arXiv:2301.03187v2 [eess.SY] 5 Apr 2023

受蜻蜓启发的四翼微型扑翼飞行器建模

Oussama Sifour * Soulaimane Berkane **
Abdelhamid Tayebi ***

*魁北克大学乌塔韦分校计算机科学与工程系，加拿大魁北克省加蒂诺。（电子邮箱：sifo01@uqo.ca）。

**魁北克大学乌塔韦分校计算机科学与工程系，加拿大魁北克省加蒂诺。（电子邮箱：Soulaimane.Berkane@uqo.ca）

***湖首大学电气工程系，加拿大安大略省桑德贝，P7B 5E1。（电子邮箱：atayebi@lakeheadu.ca）

摘要：本文提出一种受蜻蜓类昆虫启发的四翼微型扑翼飞行器的完整动力学模型。该微型扑翼飞行器被建模为四个通过球形关节连接到主体的铰接刚体部件（机翼）。该动力学模型采用内禀全局坐标，基于拉格朗日力学推导而成，无需依赖忽略翅膀与机身相互作用的常见假设。此外，在准定常运动假设下对气动力进行建模，且不将扑动频率限制为相对较高的值。由此得到的四翼微型扑翼飞行器模型完整且简洁，既能捕捉机身与机翼之间的相互作用，又可避免其他坐标表示方法（如欧拉角）所涉及的复杂性和奇异性。对多体系统不同部分相对运动所产生的惯性效应进行的仿真研究表明，在生成这些昆虫的运动时，考虑翅膀与机身相互作用所产生的力和力矩十分重要。

关键词：扑翼无人飞行器、蜻蜓、扑翼机、拉格朗日力学、全局坐标。

1. 引言

扑翼无人飞行器（FWUAVs），通常称为扑翼飞行器，在过去十年中日益受到关注。近期的发展令人鼓舞，但这一领域仍处于起步阶段，要高效部署这些仿生平台，仍需付出大量研究努力。扑翼无人机尤其适用于微型飞行器（MAV）应用场景，在这些场景中，传统飞行器效率低下。例如，在搜救任务中，这些微型自主飞行器可以穿过混凝土裂缝，搜寻地震受困者。事实上，扑翼无人机具备一些固定翼和旋翼飞行器所不具备的有趣特性，例如能源效率高、灵活性强以及微型化能力出色。这促使人们研究昆虫和鸟类的空气动力学与飞行动力学，以寻找有助于扑翼无人机设计的线索。

扑翼无人机的研发通常受到真实鸟类和昆虫飞行的启发（Breugel 等人，2008）。蜻蜓是昆虫界最出色的飞行者之一——一种拥有四只翅膀的昆虫，因其惊人的飞行能力而受到广泛研究。例如，蜻蜓仅凭自身肌肉就能以高达 3g 的加速度加速，速度达到 $10m/s$（May，1991；Ruppell，1989），并能够产生瞬时升力，其大小是自身体重的五倍（Reavis 和 Luttges，1988）。它的每只翅膀都可以独立驱动（Alexander，1984；Azuma 和 Watanabe，1988），这为昆虫进行敏捷而复杂的飞行动作提供了额外的自由度。扑翼无人机的建模与控制难度主要源于气动弹性现象，以及机翼与飞行器主体之间的内禀耦合。现有文献中的大多数仿生昆虫飞行器数学模型，都依赖于一些简化假设，例如较高的扑动频率、较小的机身与机翼质量比，以及忽略飞行器不同部分之间的气动耦合（Taha 等，2012；Sun，2014；Deng 等，2006）。由此得到的简化模型通常类似于单刚体系统，其力和力矩取决于扑翼参数。对于具有大机翼和相对较低扑动频率的扑翼无人机而言，多体系统不同部分（机翼、尾部、主体等）之间的耦合尤为重要。已有一些研究尝试捕捉这些耦合效应（Sridhar 等人，2020；Sun 等，2007）。众所周知，昆虫通过翅膀运动（扑翼）产生气动力。这些气动力通常采用准定常假设进行建模（扑动翅膀产生的力等于在相同瞬时速度和翅片姿态下固定机翼产生的力）。这种方法主要基于固定机翼理论，但数十年来一直被用作扑动翅膀的一种简单而稳健的建模工具（Weis-Fogh，1973；Ellington，1984）。后来，为了使其适用于扑翼飞行器，研究者在扑翼运动中引入了机翼的升力系数和阻力系数（Dickinson 等人，1999；Usherwood 和 Ellington，2002）。这种方法

得到了进一步完善。然而，即使在最快的飞行速度下，准定常空气动力学解释似乎也不足以说明真实昆虫飞行所产生的额外升力。非定常空气动力学机制对于扑翼昆虫飞行的重要性已得到广泛认可。一些基于纳维–斯托克斯方程有限元解的非定常昆虫飞行空气动力学数值模拟，为估算气动力提供了准确结果（Sanders 和 Verhulst，1985年）。然而，这些方法不适用于控制用途，因为它们需要很高的处理能力；并且与准定常空气动力学不同，无法将其表示为扑翼参数的函数。在本研究中，我们采用拉格朗日形式，提出了一种高保真度的类蜻蜓扑翼机动力学模型，该模型不依赖高扑翼频率假设，并考虑了这一多体系统中固有的所有相互作用力和力矩。该动力学模型采用内禀全局坐标，主要使用特殊正交群上的姿态旋转，从而避免了其他坐标表示方式（例如欧拉角）所伴随的复杂性和奇异性。

2. 符号说明

我们用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集。我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示 $n-$ 维欧几里得空间。我们用 $\|x\|$ 表示向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 的欧几里得范数。我们用 $\mathcal{F} = \{c, x, y, z\}$ 表示一个三维欧几里得坐标系，其中心位于 $c \in \mathbb{R}^3$，坐标轴为 $\{x, y, z\}$，构成 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基。对于向量 $x \in \mathbb{R}^n$，我们用 $\mathrm{sgn}(x) := [\mathrm{sgn}(x_1) \cdots, \mathrm{sgn}(x_n)]^\top$ 表示 x 的逐元素符号函数。三阶特殊正交群记为 $\mathbb{SO}(3) := \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} : \det(A) = 1, AA^\top = I\}$，其中 I 是 3×3 单位矩阵。单位向量 e_i 表示单位矩阵 I 的第 i 列。集合 $\mathfrak{so}(3) :$ $= \{ \in \mathbb{R}^{3\times3} \quad ^\top = - \}$ $\mathbb{SO}\ 3\ .\ \Omega :$ $\Omega\ \Omega$ 表示李代数（ ）对于每个 $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，我们用 $\mathbb{P}(z) :$ $= I - zz^\top \|z\|^{-2}$ 表示正交投影算子。对于 $x, y \in \mathbb{R}^3$，映射 $\hat{\cdot} :$ $\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$ 定义为

$$\hat{x} := \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是，我们有 $\hat{x}y := x \times y$，其中 $\times$ 是 $\mathbb{R}^3$上的向量叉积。任意旋转矩阵 $A \in \mathbb{SO}(3)$ 都可以通过指数映射（罗德里格斯公式），用单位向量 $u \in \mathbb{R}^3$ 和角度 $\theta \in \mathbb{R}$来参数化。

$$A = \exp(\theta\hat{u}) := I + \sin(\theta)\hat{u} + (1 - \cos(\theta))\hat{u}^2.$$

3. 机械构型

考虑一种扑翼微型飞行器，它能够在三维空间中平移和旋转，由多个刚体（2 个前翅和 2 个后翅）组成，并通过球形关节与主体相连，使这五个刚体保持接触，见图 1。我们定义六个欧几里得坐标系：惯性参考系 $\mathcal{F}_I = \{0, b_{Ix}, b_{Iy}, b_{Iz}\}$、主体的体固连坐标系 $\mathcal{F}_B = \{O_B, B_{bx}, B_{by}, B_{bz}\}$，以及机翼固连坐标系 $\mathcal{F}_i = \{O_i, b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}\}$, $i \in \{1, \cdots, 4\}$,

其中，O_B 为主体的质心，O_i 为连接第 i个机翼与机身的关节中心。我们分别用索引 1、2、3 和 4 表示右前翅、左前翅、右后翅和左后翅。

令 $A_B \in \mathbb{SO}(3)$ 表示从体固连坐标系 $\mathcal{F}_B$ 到惯性坐标系 $\mathcal{F}_I$的姿态矩阵，并令 $\Omega_B \in \mathbb{R}^3$ 表示体固连坐标系 $\mathcal{F}_B$ 相对于惯性坐标系 $\mathcal{F}_I$的角速度，该角速度在 $\mathcal{F}_B$中表示。令 $A_i \in \mathbb{SO}(3)$ 表示从第 i 个机翼固连坐标系 $\mathcal{F}_i$ 到体固连坐标系 $\mathcal{F}_B$ 的姿态矩阵，并令 $\Omega_i \in \mathbb{R}^3$ 表示其相对于 $\mathcal{F}_B$ 的角速度，该角速度在 $\mathcal{F}_i$中表示。现在，令 μ_i（其中 $i \in \{1, \ldots, 4\}$）表示从体固连坐标系 $\mathcal{F}_B$ 的原点到连接关节（坐标系 $\mathcal{F}_i$的中心）的向量，该向量在 $\mathcal{F}_B$中表示。令 κ_i 表示从连接机翼与主体的关节（坐标系 $\mathcal{F}_i$的中心）到机翼质心的向量，该向量在 $\mathcal{F}_i$中表示。最后，令 $p \in \mathbb{R}^3$ 表示 $\mathcal{F}_B$ 原点的位置向量，该向量在 $\mathcal{F}_I$中表示。

