直线与环面求交在光线追踪中的应用：替代公式

VACLAV SKALA 计算机科学与工程系 西波希米亚大学 Univerzitni 8, CZ 30614 比尔森 捷克共和国 http://www.VaclavSkala.eu

摘要：- 求交算法对于计算几何问题非常重要。直线与线性曲面或二次曲面的求交算法效率较高。然而，直线与其他曲面的求交算法则更为复杂，耗时也更长。在这种情况下，通常会用一个简单的包围体包住物体，以便在给定直线无法与给定物体相交时加快处理速度。

本文给出了直线-环面求交问题的新公式，并提出了环面的包围体的新定义。所提出的方法基于直线与旋转球面的包络面求交这一思想，而旋转球面的包络面构成了环面。基于这一方法，可以构造出新的包围体，其效率更高，因为它还能检测直线穿过环面“孔洞”的情况。

关键词：直线裁剪；直线与环面相交；计算机辅助设计系统

1 引言

求交算法在所有几何问题和计算机辅助设计与制造系统中都发挥着重要作用。线性情形的求交算法已有详尽记载，例如直线-平面或直线-三角形等；对于某些特定的非线性曲面，如直线与球体相交等，也已有相应算法。然而，双三次参数曲面片、环面等其他对象的情况则有所不同。此时，计算交点会更加复杂，通常需要使用复杂公式或迭代公式。

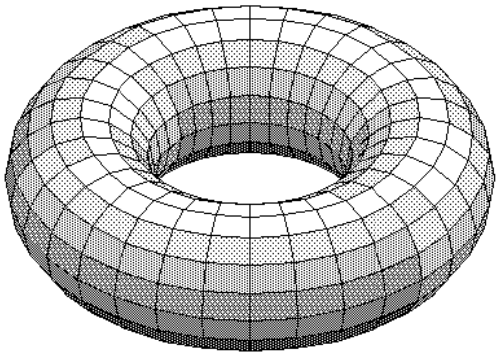

图 1：环面（图片来源：维基百科）

直线与闭合曲面的交点问题，可以视为一种广为人知的裁剪问题的推广。直线或光线与曲面的交点问题，是所有光线追踪技术都要解决的关键问题。由于计算复杂，通常会使用包围体来检测直线是否不可能与给定物体相交。

本文介绍直线与环面相交问题 [1] [2], 原则上会得到一个四次方程[3] ，并展示直线与环面求交问题的其他可能表述，这些表述为该问题提供了截然不同的形式。这些重新表述引出了一个新问题：由参数闭曲面的包络（凸或非凸）进行广义直线裁剪。

2 直线与环面相交

直线与环面相交，实际上就是求 E 中一条直线的解[3] ，通常以如下参数形式给出：

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{s}\,t \qquad \boldsymbol{s} = [s_x, s_y, s_z]^T \tag{1}$$

以及一个环面，它通常是4th 阶曲面，可以表示为：

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2) \tag{2}$$

一种替代公式

$$\left(R - \sqrt{x^2 + z^2}\right)^2 + y^2 = r^2 \tag{3}$$

请注意，轴是旋转轴。环面方程可以重新表述为

$$(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \xi)^2 = 4R\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = [x, y, z]^T \tag{4}$$

其中

$$\xi = R^2 - r^2 \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

由于后续会用到一些几何变换，我们也可以对给定的环面和直线进行缩放，使得 ，即环面被“归一化”。

现在，直线与环面的交点可表示为以下方程组的解:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{s}\,t \tag{6}$$

and

$$(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \xi)^2 = 4\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \tag{7}$$

将方程 5 代入方程 6，得到

$$\begin{gathered}[(\boldsymbol{s}t + \boldsymbol{x}_A)^T(\boldsymbol{s}t + \boldsymbol{x}_A) + \xi]^2 = \\ 4(\boldsymbol{s}t + \boldsymbol{x}_A)^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{s}t + \boldsymbol{x}_A)\end{gathered} \tag{8}$$

最后得到y g

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}\,t^2 + 2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_A\,t + \boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A + \xi]^2 \\ -4[\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{s}\,t^2 + 2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_A\,t \\ + \boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_A] = 0\end{gathered} \tag{9}$$

这个方程相当复杂，但经过详细推导，我们得到一个四次方程 g q q

$$at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0 \tag{10}$$

其中:

$$\begin{gathered}\alpha = \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} \qquad \beta = \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_A \\ \gamma = \boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A \qquad \delta = (\gamma + R^2 - r^2) \\ \sigma = (\gamma - R^2 - r^2)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}a = \alpha^2 \qquad b = 4\alpha\beta \\ c = 2\alpha(\gamma + R^2 - r^2) \\ -4R^2\left(s_x^2 + s_y^2\right) + 4\beta^2 \\ d = 8R^2 z_A s_z + 4\beta\sigma \\ e = \alpha^2 + (R^2 - r^2)^2 \\ +2\begin{bmatrix} s_x^2 s_y^2 + s_z^2(R^2 - r^2) \\ +\left(s_x^2 + s_y^2\right)\left(s_z^2 - R^2 - r^2\right)\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{11}$$

