arXiv:2301.03184v1 [math.RT] 9 Jan 2023

G-循环缺陷的谱

TONY FENG、DAVID TREUMANN 和 ALLEN YUAN

Abstract. Brou´e 的阿贝尔缺陷猜想预言了有限群模表示的导出范畴之间存在有趣的导出等价。我们研究 Brou´e 猜想向环谱系数的推广，并沿用 Rouquier 的论证，证明了这一推广在循环缺陷情形下成立。

Contents

1. 引言 1
2. Brou´e 关于环谱的猜想 2
3. 谱中的结合代数、模与双模 9
4. 置换模与 S 24
参考文献 33

1. Introduction

表示论会因基域的特征是 0 还是 p 而大不相同。更一般的环，例如 p-进整数环 $\mathbf{Z}_p$，在某种意义上介于特征 0 与 p 之间，因此研究这类环上的模表示，在模表示论中发挥着重要作用。

本文研究代数拓扑中出现的一类更一般的环上的表示，称为 环谱。普通交换环都是环谱，但环谱还包括微分分次代数，以及非代数对象，例如（众多例子中的两个）表示复 K-理论的环谱，以及表示球面的稳定同伦群的环谱。从某种意义上说，扩大环的类别，使“特征 0 与 p 之间的插值”得到更精细的刻画。这一领域有着丰富的理论，我们希望该理论的工具和概念能够用于推动表示论问题的研究，甚至解决与代数拓扑毫无关系的经典问题。我们将在 §2.4 中回顾其中的一部分理论，以及它此前在其他领域的一些应用。

反过来，其中一些表示论问题引出了代数拓扑中十分自然、但此前似乎未曾有人探讨的问题。本文关注其中一个问题：Brou´e 阿贝尔缺陷猜想[Bro90]。该猜想预言，当 p 或 p-进有限群 G 及其正规化子子群 $N_G(D$的导出范畴在 D 满足以下条件时会有共同的直因子：(1) 是阿贝尔 p-幂阶；(2) 是 p 的某个模 G块的缺陷群。我们将在§2.1–2.3中更详细地回顾这一猜想。

三十年来，Brou´e 猜想一直是模表示论中的一个指导性问题。本文旨在提出与之类似的问题：将 p-进环替换为 p-完备环谱后， p-完备 G-谱范畴与 p-完备 $N_G(D)$-谱范畴是否有共同的直因子？

在 §4.6 中，我们证明，原始的 Brou´e 猜想是我们谱版本的推论。我们希望能够运用稳定同伦论中的一些工具和概念来攻克原始猜想，例如 Segal 猜想/Carlsson 定理、Tate 不动点/Frobenius、按色阶组织等；我们将在 §2.4、§3.10–3.12、§4.4中进一步讨论这些内容。不过，本文并未实现这一愿望。在认真着手之前，自然应该先问：是否有证据表明谱版本成立？

在 §4中，我们证明，当 D 为循环群时，我们的谱版本成立。这个结果并未阐明 Brou´e 猜想的原始形式；在循环缺陷情形下，该形式早已为人所知。Rickard 和 Rouquier 分别给出了不同的证明。两种论证最终都构造出（G， $N_G(D)$)-双模的“倾斜复形”，以实现导出等价。一般而言，将倾斜复形提升为 $G \times N_G(D)^{\mathrm{op}}$-谱会遇到许多障碍。我们通过证明 Rouquier 的倾斜复形确实可以提升，得到了所需的范畴等价。

致谢。作者谨此感谢 Robert Burklund 和 Jay Taylor 的宝贵讨论。第一作者得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS 1902927。第三作者部分得到美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2002029。

2. Broué's Conjecture over ring spectra

2.1. 模表示论回顾。本文探讨有限群在 p-完备谱上的作用，但在这篇较长的引言开篇，我们将先回顾一个例子，以及有限群在 p-进阿贝尔群上的作用的一些理论。模表示论中的三个基本问题是：

(1) 特征 0 的 p-进域上的简单表示有哪些？(2) 特征为 p的有限域上的简单表示有哪些？(3) 特征为 p时，或在 p-进整数环上，有哪些射影表示？

下面将以 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ 和 $p = 7$ 为例，给出这些问题的答案，以及关于块、缺陷和 Brauer 树的一些信息。我们将借此例说明模表示论中的一些概念。

通常，我们会选择含有足够多单位根的系数环和域。出于代数拓扑方面的原因（稍后将会说明），我们希望避免在系数中添加 p次单位根（或者当$p = 2$时添加 4 次单位根）§2.4。我们将介绍 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ 在 $\mathbf{Z}_7$ 和 $\mathbf{Q}_7$上的表示论。

2.1.1. 不可约 $\mathbf{Q}_7[\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)]$-模。设 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ 是阶为 168 的单群，并设 $p = 7$。在 $\mathbf{Q}_7$-向量空间上， G 有 5 个不可约表示，我们将它们称为

维数分别为 1、$\bar{7}$、8、6 和 6。

平凡表示为 1；其他表示的名称来自 SL_2 理论：7 是 Steinberg 表示，8 属于主系列，两个 6 维表示属于离散系列。

表示 1、7、8 和 6 都是绝对不可约的，但若将$\sqrt{-7}$ 或 $\sqrt[7]{1}$ 添入有理数域$_7$，，表示 33 就会分解为两个 3 维表示之和。

2.1.2. 简单模与不可分解投射 $Z_7[PSL_2(F_7)]$-模。投射覆盖理论给出了简单模与不可分解投射 $Z_p[G]$-模之间的一个双射。在 Z_7, 上，存在四个不可分解投射 $PSL_2(F_7)$-表示：7 中的一个格、 $\mathbf{1}\oplus\mathbf{6}$中的一个格、 $\mathbf{6}\oplus\mathbf{8}$中的一个格，以及$\mathbf{8}\oplus\mathbf{3}\overline{\mathbf{3}}$中的一个格。

这些模的简单商模分别是维数为 7、1、5 和 3 的 F_7-向量空间；它们在本节中并不占重要地位，而且一般而言，简单模在本文中也不占重要地位。

2.1.3. 块。如果 G 是任意有限群，且 p 是任意素数，那么群代数 $Z_p[G]$ 是一些结合环的直积，称为块代数:

$$\mathbf{Z}_p[G] = \mathbf{Z}_p[G]b_1 \times \mathbf{Z}_p[G]b_2 \times \cdots \tag{2.1.1}$$

根据环的直积的运作方式，每个 $Z_p[G]$-模 M 都唯一地分解为块代数的模的直和

$$M = Mb_1 \oplus Mb_2 \oplus \cdots$$

记号 Mb_i 表示 M 是 $Z_p[G]b_i$ 的模。若 $M = Mb_i$，我们就说“M 属于块 b_i”。

任意不可分解的 $Z_p[G]$-模都属于一个单独的块。不可约 $Q_p[G]$-模中的所有 $Z_p[G]$-格都属于同一个块。因此，这些块将不可约 $Q_p[G]$-模的集合划分开来。描述这一划分，是为 G 的块命名或分类的一种方法。例如，$Z_7[PSL_2(F_7)]$ 有两个块，分别标记为

$$\{\mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{6}, \mathbf{3}\overline{\mathbf{3}}\} \text{ and } \{\mathbf{7}\} \tag{2.1.2}$$

一般而言，包含平凡表示的块称为主块。当 G =$PSL_2(F_7)$ 时，我们可以将另一个块称为 Steinberg 块，因为属于该块的唯一有限生成不可分解模，是 Steinberg 表示中的一个格 7。

2.1.4. 缺陷群与 Brauer 树。“缺陷”是块的不变量。

如果某个块 b 中只有一个属于 b 的不可约有理数域$_p[G]$-模，且该不可约模中的每个格都是投射的，那么它就是零缺陷块。例如，Steinberg 块是零缺陷的。零缺陷块在范畴和同调意义上都很乏味——它的模范畴与整数环$_p$上的模范畴相同，也与整数环$_p$上的除环的模范畴相同。

其 p-Sylow 子群的阶为 p 的群提供了缺陷一块的基本例子。此类群的主块具有缺陷一。例如，$PSL_2(\mathbf{F}_7)$ 的主块（在 $\{\mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{6}, \mathbf{3}\overline{\mathbf{3}}\}$ (2.1.2) 中标记为 ）是一个缺陷为一的块。

布劳尔在缺陷为一的块的分解矩阵中观察到一种“树”结构。分解矩阵记录了不可分解的投射 $Z_p[G]$-模如何分解为不可约的 $Q_p[G]$-模。布劳尔证明,

对于缺陷为一的块中的模，该矩阵是树的关联矩阵。

例如，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ 主块的布劳尔树是

$$\mathbf{1} \text{ —— } \mathbf{6} \text{ —— } \mathbf{8} \text{ —— } \mathbf{3\overline{3}} \tag{2.1.3}$$

其顶点标记为主块中的不可约有理数域$_7[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)]$-模。用不可分解投射整数环$_7[\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)]$-模来标记其边是很自然的：如果 $P \otimes \mathbb{Q}_7$ 分解为 $M \oplus N$，就在 M 和 N 之间画一条边。

一般而言，块的“缺陷”比一个数 n包含更多信息；它是 G 中阶为 p^n 的子群的一个共轭类。刻画缺陷群的一种简单方法如下： b 的缺陷群是最小的 p-子群 $Q \subset G$ ，使得属于 b 的每个模 M 都是 Ind_Q^G(一个整数环$_p[Q]$-模) 的直和项。

2.1.5. 系数。在我们一直讨论的 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ 示例中，布劳尔´e 猜想（将在下文介绍）在整数环$_7$ 上很容易验证。但一般而言，我们需要考虑更大的系数系统。

令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{Z}_p$ 的一个有限扩张，其分式域 K 的特征为 0，剩余域 k 的特征为 p。模表示论学者有时将三元组 $(K, \mathcal{O}, k)$ 称为 “p- 模系统 ”。我们将取如下形式的三元组：

- k =只要 G 中存在一个阶为 n 且与 p互素的元素，$\mathbb{F}_q$ 就包含一个本原 n次单位根。
- $\mathcal{O}$ =$\mathbb{Z}_q$ 是 k的 Witt 向量环。（这是具有剩余域 $\mathbb{F}_q$的 $\mathbb{Z}_p$ 的最小扩张。）
- K =$\mathbb{Q}_q$ 是 $\mathcal{O}$的分式域。

注 2.1.1. 约化映射 $\mathcal{O}[G] \to k[G]$ 总会在块上诱导一个双射。关于 $\mathbb{F}_q$ 的假设对块还有如下附加结论：对于任意扩张域 $k'/\mathbb{F}_q$，映射 $\mathbb{F}_q[G] \to k'[G]$ 在块上诱导一个双射；对于 $\mathbb{Z}_q$的任意扩张 $\mathcal{O}'$ ，映射 $\mathbb{Z}_q[G] \to \mathcal{O}'[G]$ 在块上诱导一个双射。

注 2.1.2。对 p-模系的一项标准附加假设是，$\mathcal{O}$ 和 K 包含 $\exp(G)$ 次单位根，其中 $\exp(G)$ 是 G 的指数——有时，当满足此假设时，$(K, \mathcal{O}, k)$ 被称为“分裂 p-模系”。需要指出的是，$(\mathbb{Q}_q, \mathbb{Z}_q, \mathbb{F}_q)$ 通常并非此意义下的分裂 p-模系，例如，当 p 为奇数且整除 $|G|$ 的阶时，或当 $p = 2$ 且 G 的 2-Sylow 子群不是初等阿贝尔群时，便不是如此。我们在 §2.4 中解释了为何避免使用 p 次单位根。

下文介绍的 Brou´e 猜想，涉及 $\mathcal{O}[G]$ 和 $k[G]$ 的块，其中 $(K, \mathcal{O}, k)$ 是一个“足够大的” p-模系。通常，“足够大”至少隐含着“分裂”之意，但我们将使用 $(K, \mathcal{O}, k) = (\mathbb{Q}_q, \mathbb{Z}_q, \mathbb{F}_q)$，其中 $\mathbb{F}_q$ 满足上述条件。尽管并非分裂，关于 $(\mathbb{Q}_q, \mathbb{Z}_q, \mathbb{F}_q)$ 的猜想可推出对任意更大的 $(K, \mathcal{O}, k)$ 成立的猜想；反过来，Rickard 关于 $\mathbb{F}_q$ [Ric96] 的 Brou´e 猜想精化形式，则可推出它对 $\mathbb{Z}_q$ [Ric96, §5] 成立。

2.2. Brou´e 猜想。记 $D^b(\mathbb{Z}_q[G]b)^{\mathrm{fg}}$ 为有限生成 $\mathbb{Z}_q[G]b$-模的有界导出范畴。当 b 的缺陷群 D 为阿贝尔群时，

Brou´e 猜想预言存在一个导出范畴之间的等价

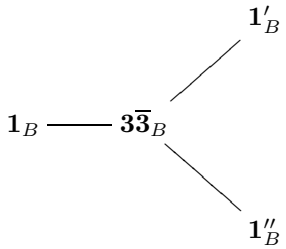
$$D^b(\mathbf{Z}_q[G]b)^{\mathrm{fg}} \cong D^b(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{fg}} \tag{2.2.1}$$

b' 的某个块，其中 b' 是 D的正规化子 $N_G(D)$。给定 b，有一个明确的方案可确定 b'，它称为 b的“布劳尔对应块”。特别地，如果 b是 $\mathrm{Z}_q[G]$ 的主块，那么 b' 就是 $\mathrm{Z}_q[N_G(D)]$的主块。

循环缺陷块的情形早已得到证明——Rickard 首先证明了这一猜想 [Ric89] 随后 Rouquier 也给出了证明 [Rou98]。以 G =$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$ 为例，环$\mathbf{Z}_q$ 就是 $\mathbf{Z}_7$ 本身；这个例子颇具代表性，而 Rouquier 等价可以如下简要描述。

主块的缺陷群的正规化子是 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathrm{F}_7)$ 的“Borel”子群 $B \subset G$，其阶为 21。群代数 $\mathrm{Z}_7[B]$ 只有一个块。这个块的缺陷一，其布劳尔树为

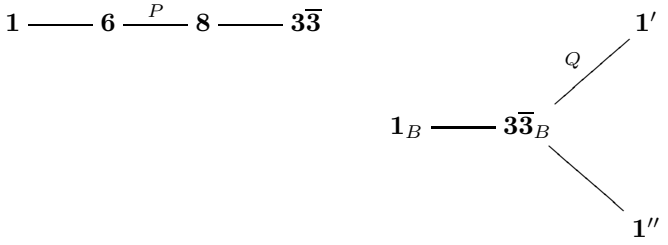
(2.2.2)



中心顶点是另一个模，它在含有 $\sqrt{-7}$ 的域上会分裂，并带有下标 B 以区别于具有相同性质且名称相似的不可约有理数域$_7[G]$-模。其他顶点都是一维模，其中两个是非平凡的。Rouquier 等价将主块中的一个 G-模 M 送到两项复形

$$\mathrm{Res}^G_B(M) \to Q \otimes \mathrm{Hom}_G(P, M) \tag{2.2.3}$$

在公式（2.2.3）中， P 和 Q 是不可分解投射模，我们可以通过指出它们在 Brauer 树中对应的边来具体说明:



（2.2.3）中的微分是一个自然变换 $\mathrm{Res}^G_B(-) \to Q \otimes \mathrm{Hom}_G(P, -)$。Yoneda/Morita 论证将这类自然变换的集合识别为一个 p-进向量空间中的球，具体而言，是 $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}^G_B P, Q)$ $\cong$ 整数环$^5_7$。在这个球中选择微分时需要稍加谨慎: 相应的同态 $\mathrm{Res}^G_B P \to Q$ 必须是满射。相对于整数环$^5_7$上的通常 7 进度量，这个条件既闭又开。

2.3. 三角范畴 G-模。 整数环 2.1.1的块分解（）$_q[G]$ 诱导出导出范畴 D^b(整数环 $_q[G])^{\mathrm{fg}}$ 作为三角范畴直积的分解

$$D^b(\mathbf{Z}_q[G])^{\mathrm{fg}} \cong D^b(\mathbf{Z}_q[G]b_1)^{\mathrm{fg}} \times D^b(\mathbf{Z}_q[G]b_2)^{\mathrm{fg}} \times \cdots$$