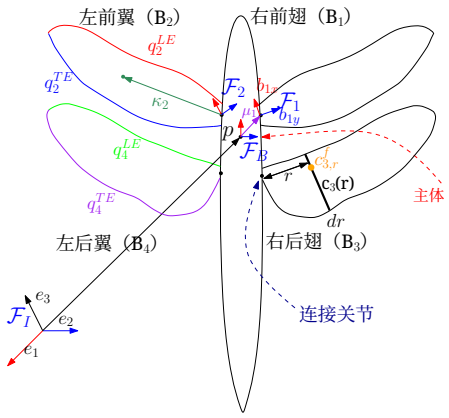


图 1 。四翼扑翼机示意图 。

最后，该多体系统的整体构型表示为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_B\ \mathfrak{g}_w$ $\mathfrak{g}_B = p \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{SO}\ 3$ $=: (,)$，其中 $: (, A_B)$ ( ) 表示主体位姿，而 $\mathfrak{g}_w : (A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathbb{SO}(3)^4$ 表示四个机翼的构型（姿态）。群速度表示为 $\xi :$ $= (\xi_B, \xi_w)$，其中 $\xi_B := (\dot{p}, \Omega_B) \in \mathbb{R}^6$ 是主体群速度，而 $\xi_w :$ $= (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4) \in \mathbb{R}^{12}$ 表示机翼群速度。

4. 准定常空气动力学

扑翼飞行比固定翼飞行更复杂，因为它涉及结构运动以及由此产生的非定常流体动力学。在传统飞机中，固定机翼相对于空气的前进运动会产生升力。然而，在扑翼飞行中，翅膀不仅相对于空气向前运动，还会上下扑动，并绕翅根旋转。本节需要明确机翼几何形状，因为产生的力取决于机翼形状。随后，我们将在准定常空气动力学假设下，运用叶素理论（Ellington，1984）来表示扑翼运动产生的力和力矩。我们依赖准定常假设来简化力和力矩的计算。直观而言，这一假设意味着这些

力和力矩等同于在相同瞬时速度和相同攻角下稳态运动所产生的力和力矩。

4.1 机翼几何形状

蜻蜓的翅膀使其具备惊人的飞行性能并产生力。蜻蜓前翅和后翅的形状通常用椭圆函数（泪滴形）近似，见（Weis-Fogh，1973）。然而，正如（Faisal and A.Filippone，2016）所示，与传统的泪滴形表示相比，对翅膀形状进行更真实的表征，能够更好地近似真实蜻蜓产生的气动力。通过分析真实摄影图像得到的一组多项式，可以更好地近似蜻蜓的机翼几何形状。我们假设每个翅膀都是位于 $b_{ix}-b_{iy}$ 平面上的平板，在 $\mathcal{F}_i$（在 b_{iz}方向上没有分量）。每个翅膀的形状由两个多项式函数描述，分别表示前缘（上边界）和后缘（下边界），见图 1：

$$q_i^{LE}(r) := \sum_{j=0}^{j=n} \lambda_{ij}^{LE} r^j, \quad q_i^{TE}(r) := \sum_{j=0}^{j=n} \lambda_{ij}^{TE} r^j, \tag{1}$$

其中，r 是沿 b_{iy} 轴的自变量，$q_i^{LE}(r)$和 $q_i^{TE}(r)$分别是沿 b_{ix} 轴方向的后缘和前缘对应点位置。多项式系数 λ_{ij}^{LE} 和 λ_{ij}^{TE}通过将翅膀轮廓线上的点（从真实摄影图像中获得）拟合为 n 次多项式来计算，在避免过拟合的同时最小化均方误差；数值示例见第 6 节。

4.2 气动力

为考察准定常气动力，设 dr 是一段微小翼段，与机翼坐标系的 b_{ix} 轴平行，且位于距翼根 r 处（图 1）；该距离沿机翼坐标系的 b_{iy} 轴测量。设其弦长定义为 $c_i(r) := q_i^{LE}(r) - q_i^{TE}(r)$，其中 $q_i^{LE}(\cdot)$ 和 $q_i^{TE}(\cdot)$ 的定义同式（1）。

引理1. 设 $\nu_i(r,\gamma) := (q_i^{LE}(r) - \gamma c_i(r))e_1 + (-1)^{i+1} r e_2$，其中 $\gamma \in [0,1]$，为弦上任意一点的 $\mathcal{F}_i$ 坐标。则该点相对于 $\mathcal{F}_I$ 的速度，以 $\mathcal{F}_i$ 表示，为

$$\begin{aligned} W_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi) \;=\; & (A_B A_i)^\top \dot{p} + A_i^\top \hat{\Omega}_B (\mu_i + A_i \nu_i(r,\gamma)) \\ & + \hat{\Omega}_i \nu_i(r,\gamma). \end{aligned} \tag{2}$$

$W_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi)$ 的第一项源于主体的平移运动，第二项源于主体的旋转，最后一项则源于机翼的扑翼运动。该引理的证明见附录A。现在，我们按照 Sridhar 等人，2020 的方法确定攻角。根据叶素理论（Ellington，1984），微小弦段产生的气动力仅取决于 b_{ix} 和 b_{iz} 分量。因此，我们将上述速度投影到平面 $b_{ix}-b_{iz}$ 上，得到有效速度：

$$\overline{W}_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi) := \mathbb{P}(e_2) W_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi). \tag{3}$$

弦的状态相关攻角，记作$\alpha_{i,\ r}(\mathfrak{g},\xi)$，是弦线（从前缘到后缘）与上述速度之间的夹角 $\overline{W}_{i,\ r,\ \gamma}$[1]。由于攻角沿弦方向略有变化，我们将攻角定义为弦线与弦中心速度（$\gamma = 1/2$）之间的夹角，其表达式为

$$\alpha_{i,r}(\mathfrak{g},\xi) := \cos^{-1}\left(\frac{e_1^\top \overline{W}_{i,r,\frac{1}{2}}(\mathfrak{g},\xi)}{\left\| \overline{W}_{i,r,\frac{1}{2}}(\mathfrak{g},\xi) \right\|} \right). \tag{4}$$

我们将状态相关的气动中心位置记为 $c_{i\ ,r}^{f}(\mathfrak{g},\xi)$，并将其视为攻角 $\alpha_{i,r}$ 的函数，其表达式为

$$c_{i,r}^f(\mathfrak{g},\xi) := \nu_i(r, \gamma_{ac}(\alpha_{i,r}(\mathfrak{g},\xi))). \tag{5}$$

其中，$\gamma_{ac}(\cdot): [0,\pi] \to [0,1]$ 将攻角映射为气动中心沿弦方向的位置。气动中心的有效速度记为 $\overline{W}_{i\,r,}^{ac}(\mathfrak{g},\xi) := \overline{W}_{i,r,\ \gamma}(\mathfrak{g},\xi)$，其中 $\gamma = \gamma_{ac}(\alpha_{i,r}(\mathfrak{g},\xi))$。微小翼段产生的升力和阻力大小为

$$\|dL_{i,r}(\mathfrak{g},\xi)\| = \frac{1}{2}\rho \|\overline{W}_{i,r}^{ac}\|^2 C_L(\alpha_{i,r}) c_i(r) dr, \tag{6}$$

$$\|dD_{i,r}(\mathfrak{g},\xi)\| = \frac{1}{2}\rho \|\overline{W}_{i,r}^{ac}\|^2 C_D(\alpha_{i,r}) c_i(r) dr, \tag{7}$$

其中，$\rho \in \mathbb{R}$ 为大气密度，$C_L, C_D : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ 为升力系数和阻力系数，它们取决于攻角 $\alpha_{i,r}$。按照 Sridhar 等人，2020 中的相同步骤，可以得到微小升力和阻力，如下所示。升力方向同时垂直于速度 $\overline{W}_{i\,r\ ,}^{ac}$和翼展方向 b_{iy}。因此，升力沿$\pm e_2 \times \overline{W}_{i\,r\ ,}^{ac}$方向，位于 $\mathcal{F}_i$ 中。于是，我们将升力大小乘以单位向量 $(e_2 \times \overline{W}_{i\,r,}^{ac})\|\overline{W}_{i\ \ ,r}^{ac}\|^{-1}$。为解决扑翼运动（上扑和下扑）导致的符号歧义，我们考虑图 2 所示的四种情况。

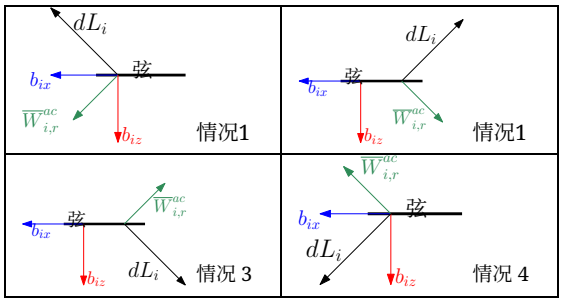


图 2. 升力方向相对于 $\overline{W}_{i\,r\ ,}^{ac}$ 方向的不同情况。图示灵感来源于（Sridhar 等人，2020）。

从图 2 可以看出，当 $\overline{W}_{i\,r\ ,}^{ac}$的第一和第三个分量符号相同时（情况1和情况 3），升力的方向与 $e_2 \times \overline{W}_{i\,r\ ,}^{ac}$相同；否则，其方向与 $-e_2 \times \overline{W}_{i\,r\ ,}^{ac}$相同（情况2和情况4）。然而，阻力的方向与 $\overline{W}_{i\,r\ ,}^{ac}$相反。最后，微小翼段产生的相应气动力和力矩可在 $\mathcal{F}_i$ 中表示如下：

