ 和 ν 相连。(2) 假设 $\ell/2$ 为偶数，$\underline{\lambda} \in X^{1,\ \rho\ +}$，且 $\underline{\mu} = \mathrm{e}_{r-1} \underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathrm{f}_r \underline{\lambda}$ 已定义。若 μ 和 ν 相连，则 $r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$ 或 $r \in \ell+2/4 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。

(3) 假设 $\ell/2$ 为奇数，$\underline{\lambda} \in X^{1/2,\rho}{}^{+}$，且 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_{r-1}\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 已定义。若 μ 和 ν 相连，则 $r \in \ell+2/4 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。(4) 假设 $\ell/2$ 为偶数，$\underline{\lambda} \in X^{1/2,\rho}{}^{+}$，且 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_{r-1}\underline{\lambda}$ 和 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 已定义。那么 μ 和 ν 不相连。

证明。这里我们只概述证明，因为对于每种情况，都必须按照引理 5.5 证明中的相同步骤进行。

对于 $\ell/2$ 奇数和 $\underline{\lambda} \in X^{1,\rho}{}^{+}$证明几乎逐字相同，因此结论也相同。

对于 $\ell/2$ 偶数和 $\underline{\lambda} \in X^{1,\rho}{}^{+}$可以得到：当最短廊道的长度为一时，$r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$，且 $\gamma_1 = \beta_i$。但在其余 γ_1 不同的情况下，若引理 5.5 证明中出现的 $m_1 + m_p$ 为偶数，则得到 $r \in 1/2 + (\ell/2)\mathbb{Z}$；若 $m_1 + m_p$ 为奇数，则得到 $r \in (\ell+2)/4 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。若为 $r \in (\ell+2)/4 + (\ell/2)\mathbb{Z}$，则无法得到逆命题。这里，对于 β_i，利用超平面上的反射这一论证行不通，因为 $\ell_{\beta_i} = \ell$。

当 $\ell/2$ 为奇数且 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,\rho}{}^{+}$ 时，长度为 1 的最短廊道会导致矛盾，而其他情况会给出 $r \in \ell+2/4 + (\ell/2)\mathbb{Z}$。注意，如果 $\ell/2$ 是奇数，那么 $\ell+2/4$ 是整数，因此 r 有定义。

最后，当 $\ell/2$ 为偶数且 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,\rho}{}^{+}$ 时，在相联权的假设下总会导致矛盾。□

因此，接下来只需比较 $\underline{\lambda}$ 与算子 e_i 或 f_i 作用后的像。当 $\underline{\lambda} \in X^{1,\rho}{}^{+}$ 时，情况就变得相当简单。

引理 5.20。设 $\underline{\lambda} \in X^{1,\rho}{}^{+}$，且 ℓ 为偶数。假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 μ 与 λ 不相联。假设 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 ν 与 λ 不相联。

证明。固定 i via $\underline{\mu} = \underline{\lambda} - \varepsilon_i$ and $r + 1/2 = \underline{\lambda}_i$。然后，如引理 5.7 的证明所示，只需考虑根 β_i。并假设权与超平面 $H_{\beta_i,m}$ 相连，且必须存在严格位于这些 alcove 之间的超平面。因此可得

$$(\underline{\lambda}, \beta_i^\vee) = 2\underline{\lambda}_i = 1 + m\ell$$

对某个 $m \in \mathbb{Z}$ 成立。但 $2\underline{\lambda}_i$ 是偶整数，而 $1 + m\ell$ 始终为奇数，因此矛盾。

同样，第二种情况也成立，因为若 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义，则 $\mathsf{e}_r\underline{\nu} = \underline{\lambda}$ 成立。 □

对于 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,\rho}{}^{+}$ 的情况，其情形类似于 ℓ 为奇数的情况。

引理 5.21。设 $\underline{\lambda} \in X^{1/2,\rho}{}^{+}$，且 ℓ 为偶数。假设 $\underline{\mu} = \mathsf{e}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 μ 与 λ 相连，当且仅当 $r \in (\ell/2)\mathbb{Z}$。

假设 $\underline{\nu} = \mathsf{f}_r\underline{\lambda}$ 有定义。那么 ν 与 λ 相连，当且仅当 $r \in (\ell/2)\mathbb{Z}$.