这些范畴各自都具有自然的 dg 丰富化。换言之，它们各自都是某个整数环q-线性稳定 ∞-范畴的同伦范畴。我们对这些∞-范畴所用的记号并非表示论中的惯常记法：我们写作左模范畴(整数环$_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$，表示其同伦范畴为整数环q-线性稳定 ∞-范畴 D^b (整数环$_q[G]b)^{\mathrm{fg}}$。下面就这一记号作几点说明；相关内容将在§3.2–3.3中展开。

- LMod 是“左模谱”的缩写——LMod(R) 是由环谱 R 上的左模谱构成的 ∞-范畴。通常意义下的每个环——也就是说，每个“离散环”——都会确定一个环谱，即它的 Eilenberg-MacLane 谱。本文中我们滥用记号，对离散环及其 Eilenberg-MacLane 谱使用相同的符号。因此，LMod(Z$_q[G]b$) 是由 Z $_q[G]b$ 的 Eilenberg-MacLane 谱上的左模谱构成的 ∞-范畴。

- LMod(Z$_q[G]b$) 的同伦范畴并不等价于 D^b(Z$_q[G]b)_{\mathrm{fg}}$，而是等价于 D(Z $_q[G]b$)，即 Z$_q[G]b$ 的无界导出范畴。其对象是复形，不要求有界，也不要求满足任何其他有限性条件。
- LMod(Z$_q[G]b)_{\mathrm{ft}}$ 中的上标表示“有限型”。这种记号基于以下对 D^b(Z$_q[G]b)$ $_{\mathrm{fg}}$ 作为 D(Z$_q[G]b$) 的子范畴的刻画：它是由这样的复形张成的全子范畴，这些复形的底层 Zq-模复形有界，且每个次数上的模都是有限生成的。

2.4. 谱。广义上同调理论（配边、 K-理论，.....）由谱表示。谱范畴可以看作阿贝尔群导出范畴的一种同伦论精化。例如，它是三角范畴，而且阿贝尔群范畴可通过 Eilenberg-MacLane 谱构造 $A \mapsto H^*(-; A)$ 嵌入谱范畴。任何谱 X 都有同伦群，它们构成分次阿贝尔群

$$\pi_* X = H^{-*}(\mathrm{pt}; X).$$

此外，谱范畴具有对称幺半结构，因此可以考虑环谱和交换环谱，类似于 D(Z)中的微分分次代数和交换微分分次代数。

在环谱这一“高阶代数”中，初始环谱是 S，即球谱，其同伦群是球面的稳定同伦群。谱的∞-范畴等价于 LMod(S)——对于像 S 这样的交换环谱，我们通常省略 L，写作 Mod(S)：=LMod(S)。在论文正文中，我们将假定读者对谱和 ∞-范畴更为熟悉；在此引言中，我们先作一些基本说明：

(1) 映射 $g : \mathbf{S} \to$整数环 在非正次数上诱导出同伦群的同构，而 $\mathbf{S}$ 的正次数同伦群是广为研究的球面的稳定同伦群。这些群在复合运算下构成一个分次交换环，正次数中的元素已知是挠 [Ser53] 且幂零 [Nis73]。

(2) 对每个素数 p，都有 S 的一个自然 p-完备化，它是另一个交换环谱，记作 $\mathbf{S}_p$。它的同伦群是 S 的同伦群与整数环$_p$张量后的结果。

(3) 当 n 与 p互素时，存在一种自然构造，可以“向 $\mathbf{S}_p$ 添加 n 次单位根”，例如参见 [Lur18, Ex. 5.2.7]。我们将所得结果记作 $\mathbf{S}_q$，其中 q 是通过向 $\mathbb{F}_p$ 添加 n 次单位根所得到的域的基数。其同伦群是 S 的同伦群与 $\mathbb{Z}_p(\sqrt[n]{1})$ 的张量积。另一方面，当 p 为奇数时，无法向 $\mathbf{S}_p$ [添加 p 次单位根，参见 LN14, §A.6.iii], ；而对于 $p=2$，也无法向 $\mathbf{S}_2$ [添加 4 次单位根，参见 SVW99]。

2.4.1. 与经典代数的关系。将 Z 视为环谱，Mod(Z) 是一个稳定的 ∞-范畴，其同伦范畴为 D(Z)。S 上的代数与 Z 上的代数通过唯一的环谱映射同伦类 $g:\mathbf{S}\to\mathbf{Z}$ 以及由此诱导的标量扩张函子和限制函子相关联

$$g^*:\mathrm{Mod}(\mathbf{S})\to\mathrm{Mod}(\mathbf{Z})\qquad g_*:\mathrm{Mod}(\mathbf{Z})\to\mathrm{Mod}(\mathbf{S})$$

映射 $g:\mathbf{S}\to\mathbf{Z}$ 可以看作一种幂零加厚：它在非正次数上是同构，而它在同伦群上的核由幂零挠元构成。但 S 中这些额外元素带来了一些引人注目的结果：

(1) 关于 $\mathbf{S}_p$ 的交换代数具有自然的 Frobenius [NS18，§IV.1]。(2) $\mathbf{S}_p$ 上存在自然的色滤过$\mathbf{S}_p$：

$$\mathbf{S}_p=\varprojlim_n L_n\mathbf{S}_p$$

它在 $\mathbf{S}_p$ 上的混合特征现象与 $L_0\mathbf{S}_p=\mathbb{Q}_p$ 上的零特征现象之间进行插值。上述 Frobenius 以恰当的意义“将滤过移动一层”。

这些特性最近已应用于混合特征现象的研究。例如，(1) 中的 Frobenius 是 Bhatt–Morrow–Scholze 关于 p-进 Hodge 理论 [BMS19], 的工作的基础，而 (2) 则促成了 Yang–Zhao 构造一些新的量子群 [YZ21], ，实现了 Lusztig 早先提出的特征公式 [Lus89，Lus15]。我们希望，研究 ′关于 S 的 Broué 猜想$\mathbf{S}_p$ 的类似形式，或许能为该猜想的原始形式带来启发。

2.5. G-谱。从直观上说，G-谱是带有群G作用的谱。 G-谱应当表示 G-等变上同调理论。代数拓扑学家有几种彼此不等价的建模方式。本文讨论“Borel 等变” G-谱；用 ∞-范畴语言来说，它们有一个简单的定义：Borel G-谱是一个从群 G的分类空间BG 到 Mod(S) 的函子。Borel G-谱构成的 ∞-范畴是 Fun(BG, Mod(S))。

Borel G-谱构成的 ∞-范畴是一个模谱的 ∞-范畴：

$$\mathrm{Fun}(BG,\mathrm{Mod}(\mathbf{S}))\cong\mathrm{LMod}(\mathbf{S}[G])$$

这里，S[G] 是“定义在 S 上的 G 群代数”，其底层谱为 $\bigoplus_{g\in G}\mathbf{S}$。类似地，我们还有以下变体

$$\mathrm{Fun}(BG,\mathrm{Mod}(\mathbf{S}_p))\cong\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_p[G]) \tag{2.5.1}$$

$$\mathrm{Fun}(BG,\mathrm{Mod}(\mathbf{S}_q))\cong\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]) \tag{2.5.2}$$

其中我们先进行 p-完备化，再伴随适当的根。群代数 $\mathrm{S}_q[G]$ 与整数环 $\mathrm{Z}_q[G]$ 一样，会分解为块代数：

$$\mathbf{S}_q[G] = \mathbf{S}_q[G]b_1 \times \mathbf{S}_q[G]b_2 \times \cdots$$

$\mathrm{S}_q[G]$ 的块自然对应于 $\mathrm{Z}_q[G]$ 的块，因为 $\pi_0(\mathrm{S}_q[G]b) \cong \mathrm{Z}_q[G]b$。范畴 $\mathrm{LMod}(\mathrm{S}_q[G])$——以及 $\mathrm{LMod}(\mathrm{S}_q[G])^{\mathrm{ft}}$，见下文——以同样的方式分解：

$$\begin{aligned} \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]) &\cong \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b_1) \times \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b_2) \times \cdots \\ \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G])^{\mathrm{ft}} &\cong \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b_1)^{\mathrm{ft}} \times \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b_2)^{\mathrm{ft}} \times \cdots \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

我们来讨论 $\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G])^{\mathrm{ft}}$，我们将其作为 $D^b(\mathbf{Z}_q[G])^{\mathrm{fg}}$ 的谱类比。令 $\mathrm{Mod}(\mathbf{S}_q)^\omega$ 表示由紧对象张成的 $\mathrm{Mod}(\mathbf{S}_q)$ 的全子范畴§3.2。那么，$\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G])^{\mathrm{ft}}$ 是由底层 $\mathbf{S}_q[G]$-模为紧对象的模所张成的 $\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q)$ 的全子范畴。类似于 (2.5.1)，我们有

$$\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Mod}(\mathbf{S}_q)^\omega) \cong \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G])^{\mathrm{ft}}$$

从某种意义上说，$\mathrm{LMod}(\mathrm{S}_q[G])^{\mathrm{ft}}$ 是一个难以处理的范畴，因为尚不清楚它是否有有限个生成元。（另一种选择 $\mathrm{LMod}(\mathrm{S}_q[G])^\omega$ 按定义由 $\mathrm{S}_q[G]$ 生成。）尽管如此，我们仍能证明 Brou´e 猜想的显然的 $\mathrm{LMod}^{\mathrm{ft}}$ 类比在某些情形下成立（循环缺陷情形）：

2.6. 布劳尔对 G-谱的猜想。由于 $\mathrm{S}_q[G]$ 和 $\mathrm{Z}_q[G]$ 具有相同的块，$\mathrm{S}_q[G]$ 的每个缺陷为 D 的块都有一个 $\mathrm{S}_q[N_G(D)]$ 的布劳尔对应块：若 $\mathrm{Z}_q[N_G(D)]b'$ 是 $\mathrm{Z}_q[G]b$ 的布劳尔对应块，那么 $\mathrm{S}_q[N_G(D)]b'$ 就是 $\mathrm{S}_q[G]b$ 的布劳尔对应块。G-谱的布劳尔猜想的自然类似命题，就是对以下问题给出肯定回答：

问题。设 b 是 $\mathrm{S}_q[G]$ 的一个块，其缺陷群 $D \subset G$ 为阿贝尔群，并且 b' 是 $\mathrm{S}_q[N_G(D)]$ 中对应的块。那么存在一个稳定 ∞-范畴之间的等价

$$\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b) \cong \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[N_G(D)]b')$$

它将$\mathbf{S}_q[G]b$的满子范畴 $\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$与$\mathbf{S}_q[N_G(D)]b'$的满子范畴 $\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}$ 之间限制为等价。（关于有限型子范畴的最后这条陈述实际上由命题4.6.1自动成立。）

我们还不够大胆，不敢将其作为一个猜想提出，但我们证明了以下定理4.7.2，从而回答了缺陷群为循环群的情形下的问题。

定理。设 b 是 $\mathrm{S}_q[G]$ 的一个块，其缺陷为 $D \subset G$，并且 b' 是 $\mathrm{S}_q[N_G(D)]$中对应的块。若 D 是循环群，则存在稳定 ∞-范畴之间的一个等价

$$\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b) \cong \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[N_G(D)]b')$$

它将左模范畴 $\mathrm{LMod}(\mathrm{S}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$ 与 $\mathrm{LMod}(\mathrm{S}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}$ 的满子范畴之间限制为一个等价。

2.7. Rickard 与 Rouquier。 关于循环缺陷块的 Brou´e 猜想有两种较早的证明：一种由 Rickard 提出， [Ric89] 另一种由 Rouquier 提出， [Rou98]。我们的证明是对 Rouquier 论证的改编。

Rickard 的证明。循环缺陷块的布劳尔树带有一些额外结构：带状结构，以及一个标记为整数的特定顶点，这个整数称为“重数”。对于 $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$（2.1.3）或其 Borel 子群（2.2.2），带状结构就是页面中的嵌入，特定顶点为 **33**，重数为 2。

由块得到的树寥寥无几。但对于任何带有这些装饰的树，Rickard 都通过生成元和关系定义了一个结合代数；当该树是相应块的布劳尔树时，这个代数与该块 Morita 等价。随后，他证明，只要两棵树具有相同数量的边，且称为“重数”的整数相同，相应的任意两个树代数就有相同的导出范畴。一个初等论证表明， G 和 $N_G(D)$ 的布劳尔对应块具有相同的这些数值。

在高阶代数中，定义一个结合环谱所需的工作比“生成元和关系”更多。因此，我们尚未将 Rickard 的证明推广开来，但这样做或许是可能的，而且很有意义。

Rouquier 的证明。Morita 理论告诉我们，模范畴之间的函子可以由双模给出。当 D 为循环群时，Rouquier 找到了一个非常具体的（G， $N_G(D)$）-双模，从而给出了 Brou´e 等价。

这个双模及其逆双模具有简单的结构：它们是置换 $G \times N_G(D)^{\mathrm{op}}$-模的直和项构成的两项复形（逆双模则是置换 $N_G(D) \times G^{\mathrm{op}}$-模的直和项构成的两项复形），其中有一项是投射的。由于结构简单，很容易找到这些双模的 $\mathbf{S}_p$-版本。

更一般地说，Brou´e 猜想对于许多非循环缺陷群已经得到证明，通常是通过构造双模来实现的。但目前我们还不知道如何将这些已知的双模提升到 $\mathbf{S}_p$；这似乎是一个困难的问题。

3. Associative algebras、 modules、 and bimodules in spectra

本节将回顾有限维代数的谱类比上的一些基本 Morita 理论。相关材料在[Lur16，第 4], 章中有详细阐述，我们大量借鉴了其中的内容，并请读者参阅该章以了解更多细节。在§3.1中，我们回顾 ∞-范畴理论中的一些基本记号。在§3.2–§3.6中，我们讨论双模理论及其与两种有限性条件的相互作用：“紧”模和“有限型”模。在§3.7 中，我们证明本节的主定理，该定理将在§4 中用于将某些**Z**-线性 ∞-范畴的等价提升为 **S**-线性等价。

在§3.10–§3.12中，我们讨论 $K(n)$-局部代数。当 A 和 B 是某个 $K(n)$-局部代数 k上的群代数时，双向性 理论为函子 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}} \to \mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$提供了更大的函子类。这些内容并未用于我们对§2.6的证明。

3.1. ∞-范畴记号。我们用 $\mathcal{S}$ 表示空间的 ∞-范畴，S 表示球谱，Mod(S) 表示谱的 ∞-范畴。如果 x 和 y 是 ∞-范畴 $\mathcal{C}$中的对象，我们用 $\mathrm{Maps}(x,y) \in \mathcal{S}$ 表示它们之间的映射空间，并用 $[x,y]$ 表示 $\pi_0\mathrm{Maps}(x,y)$。如果 $\mathcal{C}$ 是稳定的，那么我们用 $\mathrm{Maps}(x,y)$表示相应的映射谱，其关联的无限环空间是 $\Omega\mathrm{Maps}(x,y)$。我们用 Σ 表示稳定 ∞-范畴中的悬挂函子。

我们用 Fun$(\mathcal{C},\mathcal{D})$表示 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$之间函子的 ∞-范畴。由具有右伴随的函子所张成的全子范畴记作 Fun$^L(\mathcal{C},\mathcal{D})$。如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是稳定的，那么由保持有限极限和余极限的函子所张成的全子范畴记作 Fun$^{\mathrm{ex}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$。

我们用 BG 表示有限群 G 的分类空间，并将其视为带有自然基点 pt $\to BG$ 的空间。若 G 是有限群，且 c 是 ∞- 范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象，则 G 在 c 上的作用按定义是一个函子$BG \to \mathcal{C}$，其在基点处的取值为 c。我们记

$$c^{hG} := \varprojlim_{BG} c \qquad c_{hG} := \varinjlim_{BG} c$$

为 G-对象 c 的同伦不动点和同伦商，前提是这些极限和余极限在 $\mathcal{C}$ 中存在。

若 $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(\mathbf{S})$ 中存在一种更精细的 G-对象概念 $\mathcal{C}$：即“真正的” G-谱概念。本文基本不涉及真正理论，只有 §4.4例外。