可以看出，当r时，计算可以简化，即直线的方向向量已归一化，或者方程除以。

这意味着我们得到一个四次方程，形式为 [4]

$$t^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0 \tag{12}$$

which can be simplified by substitution

$$t = x - \frac{b}{4} \tag{13}$$

to

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{14}$$

其中

$$\begin{gathered}p = \frac{3}{8}b^2 + c \\ q = \frac{1}{8}b^3 - \frac{1}{2}bc + d \\ r = -\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{16}b^2c - \frac{1}{14}bd + e\end{gathered} \tag{15}$$

因此，原方程的解由方程 12 给出。要得到一个解，必须求解以下三次方程

$$\xi^3 - \frac{p}{2}\xi^2 - r\xi + \frac{4rp - q^2}{8} = 0 \tag{16}$$

然后，可以根据上述方程的实数解，通过以下两个二次方程计算这些值:

If $q \geq 0$ then

$$\begin{gathered}x^2 + x\sqrt{2\xi - p} + \xi - \sqrt{\xi^2 - r} = 0 \\ x^2 - x\sqrt{2\xi - p} + \xi + \sqrt{\xi^2 - r} = 0\end{gathered} \tag{17}$$

如果 t erh

$$\begin{gathered}x^2 + x\sqrt{2\xi - p} + \xi + \sqrt{\xi^2 - r} = 0 \\ x^2 - x\sqrt{2\xi - p} + \xi - \sqrt{\xi^2 - r} = 0\end{gathered} \tag{18}$$

可以看出，解本身并不简单，但公式是封闭的。

相反，可以使用二分法或牛顿法等迭代方法。不过，直线与环面最多有 4 个交点，因此有必要找到相关区间，使每个区间内只有一个交点。

2.1 环面的另一种表示

环面还有其他表示形式，如下所示，但这些形式并不适用于我们的目的。

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2 \tag{19}$$

或参数形式为

$$\begin{gathered}x(\varphi, \vartheta) = (R + r\cos\vartheta)\cos\varphi \\ y(\varphi, \vartheta) = (R + r\cos\vartheta)\sin\varphi \\ z(\varphi, \vartheta) = r\,\sin\vartheta\end{gathered} \tag{20}$$

可以看出，求解直线与环面的交点并非易事，它会引出一个非平凡的计算问题。

然而，还有其他一些几何等价表述可用于求解。下文我们将只考虑圆环面。

2.2 几何变换

点的几何变换是在射影空间中使用齐次坐标定义的，也就是说，是在欧几里得空间的射影扩张中定义的。欧几里得坐标中的一个点具有齐次坐标r; 是齐次坐标。射影空间与欧几里得空间之间的转换定义为

$$X = \frac{x}{w} \qquad y = \frac{x}{w} \qquad w \neq 0 \tag{21}$$

p

这意味着射影表示实际上是一个单参数集合。欧几里得空间 E^2 中的一个点表示为一条直线，

该直线在射影空间中不包含坐标系的原点。旋转、平移、镜像等作用于点的几何变换，可以通过如下矩阵来描述：

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \tag{22}$$

请注意，[m], 可能具有某种物理意义和单位，而则没有单位，它只是一个“缩放因子”。这就是我们在向量表示法中使用“:”来分隔各个值的原因。

在 E^2 中，由齐次坐标给出的两个点所确定的直线，可以通过叉积计算得出，如 5、6 所示。

p [ ] [ ]

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{p} = [a, b: c]^T$$

$$p:\ ax + by + cw = 0$$

E^2 中两条直线 1 和 2 的交点可以计算为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{x} = [x, y: w]^T$$

我们可以看到, b在hE^2 的情况下，计算是“对偶”的，即直线与点互为对偶 [7]。在 E^3 的情况下，点与平面互为对偶。可以证明，由三个点确定的平面可通过扩展叉积计算得出：

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{l} \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\rho} = [a, b, c: d]^T$$

b d

同样，三个平面的交点可以计算为，详情请参见 [7], [8], [9]

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{l} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{x} = [x, y, z: w]^T$$

这种方法简单易行，便于实现，也适合在图形处理器上实现。

然而，在 E^2 情况下，点的矩阵变换不能用于对直线进行几何变换；在 E^3 情况下，也不能用于对平面进行几何变换。可以证明 [6] ，如果一条直线由两个点 1 和 2 定义，并且使用该矩阵对这些点进行几何变换，即

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 \tag{27}$$

and

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{x}_1' \times \boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_2 \tag{28}$$

then

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2) \tag{29}$$

It can be shown that the matrix $\boldsymbol{Q}$ is defined as

$$\boldsymbol{Q} = det(\boldsymbol{T})\ (\boldsymbol{T}^{-1})^T \tag{30}$$

由于，是隐式方程的系数，我们可以直接写成

$$\boldsymbol{p}' = det(\boldsymbol{T})(\boldsymbol{T}^{-1})^T(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2) \tag{31}$$

由于采用隐式形式，直线的系数可以乘以任意非零常数，而直线保持不变。因此

$$\boldsymbol{p}' \triangleq (\boldsymbol{T}^{-1})^T(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2) \tag{32}$$

其中表示保护每个等式。l类似地，对于平面

$$\boldsymbol{\rho}' \triangleq (\boldsymbol{T}^{-1})^T(\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_3) \tag{33}$$