[1] 若上下文已足够清楚，我们可以省略给定函数的参数。

$$dL_{i,r}(\mathfrak{g},\xi)=\frac{1}{2}\rho C_L(\alpha_{i,r})c_i(r)\left\|\overline{W}_{i,r}^{ac}\right\|\operatorname{sign}(\bar{w}_{rx}^i\bar{w}_{rz}^i)(e_2\times\overline{W}_{i,r}^{ac})dr,$$
$$dD_{i,r}(\mathfrak{g},\xi)=-\frac{1}{2}\rho C_D(\alpha_{i,r})c_i(r)\left\|\overline{W}_{i,r}^{ac}\right\|\overline{W}_{i,r}^{ac}dr,$$

其中， $\bar{w}_{rx}^i$ 和 $\bar{w}_{rz}^i$ 分别是$\overline{W}_{i\,r}^{ac}$的第一和第三个分量。施加于气动中心的微小升力和阻力还会在翼根处产生以下微小力矩

$$dM_{i,r}(\mathfrak{g},\xi)=c_{i,r}^f(\mathfrak{g},\xi)\times(dL_{i,r}+dD_{i,r}). \tag{8}$$

第 i 片机翼所产生的总升力 $L_i(\mathfrak{g},\xi)$、阻力 $D_i(\mathfrak{g},\xi)$ 和力矩 $M_i(\mathfrak{g},\xi)$，可通过沿跨度方向对上述微元表达式进行积分得到，积分范围为 $r\in[0,l_i]$，其中 $l_i>0$ 是机翼的长度。

$$L_i(\mathfrak{g},\xi):=\int_0^{l_i}dL_{i,r}(\mathfrak{g},\xi), \tag{9}$$
$$D_i(\mathfrak{g},\xi):=\int_0^{l_i}dD_{i,r}(\mathfrak{g},\xi), \tag{10}$$
$$M_i(\mathfrak{g},\xi):=\int_0^{l_i}dM_{i,r}(\mathfrak{g},\xi). \tag{11}$$

与其他假设机翼上受力均匀分布的模型（Lai 等，2005）相比，这种方法捕捉到了气动力沿翼展方向的变化；对于翅膀较大且以相对较低频率扑翼的扑翼无人机而言，这些变化至关重要。

5. 使用拉格朗日-达朗贝尔原理进行蜻蜓建模

本节将推导动能和势能的表达式。我们将结合这些表达式与第 4 节中详细介绍的气动力，运用拉格朗日-达朗贝尔原理（Lagrange，1788）为四翼扑翼飞行器推导完整的动力学模型。

5.1 动能和势能

完整多体系统的动能和势能分别记为 T 和 U，它们分别是各刚体动能和势能之和。其表达式为

$$T=\sum_{j\in\{B,1,2,3,4\}}T_j,\quad U=\sum_{j\in\{B,1,2,3,4\}}U_j. \tag{12}$$

动能和势能在以下命题中给出了明确表达式。

命题 1。总动能可表示如下:

$$T(\mathfrak{g},\xi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \Omega_B\\ \Omega_i\end{bmatrix}^\top\mathbf{J}_i(\mathfrak{g})\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \Omega_B\\ \Omega_i\end{bmatrix}, \tag{13}$$
$$U(\mathfrak{g})=-\sum_{i\in\{B,1,2,3,4\}}m_i\mathrm{g}e_3^\top\left(p+A_B\left(\mu_i+A_i\kappa_i\right)\right), \tag{14}$$

其中 $\mu_B=\kappa_B=0$ 和 $\mathbf{J}_i(\cdot)$ 为对称矩阵

$$\mathbf{J}_i(\mathfrak{g}):=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{4}m_B+m_i\right)I & \star & \star\\ m_i\left(\hat{\mu}_i+\widehat{A_i\kappa_i}\right)A_B^\top & \mathbf{J}_i^{[22]} & \star\\ m_i\hat{\kappa}_iA_i^\top A_B^\top & J_iA_i^\top+m_i\hat{\kappa}_i^\top A_i^\top\hat{\mu}_i\ J_i\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{J}^{[22]}\left(A_iJ_iA_i^\top-m_i\hat{}\mu_i^2+m_i\hat{}\mu_i^\top\widehat{A_i\kappa_i}+m_i\widehat{A_i\kappa_i}\hat{}\mu_i^\top+\frac{1}{4}J_B\right)$，$m_B$ 和 m_i 分别表示主体和连接机身的质量，g 表示重力加速度， $J_B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 表示主体关于 $\mathcal{F}_B$的恒定惯性矩阵， $J_i\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 表示第 i个机身关于 $\mathcal{F}_i$的惯性矩阵。

该命题的证明见附录B。

5.2 拉格朗日-达朗贝尔原理

该原理是对哈密顿原理的修正，以纳入外力的影响。这些外力可能来自势能，也可能并非如此。该修正指出，在固定时间段内， $T-U$ 作用量积分的无穷小变分等于外力所做的功（记作 $\delta\mathcal{W}$）；该功对应于同一时间段内构型的无穷小变分（也称为外力的虚功）。形式化地，对于任意 $t_0\geq0$ 和 $t_f\geq t_0$，有

$$\int_{t_0}^{t_f}\delta(T(t)-U(t))dt=\int_{t_0}^{t_f}\delta\mathcal{W}(t)dt. \tag{15}$$

该版本的变分原理要求确定与构型无穷小变分相对应的虚功。令 $L:=T-U$ 表示拉格朗日量，令 $F_i:=L_i+D_i$ 表示作用于第 i 个机翼上的力之和，并令 $\tau_i\in\mathbb{R}^3$ 表示作用于连接第 i 个机翼与机身的关节处的控制力矩，该力矩以体固连坐标系表示。根据 (Lee 等人，2018) 中的推导，并用 $a_{bj}\in\mathbb{R}^3$ 和$a_{ij}\in\mathbb{R}^3$ 分别表示 j 列的 $A_B\in\mathbb{SO}$(3)和 j 列的 $A_i\in\mathbb{SO}$(3)，其中 $i=1$、2、3，拉格朗日-达朗贝尔原理得出以下命题中所述的方程:

命题 2. 拉格朗日-达朗贝尔原理得出以下方程: (15)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{p}}\right)-\frac{\partial L}{\partial p}=\sum_{i=1}^{4}A_BA_iF_i, \tag{16}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\Omega_B}\right)+\hat{\Omega}_B\frac{\partial L}{\partial\Omega_B}+\sum_{j=1}^{3}\hat{a}_{bj}\frac{\partial L}{\partial a_{bj}}=\sum_{i=1}^{4}\hat{\mu}_iA_iF_i-\sum_{i=1}^{4}\tau_i, \tag{17}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\Omega_i}\right)+\hat{\Omega}_i\frac{\partial L}{\partial\Omega_i}+\sum_{j=1}^{3}\hat{a}_{ij}\frac{\partial L}{\partial a_{ij}}=M_i+A_i^\top\tau_i. \tag{18}$$

证明见附录 C。

5.3 完整动力学模型

在本小节中，我们利用命题 3 和 $L=T-U$ 的表达式，推导蜻蜓的动力学模型。利用前述拉格朗日-达朗贝尔方程中的动能和势能，并定义 $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)\in\mathbb{R}^{12}$，即可推导出如下动力学模型:

$$\mathbf{C}(\mathfrak{g})\dot{\xi}+\mathbf{D}(\mathfrak{g},\xi)\xi=F_a\left(\mathfrak{g},\xi\right)+H_c\left(\mathfrak{g}\right)\tau+F_{\mathrm{g}}(\mathfrak{g}). \tag{19}$$

其中，$\mathbf{D}(\mathfrak{g},\xi):=S(\xi)\mathbf{C}(\mathfrak{g})+\mathbf{N}(\mathfrak{g},\xi)$，满足 $S(\xi):=\mathrm{diag}\left[0_{3\times3}\hat{}\ \Omega_B\hat{}\ \Omega_1\hat{}\ \Omega_2\hat{}\ \Omega_3\hat{}\ \Omega_4\right]$，且 $\mathbf{C}(\mathfrak{g})$ 是一个 18×18 矩阵，定义如下:

$$\mathbf{C}(\mathfrak{g}) := \begin{bmatrix} mI & \sum_{i=1}^{4}\mathbf{J}_i^{[12]} & \mathbf{J}_1^{[13]} & \mathbf{J}_2^{[13]} & \mathbf{J}_3^{[13]} & \mathbf{J}_4^{[13]} \\ \sum_{i=1}^{4}\mathbf{J}_i^{[21]} & \sum_{i=1}^{4}\mathbf{J}_i^{[22]} & \mathbf{J}_1^{[23]} & \mathbf{J}_2^{[23]} & \mathbf{J}_3^{[23]} & \mathbf{J}_4^{[23]} \\ \mathbf{J}_1^{[31]} & \mathbf{J}_1^{[32]} & \mathbf{J}_1^{[33]} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ \mathbf{J}_2^{[31]} & \mathbf{J}_2^{[32]} & 0_{3\times3} & \mathbf{J}_2^{[33]} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ \mathbf{J}_3^{[31]} & \mathbf{J}_3^{[32]} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \mathbf{J}_3^{[33]} & 0_{3\times3} \\ \mathbf{J}_4^{[31]} & \mathbf{J}_4^{[32]} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & \mathbf{J}_4^{[33]} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中 $m := \sum_{i\in\{B,1,\cdots,4\}} m_i$，$\mathbf{J}_i^{[jk]}$ 表示矩阵 $\mathbf{J}_i$ 中第 j 行、第 k 列的矩阵块。矩阵 $\mathbf{N}(\mathfrak{g},\xi)$ 的 3×3 块分量如下：

$$\mathbf{N}_{11} = 0,$$

$$\mathbf{N}_{12} = \sum_{i=1}^{4} -m_i A_B \hat{\Omega}_B \left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right) - m_i A_B \widehat{A_i\hat{\Omega}_i\kappa_i}$$

$$\mathbf{N}_{1(k+2)} = -m_k A_B \left(\hat{\Omega}_B A_k + A_k\hat{\Omega}_k\right)\hat{\kappa}_k,$$