3.2.交换环谱上模的有限性条件。 在本文中，交换环谱 是一个 E_∞-代数对象，属于 Mod(S)。令 k 为一个交换环谱。记 (Mod(k) $\otimes_k$) 为 ∞-范畴 k中由 M-模谱构成的对称幺半稳定范畴。两个 Mod(k) 中对象所对应的映射谱 Maps(k,k) 自然地带有 [-模结构。以下条件在 Mod(4]) 中等价（Lur16，命题 7.2.4）：

(1) M 是紧的，也就是说，函子 Maps$(M,-)$: Mod(k) $\to \mathcal{S}$ 与滤过余极限可交换。(2) Maps$(M,-)$ 无论视为函子 Mod(k) $\to$ Mod(S)，还是视为函子 Mod~~(k) $\to$~~Mod(k)，都与直和可交换。 [Lur09，命题 15.1](3) M 是完美的，也就是说，它是某个对象的直和项，而该对象带有有限滤过，其子商具有 $\Sigma^n k$ 的形式。(4) M 是可对偶的，也就是说，存在另一个对象 M^*，以及一对映射 $k \to M^* \otimes_k M$和 $M \otimes_k M^* \to k$，使得复合映射

$$M = M \otimes_k k \to M \otimes_k (M^* \otimes_k M) = (M \otimes_k M^*) \otimes_k M \to k \otimes_k M = M$$

是一个同构。

我们将紧对象所张成的全子范畴记作 Mod(k)$^\omega$ $\subset$Mod(k)。例如，当 $k = \mathbf{Z}$ 时，Mod(Z) 的同伦范畴是阿贝尔群的“传统”无界导出范畴，而 Mod(Z)$^\omega$ 的同伦范畴是由同调群有限生成的有界复形所张成的全子范畴。

令 Cat$_\infty^{\mathrm{ex}}$ 表示 ∞-范畴，其对象为小型稳定 ∞-范畴，态射为正合函子。于是，Cat$_\infty^{\mathrm{ex}}$ 带有一个典范的对称幺半结构 $\otimes$，并配备一个泛映射 $\mathcal{C}\times\mathcal{D} \to \mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$，该映射分别在每个变量上与有限余极限相容。我们也有理由考虑可表 ∞-范畴的“大型”情形。由可表 ∞-范畴组成的^{L} -范畴 Pr ∞同样带有一个对称幺半结构 $\otimes$，它分别在每个变量上与（任意）余极限相容 [Lur16，推论 4.8.1。4]。

例 3.2.1. 我们有 Mod(k)$^\omega$ $\in$Cat$_\infty^{\mathrm{ex}}$ （以及将在下一节介绍的 LMod(A)$^\omega$、LMod(A)^{ft} ），并且

$$\mathrm{Mod}(k) \cong \mathrm{Ind}(\mathrm{Mod}(k)^\omega) \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}.$$

更一般地，Ind-范畴构造确定了一个对称幺半函子 $\mathrm{Ind}\colon \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$。

我们称一个稳定的 ∞-范畴 $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}}$（分别为 $\mathcal{C} \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$）是 k-线性的，如果它带有代数 $\mathrm{Mod}(k)^\omega \in \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}}$（分别为 $\mathrm{Mod}(k) \in \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}$）的作用（参见 [Lur11，定义 6.2]）。我们将双函子 $\mathrm{Mod}(k)^\omega \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$（分别为 $\mathrm{Mod}(k) \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$）记作 $\otimes_k$。k-线性范畴中对象 x 和 y 之间的映射谱 ~~Maps~~(x, y) 带有 k-模结构，该结构不一定完美，但它表示函子

$$\mathrm{Maps}(- \otimes_k x, y) : \mathrm{Mod}(k)^{\omega,\mathrm{op}} \to \mathcal{S}.$$

如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 k-线性范畴，我们用 $\mathrm{Fun}_k^{\mathrm{ex}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 表示保持此作用的正合函子所构成的 ∞-范畴。

3.3. 结合代数谱及其模的有限性条件。对于交换环谱 k，k-代数谱指结合的 k-代数谱——也就是说，是 k 上的一个 E_1-代数。我们用 $\mathrm{LMod}(A)$ 表示左 A-模谱所构成的 ∞-范畴。它是可呈示的、稳定的，并具有 k-线性结构。

我们将 $\mathrm{RMod}(A)$ 和 $\mathrm{Bimod}(A, B)$ 分别记作 ∞-范畴，即右 A-模范畴和 (A, B)-双模范畴。右模和双模的理论与左模理论通过自然等价联系起来：$\mathrm{RMod}(A) \cong \mathrm{LMod}(A^{\mathrm{op}})$ 和 $\mathrm{Bimod}(A, B) \cong \mathrm{LMod}(A \otimes_k B^{\mathrm{op}})$ [Lur16，命题 4.3.2.7，命题 4.6.3。11]。

对于对象 $M \in \mathrm{LMod}(A)$，以下各项等价 [Lur16，命题 7.2.4。4]:

(1) $\mathrm{Maps}(M, -) : \mathrm{LMod}(A) \to \mathcal{S}$ 与滤过余极限可交换。(2) $\mathrm{Maps}(M, -)$，无论将其视为函子 $\mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{Mod}(k)$ 还是 $\mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{Mod}(\mathbf{S})$，都与直和可交换 [Lur09，命题 15。1]。(3) M 是某个对象的直和项，该对象具有有限滤过，其伴随分次片具有以下形式 $\Sigma^n A$。

满足这些条件的模称为完美模。我们用 $\mathrm{LMod}(A)^\omega$ 表示由完美左 A-模构成的全子范畴。

如果 A 作为 k-模是完美的，那么考虑一个较弱的有限性条件便很自然：我们称 $M \in \mathrm{LMod}(A)$ 为有限型，若其底层 k-模属于 $\mathrm{Mod}(k)^\omega$。用 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 表示由有限型 A-模构成的全子范畴。我们有如下包含关系

$$\mathrm{LMod}(A)^\omega \subset \mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}} \text{ if and only if } A \in \mathrm{Mod}(k)^\omega.$$

注 3.3.1. 若 $k =$ 是 Z 且 A 是结合环，则 $\mathrm{LMod}(A)^\omega$ 的同伦范畴与投射模的有界复形及其间映射的链同伦类构成的范畴重合。对于这样的 A，其底层加法群有限生成这一条件，等价于 $A \in \mathrm{Mod}(k)^\omega$；此时，$\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 的同伦范畴与 D^b(有限生成左 A-模) 相同。

3.4. 投射 A-模谱。我们称 $\mathrm{LMod}(A)$ 的一个对象为自由模，若它同构于形如 $\Sigma^d A$ 的对象的直和。记 $\mathrm{Free}(A) \subset$

LMod(A) 和 Free(A)$^\omega$ $\subset$ LMod(A)$^\omega$ 为由自由模张成的满子范畴。

如果 LMod(A) 中的对象是自由模的直和项，我们就称其为投射模。记 Proj(A) $\subset$ LMod(A) 和 Proj(A)$^\omega$ $\subset$LMod(A)$^\omega$ 为由投射模张成的满子范畴。

自由模 $\Sigma^d A$ 表示函子 π_d : hLMod(A) $\to$ Ab，其中定义域是 LMod(A) 的同伦范畴，而陪域是通常的阿贝尔群 1-范畴。此外，对于任意 $M \in$LMod(A)，分次阿贝尔群$\pi_*(M)$: $= \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \pi_i(M)$具有分次 $\pi_*(A)$-模结构，并且自然映射

$$[\Sigma^d A, M] \to \mathrm{Hom}_{\pi_*(A)}(\Sigma^d \pi_*(A), \pi_*(M)) \tag{3.4.1}$$

是一个同构。式（3.4.1）中的陪域表示与分次相容且与 $\pi_*(A)$-模结构相容的分次阿贝尔群同态集合，而 $\Sigma^d \pi_*(A)$ 表示分次移位。我们记录这一观察的两个推论：

命题 3.4.1. 设 P 是一个分次阿贝尔群，并配备左 $\pi_*(A)$-模结构。若 P 是投射的，则存在 Proj(A) 中的一个对象，使得$\pi_*(P) \cong P$ 作为分次 $\pi_*(A)$-模同构。

证明. 首先假设 $\bar{P} = \bar{F}$ 是自由的：$\bar{F} \cong \bigoplus_{i\in I} \Sigma^{d_i} \pi_*(A)$。那么我们可以取 $P = F = \bigoplus_{i\in I} \Sigma^{d_i} A$。

一般而言，$\bar{P}$ 是某个幂等自同态 e 的像 F 的一个幂等自同态，而 $\bar{F} \to \bar{P}$ 的幂等元根据 [Lur16，引理 1.2.4.6] 分裂。□

命题 3.4.2. 设 $P \in$ Proj(A) 且 $M \in$ LMod(A)。则映射

$$[P, M] \to \mathrm{Hom}_{\pi_*(A)}(\pi_*(P), \pi_*(M)) \tag{3.4.2}$$

是同构。

命题3.4.2 的一个推论是，命题 3.4.1 中从P 到 P 的提升在同构意义下唯一。

证明. 这是 [Lur16, 推论 7.2.2.19] 的一个较弱版本；证明如下。由于 P 是自由模 $F = \bigoplus_i \Sigma^{d_i} A$ 的直和项，(3.4.2) 的定义域是 $\prod_i [\Sigma^{d_i} A, M]$ 的一个收缩，而陪域是 $\prod_i$ Hom$_{\pi_*(A)}(\Sigma^{d_i} \pi_*(A)$ $\pi_*(M))$ 的一个收缩。由 F 的幂等自同态诱导的收缩与 P 和 F对应的映射 (3.4.2) 相容。由于同构的收缩仍是同构，只需对自由模证明；继而只需考虑 $P = \Sigma^d A$ 的情形，这就是 (3.4.1)。□

3.5. 函子有限性条件。设 A 和 B 是 k-代数谱。那么，LMod(A) 和 LMod(B) 是 k-线性、可表稳定的 ∞-范畴，我们可以考虑它们之间的 k-线性正合函子。对于这样的函子，以下条件等价：

(1) F: LMod(A) $\to$LMod(B) 保持滤过余极限。(2) F: LMod(A) $\to$LMod(B) 保持所有余极限。(3) F: LMod(A) $\to$ LMod(B) 保持（任意）直和。(4) F 有一个右伴随。

我们将 $\mathrm{Fun}_k^L(\mathrm{LMod}(A),\mathrm{LMod}(B)) \subset \mathrm{Fun}_k^{\mathrm{ex}}(\mathrm{LMod}(A),\mathrm{LMod}(B))$ 记作由保余极限函子所张成的全子范畴。

如果 F 是任意这样的函子，那么 $F(A)$ 支持一个 (B, A)-双模结构， F 同构于 $F(A) \otimes_A -$，并且

$$\mathrm{Fun}_k^L(\mathrm{LMod}(A), \mathrm{LMod}(B)) \cong \mathrm{LMod}(B \otimes_k A^{\mathrm{op}}) \tag{3.5.1}$$

[Lur16，命题 4.8.4。1]。此外，限制到 $\mathrm{LMod}(A)^\omega$ 会诱导出一个等价：

$$\mathrm{Fun}_k^L(\mathrm{LMod}(A), \mathrm{LMod}(B)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}_k^{\mathrm{ex}}(\mathrm{LMod}(A)^\omega, \mathrm{LMod}(B)). \tag{3.5.2}$$

命题 3.5.1。设 A 和 B 是 k-代数谱，并设 F 是一个保持余极限的 k-线性函子 $\mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{LMod}(B)$。以下条件等价：

(1) $F(A)$ 作为左 B-模是完美的 (2) F 将 $\mathrm{LMod}(A)^\omega$ 映入 $\mathrm{LMod}(B)^\omega$

换句话说，在（3.5.1）之后，我们有

$$\mathrm{Fun}_k^{\mathrm{ex}}(\mathrm{LMod}(A)^\omega, \mathrm{LMod}(B)^\omega) \cong \begin{pmatrix} \text{full subcategory of} \\ \mathrm{Bimod}(B, A) \text{ spanned} \\ \text{by bimodules that are} \\ \text{perfect as left } B\text{-modules} \end{pmatrix} \tag{3.5.3}$$

证明。条件 (2) 推出条件 (1)，因为 A 是 $\mathrm{LMod}(A)^\omega$ 的一个对象。如果 $M \in \mathrm{LMod}(A)^\omega$ 有一个滤过

$$0 \to M_{\leq 0} \to M_{\leq 1} \to \cdots \to M_{\leq n} = M$$

其滤过对象为 $M_{\leq i}/M_{\leq i-1} \cong \Sigma^{d_i} A$，那么 $F(M)$ 有一个滤过，其子商同构于 $\Sigma^{d_i} F(A)$。如果 M' 是这样一个 M 的直和项，那么 $F(M')$ 是 $F(M)$ 的直和项。由于 $F(A)$ 是完美的，因此 $\Sigma^{d_i} F(A)$ 也是完美的，进而 $F(M)$ 也是完美的，所以 $F(M')$ 也是完美的——这表明 (1) 推出 (2)。□

命题 3.5.2。设 A 和 B 是 k-代数谱，并设 F 是一个 k-线性保余极限函子 $\mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{LMod}(B)$。假设 $F(A)$ 作为右 A-模和 k-模都是完美的。那么 F 将 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$。

注 3.5.3。当我们考虑 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 时，通常 A 是一个完美的 k-模——在这种情况下，当 $F(A)$ 是一个完美的右 A-模时，它自动也是一个完美的 k-模。

证明。由于 $F(A) \otimes_A M$ 属于 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$ 当且仅当其底层 k-模属于 $\mathrm{Mod}(k)^\omega$，因此只需证明双函子 $(-) \otimes_A (-) : \mathrm{RMod}(A) \times \mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{Mod}(k)$ 将 $\mathrm{RMod}(A)^\omega \times \mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{Mod}(k)^\omega$。

设 $N \in \mathrm{RMod}(A)^\omega$，并设 $M \in \mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$。固定一个滤过

$$0 \to N_{\leq 0} \to \cdots \to N_{\leq n} = N$$

使得 $N_{\leq i}/N_{\leq i-1}$ 是 A（作为右 A-模）的悬移。由于 $\Sigma^{d_i} A \otimes_A M = \Sigma^{d_i} M$，且 M 作为 k- 模是完美的，因此 $N \otimes_A M$ 作为 k- 模是完美的。如果 N' 是 N 的直和项，那么 $N' \otimes_A M$ 是 $N \otimes_A M$ 的直和项，因此它作为 k-模也是完美的。

□

注记 3.5.4。 我们很容易猜想，存在比命题 3.5.2 中的条件更弱的假设，也能保证 F 将 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 映射到 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$。下面的例子说明了其中的一些局限——至少表明，即使 $F(A)$ 作为左 B-模是完美的或有限型的，这种情况仍可能失败。令 $A = k[G]$, $B = k$，并令 $M = k$ 为平凡的 (B, A)-双模。与 M 作张量积同构于保余极限函子

$$(-)_{hG} : \mathrm{LMod}(k[G]) \to \mathrm{LMod}(k),$$

也就是说，取同伦 G-余不变量。该函子将平凡模映至 k 的 BG 同调，而这通常不属于 $\mathrm{LMod}(k)^{\omega} = \mathrm{LMod}(k)^{\mathrm{ft}}$。例如，当 G 有限且非平凡，且 $k =$ 为 S 或 Z 时， BG 的 k 同调并非完美；如果 p 整除 G 的阶，那么当 $k =$ 为 $\mathbb{S}_p$、$\mathbb{Z}_p$ 或 $\mathbb{F}_p$ 时，它也并非完美。因此，尽管 M 作为左 B-模是完美且有限型的，它仍不会将 $\mathrm{LMod}(k[G])^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(k)^{\mathrm{ft}}$。（同时请注意，由于 M 作为右 A-模并非完美，它也不会将 $\mathrm{LMod}(k[G])^{\omega}$ 映入 $\mathrm{LMod}(k)^{\omega}$。）