证明。我们按照引理 5.20 的证明进行推导，得到相同的方程

$$(\underline{\lambda}, \beta_i^\vee) = 2\underline{\lambda}_i = 1 + m\ell$$

对于某个 $m \in \mathbb{Z}$。但现在 $2\underline{\lambda}_i$ 是奇整数，因此 $\underline{\lambda} = 1/2 + m\ell/2$，这进而意味着 $r \in (\ell/2)\mathbb{Z}$。

反过来，若 $r \in (\ell/2)\mathbb{Z}$，则 $(\underline{\lambda}, \beta_i^\vee) = 2\underline{\lambda}_i = 1 + m\ell$ 对于某个 $m \in \mathbb{Z}$ 成立，因此 $s_{\beta_i,\, m}(\underline{\lambda} = \underline{\mu}$ 且 λ 与 μ 相连。

和之前一样，关于 f_r 的情形可利用假设下的 $\mathsf{e}_r\underline{\nu} = \underline{\lambda}$ 来处理。 □

5.5. 偶数 ℓ 的量子对称对作用。本节中我们始终假设

$$\ell \text{ is even and } \ell/2 > 3.$$

在这种情况下，量子对称对的作用取决于两个不同的选择。首先， $\ell/2$ 是偶数还是奇数；其次，考察的是 $X^{1,\ \rho\ +}$还是$_{X^{1/2,\ \rho\ \ +}}$中的权。我们仅列出不同情况下线性算子的定义。注意，对于之前描述的仿射型 A Dynkin 图，我们得到了所有可能的量子对称对；也就是说，可以有两个固定标签、两对由 Θ 相连的标签，或者各有一个。在最后一种情况下，我们将看到它们有所不同：其中一个是标准量子对称对，另一个是非标准量子对称对。

现在我们考虑 $\mathbb{Z}/(\ell/2)\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{H}/(\ell/2)\mathbb{Z}$，其自同构为通常的 Θ。

定义 5.22。假设 ℓ 为偶数。对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$，令 $\overline{p} \in \mathbb{H}/(\ell/2)\mathbb{Z}$；对于 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$，令 $\overline{p} \in \mathbb{Z}/(\ell/2)\mathbb{Z}$。于是定义 $\overline{p} \neq \Theta(\overline{p})$

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = v^{T^{e-f}_{\ell/2}(-\overline{p},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{p}} v^{R^{e-f}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\,\underline{a} + \sum_{j\in-\overline{p}} v^{L^{f-e}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\,\underline{a}.$$

$$\hat{\mathrm{L}}_{\overline{p}}\,\underline{a} = v^{T^{f-e}_{\ell/2}(\overline{p},\underline{a})} v^{T^{e-f}_{\ell/2}(-\overline{p},\underline{a})} \underline{a}.$$

对于 $\overline{p} = \Theta(\overline{p})$，但 $0 \notin \overline{p}$ 定义

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\underline{a} = v^{-1} v^{T^{e-f}_{\ell/2}(\overline{p},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{p}} v^{R^{e-f}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\underline{a} + \sum_{j\in\overline{p}} v^{L^{f-e}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\underline{a},$$