$$\mathbf{N}_{21} = \sum_{i=1}^{4} -m_i \left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)\hat{\Omega}_B A_B^\top + m_i\left(\widehat{\hat{\mu}_i\Omega_B} + \widehat{\widehat{A_i\kappa_i}\Omega_B}\right)A_B^\top$$

$$\mathbf{N}_{22} = \sum_{i=1}^{4} A_i\hat{\Omega}_i J_i A_i^\top - A_i J_i\hat{\Omega}_i A_i^\top - m_i\left(\hat{\mu}_i\widehat{A_i\hat{\Omega}_i\kappa_i} + \widehat{A_i\hat{\Omega}_i\kappa_i}\hat{\mu}_i\right),$$

$$\mathbf{N}_{2(k+2)} = A_k\hat{\Omega}_k J_k - m_k\hat{\mu}_k A_k\hat{\Omega}_k\hat{\kappa}_k,$$

$$\mathbf{N}_{31} = \sum_{i=1}^{4} -m_i\hat{\kappa}_i\left(A_i^\top\hat{\Omega}_B + \hat{\Omega}_i A_i^\top\right)A_B^\top + m_i\hat{\kappa}_i A_i\hat{\Omega}_B A_B^\top$$
$$+ m_i\widehat{\hat{\kappa}_i\Omega_i}A_i^\top A_B^\top,$$

$$\mathbf{N}_{32} = \sum_{i=1}^{4} -J_i\hat{\Omega}_i A_i^\top + m_i\hat{\kappa}_i\hat{\Omega}_i A_i^\top\hat{\mu}_i - J_i\widehat{A_i^\top\Omega_B}A_i^\top$$
$$- m_i\hat{\kappa}_i A_i^\top\left(\hat{\Omega}_B\hat{\mu}_i - \widehat{\hat{\mu}_i\Omega_B}\right),$$

$$\mathbf{N}_{j(k+2)} = \widehat{A_k^\top\Omega_B}^\top J_k + m_k\widehat{A_k^\top\hat{\mu}_k\Omega_B}\hat{\kappa}_k^\top,$$

关于 $k\in\{1,\cdots,4\}$ 和 $j\in\{3,\cdots,6\}$。气动力、重力和力矩控制力为

$$F_a := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} A_B A_i F_i \\ \sum_{i=1}^{4}\hat{\mu}_i A_i F_i \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}, H_c(\mathfrak{g}) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & -I & -I & -I \\ A_1^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4^\top \end{bmatrix},$$

$$F_{\mathrm{g}} := \begin{bmatrix} mge_3 \\ \sum_{i=1}^{4} m_i\mathrm{g}\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)A_B^\top e_3 \\ m_1\mathrm{g}\hat{\kappa}_1\left(A_1^\top A_B^\top e_3\right) \\ m_2\mathrm{g}\hat{\kappa}_2\left(A_2^\top A_B^\top e_3\right) \\ m_3\mathrm{g}\hat{\kappa}_3\left(A_3^\top A_B^\top e_3\right) \\ m_4\mathrm{g}\hat{\kappa}_4\left(A_4^\top A_B^\top e_3\right) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

这是一个完整的动力学模型，可提供四翼扑翼飞行器的位置、姿态和翅膀动力学，其中输入力矩施加在连接翅膀与机身的关节处。

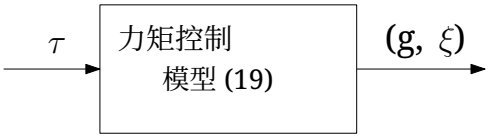


图 3. 力矩控制模型 (19)。

6. 通过翅膀运动学指定得到的简化动力学模型

通过选择特定的控制输入，可以生成模仿真实扑翼动物飞行的翅膀运动。由此可得到一个简化模型，其中控制输入是与翅膀运动学相关的参数。

6.1 期望翅膀扑动运动学

Berman 和 Wang（2007）提出了一种利用欧拉角描述昆虫的翅膀运动学构型。该构型能够使悬停飞行中的能量最小化，并捕捉实际观察到的昆虫飞行的若干定性特征。它还可应用于其他飞行动作（例如向不同方向加速），因为操控三个角度参数能够在不同方向上产生气动力。在 Berman 和 Wang（2007）的方法中，每个机翼的姿态由绕扑动坐标系的三个欧拉角给出：扑动角 ϕ_i（t）、偏转角 ψ_i（t）以及俯仰角 θ_i（t）。扑动坐标系记为 $\mathcal{F}_{iS} = \{O_i, s_{ix}, s_{iy}, s_{iz}\}$，它是将机翼坐标系 $\mathcal{F}_i$ 绕机身坐标系 y 轴旋转固定角度 $\beta_i\in\mathbb{R}$ 后得到的。该运动学构型对应的机翼姿态取自（Sridhar 等人，2020），表示为

$$A_i = \exp\left(\beta_i\hat{e}_2\right)\exp((-1)^{i+1}\phi_i\hat{e}_1)\exp((-1)^i\psi_i\hat{e}_3)\exp\left(\theta_i\hat{e}_2\right),$$

其中 $i\in\{1,\ldots,4\}$。扑动角表示为

$$\phi_i(t) = \frac{\phi_{im}}{\sin^{-1}\phi_{iK}}\sin^{-1}\left(\phi_{iK}\cos(2\pi ft + \phi_{ia})\right) + \phi_{i0}, \quad (22)$$

其中，$f\in\mathbb{R}$ 表示以 Hz 为单位的扑动频率，$\phi_{im}\in\mathbb{R}$ 为振幅，$\phi_{ia}\in\mathbb{R}$ 为相位，$\phi_{i0}\in\mathbb{R}$为偏移量，$0<\phi_{iK}\le1$ 决定波形形状（当 $\phi_{iK}\to0$ 时为正弦波，当 $\phi_{iK}\to1$ 时为三角波）。

俯仰角由以下函数给出：

$$\theta_i(t) = \frac{\theta_{im}}{\tanh\theta_{iC}}\tanh\left(\theta_{iC}\sin\left(2\pi ft + \theta_{ia}\right)\right) + \theta_{i0}, \quad (23)$$

其中，$\theta_{im}\in\mathbb{R}$ 为振幅，$\theta_{i0}\in\mathbb{R}$ 为偏移量，$\theta_{iC}\in$（0, ∞）决定波形（当$\theta_{iC}\to0$时为正弦波，当 $\theta_{iC}\to\infty$ 时为阶跃函数），$\theta_{ia}\in$（$-\pi$，π）为相位偏移。θ_{iC} 的值与机翼俯仰反转的持续时间有关。最后，偏转角表示为

$$\psi_i(t) = \psi_{im}\cos\left(2\pi\psi_{iN}ft + \psi_{ia}\right) + \psi_{i0}, \quad (24)$$

其中，$\psi_{im}\in\mathbb{R}$是振幅，$\psi_{i0}\in\mathbb{R}$ 是偏移量，参数 $\psi_{ia}\in$（$-\pi$、π）是相位偏移。参数 $\psi_{iN}\in\{1,2\}$中，$\psi_{iN}=1$ 对应每个扑动周期振荡一次，$\psi_{iN}=2$ 则对应八字形运动。

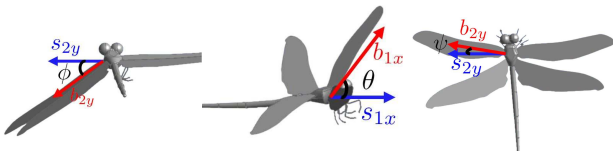


图4. 扑翼角、俯仰角和偏转角。正角度从 $\mathcal{F}_{iS}$ （蓝色）测量至 $\mathcal{F}_i$ （红色）。

对于特定的翅膀运动学，我们需要为每只翅膀指定 13 个参数（共 51 个参数）。这些参数根据蜻蜓的情况受到约束，如表 1 所示，参见（Faisal and A.Filippone, 2016）。

参数	范围
f： 扑动频率	30.0 : 45.00 Hz
ϕ_{im}： 扑动幅度	$30.0°$: $60.0°$
ψ_{im} : 偏转幅度	$1.0°$: $20.0°$
θ_{im} : 俯仰幅度	$1.0°$: $90.0°$
ϕ_{i0} : 扑动偏移量	$-30.0°$: $30.0°$
ψ_{i0} : 偏转偏置	$5.0°$ –: $30.0°$
θ_{i0} : 俯仰偏置	$-90.0°$: $90.0°$
ψ_{ia} : 偏转相位	$-180.0°$: $180.0°$
ϕ_{ia} : 扑动相位	$-180.0°$: $180.0°$
θ_{ia} : 俯仰相位	$-180.0°$: $180.0°$
ϕ_{iK} : 波形形状	0.01 : 1.00
θ_{iC}： 波形形状	0.01– : 5.00
β_i： 扑动平面角	$5.0°$: $30.0°$

表 1. 蜻蜓翅膀运动学的参数范围。

每个翅膀的姿态运动学由下式给出

$$\dot{A}_i = A_i \hat{\Omega}_i, \tag{25}$$

其中 $i \in \{1, \cdots, 4\}$。我们考虑通过对欧拉角方程 (22)-(24) 求时间导数得到的翅膀角速度，如下所示（ Sridhar 等人，2020）：

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} (-1)^{i+1}\cos\psi_i\cos\theta_i & 0 & (-1)^{i+1}\sin\theta_i \\ \sin\psi_i & 1 & 0 \\ (-1)^{i+1}\cos\psi_i\sin\theta_i & 0 & (-1)^{i}\cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\psi}_i \end{bmatrix}. \tag{26}$$