对于 k 的某些取值，Greenlees-Sadofsky 的“Tate 消失”或 Hopkins-Lurie 的“双向性”可以在很大程度上解决这个问题 §3.12。

3.6. 右伴随函子的有限性条件。设 F: LMod(A) →LMod(B) 是一个保持余极限的 k-线性函子，因此它具有一个 k-线性的右伴随 G。正如 $F(M) \cong F(A) \otimes_A M$对于赋有自然的$(B, A)$-双模结构（3.5.1）的 $F(A)$一样， $G(M)$由以下公式给出

$$G(M) = \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{LMod}(B)}(F(A), M) \tag{3.6.1}$$

右 A模结构 F（A）会在（ A上诱导左模结构（3.6.1）。特别注意， G（B）≅映射$_{\mathrm{LMod}(B)}$（F（A） B）。

命题 3.6.1。设 A 和 B 是 k-代数谱，且设 F : LMod(A) →LMod(B)是一个保持余极限的 k-线性函子。设 G: LMod(B) → LMod(A)是它的右伴随。以下条件等价：

(1) $F(A)$ 是完美的左 B-模；(2) F 将 $\mathrm{LMod}(A)^{\omega}$ 映入 $\mathrm{LMod}(B)^{\omega}$；(3) G 保持余极限；(4) 存在自然同构 $G(M) \cong G(B) \otimes_B M$

证明。 (1) 和 (2) 根据命题 3.5.1 等价。(1) 和 (3) 根据 (3.6.1)、LMod(B) 中的余极限由 Mod(k) 中的余极限计算这一事实，以及 §3.3 等价。(3) 和 (4) 根据 §3.5 等价。 □

作为推论，我们得到以下判据：一个保持余极限的 k-线性函子何时会诱导 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 与 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$ 之间的一对伴随函子：

命题 3.6.2。设 A 和 B 在 k 上完美，令 F : LMod(A) →LMod(B) 为一个保持余极限的 k-线性函子，并令 G 为其右伴随。假设 $F(A)$ 既是完美的左 B-模，也是完美的右 A-模。那么 F 将 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$，且 G 将 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$。

证明。由于 $F(A)$ 是完美的右 A-模（且由于 A 在 k 上是完美的），根据命题 3.5.2， F将 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$。由于 $F(A)$ 是完美的左B-模，根据命题 3.6.1，伴随 G 保余极限，因此我们可以通过对以下对象应用命题 3.5.2，来判断 G 是否将 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$

$$G(B) = \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{LMod}(B)}(F(A), B)$$

但这是 $F(A)^\vee$，它作为右 B-模，根据命题 3.8.1。 □

注 3.6.3。 并非每一对伴随函子 $\mathbf{LMod}(A)^{\mathrm{ft}} \leftrightarrows \mathbf{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$ 都能扩展为保余极限函子 $\mathbf{LMod}(A) \to \mathbf{LMod}(B)$。例如，当 G是一个交换 p-群时，Tre15，§3.6]构造了 $\mathbf{LMod}(\mathrm{KU}_p[G])^{\mathrm{ft}}$的自等价，它将平凡模 KU_p 与自由模 $\mathrm{KU}_p[G]$互换。

$$\mathrm{KU}_p \leftrightarrow \mathrm{KU}_p[G]$$

由于平凡模并非完美，故该等价不保留子范畴 $\mathbf{LMod}(\mathrm{KU}_p[G])^\omega$，也不能扩展为 $\mathbf{LMod}(\mathrm{KU}_p[G])$ 的自等价。

命题 3.6.1 的另一个推论是，任意 k-线性函子 $\mathbf{LMod}(A)^\omega \to \mathbf{LMod}(B)^\omega$ 都能扩展为保余极限函子 $\mathbf{LMod}(A) \to \mathbf{LMod}(B)$，且其右伴随也保余极限。我们需要一个判据，以确定该右伴随是否将 $\mathbf{LMod}(B)^\omega$ 映回 $\mathbf{LMod}(A)^\omega$。根据命题 3.5.1，其充要条件是

$$G(B) = \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{LMod}(B)}(F(A), B) \text{ is perfect as a left } A\text{-module} \tag{3.6.2}$$

乍看之下，或许很难判断情况是否如此——例如，难以给出一个基于右 A-模结构（定义在 $F(A)$ 上）的判据。当 A 和 B 都具有"对称性"时，我们可以给出这样的一个实用判据；这将在§3.9中讨论。

3.7. 换环。令 k 继续表示一个交换环谱（即自§3.2以来它一直表示的对象）。设另有一个交换环谱 k'，以及一个映射 $u: k \to k'$。那么，u 会诱导出一个对称幺半、保余极限函子

$$u^* : \mathrm{Mod}(k) \to \mathrm{Mod}(k') \qquad u^*(M) := k' \otimes_k M \tag{3.7.1}$$

它将 $\mathbf{Mod}(k)^\omega$ 映至 $\mathbf{Mod}(k')^\omega$。

我们也用 u^* 表示由（3.7.1）诱导的函子，它将 $\mathbf{Mod}(k)$ 中的代数映至 $\mathbf{Mod}(k')$ 中的代数。若 A 是一个 k-代数谱，且 $A' := u^*(A)$ 是诱导得到的k'-代数谱，则 $\mathbf{LMod}(A)$ 与 $\mathbf{LMod}(A')$ 通过 $\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}$ 中的公式相关联

$$\mathbf{LMod}(A') \cong \mathrm{Mod}(k') \otimes_{\mathrm{Mod}(k)} \mathbf{LMod}(A). \tag{3.7.2}$$

因此，$\mathbf{LMod}(A)$ 与 $\mathbf{LMod}(B)$ 之间的 k-线性等价会诱导 $\mathbf{LMod}(A')$ 与 $\mathbf{LMod}(B')$ 之间的 k'-线性等价，其中 B 是另一个 k-代数谱，且 $B' := u^*(B)$。

注 3.7.1. 每当 $\mathbf{LMod}(A)^\omega \cong \mathbf{LMod}(B)^\omega$ 时，我们也可以推出 $\mathbf{LMod}(A')^\omega \cong \mathbf{LMod}(B')^\omega$ 之间存在等价。但 $\mathbf{LMod}(A)^{\mathrm{ft}} \cong \mathbf{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$ 之间的等价未必会诱导 $\mathbf{LMod}(A')^{\mathrm{ft}} \ncong \mathbf{LMod}(B')^{\mathrm{ft}}$ 之间的等价。注 3.6.3 中的自等价提供了一个例子，其中 $k = \mathrm{KU}_p$ 和 $k' = \mathrm{Q}_p[\beta, \beta^{-1}]$，而映射 $k \to k'$ 是陈特征。如果 G 是交换 p-群，那么 $\mathbf{LMod}(k'[G])^{\mathrm{ft}} = \mathbf{LMod}^\omega(k'[G])$ 是半单的，其任何自等价都无法将平凡表示与正则表示互换。

我们希望研究逆问题：给定一个 k'-线性等价 $\mathbf{LMod}(A') \cong \mathbf{LMod}(B')$，能否得出 $\mathbf{LMod}(A) \cong \mathbf{LMod}(B)$?

命题 3.7.2. 设 A 和 B 是完美于 k上的 k-代数。设 $F(A)$ 是一个 (B, A)-双模，作为左 B-模和右A-模分别都是完美的。设 $u: k \to k'$ 是一个交换 k-代数，并令 $A' := u^*(A)$ 和$B' = u^*(B)$。如果

$$u^* : \mathrm{Mod}(k)^\omega \to \mathrm{Mod}(k')^\omega \text{ is conservative} \tag{3.7.3}$$

且所诱导的函子

$$F' : \mathrm{LMod}(A') \to \mathrm{LMod}(B') \tag{3.7.4}$$

是 k'-线性 ∞-范畴之间的等价，则 $\mathrm{LMod}(A) \to \mathrm{LMod}(B)$ 是 k-线性 ∞-范畴之间的等价。

注 3.7.3. 假设 (3.7.3) 适用于 k 是离散局部环且$u: k \to k'$ 是对极大理想取商所得的环。更一般地，如果 k 和 k' 都是离散环，那么 (3.7.3) 成立当且仅当 $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ 的像包含所有闭点。

假设 (3.7.3) 也适用于截断映射 $\mathbf{S} \to \mathbf{Z}$：这是同调群 Whitehead 定理的一种表述。

证明。 由命题 3.6.1 和 (3.6.2)，到 $F(A) \otimes_A -$ 的右伴随函子是

$$\underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B) \otimes_B -.$$

该伴随的余单位由一个映射诱导

$$F(A) \otimes_A \underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B) \to B \tag{3.7.5}$$

（B, B）-双模之间的映射，而单位元由一个（A, A）-模的映射诱导

$$A \to \underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B) \otimes_B F(A) \tag{3.7.6}$$

诱导的 k'-线性函子 $\mathrm{LMod}(A')$ 与 $\mathrm{LMod}(B')$ 之间（F' (3.7.4) 及其伴随 G') 同构于

$$u^*F(A) \otimes_{A'} - \qquad \text{and} \qquad u^*(\underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B)) \otimes_{B'} -$$

根据假设， F' 是一个等价。其逆等价必定是 G' ， 且这些映射

$$u^*F(A) \otimes_{A'} u^*(\underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B)) \to B' \qquad A' \to u^*\underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B) \otimes_{B'} u^*F(A)$$

是双模的同构，并且由于 u^* 是一个对称幺半函子，它们也

$$u^*(F(A) \otimes_A \underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B)) \to B' \qquad A' \to u^*(\underline{\mathrm{Maps}}(F(A), B) \otimes_B F(A))$$

于是（3.7.5）和（3.7.6）根据（3.7.3）是同构。

□

3.8. 对偶。 $\mathrm{Bimod}(A, B)$ 与 $\mathrm{Bimod}(B, A)$ 之间有两种对偶，即“左”对偶和“右”对偶 [Lur16，§4.6.2，§4.6.4]。本节我们在特殊情形下回顾这些概念 $B = k$ ($\mathrm{LMod}(A)$ 与 $\cong \mathrm{Bimod}(A, k)$ 以及 $\mathrm{RMod}(A)$ 与 $\cong \mathrm{Bimod}(k, A)$ 之间的对偶），并作一些评述。

3.8.1. 完美 A-模的对偶。对于任意 k-代数谱 A 以及任意左 A-模 M， A 上的 (A, A)-双模结构赋予 $\mathrm{Maps}^{\mathrm{LMod}(A)}(M, A)$ 一个右 A-模结构。我们将其记为 $M^\vee$; 该构造是一个反变函子

$$\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{RMod}(A) : M \mapsto M^\vee$$

命题 3.8.1. 对于任意 k-代数谱 A，函子 $\mathbf{LMod}(A)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{RMod}(A) : M \mapsto M^\vee$ 限制为一个等价

$$(\mathrm{LMod}(A)^\omega)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{RMod}(A)^\omega$$

证明. 若 $M \in \mathbf{LMod}(A)$ 有一个滤过

$$0 \to M_{\leq 0} \to M_{\leq 1} \to \cdots \to M_{\leq n} = M$$

由左 A-模构成，使得 $M_{\leq i}/M_{\leq i-1} \cong \Sigma^{d_i} A$ 对于每个 i，则 $M^\vee$ 有一个由右 A-模构成的滤过:

$$(M/M_{\leq n})^\vee \to \cdots (M/M_{\leq 1})^\vee \to (M/M_{\leq 0})^\vee \to M^\vee$$

其分次分量具有 $\Sigma^{-d_i} A^\vee$ 的形式。由于 $A^\vee \cong A$，可知 $M^\vee$ 作为右 A-模是完美的，因此 $M^\vee$的任一直和项也是如此。因此 $(-)^\vee$ 将 $(\mathbf{LMod}(A)^\omega)^{\mathrm{op}}$ 映入 $\mathbf{RMod}(A)^\omega$。复合

$$\mathrm{RMod}(A)^\omega = \mathrm{LMod}(A^{\mathrm{op}})^\omega \xrightarrow{(-)^\vee} (\mathrm{RMod}(A^{\mathrm{op}})^\omega)^{\mathrm{op}} = (\mathrm{LMod}(A)^\omega)^{\mathrm{op}})$$

是逆函子。 □

3.8.2. 对偶 k-模。若 $M \in \mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$，则 M^* （将 M视为一个 k-模时的幺半群对偶，记号同 §3.2）具有右 A-模谱的结构。若 N 是另一个有限型 A-模谱，则 [Lur16，命题 4.6.2。1]自然映射

$$\underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{LMod}(A)}(M, N) \to \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{RMod}(A)}(N^*, M^*) \tag{3.8.1}$$

是 k-模谱之间的等价。事实上，我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}\,\mathrm{op}} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{RMod}^{\mathrm{ft}}(A) \\ {\scriptstyle forget}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle forget} \\ (\mathrm{Mod}(k)^\omega)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow[\cong]{} & \mathrm{Mod}(k)^\omega \end{array} \tag{3.8.2}$$

其中水平映射由 $(-)^*$ 给出。

命题 3.8.2。 假设 A 在 k 上是完美的，且 A^* 作为右 A-模是完美的。那么，(3.8.2) 是 $(\mathbf{LMod}(A)^\omega)^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathbf{RMod}(A)^\omega$中的全忠实嵌入。若 A^* 作为左 A-模也完美，则 (3.8.2) 限制为等价 $(\mathbf{LMod}(A)^\omega)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{RMod}(A)^\omega$。

注 3.8.3. §3.8.3 中的例子表明，不能去掉关于 A^* 的假设。对于对称代数，这个假设很容易验证。

证明。若 $M \in$左模范畴$(A)^\omega$ 具有一个滤过

$$0 \to M_{\leq 0} \to M_{\leq 1} \to \cdots \to M_{\leq n} = M$$

由左 A-模构成，且 $M_{\leq i}/M_{\leq i-1} \cong \Sigma^{d_i} A$ 对每个 i 都成立，则 M^* 具有一个由右 A-模构成的滤过：

$$(M/M_{\leq n})^* \to \cdots (M/M_{\leq 1})^* \to (M/M_{\leq 0})^* \to M^*$$

其分次分量具有 $\Sigma^{-d_i} A^*$ 的形式。根据假设，A^* 作为右A-模是完美的，因此 M^* 也如此，M^* 的任一直和项亦然。

由（3.8.1可知，该函子是全忠实的。如果 A^* 作为左 A-模是完美的，那么（A^{op}）* 作为右（A^{op}）-模是完美的。结合$M \cong$ （M^*）* 在 M 是完美 k-模时的情形，同样的论证表明，$\mathbf{RMod}^{\omega}$（A）$^{\mathrm{op}} \to \mathbf{LMod}$（$A$）$^{\omega}$是逆等价。

□

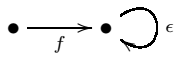
3.8.3. 例。设 $A \in \mathbf{Mod}(k)^{\omega}$，即 $\mathbf{LMod}(A)^{\omega} \subset \mathbf{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$。该等价

$$(\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}})^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{RMod}^{\mathrm{ft}}(A)$$

并不总是将 $(\mathbf{LMod}(A)^{\omega})^{\mathrm{op}}$ 送到 $\mathbf{RMod}(A)^{\omega}$。例如，考虑 k 是一个域，而 A 是一个四维代数，其基为 e_1、e_2、f、ϵ，其中 e_1 和 e_2 是正交幂等元，并且

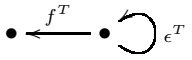
$$e_1 f e_2 = f \qquad e_2 \epsilon e_2 = 0 \qquad \epsilon f = 0 \qquad \epsilon^2 = 0$$

该环上的左模是箭图的表示



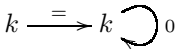
$$\text{subject to } \epsilon^2 = 0 \text{ and } \epsilon f = 0$$

