arXiv:2301.03185v1 [math.GR] 9 Jan 2023

对称群的霍赫希尔德上同调与生成函数，II

David Benson、Radha Kessar 和 Markus Linckelmann

Abstract. 我们将对称群任意固定次数的霍赫希尔德上同调维数的生成函数，与对称群各块的相应生成函数联系起来。我们证明，对称群的正缺陷块的第一霍赫希尔德上同调非零，从而对第三位作者提出的问题作出了肯定回答。为此，我们证明一个公式，将一阶霍赫希尔德上同调的维数表示为较小对称群的块的中心维数之和。这又是一个一般公式的推论；该公式进一步细化了我们先前的论文中的一个定理，该定理描述了对称群的霍赫希尔德上同调维数的生成函数。

1. Introduction

设 p 为素数， k 为特征为 p的域。根据[5], 中的结果，并利用有限单群的分类可知，若 G是阶被 p整除的有限群，则 $HH^1(kG)$非零。一个尚未解决的问题是 [6, Question 7.4]: 对于 G 有限群以及 B 的一个块，若 kG的缺陷群非平凡，则 $HH^1(B)$是否非零? 例如，[8] 和[7], 已在某些情况下证明该问题有肯定答案。我们证明，若 G 是一个作用在 n 个字母上的对称群 $\mathfrak{S}_n$ ，则该问题有肯定答案。

定理 1.1. 设 B 为 $k\mathfrak{S}_n$ 的一个缺陷群非平凡的块。则 $HH^1(B) \neq 0$。

事实上，我们给出了对称群的一个块的第一霍赫希尔德上同调维数的精确公式，将其表示为较小对称群的块的中心维数之和（定理 1.2），由此可轻易推出定理 1.1。

为了陈述公式，我们先回顾一下：对 $k\mathfrak{S}_n$ 的每个块 B ，都对应一个非零整数 $w \leqslant \lfloor n/p \rfloor$ ，称为 B的权。其性质是，在自然包含关系 $\mathfrak{S}_{pw} \leqslant \mathfrak{S}_n$下， $\mathfrak{S}_{pw}$ 的 Sylow p-子群是 B 的缺陷群。特别地， B 有非平凡缺陷群，当且仅当 $w > 0$。此外，根据 Chuang 和 Rouquier 的定理7.2 [3] ，若 B 和 B' 是可能属于不同对称群的块，且权相同，则 B 和 B' 是导出等价代数，因此，对于任意 $r \geqslant 0$，我们有 $\dim_k HH^r(B) = \dim_k HH^r(B')$。

对于 $w \geqslant 0$，记 B_{pw} 为 $k\mathfrak{S}_{pw}$的主块。那么 B_{pw} 的权为 w ，根据上文，对于对称群代数中任意权为 w 的块 B ，有 $\dim_k HH^r(B) = \dim_k HH^r(B_{pw})$。因此，定理 1.1 是以下结果的推论。对于 $w \geqslant 0$，令 $\rho(pw, \varnothing)$ 等于具有空 p-核的 pw 的分拆数。

2020年数学主题分类：20C20。关键词与短语：霍赫希尔德上同调、对称群、分拆恒等式、块。

定理 1.2. 设 B 是定义在 k上的对称群代数的一个权为 w的块。若 $p = 2$, 则

$$\dim_k HH^1(B) = 2\sum_{j=0}^{w-1} \dim_k Z(B_{pj}) = 2\sum_{j=0}^{w-1} \rho(pj, \varnothing).$$

如果 $p \geqslant 3$, 那么

$$\dim_k HH^1(B) = \sum_{j=0}^{w-1} \dim_k Z(B_{pj}) = \sum_{j=0}^{w-1} \rho(pj, \varnothing).$$

上述公式的证明依赖于以下定理，该定理将对称群的块的霍赫希尔德上同调维数生成函数与整个群代数的生成函数联系起来，随后再运用我们先前的论文 [1] 中的结果。记 $p(n)$ 为 n 的分拆数，并记 $P(t)$ 为生成函数 $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n$。注意，$\dim_k HH^0(k\mathfrak{S}_n) = \dim_k Z(k\mathfrak{S}_n) = p(n)$。

定理 1.3. 令 $Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k Z(B_{pn})\, t^n$。对任意 $r \geqslant 1$，存在一个有理函数 $\phi(t)$（取决于 p 和 r），且 $\phi(0)$ 非零，使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^r(B_{pn})\, t^n = t\phi(t)Z(t)$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^r(k\mathfrak{S}_n)\, t^n = t^p\phi(t^p)P(t).$$

注记 1.4. 在 [1], 中，我们证明了

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^r(B_{pn})\, t^n = R_{p,r}(t)P(t)$$

其中 $R_{p,\,r}(t)$ 是关于 t 的有理函数。Ken Ono 曾问我们，$R_{p,\,r}(t)$ 是否是关于 t^p 的有理函数；定理 1.3 证明了确实如此，且 $R_{p,\,r}(t) = t^p\phi(t^p)$。