这意味着我们可以用直线正确地操作以及平面，现在。

2.3 包围体

假设环面位于该平面内，即 -轴是其旋转轴。[1], 中定义的包围体基于这样一个想法：环面由一个球体与两个半空间的交集所包围，见图2。

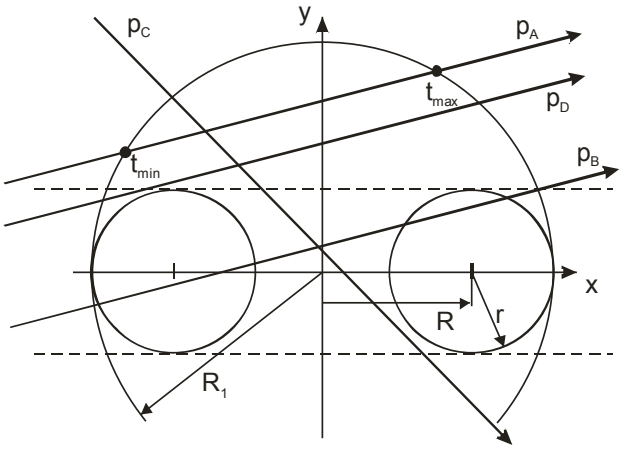

图2：包围体

包围球体的半径为

$$R_1 = R + r \tag{34}$$

包围体测试计算直线与球体的交点。如果交点 *mi* 和 *min* 存在，那么在以下条件成立时，直线不会与环面相交 [1]

$$\begin{gathered} y_{min} = y_A + s_y t_{min} \\ y_{max} = y_A + s_y t_{max} \\ (y_{min} > r\ \boldsymbol{and}\ y_{max} > r)\ \boldsymbol{or} \\ (y_{min} < r\ \boldsymbol{and}\ y_{max} < r) \end{gathered} \tag{35}$$

可以看出，该测试并未排除直线出现以下情况：

- 穿过环面的“孔内部”，但没有触碰或与环面—直线*C*
- 几乎触碰到环面—直线*D*—但仍有小概率

需要注意的是，图2展示了 E^3 情形下的一般情况。

2.4 环面变换

到目前为止，我们讨论的都是环面处于基本位置的一般情况，也就是说，环面位于平面内，且轴为旋转轴。在环面处于一般位置的情况下，可以使用以下变换：

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{u} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{n} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} & 0 & 0 \\ -c_x & -c_y & -c_z & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

其中： 定义环面的轴， 定义环面的轴，用于构造正交基，而环面中心为。

可以看出，直线-环面求交问题具有一些有趣的性质，例如：

• 环面旋转对称性，• 如果使用镜像操作，只需考虑一个象限即可求解交点问题。

接下来，我们将探讨这些性质能否简化计算。

2.5 交点分类

由于环面具有旋转不变性，我们可以绕轴旋转给定的直线，使其位于平面c中，即位于与该平面平行的平面中。由于变换矩阵会与矩阵累积，因此不会产生显著的计算开销。现在，我们可以根据c值区分三种本质上不同的情况：

a) c：通常需要考虑由两个独立部分产生的交点，即对于和，由于凸性，每个部分最多只能产生 2 个交点（会生成 2 个凸包络）；b) c：这种情况更复杂，因为包络只有一个部分，但它并非凸形，因为它可能有一个拐点，并可产生 3 个交点；c)：这是最简单的情况，因为只会生成一个凸包络。

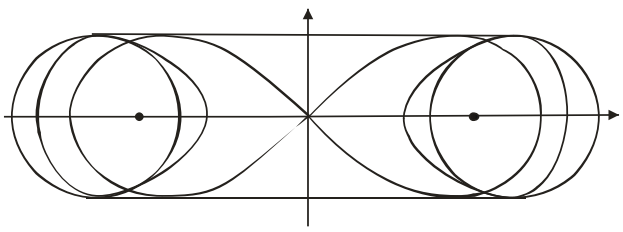

图3：环面与平面的交点，

上述三种情况差异显著。遗憾的是，并非所有情况下包络都是凸形。

2.6 韦达定理

假设是一个次数为的多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{37}$$

那么，根据韦达定理，根满足以下等式

q

$$\begin{gathered} x_1 + x_1 + \cdots + x_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + \\ (x_2x_3 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + \\ x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{gathered} \tag{38}$$

在二次方程的情况下

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{39}$$

我们得到

$$t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} \qquad t_1 t_2 = \frac{c}{a} \tag{40}$$

这些公式并不广为人知，稍后将会用到。下面我们将展示针对直线与环面交点问题的不同处理方法。

3 个新的相交公式

在上一部分中，我们介绍了直线与环面的相交检测与计算的“传统”方法。现在，在下面的部分中，我们将给出不同的等价公式，这些公式可能有助于实现更简单、更快速的解决方案。它们可以简要分类如下：

• 一个球体绕轴旋转（其包络形成一个环面），并直接计算其与 E^3 中直线的交点；• 一个球体固定在轴上，并直接计算其与绕轴旋转的直线的交点（即实际上是球体与双圆锥的交点）在 E^3 中；• 一个球体绕轴旋转，并与包含给定直线的平面 c 相交，在 E^3，中得到该平面内的圆，即在 E^2，中形成包络，也就是说，将曲线表示为环面与平面的交线。在 E^2 中计算所有圆的包络与直线的交点。