而右模是箭图的表示

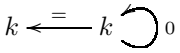


$$\text{subject to } (\epsilon^T)^2 = 0 \text{ and } f^T \epsilon^T = 0$$

该表示



是投射的，但它的对偶



不是投射的，也没有有限投射分解。

3.9. 对称结构。 在有关群代数及其块代数之间的导出等价的文献中，有时会用到这些代数上自然的“对称结构”，例如 [Rou01]。对称结构会给函子的右伴随带来一些有益的结果 $D^b(A) \to D^b(B)$，该函子由一个由（B，A）-双模组成的复形给出。本节将说明这些结果在代数谱中的对应形式。

定义 3.9.1. 设 B 是一个 k-代数谱，且作为 k-模是完美的。B 上的对称结构是 (B, B)-双模 $B \cong B^*$ 的一个同构。

设 $F : \mathbf{LMod}(A) \to \mathbf{LMod}(B)$ 是一个保余极限的 k-线性函子，即$F(M) = F(A) \otimes_A M$。我们已经看到，当且仅当 (B, A)-双模 $F(A)$ 作为左 B-模是完美的时，F 才将 $\mathbf{LMod}(A)^{\omega}$ 映入 $\mathbf{LMod}(B)^{\omega}$。当 B 在 k 上是完美的时，我们还可以得出 $F(A)$ 在 k 上是完美的，并考察带有其 (A, B)-双模结构的 $F(A)^*$。

命题 3.9.2. 假设 B 在 k 上是完美的，且具有对称结构。设 F : LMod(A) $\to$ LMod(B) 是一个保余极限函子，它将 LMod(A)$^\omega$ 映入 LMod(B)$^\omega$。那么右伴随 G : LMod(B) $\to$LMod(A) 由下式给出

$$G(M) = F(A)^* \otimes_B M$$

证明。 根据命题 3.6.1， G 保余极限，且由公式 $G(M) = G(B) \otimes_B M$给出，而 (3.6.2) 给出了 $G(B)$ 的公式:

$$G(B) = \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{LMod}(B)}(F(A), B)$$

由于 $F(A)$ 和 B 都是 k上的完美对象，因此我们进一步有一个左 A-模同构 (3.8.1)

$$\underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{LMod}(B)}(F(A), B) \cong \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{RMod}(B)}(B^*, F(A)^*) \tag{3.9.1}$$

其中，定义域上的左 A-模结构由 $F(A)$上的右 A-模结构诱导，而陪域上的结构则由 $F(A)^*$上的左 A-模结构诱导。复合映射为

$$G(B) \cong \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{RMod}(B)}(B^*, F(A)^*)$$

双模同构 $B^* \cong B$ 也是一个右 B-模同构，并且它诱导出另一个同构

$$G(B) \cong \underline{\mathrm{Maps}}_{\mathrm{RMod}(B)}(B, F(A)^*) \cong F(A)^*$$

其中，第二个同构 $\underline{\mathrm{Maps}}^{\mathrm{RMod}(B)}(B, N) \cong N$ 对任意右 B-模 N都成立。□

当 A 和 B 在 k上都是完美的，且都带有对称结构时，我们可以得出一些进一步的结论:

推论 3.9.3. 假设 A 和 B 在 k 上都是完美的，且可以赋予对称结构。设 F : LMod(A) $\to$LMod(B) 是一个保持余极限的函子，它将 LMod(A)$^\omega$ 映入 LMod(B)$^\omega$。那么以下条件等价:

(1) $F(A)$ 作为右 A-模是完美的 (2) $F(A)^*$ 作为左 A-模是完美的 (3) 右伴随 $G(M) = F(A)^* \otimes_B M$将 LMod($B$)$^\omega$映入 LMod($A$)$^\omega$

当这些等价条件成立时， F 将 LMod(A)^{ft} 映入 LMod(B)^{ft} ，且G 将LMod(B)^{ft} 映入 LMod(A)^{ft}。

证明。 (1) 和 (2) 由命题 3.8.2 等价，而 (2) 和 (3) 的等价性可由公式 $G(M) = F(A)^* \otimes_B M$.

显然，该映射 F 将左模范畴(A)^{ft} 映到左模范畴(B)^{ft} ，这是由命题 3.5.2直接得到的。该映射G 将左模范畴(B)^{ft} 映到左模范畴(A)^{ft} ，这是将同一命题应用于$G(B)$ 得出的。□

3.10. K（n）-局部代数。 虽然命题3.5.1 已经完整描述了函子 LMod(A)$^\omega \to$ LMod(B)$^\omega$ ，其表述使用了（B， A）-双模，但命题 3.5.2只给出了一个充分条件，用以保证某个双模能够确定函子 LMod(A)^{ft} $\to$LMod(B)^{ft}。在本节及下一节中，我们将讨论当A 和 B 是有限群的群代数，且 k 满足某个技术条件时如何得到更好的结果

（公式（3.11.1））与 K（n）-局部 谱理论有关；主要结果是推论3.12.7。这些材料不用于§2.6 的证明。

对于 $n \geq 1$，令 $K(n) = K(n)_p$ 表示素数p处的第 n 个 Morava K-理论谱，其中

$$\pi_i(K(n)) = \begin{cases} \mathbf{Z}/p & \text{if } i \in (2p^n - 2)\mathbf{Z} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

c 是（任意）可呈稳定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 的一个对象。若$K(n)\otimes_{\mathbf{S}} c = 0$，则称其为 $K(n)$-无挠的；若当c 是 $K(n)$-无挠对象时，映射空间 Maps(c, d) 可缩，则称 $d \in \mathcal{C}$ 为 $K(n)$-局部对象。$\mathcal{C}$ 中 $K(n)$-局部对象构成的全子范畴是幂等函子 $L_{K(n)} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的本质像，记作 $L_{K(n)}\mathcal{C}$。

对于图表D 的极限和余极限，我们有两个有用的公式： $I \to L_{K(n)}\mathcal{C}$:

$$\varprojlim D = \varprojlim (L_{K(n)}\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}) \circ D \qquad \varinjlim D = L_{K(n)} \varinjlim (L_{K(n)}\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}) \circ D$$

换言之， $L_{K(n)}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的包含保持极限，而局部化函子 $\mathcal{C} \to L_{K(n)}\mathcal{C}$ 保持余极限。

我们关注范畴 $L_{K(n)}$LMod(A)，其中 A 是结合的 k-代数谱，而 k 是交换环谱。一般而言，我们还假设 k 和 A 本身是 $K(n)$-局部的（否则，将它们替换为各自的 $K(n)$-局部化后，得到的范畴仍然等价）。

命题 3.10.1. 对于 $M \in$LMod(A)，以下条件等价:

(1) $M \in L_{K(n)}$LMod(A) (2) M 底层的 k-模属于 $L_{K(n)}$Mod(k)。

证明。 $K(n)\otimes_{\mathbf{S}}$ 在 LMod(A) 和 Mod(k) 上的作用由遗忘函子联系起来，因此如果 N 作为 A- 模是 $K(n)$- 无挠的，那么它作为 k- 模也同样是 $K(n)$- 无挠的。同理，如果 N 是 $K(n)$-无挠的 k-模，那么 $A \otimes_k N$, $A \otimes_k A \otimes_k N$,... 也都是。因此，对所有 n，当 M 是 $K(n)$-局部的且 N 是 $K(n)$-无挠的时，映射 Maps$_k$($A^{\otimes_k n} \otimes_k N, M) = 0$。由 Maps$_A(N, M)$ 的巴模型可得 (2) 蕴含 (1)，即

$$\begin{aligned} \text{Maps}_A(N, M) &\cong \varprojlim_n \text{Maps}_k(A^{\otimes n} \otimes N, M) \\ &= \varprojlim (\text{Maps}_k(A \otimes_k N, M) \rightrightarrows \text{Maps}_k(A \otimes_k A \otimes_k N, M) \cdots) \end{aligned}$$

只要极限中的所有项都消失，它就会消失；也就是说，只要 M 是 $K(n)$-局部的 k-模。

要证明 (1) 蕴含 (2)，再次利用：若 N 是 $K(n)$-无圈的，则 $A \otimes_k N$ 也是；并且 Maps$_k(N, M) \cong$Maps$_A(A \otimes_k N, M)$。

□

3.11. $K(n)$-局部模的有限性条件。

备注 3.11.1. 与§3.2 中 $L_{K(n)}$Mod(k) 有类似的有限性条件，但它们不一定与较大范畴 Mod(k) 中相应的概念一致，而且它们也不再全都相同。

(1) 完美的概念没有改变（任何完美 k-模都会自动成为$K(n)$-局部的）。（2） Mod(k) 中的紧对象（或完美对象）一般而言在$L_{K(n)}$Mod(k) 中并不紧；例如，k 本身通常在 $L_{K(n)}$Mod(k) 中并不紧。这类似于如下事实：$\mathbf{Z}_p$ 在 p-完备的 $\mathbf{Z}_p$- 模中并不紧。

$L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)$ 上的自然张量积不是 $(M,N)\mapsto M\otimes_k N$，而是 $(M,N)\mapsto L_{K(n)}(M\otimes_k N)$。我们将关于这一张量结构可对偶的对象称为 $K(n)$-局部可对偶。完美模总是 $K(n)$-局部可对偶的，但通常存在比这更多的 $K(n)$-局部可对偶对象，正如 [HS99, §15] 中所述。

虽然左模范畴 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 是根据底层 k-模为完美模来定义的，但事实证明，$K(n)$-局部可对偶性这一概念具有更有用的形式性质（另见命题3.12.2）：

引理 3.11.2. 设 k $K(n)$-局部交换环谱，且 $M\in L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)$。那么，$M$ 是 $K(n)$-局部可对偶的，当且仅当函子

$$L_{K(n)}(-\otimes_k M): L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)\to L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)$$

保极限。

证明。“仅当”方向由以下事实推出：$L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)$ 是一个闭对称幺半范畴。对于“如果”方向，注意伴随函子定理[Lur17，推论 5.5.2。9] 和命题 3.12.1 表明 $-\otimes_k M$ 有一个左伴随，给定为 $L_{K(n)}(-\otimes_k N)$，并且 N显然是 $K(n)$-局部对偶的 M。□

鉴于备注 3.11.1(3)，我们强调一种使这种区别消失的条件：

(3.11.1) 若 $K(n)$-局部交换环谱 k 满足条件 (3.11.1)，则每个 $K(n)$-局部可对偶 k-模 M 都是完美的。

由于完美的 k-模总是可对偶的，因此当 k 满足此条件时，可对偶的 $K(n)$-局部 k-模与完美的 $K(n)$-局部 k-模这两类对象相同。因此，左模范畴$(A)^{\mathrm{ft}}$与左模范畴 $L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A)$ 的子范畴相同，其中对象的底层 k-模是$K(n)$-局部可对偶的。

例 3.11.3. 当 $K(n)=K(1)$ 和 $k=\mathrm{KU}_p$ 时，条件 (3.11.1) 得到满足。事实上，对于任意 n，任何 Lubin-Tate 理论（等价地，Morava E-理论）都满足该条件。为说明这一点，设 E 是一个 Lubin-Tate 理论，设 $I=(p,v_1,\cdots,v_{n-1})\subset\pi_0(E)$ 表示 $\pi_0(E)$ 中的一个 Landweber 理想，并设 $K=E/(p,v_1,\cdots,v_{n-1})$ 表示相应的 Morava K-理论。若 M 是一个可对偶的 E-模，则$\pi_*(M/(p,v_1,\cdots,v_{n-1}))$ 是一个可对偶的 $\pi_*(K)$-模，因此它是一个有限生成的 $\pi_*(K)$-模。根据 [HS99，命题 2.4]，的证明，这意味着 $\pi_*(M)$ 是 $\pi_*(E)$ 上有限生成的；进而根据 [HS99，引理 8.11]，M 是一个完美的 E-模。

3.12. $L_{K(n)}$-局部范畴中的函子与双模。

命题 3.12.1. 设 k 是一个 $K(n)$-局部交换环谱，并设 A 和 B 是 $K(n)$-局部结合的 k-代数谱。若 F 是一个保持余极限的 k-线性函子

$$F: L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A)\to L_{K(n)}\mathrm{LMod}(B),$$

则 F 同构于 $L_{K(n)}(F(A)\otimes_A -)$。

此处 $F(A)$ 获得一个（B，A）双模结构，如 §3.5 中所述。（3.5.1）的类似结论为

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{L}}_k(L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A),L_{K(n)}\mathrm{LMod}(B))\cong L_{K(n)}\mathrm{Bimod}(B,A)$$

从右范畴到左范畴的函子，将一个 $K(n)$-局部双模N 映射为函子 $L_{K(n)}(N \otimes_A -)$。

证明。假设 F 是一个保余极限的 k-线性函子 $L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A) \to L_{K(n)}\mathrm{LMod}(B)$。

对于 $M \in L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A)$，自然映射

$$F(A) \otimes_A M \to F(M) \tag{3.12.1}$$

可分解为一个自然映射

$$L_{K(n)}(F(A) \otimes_A M) \to F(M). \tag{3.12.2}$$

事实上，由于 $F(M)$ 是 $K(n)$-局部的，(3.12.2) 是 $L_{K(n)}$ 应用于 (3.12.1) 的结果。映射 (3.12.2) 是同构，当 $M = A$；由于 F 保余极限，因此对于所有 $M \in L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A)$，它都是同构。□

当 A 在 k 上完美时，我们有包含关系

$$\mathrm{LMod}^{\omega}(A) \subset \mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}} \subset L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A).$$

如备注 3.11.1 所述，我们提醒读者，这两个范畴都不等同于 $L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A)$ 中的紧对象。如果 A 和 B 都在 k 上完美，那么自然会想要一个判据，以判断 $L_{K(n)}(F(A) \otimes_A -)$ 是否将 $\mathrm{LMod}(A)^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(B)^{\mathrm{ft}}$。命题 3.5.2 的判据仍然适用，但条件严格更强，并非必要。当 A 和 B是群代数时，一种称为 $K(n)$-局部 Tate 消失或双向性的现象，给出了限制较少的判据。

对这些现象的研究源于 Greenlees–Sadofsky 和 Hovey–Sadofsky 的工作 [GS96，HS96]。在推广他们的工作时，Kuhn [Kuh04] 证明有限群的 Tate 上同调在 $K(n)$-局部情形下消失[1]。Kuhn 定理的$n = 0$ 情形是一个熟知的事实：在 有理数域上，加性转移映射从轨道到不动点是同构。这些结果后来由 Hopkins–Lurie 双向性理论进一步推广并重新诠释[HL13]，，该理论又由 Carmeli–Schlank–Yanovski 和 Barthel–Carmeli–Schlank–Yanovski 广泛推广和发展 [CSY22]，[CSY21a]，[CSY21b]，[BCSY22]。为方便读者，下面的命题汇集了该理论的一些基本特征。

命题 3.12.2. 设 G 是有限群，且 k 是 $K(n)$-局部交换环谱。那么：

(1) 函子 $\mathrm{Fun}(BG, L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)) \to L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)$ 由 $(-)^{hG}$ 和 $L_{K(n)}(-)_{hG}$ 给出，二者相同。(2) k-模 k^{BG} 和 $L_{K(n)}k[BG]$ （根据 (1) 二者同构）是关于 k 的 $K(n)$-局部可对偶对象。

若 G 是 p-群，那么我们还有

(3) 存在一个范畴等价

$$\mathrm{Fun}(BG, L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k)) \cong L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k^{BG})$$

由 $M \mapsto M^{hG}$ 给出。

(4) 在 (3) 的等价下，(1) 中的两个函子都对应于沿 $k \to k^{BG}$ 的标量限制。

[1]事实上，他在（推测上）更一般的 $T(n)$-局部同伦理论框架下证明了这一点。

证明。(1) 是 [HS96，定理 1.1]（或 [HL13，定理 5.2.1]）的结论，而 (3) 和 (4) 是 [HL13，定理 5.4.3] 的结论。为证明 (2)，首先注意，若 $P \subset G$ 是一个 p-Sylow 子群，则标准的转移论证表明 $L_{K(n)}k[BG]$ 是 $L_{K(n)}k[BP]$ 的一个直和项，因此只需考虑 G 是一个 p- 群的情形。对同伦轨道的传递性将问题归结为情形 $G = C_p$；再由基变换，只需考虑情形 $k = L_{K(n)}\mathbb{S}$。最后，根据 [HS99，定理 8.6]，$L_{K(n)}\mathbb{S}[C_p]$ 的 $K(n)$-局部可对偶化等价于证明 $K(n)_*(BC_p)$ 是有限的，而这可由 [RW80] 得出。□