而对于 $0 \in \overline{i}$ $z \in 1/2 + (\ell/2)$，$\mathbb{Z}$ 定义

$$\hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}}\underline{a} = v^{-1} v^{T^{e-f}_{\ell/2}(\overline{p},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{p}} v^{R^{e-f}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\underline{a} + \sum_{j\in\overline{p}} v^{L^{f-e}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\underline{a} + v^{T^{e-f}_{\ell/2}(\overline{p},\underline{a})} \underline{a},\ \textit{and}$$

$$\hat{\mathrm{B}}^{[z]}_{\overline{0}}\underline{a} = v^{-1} v^{T^{e-f}_{\ell/2}(\overline{0},\underline{a})} \sum_{j\in\overline{0}} v^{R^{e-f}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{e}_j\underline{a} + \sum_{j\in\overline{0}} v^{L^{f-e}_{\ell/2}(j,\underline{a})} \mathrm{f}_j\underline{a} + \delta_{\underline{a}(z),0} v^{T^{e-f}_{\ell/2}(\overline{0},\underline{a})} \underline{a}.$$

这定义了作用在 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{1/2}$ 上的线性算子，对于任意 N，它们分别限制为 $\mathcal{F}_N$ 和 $\mathcal{F}^{1/2}_N$.

显然，当 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ 和 $\ell/2$ 为偶数时，不存在固定指标 $\overline{p} \in \mathbb{H}/(\ell/2)\mathbb{Z}$，而是有两对指标彼此 Θ-相连，即 $\pm\overline{1/2}$ 和 $\overline{\ell\pm 2/4}$。

当 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ 和 $\ell/2$ 为奇数时，指标对 $\pm\overline{1/2}$ 仍然是 Θ-相连的，但 $\overline{\ell/4}$ 是固定指标。不过，这个量子对称对是标准量子对称对，与类型 C中的情形相同。

当 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ 和 $\ell/2$ 为偶数时，0 和 $\overline{\ell/4}$ 都是固定的，但对应于 0 的生成元使其成为非标准量子对称对，与奇数 ℓ时类型 B 中的情形相同。

当 $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}$ 和 $\ell/2$ 为奇数时，对于固定指标 0，我们再次有一个非标准算子，以及一对由 Θ相连且满足$\overline{\ell/4}$的指标。

此处我们省略引理 5.10 的类似结论；它只是引理 4.9 和 5.10 的组合，具体取决于固定指标的生成元是按类型 C 还是按类型 B定义的。因此，我们得到相应的作用

命题 5.23。假设 ℓ 为偶数，且 $\mathrm{I} \in \{\mathbb{Z}/(\ell/2)\mathbb{Z}, \mathbb{H}/(\ell/2)\mathbb{Z}\}$。线性算子 $\hat{}\ \hat{}\{\mathrm{B}_{\overline{p}} \mid \overline{p} \in \mathrm{I}\}$ 和 $\{\mathrm{L}_{\overline{p}} \mid \overline{p} \in \mathrm{I}\ \Theta(\overline{p}) \neq \overline{p}\}$ 满足定义 3.14 中给出的 $B_v(\mathrm{I}\ \Theta)$ 的关系，只需将同名生成元替换为相应算子。

根据算子的定义，这可以由 type$C$ 中的情形或 type B 中 ℓ 为奇数的情形推出。于是，关于作用以及张量积分解的相应定理便可立即表述如下。

定理 5.24。假设 ℓ 为偶数。存在 $B_v(\mathbb{H}/(\ell/2)\mathbb{Z}, \Theta)$ 在 $\mathcal{F}_N$ 上的一个作用，使得对于 $\lambda \in X^{1,+}$，$[\Delta_q(\lambda) \otimes \Delta_q(\omega_1)]$ 在 $[U_q$-模$]$ 中关于 Weyl 模类的分解可由下式得到

$$\sum_{\overline{p} \in \mathbb{H}/(\ell/2)\mathbb{Z}} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}\underline{\lambda}} + \underline{\lambda}$$