注 1.5. 定理 1.3 中 $\phi(t)$ 的常数项等于 $y_1 = \dim_k(HH^r(B_p))$。由于 B_p 与 $k(C_p \rtimes C_{p-1})$ 导出等价，我们有 $y_1 = \dim_k HH^r(k(C_p \rtimes C_{p-1}))$。利用中心化子分解进行简单计算可知，对于 $r \geqslant 1$，若 $r \equiv 0$ 或 -1 模 $2(p-1)$（特别是 $p = 2$ 时），则有 $y_1 = 2$；否则有 $y_1 = 1$。

注 1.6. 我们注意到，上述结果不依赖于域 k 的选择。若 k' 是 k 的扩张域，且 B 是某个正整数 n 对应的 $k\mathfrak{S}_n$ 的一个块，则 $B' = k' \otimes_k B$ 是 $k'\mathfrak{S}_n$ 的一个块，其缺陷群与 B 相同；并且对于任意有限维 k-代数 A，都有分次 k-代数同构 $HH^*(k' \otimes_k A) \cong k' \otimes_k HH^*(A)$。

2. Proofs.

我们先从一个初等引理开始。

引理 2.1. 设 R 为一个整环， m 为正整数。若 $h(t) \in R[[t]]$ 满足 $h(t^m) \in R((t))$ 是有理函数，则 $h(t)$ 也是有理函数。

证明。设 $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n$, $h_n \in R$，并假设 $a(t)$ $b(t) \in R[t]$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n t^{mn} = h(t^m) = \frac{a(t)}{b(t)}.$$

若 $h(t) = 0$，则无须证明。因此，我们假设 $h(t) \neq 0$。令

$$a(t) = \sum_{s=0}^{m-1} a_s(t^m)\, t^s, \qquad b(t) = \sum_{s=0}^{m-1} b_s(t^m)\, t^s,$$

对于 $a_s(t)$ $b_s(t) \in R[t]$, $0 \leqslant s \leqslant m-1$。比较 t 的各次幂的系数，等式

$$a(t) = b(t) \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, t^{mn}$$

推出等式

$$b_s(t^m) = a_s(t^m) \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, t^{mn}$$

对每个 s, $0 \leqslant s \leqslant m-1$ 均成立。选取 s 使得 $a_s(t) \neq 0$。于是 $h(t) = a_s(t)/b_s(t)$ 是关于 t 的有理函数。□

定理 1.3 的证明。设 $r \geqslant 1$。对于 $n \geqslant 0$，令 $c(n)$ 表示 n 的 p-核分拆的数目，并对每个 s, $0 \leqslant s \leqslant p-1$，令 $C_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c(np+s)\, t^n$。对于 $w \geqslant 0$，令$z_{pw} = \dim_k Z(B_{pw})$ 和 $y_{pw} = \dim_k HH^r(B_{pw})$。我们采用记号

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_{pn}\, t^n$$

根据定理 1.3 的陈述，并令

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^r(B_{pn})\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} y_{pn}\, t^n.$$

注意，由 [3, 定理 7.2]可知， y_{pw} 是对称群代数中任意一个权为 w 的块的 r 次霍赫希尔德上同调的维数。此外，注意到，根据 Brauer [2] 和 Robinson [4], 证明的中山猜想, $k\mathfrak{S}_n$中权为 w 的块的数量等于 $c(n-pw)$。由于有限维代数的霍赫希尔德上同调是其各个块的霍赫希尔德上同调的直和，因此对于任意满足 $0 \leqslant s \leqslant p-1$的 s，以及任意 $n \geqslant 0$,

$$\dim_k Z(k\mathfrak{S}_{pn+s}) = \sum_{w=0}^{n} z_{pw} c(p(n-w)+s),$$

and

$$\dim_k HH^r(k\mathfrak{S}_{pn+s}) = \sum_{w=0}^{n} y_{pw} c(p(n-w)+s).$$

换言之，对于任意的 s、 $0 \leqslant s \leqslant p-1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k Z(k\mathfrak{S}_{pn+s})\, t^{pn+s} = t^s Z(t^p) C_s(t^p) \tag{2.2}$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^r(k\mathfrak{S}_{pn+s})\, t^{pn+s} = t^s Y(t^p) C_s(t^p). \tag{2.3}$$