命题 3.12.3。设 k 是一个 $K(n)$-局部交换环谱，设 $A = k[G]$ 是有限群 §4.2 的群代数，且设 G，并令 $F(A)$ 是一个右A-模，其底层 k-模是 $K(n)$-局部可对偶的。则函子

$$\begin{aligned} F : L_{K(n)}\mathrm{LMod}(A) &\to L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k) \\ M &\mapsto L_{K(n)}(F(A) \otimes_A M) \end{aligned}$$

保持其底层 k-模具有 $K(n)$-局部可对偶这一性质。

证明。鉴于命题3.12.2(2-4)，这可由以下引理 3.12.4 应用于映射 $k \to k^{BG}$ 得出。□

引理 3.12.4。设 $f\colon k \to k'$ 是一个 $K(n)$-局部交换环谱之间的映射，且 k' 作为 k-模是 $K(n)$-局部可对偶的。那么沿 f 进行标量限制会将 $K(n)$-局部可对偶的 k-模送到 $K(n)$-局部可对偶的 k'-模。

证明。设 M 是一个 $K(n)$-局部可对偶 k'-模。注意，函子[2]

$$L_{K(n)}(- \otimes_k M) : L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k) \to L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k) \tag{3.12.3}$$

可以写成以下复合

$$L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k) \xrightarrow{-\otimes_k k'} L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k') \xrightarrow{-\otimes_{k'} M} L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k') \xrightarrow{\text{forget}} L_{K(n)}\mathrm{Mod}(k).$$

根据可对偶性假设和引理 3.11.2，前两个箭头保极限，第三个箭头作为右伴随也保极限。因此，(3.12.3) 也保极限，结论由引理 3.11.2得出。□

注 3.12.5。引理 3.12.4并非只适用于 $K(n)$-局部谱——类似的结论在任意可呈现的对称幺半稳定∞-范畴中也成立。

注 3.12.6。命题3.12.3 的结论在 A 不是有限群的群代数时可能不成立。例如，设 $A = k[S^1]$ 是圆的 k- 同调谱。那么我们有一个同构

$$L_{K(n)}(k \otimes_A k) \cong k[BS^1],$$

它通常并非 $K(n)$-局部可对偶。

当 k 满足条件 (3.11.1 时，完美模与 $K(n)$-局部可对偶模相同，因此我们立即得到关于有限型模的命题3.12.3 的以下推论：

[2]在此处及下式中，由于假设其可对偶，无需对张量积进行 $K(n)$-局部化。

推论 3.12.7。 设 k 是满足条件 ($K(n)$-局部交换环谱，且满足条件 (3.11.1)。设 $A = k[G]$ 和 $B = k[H]$ 分别为有限群 G 和 H的群代数（ $F(A)$ 。设 B, A)-双模，其底层 k-模是完美模。则函子

$$M \mapsto L_{K(n)}(F(A) \otimes_A M)$$

将左模范畴$(A)^{\mathrm{ft}}$ 映至左模范畴$(B)^{\mathrm{ft}}$。

4. Permutation modules and Rouquier's equivalence over S

现在我们转而讨论如何将 Rouquier 等价提升到**S**上。在§4.1中，我们首先回顾 Rouquier 原始等价的形式。接着，在§4.2-4.4中，我们讨论 G上的置换模**S**理论。在§4.5中，我们证明置换模的直和项可从$\mathbf{Z}_q$ 提升到$\mathbf{S}_q$。最后，在§4.7中，我们将这些结果与§3 中的结果结合起来，以证明主定理，即定理4.7.2。

4.1. Rouquier 的两项复形。设 G 是一个有限群， $D \subset G$是一个阶为 p的幂的循环群。 G 的左乘和 $N_G(D)$在 G 上的右乘赋予 $\mathrm{Z}_q[G]$ 一个$(G, N_G(D))$-双模结构，其对应的函子

$$\mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]) \to \mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[G])$$

等价于沿包含 $N_G(D) \subset G$进行诱导。其伴随是沿同一包含进行限制，由视为 $(N_G(D)\ G)$-双模的 $\mathrm{Z}_q[G]$ 表示。

现在设 $\mathrm{F}_q[G]b$ 和 $\mathrm{F}_q[N_G(D)]b'$ 是缺陷群为 D 且互为布劳尔对应块的块。那么（滥用记号，也用 b 和 b' 表示这些幂等元在 $\mathrm{Z}_q[G]$ 和 $\mathrm{Z}_q[N_G(D)]$ 中的唯一提升），双模 $\mathrm{Z}_q[G]$ 的 $(\mathrm{Z}_q[G]b,\mathrm{Z}_q[N_G(D)]b')$-直和项为 $b\mathrm{Z}_q[G]b'$，它表示复合函子

(4.1.1)
$$\mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b') \to \mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]) \to \mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[G]) \to \mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[G]b)$$

此函子将 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}$ 映至 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$，并将 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[N_G(D)]b')^{\omega}$ 映至 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[G]b)^{\omega}$。其右伴随由 $b'\mathrm{Z}_q[G]b$ 表示，并将 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$ 映至 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}$，将 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[G]b)^{\omega}$ 映至 $\mathrm{LMod}(\mathrm{Z}_q[N_G(D)]b')^{\omega}$。

复合 (4.1.1) 并非等价。对于许多有限群，它确实会诱导出一种“稳定等价”（例如，Sylow 子群 p的交为平凡交的 [Bro94，§5, 6。4]；一般而言，必须取一个直和项）——对此的一种表述是，它会诱导出商范畴之间的等价

$$\frac{\mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}}{\mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b')^{\omega}} \cong \frac{\mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}}{\mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[G]b)^{\omega}}$$

特别地，(4.1.1) 与其伴随函子的复合，与恒等函子相差一个由投射双模构成的有界复形，其中双模为 $(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b',\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b')$ 双模，或 $(\mathbf{Z}_q[G]b,\mathbf{Z}_q[G]b)$ 双模。

Rouquier 证明，当 D 为循环群时，可以对表示 (4.1.1) 的双模作相对简单的修正，从而得到 Brou´e 猜想所预言的等价。

定理 4.1.1 (Rouquier [Rou98])。 设 G 是一个有限群，且 $D \subset G$ 是 p的 - 次幂阶循环子群。设 $\mathbf{F}_q[G]b$ 和 $\mathbf{F}_q[N_G(D)]b'$ 是块，其

缺陷群为 D，且二者互为 Brauer 对应块。那么存在一个由双模构成的两项复形 ($\mathsf{Z}_q[G]b$, $\mathsf{Z}_q[N_G(D)]b'$)

$$M_0 = \{\cdots \to 0 \to N_0' \to N_0 \to 0 \to \cdots\}$$

具有以下性质：

(1) N_0 是 $\mathsf{Z}_q[G]$ 的一个直和项，其 ($\mathsf{Z}_q[G]$, $\mathsf{Z}_q[N_G(D)]$)-双模结构来自 G 的左乘作用和 $N_G(D)$ 的右乘作用。(2) N_0' 是一个投射的 ($\mathsf{Z}_q[G]b$, $\mathsf{Z}_q[N_G(D)]b'$)-双模。(3) 所得到的函子

$$M_0 \otimes_{\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b'} - : \mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[N_G(D)]b') \to \mathrm{LMod}(\mathbf{Z}_q[G]b)$$

是一个等价，并且限制在 $\mathrm{LMod}^{\mathrm{ft}}$ 和 LMod^{ω} 上时也是一个等价。

4.2. 群环与置换模。若 k 是一个交换环谱，记 $X \mapsto k[X] \in \mathsf{Mod}(k)$ 为将一个空间映到其 k-同调谱的函子。例如，若 $k = \mathsf{S}$，则 $\mathsf{S}[X]$ 是 X 加上一个不交基点后的悬挂谱；一般而言，$k[X] = \mathsf{S}[X] \otimes_{\mathbf{S}} k$。一个有用的公式是

$$[k[X], \Sigma^i k] \cong H^i(X; k) \tag{4.2.1}$$

其中右侧表示带有系数 k的 X 的 i次（非常规）上同调。

若 G 作用于 X，则可通过复合将 $k[X]$ 视为 $\mathsf{Mod}(k)$ 中的 G-对象（即 $\mathsf{Fun}(BG, \mathsf{Mod}(k))$ 的对象）

$$BG \to \mathcal{S} \xrightarrow{k[-]} \mathrm{Mod}(k).$$

(4.2.1) 的类似结果为

$$[k[X], \Sigma^i k]_{\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Mod}(k))} \cong H^i_G(X; k) := H^i(X_{hG}; k) \tag{4.2.2}$$

其中 $X_{hG} := \varinjlim_{BG} X \cong (X \times EG)/G$ 是博雷尔构造。

若 X 是有限 G-集，则称$k[X] = \bigoplus_{x \in X} k$ 为置换模。由 G上的乘法诱导的 $k[G]$ 上的结合 k-代数结构，与将 $k[G/\{1\}]$ 视为置换模时的自同态代数一致；该置换模生成 $\mathsf{Fun}(BG,\mathsf{Mod}(k))$，因此有

$$\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Mod}(k)) \cong \mathrm{LMod}(k[G]).$$

$\mathsf{Mod}(k)$ 上的对称幺半结构在 $\mathsf{Fun}(BG,\mathsf{Mod}(k))$ 上诱导出对称幺半结构，我们将其记为 $\otimes_k$。该幺半结构的单位元是平凡模 k。

引理 4.2.1. 置换模 $k[X]$ 关于 $\mathsf{Mod}(k)$ 和 $\mathsf{Fun}(BG, \mathsf{Mod}(k))$ 中的幺半结构是自对偶的。

证明. 我们构造满足必要关系的求值映射和余求值映射。

余求值映射来自复合

$$k \to k[X] \xrightarrow{\Delta_X} k[X \times X] \cong k[X] \otimes_k k[X] \tag{4.2.3}$$

其中第一个映射是对角映射 $k \to \bigoplus_{x\in X} k$。复合映射

$$[k[X]\otimes k[X],k] \xrightarrow{\otimes k[X]} [k[X]\otimes k[X]\otimes k[X],k[X]] \xrightarrow{\mathrm{id}_{k[X]}\otimes(4.2.3)^*} [k[X],k[X]]$$

是一个双射。求值映射 $k[X]\otimes k[X]\to k$ 的同伦类是 $\mathrm{id}_{k[X]}$ 在该逆双射下的像。□

注 4.2.2。流形的 k-同调提供了 Mod(k) 中一类更一般的可对偶对象，而 k-流形的 G-同调则提供了 Fun(BG, Mod(k)) 中的可对偶对象。对于闭 n-流形 M，只要 M 可定向于 k，同调谱$k[M]$ 在平移意义下便是自对偶的——事实上， M 的 k- 定向的一种定义是一个映射的同伦类 $k\to\Sigma^{-n}k[M]$ ，它具有如下性质：复合映射

$$k\to\Sigma^{-n}k[M]\to\Sigma^{-n}k[M\times M]\to\Sigma^{-n}k[M]\otimes_k k[M]$$

展示 $\Sigma^{-n}k[M]$是 $k[M]$的对偶。引理 4.2.1即为 $n=0$的情形。

在此等价下

$$\mathrm{Bimod}(k[G],k[G])\cong\mathrm{LMod}(k[G]\otimes k[G]^{\mathrm{op}})\cong\mathrm{LMod}(k[G\times G^{\mathrm{op}}]),$$

对角双模 $k[G]$ 是一个置换 $G\times G^{\mathrm{op}}$-模，其中 $G\times G^{\mathrm{op}}$ 通过 G 上的左乘与右乘作用。由（4.2.3）可知，每个 $k[G]$ 都具有§§3.9意义下的自然对称结构。此外， $k[G]$ 的每个块都有对称结构：事实上，若 $A=A_1\times A_2\times\cdots$，则$A$ 上的对称结构会通过复合映射在每个 A_i 上诱导出对称结构 $A_i\to A\cong A^*\to A_i^*$。

置换模的自对偶性给出了映射 $k[X]\to k[Y]$ 的同伦类与 $X\times Y$中等变 k-上同调类之间的对应：

$$[k[X],k[Y]]_{k[G]}\cong[k[X]\otimes k[Y],k]_{k[G]}\cong[k[X\times Y],k]_{k[G]}\cong H^0_G(X\times Y;k).$$

4.3. 伯恩赛德环。设 G为有限群， X为有限 G-集合，令 Burn$_G(X)$ 表示交换幺半群的格罗滕迪克群；该幺半群的对象是有限 G-集合 Y 的同构类，并配有一个到 X的 G-等变映射，其加法由不交并给出。我们将 Burn$_G(X)$ 称为 X上的虚有限 G-集合的伯恩赛德环，因为它具有由关于 X的纤维积给出的交换乘法。

注 4.3.1. 一般而言，Burn$_G(X)$ $=\bigoplus_{x\in G\backslash X}$Burn$_{G_x}$(pt)，其中求和遍历 G-轨道代表元， G_x 表示稳定子。特别地，Burn$_G(G/H)$ 同构于 Burn$_H$(pt)，且 Burn$_G(G/\{1\})$ $=$ 整数环。

G-集合的映射 $X\to X'$ 通过对 X' 取纤维积诱导出环同态 Burn$_G(X')\to$ Burn$_G(X)$。特别地，映射 $X\to$pt 赋予 Burn$_G(X)$ 一个 Burn$_G$(pt)-模结构，而映射 $G\to$ pt 诱导出增广映射 Burn$_G$(pt) $\to$Burn$_G(G)$ $=$ 整数环，它将一个 G-集合映射到其底层集合的基数。令 $I\subset$ Burn$_G$(pt) 表示增广映射的核，称为增广理想。

定理 4.3.2 (Carlsson [弱84], 形式的 Segal 猜想)。 设 G 为一个有限群，我们将其视为在 $\mathbf{S}$上平凡作用，并设 $\mathbf{S}^{hG}$ 为该作用的同伦不动点谱 §3.1。那么存在一个环的自然映射

$$\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})\to\pi_0(\mathbf{S}^{hG}) \tag{4.3.1}$$

这表明目标是源的 I-进完备化。

注 4.3.3。由于 G 在 S 上的作用是平凡的，同伦不动点 S^{hG} 自然地与 $\mathrm{Maps}^{\mathrm{Mod}(\mathbf{S})}(\mathsf{S}[BG], \mathsf{S})$ 以及 $\mathrm{Maps}^{\mathrm{LMod}(\mathbf{S}[G])}(\mathsf{S}, \mathsf{S})$ 相识别。（类似地，S_{hG} 自然地与 $\mathsf{S}[BG]$ 相识别。）

我们将 $\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})$ 在 I 处的完备化记为 $\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_I$。若 X 是有限G-集，我们也利用 $\mathrm{Burn}_G(X)$ 上自然的 $\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})$-模结构，定义 $\mathrm{Burn}_G(X)^\wedge_I$。

命题 4.3.4. 设 G 是有限群。那么对于任意两个有限 G-集 X 和 Y，我们有如下同一认定

$$\pi_0\mathrm{Maps}_{\mathrm{LMod}(\mathbf{S}[G])}(\mathbf{S}[X], \mathbf{S}[Y]) \cong \mathrm{Burn}_G(X \times Y)^\wedge_I.$$

特别地，取 $Y = \mathrm{pt}$，可得

$$\pi_0\mathrm{Maps}_{\mathrm{LMod}(\mathbf{S}[G])}(\mathbf{S}[X], \mathbf{S}) \cong \mathrm{Burn}_G(X)^\wedge_I. \tag{4.3.2}$$