6.2 简化动力学模型

设 $(\mathfrak{g}_w^d, \xi_w^d)$ 为根据方程 (25)-(26) 生成的期望时变翅膀运动学，采用给定的参数集 $\Theta := (f, \beta_i, \phi_{mi}, \psi_{mi}, \cdots)$，如表 II 所述。现在，根据方程 (18)，控制力矩 τ_i 写为：

$$\tau_i = A_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \Omega_i}\right) + \hat{\Omega}_i \frac{\partial L}{\partial \Omega_i} + \sum_{j=1}^{3} \hat{a}_{ij} \frac{\partial L}{\partial a_{ij}} - M_i \right), \\ := \mathbf{T}(\mathfrak{g}_B, \xi_B, \mathfrak{g}_w, \xi_w). \tag{27}$$

现在假设内环足够快，使得 $(\mathfrak{g}_w, \xi_w) \approx (\mathfrak{g}_w^d, \xi_w^d)$，则控制力矩可写为

$$\tau_i \approx \mathbf{T}(\mathfrak{g}_B, \xi_B, \mathfrak{g}_w^d, \xi_w^d) =: \mathbf{T}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B, \xi_B), \tag{28}$$

这里我们利用了这样一个事实：$(\mathfrak{g}_w^d, \xi_w^d)$ 是参数 Θ 和时间 t 的函数。将这个力矩表达式代入命题 2 的第二个方程，我们便可写出主体的平动和转动动力学如下：

$$\mathcal{C}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B)\dot{\xi}_B + \mathcal{D}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B, \xi_B)\xi_B + \mathcal{V}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B) = \mathcal{F}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B, \xi_B). \tag{29}$$

矩阵 $\mathcal{C}_\Theta^t$、$\mathcal{D}_\Theta^t$、$\mathcal{V}_\Theta^t$ 和 $\mathcal{F}_\Theta^t$ 以及该模型的推导详见附录 D。

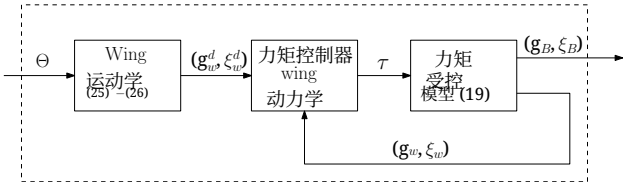


图 5. 参数控制模型。

将性质相同的力和力矩归为一组，是使该模型适用于控制律设计和研究翅膀与机身相互作用的另一种方法。首先，我们写出气动力和力矩；在跟踪场景中，它们可视为控制输入。其次，我们考虑机体加速度和旋转引起的翅膀惯性力和力矩。最后，我们考虑翅膀运动（扑翼）引起的翅膀惯性力和力矩。该模型表示为

$$\begin{cases} \dot{p} = v, \\ \dot{A}_B = A_B \hat{\Omega}_B, \\ m\dot{v} = mge_3 + F_c + F_B + F_w, \\ J_B\dot{\Omega}_B = \hat{\Omega}_B J_B \Omega_B + \Gamma_c + \Gamma_B + \Gamma_w, \end{cases} \tag{30}$$

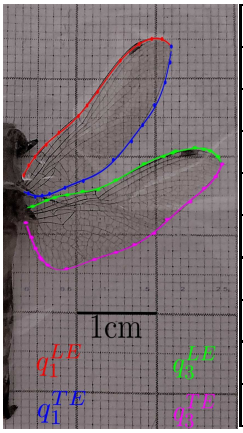
其中， v 是机身在惯性坐标系中的线速度； F_c 和 Γ_c 是可用作控制输入的气动力和力矩； F_w 和 Γ_w 是翅膀扑翼运动产生的惯性力和力矩； F_B 和 Γ_B 是机身平动和转动产生的惯性力和力矩。这些力的表达式见附录 F。在大多数情况下，由于机翼质量 m_i 相较于机体质量 m_B过小，通常会忽略翅膀运动产生的惯性力。对于蜻蜓而言，机翼质量 m_i 约占机体质量 m_B的 3.5%。此外，同时忽略翅膀运动和机身运动产生的惯性力与力矩 F_B、F_w、Γ_B和 Γ_w，便得到广泛使用的飞行刚体模型（Padfield, 1996）；该模型曾用于昆虫飞行建模（Deng 等，2006; Xiong 和 Sun，2008; Dietl 和 Garcia，2008）。在本研究中，我们将进一步考察这些力在近悬停情形下的重要性。

7. 数值结果

本节将研究近悬停情形下惯性力的影响。我们将比较忽略惯性力与考虑惯性力时蜻蜓的运动轨迹，并比较这些惯性力的大小。

首先，由于气动力取决于这些多项式（如第 4 节所示），因此有必要使用多项式函数 q_i^{LE}和 q_i^{TE} 来描述翅膀的形状。我们来看图 6，其中展示了一张死亡的蜻蜓的图像。方程 (1) 中的多项式系数是通过拟合来自

算法根据 (Seo 等人，2016) 得到的翅膀轮廓线，包含 $n = 7$。多项式的系数列于下表中，多项式函数绘制于图 6 中



j	λ_{1j}^{LE}	λ_{1j}^{TE}	λ_{3j}^{LE}	λ_{3j}^{TE}
0	-0.873	2.133	-0.214	0.183
1	5.648	-12.12	1.8389	-1.372
2	-13.85	26.20	-6.153	3.574
3	15.16	-26.25	9.981	-3.016
4	-6.111	-11.47	-7.857	-2.210
5	-0.579	-0.728	2.625	5.627
6	1.789	-0.429	0.051	-3.164
7	0.122	-0.096	0.140	-0.082
R^2	0.006	0.028	0.006	0.012

图 6. 带有翅膀多项式系数的蜻蜓图像。

接下来，我们选取与 (Dickson 等人，2006) 中类似的气动中心位置 $c_{i,r}^{f}$，即方程 (5) 中的函数 $\gamma_{ac}(\alpha_{i,r})$ 定义为

$$\gamma_{ac}(\alpha) := 0.82\frac{|\alpha|}{\pi} + 0.05. \tag{31}$$

升力系数和阻力系数 $C_L(\alpha_{i,r})$ 以及 $C_D(\alpha_{i,r})$ 是 $\alpha_{i,r}$ 的函数，其取值与 (Dickinson 等人，1999年) 提出的系数类似:

$$C_L(\alpha_{i,r}) = 0.225 + 1.58\sin(2.13\overline{\alpha}_{i,r}^{\circ} - 7.20), \tag{32}$$

$$C_D(\alpha_{i,r}) = 1.92 - 1.55\cos(2.04\overline{\alpha}_{i,r}^{\circ} - 9.82). \tag{33}$$

其中 $\overline{\alpha}_{i,r}^{\circ} = 180\alpha_{i,r}/\pi$ （当 $\alpha_{i,r} \leq \pi/2$ 时），否则为 $\overline{\alpha}_{i,r}^{\circ} = 180(\pi - \alpha_{i,r})/\pi$。为了使蜻蜓实现接近悬停的飞行，我们需要为蜻蜓的翅膀找到合适的参数。由于动力学复杂，且翅膀运动学参数相对较多，这项工作颇具挑战。我们通过优化来解决这一问题，以最小化代价函数；该函数表示蜻蜓的位置和速度与悬停位置参考值之间的误差。具体而言，该问题表述如下。我们定义代价

$$\mathcal{J} = w_1 \int_{t_0}^{T_f} \|p - p_{ref}\|^2 dt + w_2 \int_{t_0}^{T_f} \|\dot{p}\|^2 dt,$$

其中，w_1、$w_2 \in \mathbb{R}$、$T_f = 10T$ 为飞行时间，$T = 1/f$ 为扑动周期，$p_{ref} = [0\ 0\ 2]^\top$ 为悬停位置参考值。其目的是最小化位置和速度的误差，以确保蜻蜓在 $2m$ 高度处悬停。接下来，与（Tejaswi 等人，2021；Sridhar 等人，2020）一样，我们假设蜻蜓的机身表现出俯仰运动（围绕 e_2振荡），即 $A_B(t) = \exp(\Phi_B(t)\hat{e}_2)$，其中

$$\Phi_B(t) = \Phi_{B_m}\cos(2\pi f t + \Phi_{B_a}) + \Phi_{B_0},$$

其中，Φ_{B_m}、Φ_{B_a} 和 Φ_{B_0} 是待确定的参数。将 A_B 和 $\hat{\Omega}_B = A_B^\top \dot{A}_B$代入式（30），通过对平移动力学（第一和第三个方程

$^{-}$（式（30））进行积分，最终可得到轨迹 Φ_{B_a}（Φ_{B_0}）。最后，优化参数为 $\Theta := (\Theta、\Phi_{B_m}、\Phi_{B_a}、\Phi_{B_0})$。参数约束见表1。蜻蜓的形态参数，如 J_B、J_i和 μ_i，取值与真实昆虫相近，详见附录 E。该问题通过 MATLAB 中实现的遗传算法优化（Anweer 等人，2020）求解。相应的优化参数汇总于表2，所得轨迹如图8所示。

参数	前翅1,2	后翅3,4
f	35.6476 Hz	35.6476 Hz
ϕ_{im}	58.42°	32.48°
ψ_{im}	11.16°	4.26°
θ_{im}	1.43°	37.18°
ϕ_{i0}	4.64°	28.49°
ψ_{i0}	26.49°	20.29°
θ_{i0}	−35.24°	−1.83°
ϕ_{ia}	0°	92.56°
ψ_{ia}	−40.10°	29.37°
θ_{ia}	−98.82°	−138.47°
ϕ_{iK}	0.533	0.895
θ_{iC}	2.394	1.613
β_i	10.95°	23.53°
Φ_{B_m}	0.37°	
Φ_{B_a}	−5.72°	
Φ_{B_0}	0.434°	