这实际上是一个广义直线裁剪问题。

现在让我们更详细地探讨第一种可能的表述。

3.1 球体旋转——E^3 中的交点

让我们考虑这样一种情况：环面和直线处于相同的相对位置，但通过上述几何变换，环面处于其基本位置，也就是平面内。

环面可以表示为所有半径为、绕平面内半径为的轴旋转的球体的并集。这意味着，环面可以定义为所有绕轴旋转的球体的并集，即包络，如下所示：

$$\bigcup (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s(\varphi))^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s(\varphi))-r^2 = 0 \qquad \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{s}\,t \tag{41}$$

其中：，[

现在，直线与环面的交点问题转化为广义直线裁剪问题：用构成环面的所有旋转球体的包络裁剪一条直线，即

$$\mathrm{T}=\bigcup_{\varphi\in<0,2\pi)} \mathrm{K}(\varphi,R,r) \tag{42}$$

其中和是给定的环面常数。

由于环面关于该轴具有旋转对称性，可以将环面和直线绕该轴旋转，使直线位于一个与该平面平行的平面内。

现在，给定的直线定义为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{s}\,t \tag{43}$$

直线上的一个点A及其方向向量定义为

$$\boldsymbol{x}_A=[x_A,y_A,z_C]^T \quad \boldsymbol{s}=[s_x,s_y,0]^T \tag{44}$$

其中：c A 由于直线位于与该平面平行的平面上，即c。

实际上，当直线被参数包络裁剪时，直线-环面求交问题会转化为 E^2 中的广义直线裁剪问题。

在 E^3 的情况下，直线定义为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{s}\,t \tag{45}$$

此处的 s以及

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s(\varphi))^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s(\varphi))-r^2=0 \tag{46}$$

代入后我们得到

$$[\boldsymbol{s}t+\boldsymbol{\xi}(\varphi)]^T[\boldsymbol{s}t+\boldsymbol{\xi}(\varphi)]-r^2=0 \qquad \boldsymbol{\xi}(\varphi)=\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s(\varphi) \tag{47}$$

i.e.

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}\,t^2+2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi)t+\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)-r^2=0 \tag{48}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi)&=\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_s(\varphi)\\&=[s_x,s_y,0]\{[x_A,y_A,z_C]^T\\&\quad-R[cos\varphi,0,sin\varphi]^T\}\\&=s_xx_A+s_yy_A-Rs_xcos\varphi\end{aligned} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)=\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A-2\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_s(\varphi)+\boldsymbol{x}_s^T(\varphi)\boldsymbol{x}_s(\varphi) \tag{50}$$

其中：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_s^T(\varphi)\boldsymbol{x}_s(\varphi)\\&=R^2[cos\varphi,0,sin\varphi][cos\varphi,0,sin\varphi]^T\\&=R^2(cos^2\varphi+sin^2\varphi)=R^2\end{aligned} \tag{51}$$

and

$$\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A=x_A^2+y_A^2+z_C^2 \tag{52}$$

and

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_s(\varphi)\\&=R[x_A,y_A,z_C][cos\varphi,0,sin\varphi]^T\\&=R(x_Acos\varphi+z_Csin\varphi)\end{aligned} \tag{53}$$

因此

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)=\\&x_A^2+y_A^2+z_C^2-2R(x_Acos\varphi\\&\quad+z_Csin\varphi)+R^2\end{aligned} \tag{54}$$

二次方程现在为 i i

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}\,t^2+2(s_xx_A+s_yy_A\\&\quad-s_xRcos\varphi)t\\&+x_A^2+y_A^2+z_C^2\\&-2R(x_Acos\varphi+z_Csin\varphi)+R^2\\&\quad-r^2=0\end{aligned} \tag{55}$$

对于归一化方向向量，即，分别T，我们得到如下由参数化的二次方程

$$at^2+bt+c=0 \qquad a=1 \qquad b=2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi) \qquad c=\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)-r^2 \tag{56}$$

i.e.

$$t^2+2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi)t+\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)-r^2=0 \tag{57}$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}(\varphi)=\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s(\varphi)=\begin{bmatrix}x_A\\y_A\\z_C\end{bmatrix}-R\begin{bmatrix}cos\varphi\\0\\sin\varphi\end{bmatrix} \tag{58}$$

and

$$\boldsymbol{s}=[s_x,s_y,0]^T \tag{59}$$

使用韦达定理，可得到以下等价方程

$$t_1+t_2=-\frac{b}{a}=-2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi) \qquad t_1t_2=\frac{c}{a}=\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)-r^2$$

若将二次方程视为关于 的二次函数，则极值$extre$为

$$t_{extrem}(\varphi)=\frac{t_1+t_2}{2}=-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi)= \tag{60}$$

$$-[s_x, s_y, 0]^T \left(\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_C \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} cos\varphi \\ 0 \\ sin\varphi \end{bmatrix} \right) = s_x(Rcos\varphi - x_A)$$

当且仅当$extrem$时，点$extrem$位于包络内部；见图4。将其代入函数

$$t^2 + 2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi)t + \boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi) - r^2 = 0 \quad (61)$$