证明。事实上，只需证明陈述中提到的特殊情形（4.3.2），因为 $\mathbf{S}[Y]$ 是典范自对偶的，因此

$$\mathrm{Maps}_G(\mathbf{S}[X], \mathbf{S}[Y]) \cong \mathrm{Maps}_G(\mathbf{S}[X] \otimes \mathbf{S}[Y], \mathbf{S}) \cong \mathrm{Maps}_G(\mathbf{S}[X \times Y], \mathbf{S}).$$

为此，注意到（4.3.2）两边都将不交并变为乘积，因此只需考虑 X 只有单个轨道的情形，设为 $X = G/H$。那么

$$\mathrm{Maps}_G(\mathbf{S}[G/H], \mathbf{S}) \cong \mathrm{Maps}_H(\mathbf{S}, \mathbf{S}),$$

其 π_0 由定理 4.3.2 识别为 $\mathrm{Burn}_H(\mathrm{pt})^\wedge_{I_H} \cong \mathrm{Burn}_G(G/H)^\wedge_{I_G}$。 □

如果我们进一步在 p 处完备化 $\mathrm{Burn}_G(X)^\wedge_I$，或者等价地，研究 $\mathrm{Burn}_G(X)^\wedge_{(I,p)}$，其中 (I, p) 是 $\mathrm{Burn}_G(X) \xrightarrow{\mathrm{aug}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p$ 的核，则有以下简单描述：

引理 4.3.5. $\mathbb{Z}_p$-模 $\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_{(I,p)}$ 是有限秩自由模，由形如 G/P 的 G-集的同构类生成，其中 $P \subset G$ 是一个 p-群。

由此及注记 4.3.1，$\mathrm{Burn}_G(X)^\wedge_{(I,p)}$ 是一个自由 $\mathbf{Z}_p$-模，由 G-映射 $G/P \to X$的同构类生成，其中 $P \subset G$ 是一个 p-群。

证明。回忆 Burnside 标记同态 $\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt}) \to \prod_H \mathbf{Z}$，也称为“标记表”[Bur11]。直积中的因子由 G 的子群共轭类代表元标记，投影到因子H 会将 G-集 X 映射为其 H-不动点的基数。若 $s \in \mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})$，我们用 $\#s^H$ 表示标记同态与投影到由 $\mathbf{Z}$ 因子（由 H 标记）的复合。

标记同态是环同态，很容易看出它是单射（参见 [tD79，命题 1.2。2]）。由于其定义域和陪域是秩相同的自由阿贝尔群，这意味着在应用 $- \otimes$ 有理数域 或 $- \otimes$ 有理数域$_p$ 后，它成为同构。记 $e_H \in \mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt}) \otimes$有理数域 为这样的虚拟 G-集：它有一个 H-不动点，而当 H' 不与 H' 共轭时，没有 H-不动点：

$$\#e_H^H = 1 \qquad \#e_H^{H'} = 0 \text{ when } H' \text{ is not conjugate to } H$$

e_H 是 $\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q}$ 和 $\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt}) \otimes \mathbb{Q}_p$ 中的本原幂等元。我们指出，e_H 只涉及与 H 的共轭子群相对应的 G-集：为此，考虑标记同态的一个变体，在源中取由与 H 共轭的 G-集生成的子环，而在目标中，

只考虑与 H 的共轭子群相对应的因子。容易看出，这个变体仍然是单射，因此在张量积 Q 后是一个同构。

Burn 中的本原幂等元$_G$（pt）$\otimes$整数环$_p \cong \mathrm{Burn}_G$（pt）$^\wedge_p$由 Dress[Dre69]确定。它们与p-完美子群 $\varpi \subset G$ （如果一个群没有 p-幂指数的正规子群，就称其为 p-完美群） ϖ 相对应的幂等元为$\varepsilon_\varpi = \sum_H e_H$，其中求和遍历包含 H 的共轭的子群的共轭类代表元 ϖ ，且 p是其正规子群。

平凡子群是 p-完美的；记其对应的幂等元为$\varepsilon := \varepsilon_1$。因此 $\varepsilon := \varepsilon_1 = \sum_Q e_Q$ 其中求和遍历 p-子群 $Q \subset G$的共轭类代表元。自然映射

$$\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_p \to \mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_{(I,p)} \tag{4.3.3}$$

湮灭所有其他 ε_ϖ ，并且其目标是一个局部环（该目标是 Burn$_G$（pt）在某个极大理想处的完备化，即增广模 p的核）。因此，（4.3.3）可分解为

$$\varepsilon\,\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_p \to \mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_{(I,p)} \tag{4.3.4}$$

由于源环 $\varepsilon\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_p$ 是局部环，并且（由标记同态的单射性）是有限生成的自由 整数环$_p$-模，因此其（I， p）-进拓扑与 p-进拓扑一致： $\varepsilon\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_p/(p)$ 是有限局部环，因此理想（I， p）的像是幂零的。因此， $\varepsilon\,\mathrm{Burn}_G(\mathrm{pt})^\wedge_p$与其关于由（$I$， p）生成的理想的完备化同构，从而（4.3.4）是一个同构。

此外，请注意，对于任意 p-子群 $Q \subset G$，都有 $\varepsilon G/Q = G/Q$。这可以由以下事实看出：它们在标记同态下具有相同的像，因为当且仅当 H 共轭于 Q 的某个子群时，$(G/Q)^H$ 才非空，而 ε 是定义在由 p-群 H索引的因子上的示性函数。

因此，只需证明形如 $\varepsilon G/Q$ span εBurn$_G$(pt)$^\wedge_p$ 的 G-集。但形如 G/H span Burn$_G$(pt) 的 G-集，以及在 εBurn$_G$(pt)$^\wedge_p$ 中的这些集合，满足 $G/H = \varepsilon G/H$。由于 $\varepsilon = \sum_Q e_Q$ 只涉及形如 G/Q 的 G-集，其中 p-子群为 Q ，而 $G/H \times G/Q$ 只涉及各向同性子共轭于 Q 的 G- 集，因此得证。□

4.4. 关于强塞加尔猜想与 Tate 上同调的旁论。本小节的内容不会用于 §2.6 的证明。

Segal 仿照 Atiyah 定理（4.3.1）表述了该命题 [Ati61], ，该定理将复 K-理论 KU^0(BG) 与表示环的完备化$R(G)$ 联系起来，其中后者是 G 的有限维表示的格罗滕迪克环$\mathbf{C}[G]$:

$$R(G) \to \mathrm{KU}^0(BG). \tag{4.4.1}$$

Atiyah 定理和 Segal 猜想都有一个更精妙的版本，从某种意义上说，它正是“真正的”等变稳定同伦论的开端。

(1) 存在一个交换环谱 KU^G，即一点的（真正的） G-等变K-理论，并附带一个映射

$$\mathrm{KU}^G \to \mathrm{KU}^{hG}$$

它在 4.4.1 上恢复了（ π_0。它是以 G 的复表示范畴构造而成的，其方式大致与 KU 以复向量空间范畴构造而成的方式相同。作为 Mod(S) 或 Mod(KU) 中的对象，KU^G 具有简单的结构：它是一个以不可约复表示为基的自由 KU-模：

$$\mathrm{KU}^G \cong \bigoplus_{\mathrm{Irr}(\mathbf{C}[G])} \mathrm{KU}\,.$$

(2) 令 S^G 表示有限 G-集合范畴的群完备化 K-理论谱，其对称幺半结构由 G-集合的不交并给出。 G-集合的笛卡尔积赋予 S^G 交换环谱结构。作为 Mod(S) 中的对象，有

$$\mathbf{S}^G \cong \bigoplus_H \mathbf{S}[B(N_G(H)/H)]$$

其中，求和遍历子群$H \subset G$的共轭类代表元。

Carlsson 证明了比（4.3.1）更强的结论：

定理 4.4.1 （[Car84], Segal 猜想的强形式）。 设 G 是一个有限群。存在一个交换环谱的自然映射

$$\mathbf{S}^G \to \mathbf{S}^{hG}$$

它表明 $\pi_*(\mathrm{S}^{hG})$ 是 I-进完备化 $\pi_*(\mathrm{S}^G)$。

这带来了一个出人意料的结论：S^{hG} 是连通的。（要看出这一点为何出人意料，请注意，将 S 替换为整数环 Z 的 Eilenberg-MacLane 谱，会得到一个集中在非正次数的对象，因为 $\pi_i(\mathrm{Z}^{hG})$ 是 G 的第 $-i$ 个群上同调群。）

Segal 猜想的第二个推论是，可以计算某些有限群以球谱为系数的 Tate 上同调。对于有限群G和一个 G-谱 M， M 的 G-Tate 上同调 $M^{tG} \in$Mod(S) 由一个余纤维序列定义

$$M_{hG} \xrightarrow{\mathrm{Nm}} M^{hG} \to M^{tG}$$

当 M 是离散的，范映射 Nm 在 π_0 上由公式 $m \mapsto \sum_{g\in G} gm$ 给出，而同伦群 $\pi_* M^{tG} = \hat{}H^{-*}(G;\, M)$ 与 G 以 M 为系数的经典 Tate 上同调群一致。

例 4.4.2。 当 $G = C_p$，阶为 p 的循环群，其增广理想的性质是，强塞加尔猜想将 $\mathbf{S}^{hC_p}$ 识别为 $\mathbf{S}_p \oplus \mathbf{S}[BC_p]$。范映射是对第二个直和项的包含， $\mathbf{S}[BC_p] = \mathbf{S}^{hC_p}$。由此可得 $\mathbf{S}^{tC_p} \cong \mathbf{S}_p$。Lin（ C_p 的 Segal 猜想最初正是以这种形式证明的（$p = 2$, [Lin80]）和 Gunawardena（p 奇数， [Gun80]）。

4.5. p-置换 S_q-模。我们称一个 $\mathrm{Z}_q[G]$-模 M_0 可提升到 S_q ，如果存在 $M \in$LMod($\mathrm{S}_q[G]$)，使得存在一个等价

$$M \otimes_{\mathbf{S}_q} \mathbf{Z}_q \cong M_0$$

的 整数环$_q[G]$-模。关于一个整数环$_q[G]$-模是否能提升到 球谱$_q$ ，这是“等变 Moore 空间问题”的近亲；Carlsson 最早在 $G = C_p \times C_p$ [Car81] 的情形中给出了反例。本节讨论一类

存在自然球谱提升的模：根据以下命题，置换模的直和项属于此类：

命题 4.5.1. 设 G 是一个有限群，设 X 是一个有限的 G-集合，并假设 $\mathbf{Z}_q[X] \cong M_0 \oplus N_0$ 是一个 $\mathbf{Z}_q[G]$-模直和分解。那么，存在一个 $\mathbf{S}_q[G]$-模直和分解 $\mathbf{S}_q[X] \cong M \oplus N$，使其在应用 $\otimes_{\mathbf{S}_q}\mathbf{Z}_q$ 后恢复上述 $\mathbf{Z}_q[G]$-模直和分解。

环谱 $\mathbf{S}_q \to \mathbf{Z}_q$ 的映射由截断给出，并诱导出端omorphism 环之间的映射

$$\pi_0\mathrm{Maps}_{\mathbf{S}_q[G]}(\mathbf{S}_q[X], \mathbf{S}_q[X]) \to \pi_0\mathrm{Maps}_{\mathbf{Z}_q[G]}(\mathbf{Z}_q[X], \mathbf{Z}_q[X]) \tag{4.5.1}$$

而该命题的内容是：目标中的任意本原幂等元都可以提升为源中的本原幂等元。由 §4.3可知，该映射可以识别为自然映射

$$\mathrm{Burn}_G(X \times X)^\wedge_{(p,I)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_q \to \pi_0\mathrm{Maps}_{\mathbf{Z}_q[G]}(\mathbf{Z}_q[X \times X], \mathbf{Z}_q)$$

它将 G-上的一个集合 $X \times X$ 映射为其秩函数。特别地，源（引理 4.3.5）和目标都是有限秩自由的 $\mathbf{Z}_q$-模，并且该映射是（不一定交换的）$\mathbf{Z}_q$-代数的满射，因此这归结为以下纯代数事实：

命题 4.5.2。设 A 和 B 是结合的整数环 $\mathbf{Z}_q$-代数，且作为 $\mathbf{Z}_q$-模有限生成。设 $f\colon A \to B$ 是满射代数同态。那么， B 的任一本原幂等元都可提升为 A 的本原幂等元。

我们在这些 $\mathbf{Z}_q$-代数上加上横线，以强调它们是普通的阿贝尔群，而不是环谱。这个结果很可能由来已久，但我们没有找到任何明确陈述它的出处，因此在本节余下部分给出证明。

引理 4.5.3。设 A 和 B 是域上的有限生成结合的代数，且设 $f\colon A \to B$ 是满射代数同态。那么， B 的每个可逆元在 f 下都有一个可逆原像。

证明。令 $I \subset A$ 为 f的核，因此 f 同构于商映射 $A \to A/I$。我们将证明， A/I 中的每个可逆元都能提升为 A中的可逆元。

令 J 为 A的雅各布森根。我们先证明在 $I \cap J = 0$的情况下，引理成立。若 $I \cap J = 0$，则自然映射 $A \to A/I \times_{\bar{A}/I+J} A/J$ 是代数的同构，因此对于每个单位元 $u+I \in A/I$，我们要寻找一个单位元 $v+J \in A/J$使得 $u + I + J = v + I + J$。根据韦德伯恩定理，这样的 $v + J$ 存在：A/J 是半单的，因而是有限个单代数的直积，而 I 在 A/J 中的像是其中一部分相同单代数的直积。

在 $I \cap J \neq 0$ 的情况下，上述论证表明，我们可以沿着 $A/(I \cap J) \to A/I$ 提升单位。由于 A 是域上的有限维代数，因此它是阿廷环，所以 J (因此 $I \cap J$) 是幂零的 [Her94，定理 1.3。1]。由此可知，单位可以沿着 $A \to A/I \cap J$ 提升。 □

引理 4.5.4. 设 A 和 B 是结合的整数环p-代数，且作为整数环p-模有限生成。设 $f\colon A \twoheadrightarrow B$ 是一个满射代数同态。那么 B 中的每个可逆元，在 f下都有一个可逆原像。

证明。假设 $b \in B$ 可逆。我们先证明存在一个 $a \in A$，使得

(1) 对所有 $x \in A$，$a + px$ 均可逆；

(2) $f(a) = b$ 模 pB

事实上，$b + pB$ 在 $\mathbb{F}_p$-代数 B/pB 中可逆。对 $A/pA \to B/pB$ 应用前述引理，我们得出存在一个 $a \in A$，使得 $a + pA$ 在 A/pA 中可逆，且 $f(a) + pB = b + pB$。由于 A 是有限生成的 $\mathbb{Z}_p$ 整数环 p 模块，它是 p-进完备的，因此这样的 a 在 A 中可逆：若 $aa' = 1 + p\epsilon$，则 $a'(1 - p\epsilon + p^2\epsilon^2 - \cdots)$ 是 a 的逆元。

还需要找到 x，使得 $f(a + px) = b$。由上文的 (2)，$f(a) - b = py$，其中某个 $y \in B$。令 x 满足 $f(x) = -y$。于是

$$f(a + px) - b = f(a) + pf(x) - b = f(a) - b + pf(x) = py + pf(x) = 0$$

□

引理 4.5.5. 设 A 是一个 $\mathbb{Z}_p$-代数，且作为 $\mathbb{Z}_p$-模有限生成。设 i、$j \in A$ 是两个幂等元。那么，$Ai \cong Aj$ 作为左 A-模同构，当且仅当 i 与 j 共轭。

证明. 若 $i = uju^{-1}$，则右乘 u 诱导一个同构 $\bar{A}i = \bar{A}uju^{-1} \xrightarrow{\sim} \bar{A}j$。下面证明反向结论。设 ϕ: $\bar{A}i \xrightarrow{\sim} \bar{A}j$ 是左 A-模的一个同构。由于 $\phi(ai) = a\phi(i)$，ϕ 由 $\phi(i) \in Aj$ 确定。此外，由于 $i^2 = i$，$\phi(i) = \phi(i^2) = i\phi(i)$，因此 $\phi(i) \in i\bar{A}j$。类似地，ϕ^{-1} 由 $\phi^{-1}(j) \in j\bar{A}i$ 确定。计算

$$\phi^{-1}(j)\phi(i) = \phi(\phi^{-1}(j)i) = \phi(\phi^{-1}(j)) = j$$
$$\phi(i)\phi^{-1}(j) = \phi^{-1}(\phi(i)j) = \phi^{-1}(\phi(i)) = i$$