表2. 优化参数。

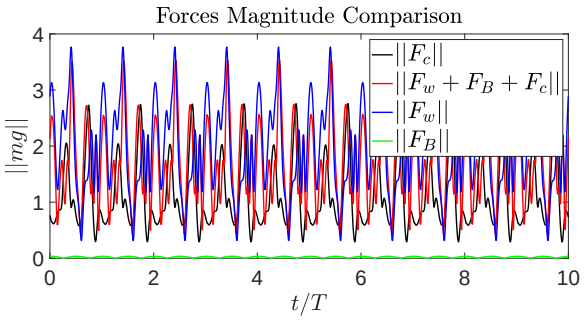


图7. 力的大小比较。

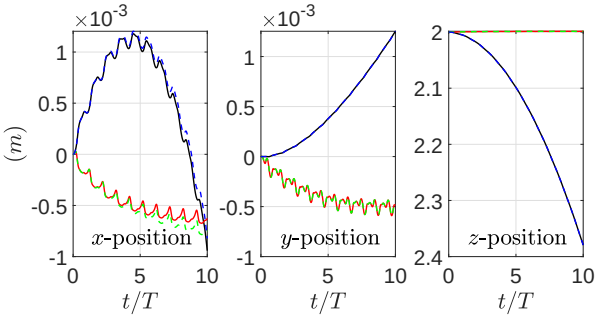


图8. 式（30）中完整模型的位置比较（红色）、忽略 F_B 和 F_w 时（黑色）、仅忽略F_B 时（绿色虚线），以及仅忽略 F_w 时（蓝色虚线）。

从图8可以看出，忽略身体运动产生的惯性力 F_B后，所得轨迹会更接近

完整模型的轨迹（红线）（虚线绿线）。这一结果是由于身体运动产生的惯性力（$\|F_B\|$）幅值较小，如图7中的绿线所示。然而，忽略翅膀运动产生的惯性力后，所得轨迹（图8中的蓝色虚线）与完整模型的轨迹（红线）相距较远，却更接近飞行刚体模型（Deng 等（2006））的轨迹（黑线）。这一结果是由于翅膀运动产生的惯性力（$\|F_w\|$）幅值相对较大，如图7中的蓝线所示。图8和图7说明了翅膀与机身相互作用的重要性。研究发现，翅膀运动产生的惯性力相当重要，不应忽略。在此情形下，由于机身运动相较于翅膀运动较慢，机身运动产生的惯性力可以忽略。采用 Deng 等（2006）中的飞行刚体动力学模型，即同时忽略机身运动和翅膀运动产生的惯性力，会得到一条不同于蜻蜓实际轨迹的轨迹。考虑到蜻蜓的体型，这条轨迹与其实际轨迹相差甚远。

8. 结论

我们建立了一个受蜻蜓类昆虫启发的高保真四翼微型扑翼飞行器动力学模型。所提出的模型准确地描述了扑翼机机身与翅膀之间的相互作用，而不依赖于忽略翅膀质量和翅膀与机身相互作用这一常见假设。此外，我们采用准定常空气动力学假设，对由无限小翼弦产生的展向气动力进行建模，从而以一种简洁而准确的方式表示空气动力学特性。仿真结果证明了在扑翼飞行器动力学中考虑惯性力和翅膀与机身相互作用的重要性。这凸显了本研究在开发完整且简洁的四翼微型扑翼飞行器模型方面的贡献，该模型能够捕捉翅膀与机身相互作用的复杂细节。最后，所提出动力学模型的构型状态直接在流形 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{SO}(3)^5$ 上演化，从而避免了与其他姿态表示相关的复杂性和奇异性。

致谢

本研究得到加拿大国家科学与工程研究委员会（NSERC）的资助，资助项目为 NSERC-DG RGPIN 2020-06270 和 NSERC-DG RGPIN-2020-04759。

参考文献

Alexander, D.（1984）。飞行蜻蜓前翅与后翅之间的异常相位关系。《实验生物学杂志》。Anweer, A., Shamimul, Q., Amit, D. 和 Benaida, M.（2020）。遗传算法：综述、实现与应用。《国际工程教育学杂志》。Azuma, A. 和 Watanabe, T.（1988）。蜻蜓的飞行性能。《实验生物学杂志》。Berman, G. 和 Wang, Z.（2007）。昆虫悬停飞行中的能量最小化运动学。《流体力学杂志》，153–168。doi:10.1017/S0022112007006209。

Breugel, F.V., Regan, W., and Lipson, H. (2008). 从昆虫到机器。《IEEE机器人与自动化杂志》，15(4), 68–74. Deng, X., Schenato, L., Wu, W.C., and Sastry, S. (2006). 仿生机器人昆虫的扑翼飞行：第 i 部分——系统建模。《IEEE机器人学汇刊》，22(4), 615. Dickinson, M., Lehmann, F., and Sane, S. (1999). 翅膀旋转与昆虫飞行的空气动力学基础。《科学》，284, 1954–1960. Dickson, W., Straw, D., Poelma, C., and Dickinson, M. (2006). 昆虫飞行控制的综合模型。第44届 AIAA 航空航天科学会议暨展览，1. doi:10.2514/6.2006-34. Dietl, J. and Garcia, E. (2008). 扑翼机纵向飞行动力学的稳定性。《制导、控制与动力学杂志》，1157– 1162. Ellington, C.P. (1984). 昆虫悬停飞行的空气动力学。i. 准定常分析。《皇家学会哲学汇刊》，59, 1–15. Faisal, A. and A.Filippone (2016). 串列扑翼的空气动力学模型。《AIAA杂志》。doi:10.2514/1. J055178. Lagrange, J. (1788). M ´ecanique Analytique. 巴黎。Lai, W., Yan, J., and Green, M.M.S. (2005). 蜻蜓前飞时缩尺机械模型的力测量。国际先进机器人会议，ICAR会议论文集，15(4), 595–600. Lee, T., Leok, M., and McClamroch, N.H. (2018). 流形上的拉格朗日与哈密顿动力学的全局表述。施普林格。May, M. (1991). 蜻蜓飞行：高速和加速时的功率需求。《实验生物学杂志》，158:325–3421. Padfield, G. (1996). 直升机飞行动力学：飞行品质与仿真建模的理论和应用。美国航空航天学会，华盛顿特区，第1版。Reavis, M. and Luttges, M. (1988). 蜻蜓产生的气动力。《AIAA杂志》。doi:10.2514/ 6.1988-330. Ruppell, G. (1989). 蜻蜓目的对称飞行动作运动学分析。《实验生物学杂志》，13–42. Sanders, J.A. and Verhulst, F. (1985). 非线性动力系统中的平均法。施普林格出版社，纽约。Seo, J., Chae, S., Shim, J., Kim, D., Cheong, C., and Han, T. (2016). 一种基于像素跟随法、适用于图像传感器的快速轮廓跟踪算法。《传感器》。doi: 10.3390/s16030353. Sridhar, M., Kang, C., and Lee, T. (2020). 考虑腹部起伏效应的君主斑蝶动力学几何表述。载于 AIAA Scitech 2020 论坛，1962. Sun, M. (2014). 昆虫飞行动力学：稳定性与控制。《现代物理学评论》，86(2), 615. Sun, M., Wang, J., and Xiong, Y. (2007). 悬停昆虫的动态飞行稳定性。Acta Mech Sin. Taha, H.E., Hajj, M.R., and Nayfeh, A.H. (2012). 扑翼微型飞行器的飞行动力学与控制：综述。《非线性动力学》，70(2), 907–939.

Tejaswi, K., Kang, C.K., and Lee, T. (2021). 受君主斑蝶启发、具有腹部起伏的扑翼无人机动力学与控制。载于2021年美国控制会议（ACC），66–71.

Usherwood, J. 和 Ellington, C.（2002年）。旋转翼的空气动力学。I. 天蛾机翼模型。《实验生物学杂志》，205，1547–1564。

Weis-Fogh, T.（1973）。悬停动物飞行适应性的快速估算，包括产生升力的新机制。《实验生物学杂志》，59，169–230。Xiong, Y. 和 Sun, M.（2008）。熊蜂前飞时的动态飞行稳定性。《力学学报》，24，25–36。doi:10.1007/s10409-007-0121-2。

附录A. 引理1的证明

考虑一只翅膀的根部，该根部相对于惯性坐标系位于 $p + A_B\mu_i$ 处。因此，弦上任意一点的$\mathcal{F}_I$坐标为

$$\tilde{\nu}_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi) := p + A_B\mu_i + A_BA_i\nu_i(r,\gamma). \tag{A.1}$$

因此，其在 $\mathcal{F}_I$ 中的线速度为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{\nu}_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi) =& \dot{p} + A_B\hat{\Omega}_B\mu_i + A_B\hat{\Omega}_BA_i\nu_i(r,\gamma) \\ &+ A_BA_i\hat{\Omega}_i\nu_i(r,\gamma),\end{aligned} \tag{A.2}$$

通过左乘 $A_i^\top A_B^\top$，可将其表示为 $\mathcal{F}_i$：

$$\begin{aligned}W_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi) :&= A_i^\top A_B^\top\frac{d}{dt}\tilde{\nu}_{i,r,\gamma}(\mathfrak{g},\xi) \\ &= (A_BA_i)^\top\dot{p} + A_i^\top\hat{\Omega}_B(\mu_i + A_i\nu_i) + \hat{\Omega}_i\nu_i.\end{aligned} \tag{A.3}$$

附录B. 命题 1 的证明

主体的动能是主体的平动动能与转动动能之和，可表示为

$$T_B = \frac{1}{2}m_B\|\dot{p}\|^2 + \frac{1}{2}\Omega_B^\top J_B\Omega_B. \tag{B.1}$$

每个机翼的动能是其平动动能与转动动能之和，可表示为

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\|\dot{\kappa}_i^I\|^2 + \frac{1}{2}\Omega_i^{I\top}\left(J_i + m_i\hat{\kappa}_i^2\right)\Omega_i^I, \tag{B.2}$$