我们得到

$$(-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi))^2 + \left(-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi).2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi)\right) + \boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi) - r^2 = 0 \quad (62)$$

i.e.

$$-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi) + \boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi) - r^2 = 0 \quad (63)$$

代入 ngi

$$\boldsymbol{s} = [s_x, s_y, 0]^T \quad \boldsymbol{\xi}(\varphi) = \boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_s(\varphi) \quad (64)$$

这将得到：

$$\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi) - (\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\xi}(\varphi))^2 = r^2 \quad (65)$$

因此

$$\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{s}^T \otimes \boldsymbol{s}]\boldsymbol{\xi}(\varphi) = 0 \quad (66)$$

其中 是一个单位矩阵，另一个是生成矩阵的张量积。

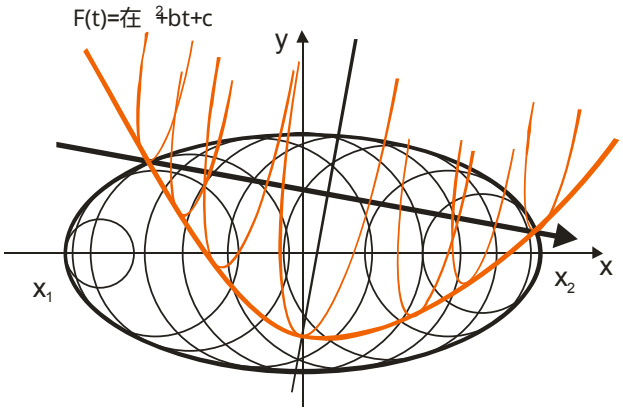

图4：旋转球面与平面的交点及其包络

正如我们刚才在二次方程中所设定的，我们可以写成

$$t_1(\varphi)t_2(\varphi) = c(\varphi) \quad (67)$$

其中 1和 2 是直线与球面交点对应的直线参数值。

第二个韦达[2] 方程可用于确定 φ 的区间，使迭代求解器只得到一个根。

在分类讨论的情况下：

- ad a) 我们可以使用镜像操作，只需分别针对非镜像和镜像情况，在一个象限中求解交点两次，因为可能会有两个交点元组，
- ad b) 情况比较复杂，因为包络有一个拐点，所以一个象限中可能有三个交点
- ad c) 此情况与前一种情况类似，但最多只会出现两个交点

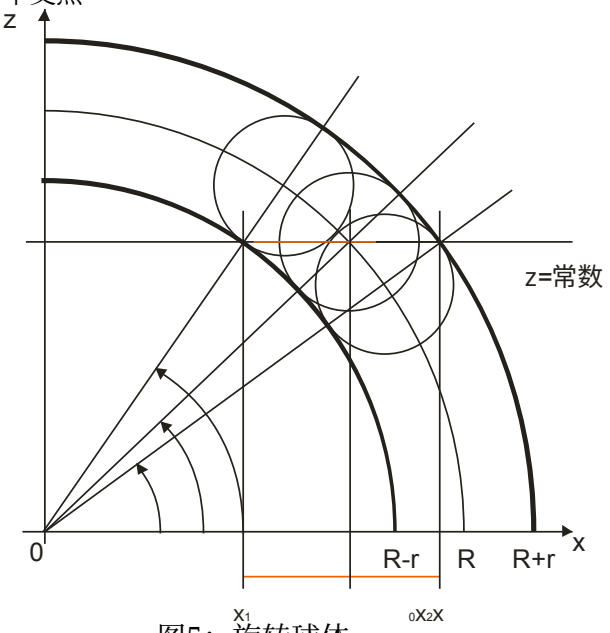

图5：旋转球体

然而，交集计算仍然过于复杂。

3.2 直线旋转——E^3 中的交点

另一种替代方法是将球体固定在轴上的某个位置，并使给定直线通常在 E^3 中绕轴旋转。从某种意义上说，这种方法实际上与前一种方法互为“对偶”，并得到由球体与双圆锥相交形成的包络。

有两种可能的等价表述：球体的圆心位于轴上，旋转直线在 E^3 中处于一般位置；或者进行几何变换，使旋转直线绕轴旋转，且双圆锥的顶点位于坐标系的原点；球体的圆心位于平面上，即向上移动。

A line in E^3 is defined as

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{s}\,t \quad \boldsymbol{s} = [s_x, s_y, 0]^T \quad (68)$$

并且，轴上的球体定义为

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s)^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s) - r^2 = 0 \quad \boldsymbol{x}_s = [R, 0, 0]^T \quad (69)$$

当直线绕 y 轴旋转时，旋转矩阵可表示为

$$\boldsymbol{R}(\varphi)=\begin{bmatrix} cos\varphi & 0 & -sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{bmatrix} \tag{70}$$

然后，在 E^3 中形成双圆锥的旋转直线可表示为

$$\boldsymbol{x}(t,\varphi)=\boldsymbol{R}(\varphi)(\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{s}\,t) \\ \boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{s}\,t \tag{71}$$

代入后得到

$$(\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{s}\,t-\boldsymbol{x}_s)^T \\ (\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{s}\,t-\boldsymbol{x}_s)-r^2=0 \tag{72}$$

or

$$(\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{s}\,t+\boldsymbol{\xi})^T(\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{s}\,t+\boldsymbol{\xi})-r^2 \\ =0 \\ \boldsymbol{\xi}(\varphi)=\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s \tag{73}$$