通过投影到子空间 $\mathcal{F}(C_N)$ 并计算 $v = 1$。

此外，若 $[\Delta_q(\mu)]$ 和 $[\Delta_q(\nu)]$ 出现在 μ 的分解中，且 ν 相连，则存在唯一的 $\overline{p} \in \mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$，使得 $\underline{\mu}$ 和 $\underline{\nu}$ 出现在 $\mathrm{B}_{\overline{p}\underline{\lambda}}$ 中。

证明。这与定理 5.14 完全类似。但当 $\ell/2$ 为偶数时，不存在能产生 $\underline{\lambda}$ 的倍数的算子；当 $\ell/2$ 为奇数时，固定指标对应的线性算子是标准的，也就是说，同样不会产生 $\underline{\lambda}$ 的倍数。然而，由于 $\lambda \in X^{1,+}$，张量积在格罗滕迪克群中总是包含 $[\Delta_q(\lambda)]$ 的类，因此必须直接将其加上。□

定理 5.15 的类似结果如下。

定理 5.25。假设 ℓ 为偶数。存在 $B_v(\mathbb{Z}/(\ell/2)\mathbb{Z}, \Theta)$ 在 $\mathcal{F}_N^{1/2}$ 上的作用，使得对于 $\lambda \in X^{1/2,+}$，$[U_q$-模中 $[\Delta_q(\lambda) \otimes \Delta_q(\omega_1)]$ 关于韦伊模各类的分解可由以下方式得到

$$\sum_{\overline{p} \in \mathbb{Z}/(\ell/2)\mathbb{Z}} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}\underline{\lambda}}$$

若 $\lambda_N > 0$ 且来自

$$\sum_{\overline{p} \in \mathbb{Z}/(\ell/2)\mathbb{Z}, \overline{p} \neq \overline{0}} \hat{\mathrm{B}}_{\overline{p}\underline{\lambda}} + \hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}^{[1/2]}\underline{\lambda}$$

若 $\lambda_N = 0$，通过投影到子空间 $\mathcal{F}(C_N)$ 并计算 $v = 1$。

若 $[\Delta_q(\mu)]$ 和 $[\Delta_q(\nu)]$ 出现在 μ 的分解中，且与 ν 相连，那么存在唯一的 $\overline{p} \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，使得 $\underline{\mu}$ 和 $\underline{\nu}$ 出现在 $\mathrm{B}_{\overline{p}\underline{\lambda}}$中。

注意，当 $\ell/2$ 为偶数且对于 $\lambda \in X^{1/2,+}$时，存在算子 $\hat{\mathrm{B}}^{\overline{\ell/4}}$，它具有一个固定指标，但其形式与类型 C中的相同，因此不会产生多个 $\underline{\lambda}$。因此，只需将 $\hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}\underline{\lambda}$ 替换为 $\hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}^{[1/2]}\underline{\lambda}$。

我们略去命题 4.14 和命题 5.16 的类似情形的讨论。对于空间 $\mathcal{F}_k$，其构造与类型 C 类似；对于 $\mathcal{F}_k^{1/2}$，其构造与类型 B 类似（其中 ℓ 为奇数），并且包括相同的操作。

6. Type D and beyond

D 型情形是第二作者硕士论文的一部分，相关细节将另行发表。我们简要概述这一情形中的情况。

在 D_N $(N > 3)$ 型中，ε_i 的选取和不变双线性形式与 B 型完全相同。正根可以选为

$$\Phi^+ = \{\beta_{i,j}^{\pm} = \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq N\}.$$

注意，所有根都是短根，因此等于其自身的余根，并且对所有正根都有 $\ell_\beta = \ell$。整权具有与类型 B 中类似的结构，其中

$$X^{1,+} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ and } \lambda_{N-1} \geq |\lambda_N|\} \text{ and}$$
$$X^{1/2,+} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \mid \lambda_i \in \mathbb{H}, \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ and } \lambda_{N-1} \geq |\lambda_N|\}.$$