由于 $B_0 \cong k$，我们有 $z_0 = \dim_k Z(B_0) = 1$，由此可知 $Z(t)$ 在 $\mathbb{Z}[[t]]$ 中可逆。另一方面，我们有 $y_0 = \dim_k HH^r(B_0) = 0$，且 $y_1 = \dim_k HH^r(B_p) \neq 0$（参见注 1.5）。特别地，$Y(t)$ 可被 t 整除，但不能被 t^2 整除（在 $\mathbb{Z}[[t]]$ 中）。因此，我们可以定义一个关于 t 的幂级数，其常数项非零，

$$\phi(t) = (t^{-1}Y(t))Z(t)^{-1} \in \mathbb{Z}[[t]],$$

于是我们得到

$$Y(t) = t\phi(t)Z(t). \tag{2.4}$$

Now,

$$\begin{aligned}\dim_k HH^r(k\mathfrak{S}_n)\, t^n &= \sum_{s=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^r(k\mathfrak{S}_{pn+s})\, t^{pn+s} = Y(t^p)\sum_{s=0}^{p-1} C_s(t^p)\, t^s \\ &= t^p\phi(t^p)\sum_{s=0}^{p-1} Z(t^p)C_s(t^p)\, t^s\end{aligned}$$

其中，第二个等号用到了 (2.3)，第三个等号用到了 (2.4)。另一方面，由 (2.2),

$$P(t) = \sum_{s=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k Z(k\mathfrak{S}_{pn+s})\, t^{pn+s} = \sum_{s=0}^{p-1} Z(t^p)C_s(t^p)\, t^s.$$

So,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^r(k\mathfrak{S}_n)\, t^n = t^p\phi(t^p)P(t).$$

现在，由 [1] 的定理 1.3 可知，$t^p\phi(t^p)$ 是关于 t 的有理函数。因此，由引理 2.1 可知，$\phi(t)$ 是关于 t 的有理函数；并且根据上述结果，$\phi(0)$ 非零。□

定理 1.2 的证明。根据 [1],的定理 1.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^1(k\mathfrak{S}_n)\, t^n = \begin{cases} \dfrac{2t^2}{1-t^2}\, P(t) & p = 2, \\ \dfrac{t^p}{1-t^p}\, P(t) & p \geqslant 3. \end{cases}$$

请注意，在 [1] 中，基域取为 $\mathbb{F}_p$，但显然上述结果对任意特征为 p 的域也成立（参见注 1.6）。根据定理 1.3 及其记号，取 $r = 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim_k HH^1(B_{pn})\, t^n = \begin{cases} \dfrac{2t}{1-t}\, Z(t) & p = 2, \\ \dfrac{t}{1-t}\, Z(t) & p \geqslant 3. \end{cases}$$

这里请注意，$h(t) \to h(t^m)$ 是 $\mathbb{Z}[[t]]$ 上的一个单射。结合 [3, 定理 7.2]，可得以下等式

$$\dim_k HH^1(B_{pn}) = \begin{cases} 2\sum_{j=0}^{w-1} \dim_k Z(B_{pj}) & p = 2, \\ \sum_{j=0}^{w-1} \dim_k Z(B_{pj}) & p \geqslant 3. \end{cases}$$

定理 1.2 的证明。其余等式由中山猜想推出。该猜想由 [2, 4]，证明，指出对称群的特征标属于同一个 p 块，当且仅当对应的分拆具有相同的 p-核；特别地，这意味着 $\dim_k Z(B_{pj}) = \rho(pj, \varnothing)$。□

定理 1.1 是定理 1.2 的直接推论。

致谢。第一作者和第二作者感谢伦敦城市大学在本文研究期间提供的热情接待。第三作者感谢英国工程与自然科学研究委员会项目 EP/T004592/1 的资助。

References

1. D. J. Benson、R. Kessar 和 M. Linckelmann，《对称群的霍赫希尔德上同调与生成函数》，《群论杂志》，即将出版。2. R. Brauer，《关于一个中山猜想》，Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III 41 (1947)，11–19。3. J. Chuang 和 R. Rouquier，《对称群的导出等价与 $\mathfrak{sl}_2$-范畴化》，Ann. of Math. 167 (2008)，245–298。4. G. de B. Robinson，《关于一个中山猜想》，Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III 41 (1947)，20–25。5. P. Fleischmann、I. Janiszczak 和 W. Lempken，《有限群具有局部非舒尔中心化子》，《数学手稿》80 (1993)，第 2 期，213–224。6. M. Linckelmann，《作为有限群代数之块的有限维代数》，《代数表示论》（G. Leuschke、F. Bleher、R. Schiffler 和 D. Zacharia 编），《当代数学》第 705 卷，美国数学会，2018 年，第 155–188 页。7. W. Murphy，《散在马蒂厄群的块的一阶霍赫希尔德上同调的李代数结构》，《群论杂志》，即将出版；arXiv:2110.02941。8. C.-C. Todea，《某些有限群块代数的第一霍赫希尔德上同调的非平凡性》，J. Pure & Applied Algebra 227 (2023)，第 2 期，论文编号 107192，共 10 页。

David Benson, Institute of Mathematics, Fraser Noble Building,
University of Aberdeen,King's College, Aberdeen AB24 3UE, United Kingdom
Radha Kessar, Department of Mathematics, University of Manchester, Oxford Road, Manchester M193PL, United Kingdom

Markus Linckelmann, School of Science & Technology, Department of Mathematics, City, University of London, Northampton Square, London EC1V 0HB, United Kingdom