其中，κ_i^I 是第 i 个机翼在惯性坐标系中的质心位置，表示为

$$\kappa_i^I = p + A_B\mu_i + A_BA_i\kappa_i, \tag{B.3}$$

并且，Ω_i^I 是第 i 个机翼相对于 $\mathcal{F}_I$ 的角速度，在 $\mathcal{F}_i$ 中表示为

$$\Omega_i^I = \Omega_i + A_i^\top\Omega_B. \tag{B.4}$$

第 i 个机翼质心的速度为

$$\dot{\kappa}_i^I = \dot{p} + A_B\hat{\Omega}_B\left(\mu_i + A_i\kappa_i\right) + A_BA_i\hat{\Omega}_i\kappa_i. \tag{B.5}$$

将 T_B 和 T_i 的表达式代入式（12），可得总动能的表达式

$$\begin{aligned}T =& \frac{1}{2}m_B\|\dot{p}\|^2 + \frac{1}{2}{\Omega_B}^\top J_B\Omega_B + \frac{1}{2}\sum_{i\in\{1,\dots,4\}} m_i\Big(\|\dot{p}\|^2 - \\ &2\dot{p}^\top A_B\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)\Omega_B - 2\dot{p}^\top A_BA_i\hat{\kappa}_i\Omega_i - \\ &\Omega_B^\top\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)^2\Omega_B + 2\Omega_i^\top\hat{\kappa}_i^\top A_i^\top\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)\Omega_B\Big) + \\ &\frac{1}{2}\sum_{i\in\{1,\dots,4\}}\Big(\Omega_B^\top A_i\left(J_i + m_i\hat{\kappa}_i^2\right)A_i^\top\Omega_B + \\ &2\Omega_i^\top\left(J_i + m_i\hat{\kappa}_i^2\right)A_i^\top\Omega_B + \Omega_i^\top J_i\Omega_i\Big),\end{aligned} \tag{B.6}$$

将其重新整理可得式（13）。主体的势能为

$$U_B = -m_Bge_3^\top p, \tag{B.7}$$

每个连接体 $\mathcal{B}_i, i \in\{1,\dots,4\}$ 的势能为

$$U_i = -m_ige_3^\top\left(p + A_B\left(\mu_i + A_i\kappa_i\right)\right). \tag{B.8}$$

势能之和得到式 (14)。

Appendix C. PROOF OF PROPOSITION 2

方程 $\delta\mathfrak{S} = \int_{t_0}^{t_f}\delta(T-U)dt$的左侧可写为:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{S} = \int_{t_0}^{t_f}\Bigg\{&\frac{\partial L}{\partial\dot{p}}\delta\dot{p} + \frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial\Omega_B}\delta\Omega_B \\ &+ \frac{\partial L}{\partial A_B}\delta A_B + \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial L}{\partial\Omega_i}\delta\Omega_i + \frac{\partial L}{\partial A_i}\delta A_i\right)\Bigg\}dt\end{aligned}$$

将姿态和角速度的无穷小变分替换为 (Lee 等人，2018)

$$\begin{aligned}\delta A_B &= A_B\hat{\eta}, \\ \delta\Omega_B &= \dot{\eta} + \hat{\Omega}_B\eta, \\ \delta A_i &= A_i\hat{\eta}_i, \\ \delta\Omega_i &= \dot{\eta}_i + \hat{\Omega}_i\eta_i.\end{aligned} \tag{C.1}$$

其中 $\eta\colon\ [t_0,t_f]\to\mathbb{R}^3$ 是一个在 t_0 和 t_f处为零的无穷小变分。方程 (15) 的左侧将得到以下方程:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{S} = \int_{t_0}^{t_f}\Bigg\{&\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{p}}\right) - \frac{\partial L}{\partial p}\right)\delta p + \\ &\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\Omega_B}\right) + \hat{\Omega}_B\frac{\partial L}{\partial\Omega_B} + \sum_{i=1}^{3}\hat{a}_{bi}\frac{\partial L}{\partial a_{bi}}\right)\eta + \\ &\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\Omega_i}\right) + \hat{\Omega}_i\frac{\partial L}{\partial\Omega_i} + \sum_{j=1}^{3}\hat{a}_{ij}\frac{\partial L}{\partial a_{ij}}\right)\eta_i\Bigg\}dt.\end{aligned} \tag{C.2}$$

通过考虑作用于$c_i^f{}_{,r}\in\mathbb{R}^3$ 机翼气动中心位置的无穷小气动力 $dF_i := dL_i + dD_i \in \mathbb{R}^3$，可以推导出式（15）的右端。气动中心在惯性坐标系中的位置为$\tilde{c_i^f}{}_{,r} = p + A_B\mu_i + A_BA_ic_i^f{}_{,r}$。因此，单侧机翼产生的气动力所对应的虚功为

$$\delta\mathcal{W}_i = \int_{\mathcal{B}_i}\left(A_BA_idF_i\right)^\top\delta\left(p + A_B\mu_i + A_BA_ic_{i,r}^f\right).$$

将无穷小变分替换为式（C.1）给出的表达式后，单侧机翼上的虚功为

$$\delta\mathcal{W}_i = \left(A_B A_i \int_{\mathcal{B}_i} dF_i\right)^\top (\delta p + A_B \hat{\eta}\mu_i) + \left(\int_{\mathcal{B}_i} c_{i,r}^f \times dF_i\right)^\top \eta_i.$$

将 dF_i 以及机翼体表面上的积分替换为其公式，可得

$$\delta\mathcal{W}_i = \left(A_B A_i \int_0^{l_i} (dL_i + dD_i)\right)^\top (\delta p + A_B \hat{\eta}\mu_i) + \left(\int_0^{l_i} c_{i,r}^f \times (dL_i + dD_i)\right)^\top \eta_i. \tag{C.3}$$

接下来，我们考虑关节上施加的控制力矩所做的虚功，该虚功在机翼坐标系中表示为 $A_i^\top \tau_i$ 。机身将受到一个反作用力矩，即施加于机身的（$-\tau_i$）。相应的总虚功为

$$\delta\mathcal{W}_\tau = \sum_{i=1}^{4} \left[(A_i^\top \tau_i)^\top \eta_i + (-\tau_i)^\top \eta\right]. \tag{C.4}$$

现在，根据 $\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{W}_\tau + \sum_{i=1}^4 \delta\mathcal{W}_i$这一事实，将式（9）—（11）给出的气动力和力矩代入（C.3），则式（15）的右端为

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta\mathcal{W} dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(A_B \sum_{i=1}^4 A_i F_i\right)^\top \delta p + \left(\sum_{i=1}^4 (\mu_i \times A_i F_i - \tau_i)\right)^\top \eta + \sum_{i=1}^4 \left(M_i + A_i^\top \tau_i\right)^\top \eta_i \right\} dt.$$

通过将右端的各项，以及左端分别乘以线性无关的无穷小变分 δx、 $\delta\eta$ 和 $\delta\eta_i$的各项进行归类，可得到拉格朗日-达朗贝尔方程。然后，运用哈密顿原理（该原理表明，对于所有具有固定端点的可能变分， $\delta\mathfrak{S} = 0$），并利用无穷小变分在 t_0 和 t_f处为零这一事实，可得（16）—（18）中的拉格朗日-达朗贝尔方程；这是由于方程（C.2）和（D.1）积分内的值等于零。

Appendix D. THE REDUCED DYNAMICAL MODEL

为得到式（29）所示的简化动力学模型，首先将式（19）中的矩阵 C、N 和S，以及向量 $F_u := H_c\tau$、F_{g} 和 F_a 写成如下形式:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{11} & \tilde{\mathbf{C}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{21} & \tilde{\mathbf{C}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}_{11} & \tilde{\mathbf{N}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{N}}_{21} & \tilde{\mathbf{N}}_{22}, \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix}$$

$$F_a = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{a1} \\ \tilde{F}_{a2} \end{bmatrix}, \quad F_u = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{u1} \\ \tilde{F}_{u1} \end{bmatrix}, \quad F_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{\mathrm{g}1} \\ \tilde{F}_{\mathrm{g}1} \end{bmatrix},$$

其中，矩阵 C_{11},N_{11}、 $\tilde{S}_{11} \in \tilde{\mathbb{R}}^{6\times6}$和 $\mathsf{C}_{12}, \mathsf{N}_{12}$,$\tilde{S}_{12} \in \mathbb{R}^{\tilde{6}\times12}$, ˜以及 ˜$\mathsf{C}_{21}$、 ˜$\mathsf{N}_{21}$、 $\tilde{S}_{21} \in \mathbb{R}^{12\times6}$和 ˜$\mathsf{C}_{22}$、 ˜$\mathsf{N}_{22}$,$\tilde{S}_{22} \in \mathbb{R}^{12\times12}$。向量 $\tilde{F}_{a1}$、 $\tilde{F}_{u1}$、 $\tilde{F}_{\mathrm{g}1} \in \mathbb{R}^6$，以及

参数	数值
ρ	1.2千克/米^3
m_B	$5.4483e^{-5}$千克
$m_{1,2}$	$1.9069e{-}6$千克
$m_{3,4}$	$2.3126e^{-6}$千克
$l_{1,2}$	0.0185米
$l_{3,\ 4}$	0.025m

表 D.1. 翅膀形态参数。

$\tilde{F}_{a2}$、 $\tilde{F}_{u2}$、 $\tilde{F}_{\mathrm{g}2} \in \mathbb{R}^{12}$。此外，从$F_u := H_c\tau$的表达式中，可以很容易地注意到以下关系

$$\tilde{F}_{u1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & A_4 \end{bmatrix} \tilde{F}_{u2} =: K\tilde{F}_{u2}. \tag{D.1}$$