由 $\rho=(N-1)\varepsilon_1+(N-2)\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{N-1}\in X^{1/2,+}$ 我们从而得到

$$X_\rho^{1,+}=\{(\underline{\lambda}_1,\ldots,\underline{\lambda}_N)\mid \underline{\lambda}_i\in\mathbb{H},\ \underline{\lambda}_i>\underline{\lambda}_{i+1},\ \text{and } \lambda_{N-1}\geq|\lambda_N|\},$$
$$X_\rho^{1/2,+}=\{(\underline{\lambda}_1,\ldots,\underline{\lambda}_N)\mid \underline{\lambda}_i\in\mathbb{Z},\ \underline{\lambda}_i>\underline{\lambda}_{i+1},\ \text{and } \lambda_{N-1}\geq|\lambda_N|\}.$$

类比于 B, D 型的组合 Fock 空间分解为两个直和项$\mathcal{F}^{1/2}(D_N)$和 $\mathcal{F}^1(D_N)$。此外， D型中的张量积分解与命题 4.1 中的 C 型相同；特别是，不会像 B型那样出现带有 $\Delta_v(\lambda)$的直和项这一复杂情况。

注 6.1。 λ 支配的条件并不取决于 λ_N 本身，而是取决于其绝对值。因此，$(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1},\lambda_N)+\varepsilon_N$是支配的，当且仅当$(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1},-\lambda_N)-\varepsilon_N$ 是支配的。用序列的语言来说，这可以解释为：应在位置 $|\underline{\lambda}_N|$ 放置一个 1，同时还需要记录 λ_N 的符号。

对于 $X^{1/2,+}_\rho$，根据注 6.1 可知，可以将 $\mathcal{F}^{1/2}(D_N)$ 嵌入 $\mathcal{F}^{1/2,+}_N\oplus\mathcal{F}^{1/2,-}_N$，其中两个空间都与 $\mathcal{F}^{1/2}_N$ 同构。为此，令$\underline{\lambda}'$等于$\underline{\lambda}$，但$\underline{\lambda}'_N=|\underline{\lambda}_N|$除外。于是，当 $\underline{\lambda}_N>0$时，$\underline{\lambda}$映射到 $(\underline{a}_{\underline{\lambda}},0)$，否则映射到 $(0,\underline{a}_{\underline{\lambda}'})$。定义 3.2 中的移动算子定义在 $\mathcal{F}^{1/2,+}_N\oplus\mathcal{F}^{1/2,-}_N$上，因为它们定义在 $\mathcal{F}^{1/2}_N$ 上。

移动算子与链接之间的相互作用类似于类型 C。因此，$\hat{}$ 算子 $\mathrm{B}_{\overline{r}}$ 和 $\mathrm{L}_{\overline{r}}$ 按定义 4.8 给出，只需将指标集从 $\mathbb{H}/\ell\mathbb{Z}$改为 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，并给出 $B_v(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},\Theta)$ 的一个作用。

此外，还引入一个算子 $\hat{\mathrm{B}}$，它在 $\mathcal{F}^{1/2,+}_N$ 和 $\mathcal{F}^{1/2,-}_N$ 之间作用，因为 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1},1/2)-\varepsilon_N=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1},-1/2)$，但二者由同一个序列表示，只是位于不同的分量中。定义：若 $\underline{a}(1/2)=1$，则 $\hat{\mathrm{B}}(\underline{a},0)=(0,\underline{a})$；否则该算子为零。类似地，若 $\underline{a}(1/2)=1$，则 $\hat{\mathrm{B}}(0,\underline{a})=(\underline{a},0)$；否则为零。由此可知，只有 $\hat{\mathrm{B}}$ 和 $\hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}$ 能产生相联权，因此需要考虑 $\hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}+\mathrm{B}_{\overline{0}}$。

定理 5.15 的类似结论仍然成立，区别在于 $\hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}$ 被替换为 $\hat{\mathrm{B}}_{\overline{0}}+\mathrm{B}_{\overline{0}}$。