这意味着再次得到一个二次方程，即

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\,\boldsymbol{R}(\varphi)\,\boldsymbol{s}t^2 \\ +2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\,\boldsymbol{\xi}(\varphi)+\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi) \\ =0 \tag{74}$$

由于矩阵是正交归一的，即$_T$ ，且方向向量可以归一化，即$_T$，因此我们得到了显著的简化

$$t^2+2\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)t \\ +\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)=0 \tag{75}$$

让我们更详细地探讨这个二次方程的系数。

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi) \\ =\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)(\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s) \\ =\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{x}_s \tag{76}$$

As $\boldsymbol{R}^T(\varphi)\,\boldsymbol{R}(\varphi)\,=\boldsymbol{I}$ we get

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)= \\ \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{x}_s \tag{77}$$

U叉积的反对称性让我们得到 g

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)= \\ \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_s \tag{78}$$

现在还可以进一步简化，因为$\boldsymbol{s}\ _T$，并且

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_s \\ =[s_x,s_y,0][x_A,y_A,z_A]^T \\ -[R,0,0]\begin{bmatrix} cos\varphi & 0 & -sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{79}$$

现在，方程的最后一项

$$\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)= \\ [\,\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s]^T[\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s] \\ =\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A \\ -2\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{x}_s+\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s \tag{80}$$

As $\boldsymbol{R}^T(\varphi)\,\boldsymbol{R}(\varphi)\,=\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)= \\ =\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{R}^T(\varphi)\boldsymbol{x}_s+\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s \\ =\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s \tag{81}$$

U根据叉积对称性，我们得到

$$\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)= \\ \boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A-2\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s \tag{82}$$

同样，还可以进一步简化，因为$_T$，并且

$\boldsymbol{s}\quad[\ ,\ ,\ ]\qquad[\ x,\ y,\ ]$

$$\boldsymbol{\xi}^T(\varphi)\boldsymbol{\xi}(\varphi)= \\ \boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A-2\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s \\ =\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A \\ -2[R,0,0]\begin{bmatrix} cos\varphi & 0 & -sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi & 0 & cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \\ +R^2 \\ =\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A-2R\,(x_Acos\varphi-z_Asin\varphi) \\ +R^2 \tag{83}$$

普蒂ng all together we get

$$t^2+2(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}_A-\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_s)t \\ -2\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{R}(\varphi)\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A+\boldsymbol{x}_S^T\boldsymbol{x}_s=0 \tag{84}$$

i.e.

$$t^2+\big(s_xx_A+s_yy_A-R^2cos\varphi\big)t+\boldsymbol{x}_A^T\boldsymbol{x}_A \\ -2R(x_Acos\varphi \\ -z_Asin\varphi)+R^2=0 \tag{85}$$

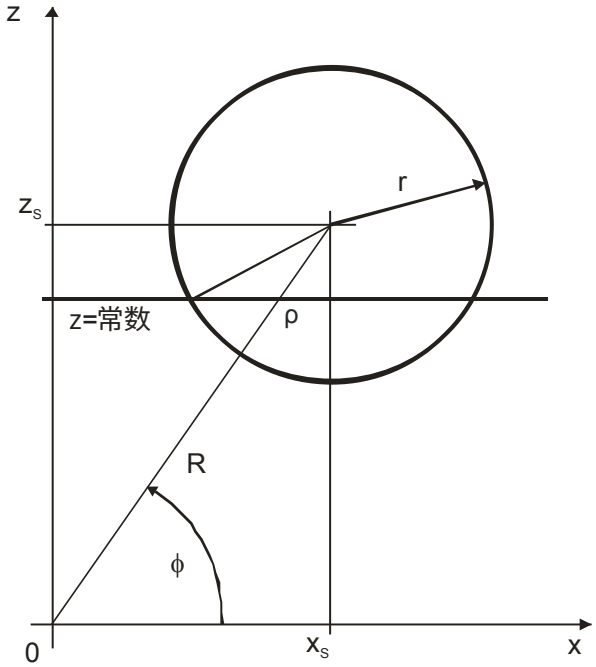

图 6：交平面与旋转球面

3.3 与平面相交——E^2 中的解

在这一部分，我们将重点讨论球体绕轴旋转并与一个平面相交的情况；给定的直线位于该平面上，并且与该平面平行。

由于给定直线位于一个与旋转球面相交的平面平行的平面内，因此旋转球面与该平面相交，形成圆，如图5和图6所示。

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s)^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s)-\varrho^2=0 \tag{86}$$

我们来考虑直线的表达式。

$$\begin{gathered}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s(\varphi)\right)^T\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s(\varphi)\right)-r^2=0\\ \boldsymbol{x}_s(\varphi)=R[cos\varphi,0,sin\varphi]^T\end{gathered} \tag{87}$$

球体绕轴旋转的描述为，即。

$$\begin{gathered}[x-x_s(\varphi),y,z-z_s(\varphi)]^T\\ [x-x_s(\varphi),y,z-z_s(\varphi)]\ -r^2=0\end{gathered} \tag{88}$$