˜将 F_{u2} 替换为由式 (19) 的第 3 至第 6 行给出的翅膀动力学，可将主体的平动和转动动力学写为:

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{\mathbf{C}}_{11} - K\tilde{\mathbf{C}}_{21}\right)\dot{\xi}_B = \left(K\tilde{S}_{22}\tilde{\mathbf{C}}_{21} - \tilde{S}_{11}\tilde{C}_{11}\right)\xi_B \\ &+ \left(K\tilde{\mathbf{N}}_{21} - \tilde{\mathbf{N}}_{11}\right)\xi_B + \left(K\tilde{\mathbf{C}}_{22} - \tilde{\mathbf{C}}_{12}\right)\dot{\xi}_w \\ &+ \left(K\tilde{S}_{22}\tilde{\mathbf{C}}_{22} - \tilde{S}_{11}\tilde{\mathbf{C}}_{12}\right)\xi_w + \left(K\tilde{\mathbf{N}}_{22} - \tilde{\mathbf{N}}_{12}\right)\xi_w \\ &+ \tilde{F}_{a1} + \tilde{F}_{g1} - K\left(\tilde{F}_{a2} + \tilde{F}_{g2}\right). \end{aligned} \tag{D.2}$$

因此，式 (29) 中的矩阵 $\mathcal{C}_t^\Theta$和 $\mathcal{D}_t^\Theta$以及向量 $\mathcal{V}_t^\Theta$、 $\mathcal{F}_t^\Theta$可表示为

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B) = \left(\tilde{\mathbf{C}}_{11} - K\tilde{\mathbf{C}}_{21}\right), \\ &\mathcal{D}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B, \xi_B) = \Bigg(\left(K\tilde{S}_{22}\tilde{\mathbf{C}}_{21} - \tilde{S}_{11}\tilde{\mathbf{C}}_{11} + K\tilde{\mathbf{N}}_{21} - \tilde{\mathbf{N}}_{11}\right) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{j\in\{1,\dots,4\}} A_j \sum_{i=1}^4 \left(\widehat{J_i\Omega_i}A_i^\top - m_i\widehat{\hat{\kappa}_i\Omega_i}A_i^\top\hat{\mu}_i\right) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^4 m_i A_B \widehat{A_i\hat{\kappa}_i\Omega_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^4 -\widehat{J_i^{[23]}\Omega_i} \end{bmatrix} \Bigg) \\ &\mathcal{V}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B) = \left(K\tilde{\mathbf{C}}_{22} - \tilde{\mathbf{C}}_{12}\right)\dot{\xi}_w + \left(K\tilde{S}_{22}\tilde{\mathbf{C}}_{22} - \tilde{N}_w\right)\xi_w + \\ &\tilde{F}_{\mathrm{g}1} - K\tilde{F}_{\mathrm{g}2} \\ &\mathcal{F}_\Theta^t(\mathfrak{g}_B, \xi_B) = \tilde{F}_{a1} - K\tilde{F}_{a2}. \end{aligned}$$

˜定义如下： N_w

$$\tilde{N}_w := \begin{bmatrix} m_1 A_B A_1 \hat{\Omega}_1 \hat{\kappa}_1 & m_i A_B A_i \hat{\Omega}_i \hat{\kappa}_i & m_i A_B A_i \hat{\Omega}_i \hat{\kappa}_i & m_i A_B A_i \hat{\Omega}_i \hat{\kappa}_i \\ \mathbf{N}_{23} & \mathbf{N}_{24} & \mathbf{N}_{25} & \mathbf{N}_{26} \end{bmatrix}.$$

附录 E. 蜻蜓形态

蜻蜓的形态参数根据图 6 所示的蜻蜓尸体计算得出。首先，我们假设主体为一个直径为 $D_B = 7.6$mm、高度为 $H_B = 25$mm 的圆柱体。基于这一假设，并已知后翅与前翅翅根之间的距离为 5.42mm，可以轻松计算出 J_B 和 μ_i ，如下所示:

$$J_B = 10^{-8}\begin{bmatrix}0.0109 & 0 & 0\\ 0 & 0.2847 & 0\\ 0 & 0 & 0.2847\end{bmatrix}, \tag{E.1}$$

$$\begin{aligned}&\mu_1 = 10^{-3}\left[2.71\ 3.8\ 0\right]^\top, \quad \mu_2 = 10^{-3}\left[2.71\ -3.8\ 0\right]^\top,\\ &\mu_3 = 10^{-3}\left[-2.71\ 3.8\ 0\right]^\top, \quad \mu_4 = 10^{-3}\left[-2.71\ -3.8\ 0\right]^\top.\end{aligned} \tag{E.2}$$

接下来，利用翅膀多项式 q_i^{LE}和 q_i^{TE}，可以直接计算出翅膀参数 J_i、κ_i、m_i 和 l_i，如下所示:

$$\begin{aligned}\kappa_{1,2} &= 10^{-3}\left[7.978\ (-1)^{i+1}4.975\ 0\right]^\top,\\ \kappa_{3,4} &= 10^{-3}\left[1.175\ (-1)^{i+1}5.89\ 0\right]^\top,\end{aligned} \tag{E.3}$$

$$J_{1,2} = 10^{-3}\begin{bmatrix}0.2303 & (-1)^{i+1}0.1902 & 0\\ (-1)^{i+1}0.1902 & 0.1731 & 0\\ 0 & 0 & 0.4034\end{bmatrix},$$

$$J_{3,4} = 10^{-3}\begin{bmatrix}0.4164 & (-1)^{i+1}0.0693 & 0\\ (-1)^{i+1}0.0693 & 0.0326 & 0\\ 0 & 0 & 0.4489\end{bmatrix}.$$

附录 F. 控制动力学模型

式（30）所示的控制动力学模型，是通过将气动力和力矩视为控制输入而得到的，分别记为 F_C 和 Γ_C。将表示机身运动所产生的惯性力和力矩的项归为一组，分别记为 F_B 和 Γ_B，即乘以 ξ_B 和 ξ_B的$\dot{}$项。最后，仅乘以 ξ_w 和 ξ_w的$\dot{}$项表示翅膀运动所产生的力和力矩。因此，力和力矩的表达式为

$$F_c = \sum_{i=1}^{4} A_B A_i F_i, \tag{F.1}$$

$$\begin{aligned}F_w = \sum_{i=1}^{4}\Big(&2m_i A_B\hat{\Omega}_B A_i\hat{\kappa}_i\Omega_i + m_i A_i\hat{\kappa}_i\dot{\Omega}_i +\\ &m_i A_i\hat{\Omega}_i\hat{\kappa}_i\Omega_i\Big)\end{aligned} \tag{F.2}$$

$$\begin{aligned}F_B = \sum_{i=1}^{4}\Bigg(&m_i A_B\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)\dot{\Omega}_B +\\ &m_i A_B\hat{\Omega}_B\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)\Omega_B\Bigg),\end{aligned} \tag{F.3}$$

$$\Gamma_c = \sum_{i=1}^{4}\left(\hat{\mu}_i A_i F_i + A_i M_i\right). \tag{F.4}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_w = &-\sum_{i=1}^{4}\left(A_i\hat{\Omega}_i J_i A_i^\top + A_i J_i\hat{\Omega}_i^\top A_i^\top + m_i\left(\hat{\mu}_i^\top\widehat{A_i\hat{\Omega}_i\kappa_i} + \widehat{A_i\hat{\Omega}_i\kappa_i}^{\top}\hat{\mu}_i\right) - m_i A_i\hat{\kappa}_i\hat{\Omega}_i A_i^\top\hat{\mu}_i\right)\Omega_B\\ &+\sum_{i=1}^{4}\left(A_i\widehat{A_i^\top\Omega_B}J_i + m_i\widehat{A_i^\top\hat{\mu}_i\Omega_B}\hat{\kappa}_i + m_i\hat{\Omega}_B\hat{\mu}_i A_i\hat{\kappa}_i + \hat{\Omega}_B A_i J_i\right)\Omega_i + \sum_{i=1}^{4}\Big(m_i A_i\hat{\Omega}_i\hat{\kappa}_i^\top A_i^\top\hat{\mu}_i\Omega_B\\ &-\left(2A_i J_i - m_i\hat{\mu}_i A_i\hat{\kappa}_i\right)\dot{\Omega}_i\Big).\end{aligned} \tag{F.5}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_B = &-\sum_{i=1}^{4} m_i\left(\hat{\mu}_i + 2\widehat{A_i\kappa_i}\right)A_B^\top\ddot{p} - \sum_{i=1}^{4}\left(m_i\hat{\mu}_i^\top\hat{\mu}_i + 2A_i J_i A_i^\top + m_i\left(\hat{\mu}_i^\top\widehat{A_i\kappa_i} + 2\widehat{A_i\kappa_i}^{\top}\hat{\mu}_i\right)\right)\dot{\Omega}_B\\ &-\sum_{i=1}^{4}\left(-m_i\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)\hat{\Omega}_B A_B^\top + m_i\left(\widehat{\hat{\mu}_i\Omega_B} + \widehat{\widehat{A_i\kappa_i}\Omega_B}\right)A_B^\top + m_i\hat{\Omega}_B\left(\hat{\mu}_i + \hat{A_i\kappa_i}\right)A_B^\top\right)\dot{p}\\ &-\sum_{i=1}^{4}\left(-A_i J_i\widehat{A_i^\top\Omega_B}A_i^\top - m_i A_i\hat{\kappa}_i A_i^\top\left(\hat{\Omega}_B\hat{\mu}_i - A_i\widehat{\hat{\mu}_i\Omega_B}\right) + m_i\hat{\Omega}_B\left(\hat{\mu}_i + \widehat{A_i\kappa_i}\right)A_B^\top\right)\Omega_B + \sum_{i=1}^{4} m_i g\hat{\mu}_i A_B^\top e_3.\end{aligned} \tag{F.6}$$