B. 命题 4.14 中的极限构造在类型 D 中行不通，因为无法将一个满足 $\lambda_N<0$ 的支配权 λ 视为更高秩下的支配权。若限制在这种情形下，实质上便会得到类型 C的组合学。

类型 $X^{1,+}_\rho$的情形会带来额外的复杂性，因为 $\lambda_N=0$ 无法“良好地”嵌入到福克空间之和 $\mathcal{F}^{1,+}\oplus\mathcal{F}^{1,-}$中，其中这些空间的定义与半整数情形相同。取而代之的是，将满足 $\lambda_N=0$ 的 $\underline{\lambda}$ 对角嵌入。这使得定理 4.12 的一个类似结果成为可能，但根据起始权的不同，$(\underline{\lambda},0)$、$(0,\underline{\lambda})$ 或 $(\underline{\lambda},\underline{\lambda})$ 表示 Weyl 模 $[\Delta_{\mathrm{q}}(\lambda)]$ 的等价类；分解中出现的韦伊模也有类似情况。由于与上述相同的原因，极限构造行不通。

注 6.2. 作为对 D 型的总结性说明，可以指出，其组合学计算比 B 型和 C 型更容易，因为它属于单边型。但量子对称对的作用与张量积分解重数的组合学相距更远，因此无法进行极限构造。

D 型中的这种复杂情况与 [ES18] 有些相似。在这里， D 型的情形是从范畴 $\mathcal{O}$ 的角度进行研究的，量子对称对的某些生成元并非以不可分解平移函子的形式作用；而在 B 型的类似情形中，它们则会如此作用。

本文聚焦于非例外李代数。当然，这些一般思想也可以推广到例外情形。一般而言，并没有与表示 $\Delta_{\mathrm{q}}(\omega_1)$ 相对应的明确类比物，即所谓的“自然”表示。例如，在 G_2 型中，可以利用 $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ 的自然表示的特化与量子化，因为 $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ 包含一个 G_2 型李代数作为不动点李代数。但对于其他例外型，并没有类似的对象。

至于量子对称对的类比物，可以合理地预期，在 G_2 型中，作用代数与量子对称对以及一个三阶自同构存在某种关系。这类似于这样一个事实：量子对称对是利用二阶自同构从量子仿射代数构造出来的。其他例外情形中相应的对象会是什么样，或由何而来，目前尚不清楚。

References

[和03] Andersen, H. H. (2003 1 *J. Algebra*). 260 2 15 10 1016 0021 8693 02 00618 量子群在 的根处的强链接原理。: – 。 DOI: 。 /S - ( ) -X [APW91] Andersen, H. H., Polo, P., Wen, K. X. (1991 *Invent. Math.*). 量子代数的表示。 ( ) : – 104 1 1 59 10 1007 01245066 。 DOI: 。/BF[02] 2002 Ari Ariki, S. ( )。

Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会。[AST18] Andersen, H. H., Stroppel, C., Tubbenhauer, D. (2018)。使用 U_q-倾斜模的胞腔结构。

Pacific J. Math. 292 1 21 59 10 2140 2018 292 21 ( ): – 。 DOI: 。/pjm. . . BSWW Bao, [18] 2018 H., Shan, P., Wang, W., Webster, B. ( )。量子对称对的范畴化 I。