给定直线所在的平面定义为 c。那么

$$\begin{gathered}(x-x_s)^2+y^2+(z-z_s)^2-r^2\\ =x^2-2xRcos(\varphi)+\ R^2cos^2(\varphi)\\ +y^2\\ +z_c^2-2z_cRsin(\varphi)+R^2sin^2(\varphi)\\ -r^2=0\end{gathered} \tag{89}$$

As $os^2(\varphi)+sin^2(\varphi)=1$ we get

$$\begin{gathered}(x-x_s)^2+y^2+(z-z_s)^2-r^2\\ =x^2+y^2-2R(xcos(\varphi)\\ +z_csin(\varphi))\\ +z_c^2+R^2-r^2=0\end{gathered} \tag{90}$$

由于给定直线定义为

$$\begin{gathered}x(t)=x_A+s_xt\\ y(t)=y_A+s_yt\end{gathered} \tag{91}$$

我们得到

$$\begin{gathered}x_A^2+2x_As_xt+s_x^2t^2+\\ y_A^2+2y_As_yt+s_y^2t^2\\ -2R((x_A+s_xt)cos(\varphi)+z_csin(\varphi))\\ +z_c^2+R^2-r^2=0\end{gathered} \tag{92}$$

即，二次方程具有如下形式

$$\begin{gathered}\left(s_x^2+s_y^2\right)t^2\\ +2[(x_A-Rcos(\varphi))s_x+y_As_y]t\\ -2R(x_Acos(\varphi)+z_csin(\varphi))\\ +x_A^2+y_A^2+z_c^2+R^2-r^2=0\end{gathered} \tag{93}$$

对于归一化方向向量，即，分别为T，我们得到一个参数化的二次方程，如下所示

$$\begin{gathered}t^2+bt+c=0\\ b=2[(x_A-Rcos(\varphi))s_x+y_As_y]\\ c=-2R(x_Acos(\varphi)+z_csin(\varphi))\\ +x_A^2+y_A^2+z_c^2+R^2-r^2\end{gathered} \tag{94}$$

3.4 混合方法

设环面再次表示为绕轴旋转的球体所形成的包络面。球体与包含给定直线的平面c相交，并在平面中形成圆，该平面与该平面平行。这些圆在该平面上由如下方程描述

由于所有圆都位于平面 c 上，因此方程可以简化为

$$(x-x_s)^2+y^2-\varrho^2=0 \tag{95}$$

其中

$$x_s=Rcos\varphi\ \ y_s=0\ \ z_s=Rsin\varphi \tag{96}$$

请注意，s表示球体绕轴旋转，所得圆位于 c 平面上。圆的半径为

$$\begin{gathered}\varrho^2=r^2-(z_s-z_c)^2=\\ r^2-(Rsin\varphi-z_c)^2\end{gathered} \tag{97}$$

平面与环面交线的包络表示为

$$\begin{gathered}\bigcup_{\varphi\in<\varphi_1,\varphi_2>}\{(x-Rcos\varphi)^2+y^2-r^2\\ +(Rsin\varphi-z_c)^2=0\}\end{gathered} \tag{98}$$

考虑这种情况，其中 c ，图7。

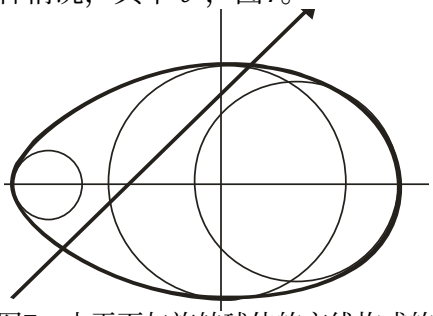

图7：由平面与旋转球体的交线构成的并集所形成的包络

角度的确定方法如下

$$\begin{gathered}\cos(\varphi_1)=(R-r)^2-{z_c}^2\\ \cos(\varphi_2)=(R+r)^2-{z_c}^2\\ \cos(\varphi_0)=R^2-{z_c}^2\end{gathered} \tag{99}$$

当第一个对包络有贡献的圆出现时，角度$_1$为相应角度；最后一个对包络有贡献的圆对应角度$_2$，而包络内部最大圆对应角度$_0$。

给定直线位于c平面内，其定义如下

$$\begin{gathered}x(t)=x_A+s_xt\\ y(t)=y_A+s_yt\end{gathered} \tag{100}$$

可以对该直线重新参数化，使得$_A$，然后将圆定义为:

$$\begin{gathered}x(x_A+s_xt-Rcos\varphi)^2+s_y^2t^2\\ -r^2+(Rsin\varphi-z_c)^2=0\end{gathered} \tag{101}$$

现在，问题实际上已转化为 E^2 中的问题。

3.5 新包围体

“标准”包围体 [1] 基于 E^3 中的一个球体以及两个半空间的交点，如图2所示。由于直线位于平面中，对于 c，我们可以区分以下基本情况：

- 对于 a) 情况，我们可以使用镜像操作，只需在一个象限内分别针对未镜像和镜像的情况求解交点，因为可能存在两个交点元组；
- 对于 b) 情况，由于包络存在一个拐点，情况较为复杂，因此一个象限内可能有三个交点；
- 对于 c) 情况，与前一种情况类似，但可能只出现两个交点。