证明 $\phi^{-1}(j)\phi(i) = j$ 和 $\phi(i)\phi^{-1}(j) = i$

回忆一下，作为 $\mathbb{Z}_p$-模有限生成的 $\mathbb{Z}_p$-代数，具有 [Bas60，第 2.1] 节所述意义下的“半完美”性质。这意味着有限生成的 A-模——例如 A 本身——具有 Krull–Schmidt 性质，即可以唯一地分解为不可分解直和项的直和。由于 $A = Ai \oplus A(1-i) = Aj \oplus A(1-j)$，引理的假设也表明，通过同构 ψ，有 $A(1-i) \cong A(1-j)$。因此，按照与上文相同的论证，$\psi(1-i) \in (1-i)A(1-j)$，$\psi^{-1}(1-j) \in (1-j)A(1-i)$，并且

$$\psi^{-1}(1-j)\psi(1-i) = 1 - i \qquad \psi(1-i)\psi^{-1}(1-j) = 1 - j.$$

设 $u = \phi(i) + \psi(1-i)$ 且 $v = \phi^{-1}(j) + \psi^{-1}(1-j)$。那么 $uv = 1 = vu$，因此 $v = u^{-1}$，并且 u 将 j 共轭为 i:

$$\begin{aligned} uju^{-1} &= (\phi(i) + \psi(1-i))j(\phi^{-1}(j) + \psi^{-1}(1-j)) \\ &= (\phi(i)j + \psi(1-i)j)(\phi^{-1}(j) + \psi^{-1}(1-j)) \\ &= (\phi(i) + 0)(\phi^{-1}(j) + \psi^{-1}(1-j)) \\ &= \phi(i)\phi^{-1}(j) + \phi(i)\psi^{-1}(1-j) \\ &= \phi(i)\phi^{-1}(j) + 0 \\ &= i \end{aligned}$$

□

命题 *4.5.1* 的证明。只需证明命题4.5.2。取一个分解 $1_{\bar{A}} = \sum e_i$，其中 e_i 是正交幂等元。于是 $1_{\bar{B}} = f(1_{\bar{A}}) = \sum f(e_i)$。非零 $f(e_i)$ 构成 B 中的一组正交幂等元，且其和为 1。

现在假设 e_i 都是本原的，并证明非零 $f(e_i)$ 也都是本原的。每个 Ae_i 都满射到 $Bf(e_i)$；由于这是一个 A-模的映射，而且 Ae_i 是一个不可分解的投射 A-模，因此可知 $Bf(e_i)$ 作为一个 A-模是不可分解的。

由于 A 的作用通过到 B的满射分解， $Bf(e_i)$ 作为 B-模也是不可分解的。因此，每个 $f(e_i)$ 都是本原的。

如果 e' 是 B的另一个本原幂等元，那么 $B \cong Be' \oplus B(1-e')$ $\cong \bigoplus Bf(e)i$，因此根据 Krull–Schmidt 性质，对于某个 i，有 $Be' \cong Bf(e_i)$。根据引理 4.5.5，存在一个可逆的 $u \in B$，使得 $uf(e_i)u^{-1} = e'$；根据引理 4.5.4，存在一个单位元 $u' \in \bar{A}$，使得 $f(u') = u$。于是， $u'e_i(u')^{-1}$ 是 A 的一个本原幂等元，它提升了 e'。□

4.6. $\mathbf{S}_q[G]$ 的块。令 $b_1, b_2, \ldots$ 为 $\mathbf{Z}_q[G]$ 的块幂等元，使得

$$\mathbf{Z}_q[G] = \mathbf{Z}_q[G]b_1 \times \mathbf{Z}_q[G]b_2 \times \cdots \tag{4.6.1}$$

由命题 3.4.1，存在相应的分裂，将 $\mathbf{S}_q[G/\{1\}]$ 视为左 G- 模——将与 $\mathbf{S}_q[G/\{1\}]b_i$ 对应的直和项记作$\mathbf{Z}_q[G]b_i$。令 $\mathbf{S}_q[G]b_i$ 表示自同态 $\mathbf{S}q$-代数谱 $\mathbf{S}_q[G/\{1\}]b_i$。由命题 3.4.2，$[\mathbf{S}_q[G/\{1\}]b_i,\ \mathbf{S}_q[G/\{1\}]b_j] = 0$ 当 $i \neq j$时成立，因此存在一个 $\mathbf{S}q$-代数谱的同构

$$\mathbf{S}_q[G] = \mathbf{S}_q[G]b_1 \times \mathbf{S}_q[G]b_2 \times \cdots \tag{4.6.2}$$

它在取 （4.6.1）的 π_0 或施加 $\otimes_{\mathbf{S}_q}\mathbf{Z}q$时诱导出该式。

命题 4.6.1。设 G 和 G' 为有限群， b 为 $\mathbf{Z}_q[G]$ 的一个块，b' 为 $\mathbf{Z}_q[G']$ 的一个块。假设存在稳定 ∞-范畴之间的等价

$$\mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G]b) \cong \mathrm{LMod}(\mathbf{S}_q[G']b'). \tag{4.6.3}$$

于是，对于任意 $\mathbf{S}q$-代数谱 k，存在等价

(1) 左模范畴$(k[G]b) \cong$左模范畴$(k[G']b')$ (2) 左模范畴$(k[G]b_i)^{\mathrm{ft}} \cong$左模范畴$(k[G']b'_i)^{\mathrm{ft}}$(3) 左模范畴$(k[G]b_i)^{\omega} \cong$左模范畴$(k[G]b_i)^{\omega}$

证明。 (4.6.3) 推出 (1) 和 (3) 是 3.7.2 的推论；推出 (2) 是推论3.9.3。 □

4.7. 关于 $\mathbf{S}q$ 的 Rouquier 等价。

命题 4.7.1。 设我们处于定理 4.1.1 的情形，并令M_0 表示该定理中的双模复形，将其视为 Bimod(整数环$_q[G]b$，整数环$_q[N_G(D)]b'$) 中的一个对象。则存在一个 $M \in \mathrm{Bimod}(\mathbf{S}_q[G]b, \mathbf{S}_q[N_G(D)]b')$，使得 $M \otimes_{\mathbf{S}_q}$ 整数环$_q$ 同构于 M_0。

证明。由命题 4.5.1， N_0 可提升为一个 $(\mathbf{S}_q[G]b, \mathbf{S}_q[N_G(D)]b')$-双模 N，使得 $N \otimes_{\mathbf{S}_q} \mathbf{Z}_q \cong N_0$。由于 N_0' 是投射的，它是 $(\mathbf{Z}_q[G]b \otimes_{\mathbf{Z}_q} \mathbf{Z}_q[N_G(D)]b'^{\mathrm{op}})^{\oplus n}$ 上某个幂等自同态的像；根据 §3.4，该幂等自同态可提升为 $(\mathbf{S}_q[G]b \otimes \mathbf{S}_q[N_G(D)]b'^{\mathrm{op}})^{\oplus n}$ 上的幂等自同态。该幂等元在双模范畴 $\mathrm{Bimod}(\mathbf{S}_q[G]b, \mathbf{S}_q[N_G(D)]b')$ 中可分裂，因此 N_0' 也可提升为投射双模。由命题 3.4.2 可知，映射 $N_0' \to N_0$ 可提升为映射 $N' \to N$，且M:=Cone$(N' \to N)$ 可提升为 M_0。□

定理 4.7.2。设 b 是 $\mathsf{S}_q[G]$ 的一个块， D 是其缺陷群， b' 是 $\mathsf{S}_q[N_G(D)]$ 的 Brauer 对应块。那么存在一个稳定∞-范畴之间的等价 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b) \cong \mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b')$，它将 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$映至 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}$ ，并将 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b)^{\omega}$ 映至 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b')^{\omega}$。

证明。由命题 3.7.2 可得此结论。我们将其应用于以下情形：$k \to k'$ 是截断映射 $\mathsf{S}_q \to \mathsf{Z}_q$，$A = \mathsf{S}_q[N_G(D)]b'$，$B = \mathsf{S}_q[G]b$，而$F(A)$是命题 4.7.1 中的双模 M 。根据 Rouquier 定理 4.1.1，$M \otimes_{\mathbf{S}_q} \mathsf{Z}_q$ 诱导出一个等价 $\mathrm{LMod}(\mathsf{Z}_q[N_G(D)]b') \cong \mathrm{LMod}(\mathsf{Z}_q[G]b)$——命题 3.7.2 的假设均得到满足，因此函子 $M \otimes_{\mathbf{S}_q[N_G(D)]b'}$ −诱导出一个等价 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b') \cong \mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b)$。与任何等价一样，它保留紧对象的子范畴，因此限制后仍给出一个等价 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b')^{\omega} \cong \mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b)^{\omega}$。由于命题 4.7.1 中复形 M 的每一项都将 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}$ 映至 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$，该等价将 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}}$ 映入 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$。最后，根据命题 4.6.1，这个函子 $\mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[N_G(D)]b')^{\mathrm{ft}} \to \mathrm{LMod}(\mathsf{S}_q[G]b)^{\mathrm{ft}}$ 是一个等价。□

References

[Ati61] Michael F Atiyah. 有限群的特征与上同调。 *PublicationsMathématiques de l'IHÉS*, 9:23–64, 1961.[Bas60] Hyman Bass. 有限维数与半主环的同调推广。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 95(3):466–488, 1960. [BCSY22] Tobias Barthel, Shachar Carmeli, Tomer M Schlank, and Lior Yanovski. 色谱傅里叶变换。 *arXiv preprint arXiv:2210.12822*, 2022. [BMS19] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. 拓扑 Hochschild 同调与整数 p p-进 Hodge 理论。 *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 129(1):199– 310, 2019.[Bro90] Michel Brou´e. 完美等距、块类型、导出范畴。 *Astérisque*, (181-182):61–92, 1990. [Bro94] Michel Brou´e. 群代数块的等价。载于 *Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992)* 424 *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C:* , volume *Math. Phys. Sci.* 1 26 1994 of , pages – . Kluwer Acad. Publ., 多德雷赫特, . [Bur11] William Burnside. *Theory of groups of finite order*. 大学出版社, 1911. [Car81] Gunnar Carlsson, Steenrod 猜想的一个反例。*maticae* 64 1 171 174, 1981 *Inventiones Mathe-* , ( ): – . [Car84] Gunnar Carlsson. 等变稳定同伦与 Segal 的 Burnside 环猜想。*Annals of Mathematics*, pages 189–224, 1984. [CSY21a] Shachar Carmeli, Tomer M. Schlank, and Lior Yanovski. 双向性与高度。*Adv. Math.*, 385:107763, 90, 2021. [CSY21b] Shachar Carmeli, Tomer M Schlank, and Lior Yanovski. 色谱圆分扩张。 *arXiv preprint arXiv:2103.02471*, 2021. [CSY22] Shachar Carmeli, Tomer M. Schlank, and Lior Yanovski. 色谱同伦论中的双向性。 *Invent. Math.*, 228(3):1145–1254, 2022. [Dre69] Andreas Dress. 可解群的刻画。 *Mathematische Zeitschrift*, 110 3 213( ): – 217, 1969. [GS96] J. P. C. Greenlees and Hal Sadofsky. v_n-周期复定向理论的 Tate 谱。 *Math. Z.*, 222(3):391–405, 1996. [Gun80] JHC Gunawardena. 奇素数阶循环群的 Segal 猜想。 *Knight prize essay Cambridge* 224 1980 , , , .[Her 94] Israel Nathan Herstein. *Noncommutative rings*, volume 15. American Mathematical Soc., 1994.[HL13] Michael Hopkins and Jacob Lurie. (n)-局部稳定同伦论中的双向性。*preprint, available at https://www.math.ias.edu/ lurie/*, 2013.

[HS96] Mark Hovey and Hal Sadofsky. Tate 上同调降低色层 Bousfield 类。
Proc. Amer. Math. Soc., 124(11):3579–3585, 1996. [HS99] Mark Hovey and Neil P. Strickland. Morava K *Mem. Amer.* 理
Math. Soc. 139 666 +100 1999
论与局部化。 , ( ):viii , . [Kuh04] Nicholas J. Kuhn. Tate 上同调与多项式函子的周期局部化。
Invent. Math., 157(2):345–370, 2004. [Lin80] Wen-Hsiung Lin. 关于 Mahowald、Segal 和
Sullivan 的猜想。载于
Mathematical
Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 87, 449 458 , volume
pages – . 剑桥大学出版社, 1980. [LN14] Tyler Lawson and Niko Naumann. Steenrod 代数上图表的
严格交换实现与素数 2 处的拓扑模形式。 *InternationalMathematics Research Notices*,
2014(10):2773–2813, 2014. [Lur09] Jacob Lurie. 导出代数几何 I：稳定无穷范畴。*arXiv preprint*
arXiv:0608228 2009 , .[Lur11]
Jacob Lurie. 导出代数几何 VII：谱概形。*Available at https://www.math.ias.edu/ lurie/*, 2011. [
Lur16] Jacob Lurie. 高阶代数。*Available at https://www.math.ias.edu/ lurie/*, 2016. [Lur17]
Jacob Lurie. 高阶拓扑斯理论。*Available at https://www.math.ias.edu/ lurie/*, 2017. [Lur18]
Jacob Lurie. 椭圆上同调 II：定向。*Available at https://www.math.ias.edu/ lurie/*, 2018. [Lus89]
George Lusztig. 模表示与量子群。 *Contemp. Math*, 82 1080 59( ): –78, 1989. [Lus15] George
Lusztig. 关于某些不可约模表示的特征。
Rep-
resentation Theory of the American Mathematical Society 19 2 3 8, 2015 , ( ): – . [
Nis73] Goro Nishida. 球面的稳定同伦群元素的幂零性。
J. , : – .[NS18]
Math. Soc. Japan 25 707 732, 1973
Thomas Nikolaus and Peter Scholze. 关于拓扑循环同调。 *Acta Math.*, 221 2 203( ): –409, 2018. [
Ric89] Jeremy Rickard. 导出范畴与稳定等价。 *Journal of pure and applied*
Algebra 61 3 303 317, 1989 , ( ): – . [
Ric96] Jeremy Rickard. 辉煌等价：导出范畴与置换模。*Proc. London Math. Soc. (3)*, 72(2):331–
358, 1996. [Rou98] Rapha
¨ *Derived* el
equivalences for group rings 199 220, 1998
Rouquier. 循环缺陷群的块的导出范畴。 , pages – . [Rou01] Rapha
¨ *Modular rep-* el
resentation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998) 101 146
Rouquier. 通过稳定等价与 Rickard 等价研究块理论。载于 , pages – . de Gruyter, Berlin, 2001.[
RW80] Douglas C. Ravenel and W. Stephen Wilson. Eilenberg-Mac Lane 空间的 Morava K理论
与 Conner-Floyd猜想。 *Amer. J. Math.*, 102(4):691–748, 1980. [Ser53] Jean-Pierre Serre. 同伦群
与阿贝尔群类。 , : – . [SVW99] Roland Schw¨anzl, Rainer M Vogt, and Friedhelm Waldhausen. 在
适当情形下向 $\mathbb{E}_\infty$-环谱添加单位根——一则评注。 *Contemp. Math*, 239:245–249, 1999.[tD79]
Tammo tom Dieck. *Transformation groups and representation theory*, volume 766 of
Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1979. [Tre15] David Treumann. K-理论上的有限
群模表示（附录由 Akhil Mathew 撰写）。 *arXiv preprint arXiv:1503.02477*, 2015. [YZ21]
Yaping Yang and Gufang Zhao. Morava E理论量子群上的 Frobenius映射。
arXiv preprint arXiv:2105.14681, 2021.