Quantum Topol. 9 4 643 714 10 4171 117 ( ): – 。 DOI: 。/QT/ ES Ehrig, M., Stroppel, C. ( )。[18] 2018 Nazarov–Wenzl 代数、余理想子代数与范畴化斜 Howe 对偶。 *Adv. Math.* 331:58–142。DOI: 10.1016/j.aim.2018.01.013。[Hay90] Hayashi, T. (1990)。Clifford 代数和 Weyl 代数的 q-类比——量子包络代数的旋量表示与振子表示。 *Comm. Math. Phys.* 127(1):129–144。[HK02] Hong, J., Kang, S.-J. (2002 *Introduction to quantum groups and crystal bases Volume 42*)。 , 。罗得岛州普罗维 *of Graduate Studies in Mathematics* 登斯：美国数学会。DOI: 10.1090/gsm/042。[Hum90] Humphreys, J. E. (1990 *Reflection groups and Coxeter groups Volume 29 of Cam-*)。 , 。英国剑桥：剑桥 *bridge Studies in Advanced Mathematics* 大学出版社。DOI: 10.1017/CBO9780511623646。[Kac90] Kac, V. G. (1990)。 *Infinite-dimensional Lie algebras*，第 3 版。英国剑桥：剑桥大学出版社。DOI: 10.1017/CBO9780511626234。[Kol14] Kolb, S. (2014)。量子对称 Kac–Moody 对。 *Adv. Math.*, 267:395–469。DOI: 10.1016/j.aim.2014.08.010。[Let02] Letzter, G. (2002 *New directions in Hopf*) 余理想子代数与量子对 *algebras Volume 43 of Mathematical Sciences Research Institute Publications* 称对。见 , 。英国剑桥：剑桥大学出版社，第 117–165 页。[Let03] Letzter, G. (2003 *Transform.*)。量子对称对及其带状 *Groups* 8 3 261 292 10 1007 00031 003 0719 9 球函数。, ( ): – 。DOI: 。/s - - - 。[LRS19] Lanini, M., Ram, A., Sobaje, P. (2019)。单位根处量子群分解数的 Fock 空间模型。 *Kyoto J. Math.*, 59(4):955–991。DOI: 10.1215/21562261-2019-0031。[LT00] Leclerc, B., Thibon, J.-Y. (2000)。Littlewood–Richardson 系数与 Kazhdan–Lusztig 多项式。见 *Combinatorial methods in representation theory Volume 28 of Advanced Studies in* , 。日本东京：纪伊国 *Pure Mathematics* 155 220 屋书店，第 – 页。[Lus90] Lusztig, G. (1990)。1 的根处的量子群。 *Geom. Dedicata*, 35(1-3):89–113。DOI: 10.1007/BF00147341。[Lus10] Lusztig, G. (2010)。 *Introduction to quantum groups*。纽约州纽约：Birkh¨ auser/Springer。DOI: 10 1007 978 0 8176 4717 9 。/ - - - - MM Misra, K., Miwa, T. ( )。[90] 1990 U_q $\mathfrak{sl}$ n *Comm. Math.* (( ))的基本表示的晶体 *Phys.* 134 1 79 88 基。, ( ): – 。[Par94] Paradowski, J. (1994)。量子代数上的模的滤过。见 *Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods Volume 56 of Proceedings of* , 。罗得岛州普罗维登 *Symposia in Pure Mathematics* 93 108 斯：美国数学会，第 – 页。[RT10] Ram, A., Tingley, P. (2010 *Int. J.*)。泛 Verma 模与 *Math. Math. Sci.* 326247, 19 10 1155 2010 326247 Misra–Miwa Fock 空间。, 页码：文章 ID 。DOI: 。/ /。[Tan04] Tanisaki, T. (2004)。Kazhdan–Lusztig 型特征标公式。见 *Representations of finite dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry Volume 40 of Fields Institute* , 罗得岛州普罗维登斯： *Communications* 261 276 美国数学会，第 – 页。

M.E.: Beijing Institute of Technology, School of Mathematics and Statistics, Liangxiang Campus of Beijing Institute of Technology, Fangshan District, 100288 Beijing, China*Email address*: michael.ehrig@bit.edu.cn

K.G.: Beijing Institute of Technology, School of Mathematics and Statistics, Liangxiang Campus of Beijing Institute of Technology, Fangshan District, 100288 Beijing, China*Email address*: 3120191408@bit.edu.cn