然而，如果需要计算许多直线与环面的交点，例如在光线追踪渲染技术中，就需要更精确的包围体来提高计算效率。“标准”包围体适用于 b) 情况。另一方面，可以看出

- 对于 a) 情况，即直线穿过环面，也就是穿过一个“孔”而不与环面相交的情况，必须进行详细计算，这会带来很高的计算开销。
- 对于 c) 情况，即直线与环面的“外侧部分”相交的情况，也就是说，c两个平面之间的距离可能小于 。

我们来探讨第一种情况，因为它能带来更高的效率。

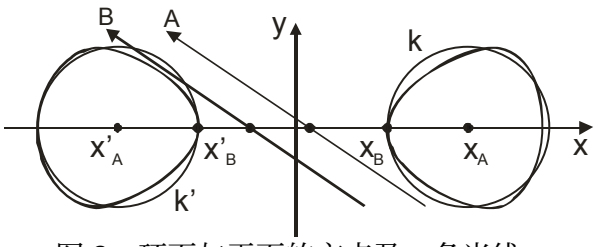

图 8：环面与平面的交点及一条光线

图 8 展示了 c 的平面与环面的交点。可以看到，这里有一个圆（因为我们处于 E^2 中），其圆心位于 A，其半径与关于轴镜像的圆共同构成边界曲面。该圆的 A 圆心定义如下：

$$x_B = (R-r)cos\varphi$$
$$x_A = x_B + r = (R-r)cos\varphi + r \quad (102)$$

其中

$$sin\varphi = \frac{z_c}{R} \quad (103)$$

or

$$x_B = \sqrt{(R-r)^2 - z_c^2}$$
$$x_A = x_B + r = r + \sqrt{(R-r)^2 - z_c^2} \quad (104)$$

可以看出，在c的情况下，由于完全没有“孔”，因此得到一种特殊情况，见图 9

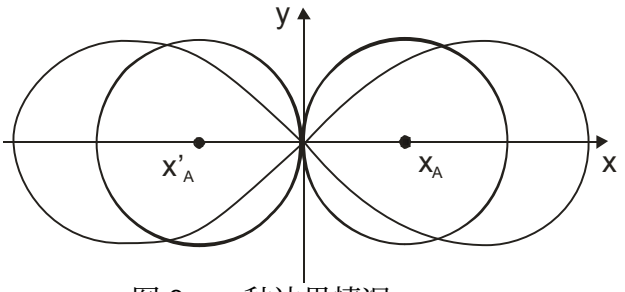

图 9：一种边界情况

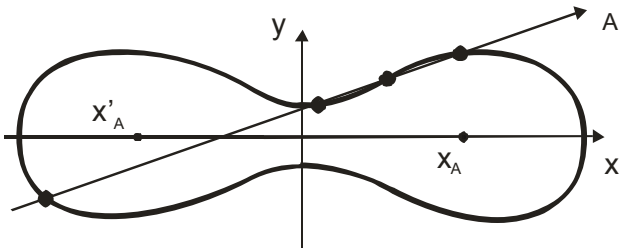

图 10：c 的直线与环面的交点，即情况 ad b)

情况 ad a) 的测试可表述为：如果直线与

轴位于区间 B' B 内，且不与圆相交，因此该直线不与给定的环面相交。图6展示了两条直线：在情况 A 中，不对该直线与环面进行交集计算；而在情况 B 中，必须进行详细的相交测试/计算。

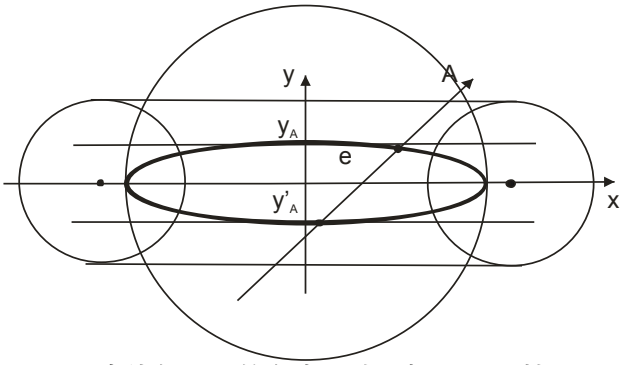

图11：直线与环面的交点及边界框 c ，即情况 ad c)

ad b) 测试仍与原始测试相同，如图10所示，因为存在一个拐点，所以一个象限内最多可能出现 3 个交点。

在情况 ad c) 中，即 c ，可能只有 2 个交点，见图 11。可以看出，由 A 和 A 的值给出的两个平面之间的距离现在小于原始距离。可以看出，新距离为

$$d^2 = r^2 - (z_c - r)^2 \qquad (105)$$

4 结论

本文提出了求解直线-环面求交问题的新型替代表述。遗憾的是，所有提出的替代表述都未能导出更简洁的计算公式。看来，直线与环面求交的隐式形式效率最高。环面坐标系仍有一种可用的可能性；然而，其计算开销过高。

基于新的几何等价表述，我们提出并描述了一种用于直线与环面求交的新型包围体，实际上是 E^2， 中的圆。

新型包围体显著提高了直线与环面的交集计算效率，因为它还能检测直线或光线穿过环面“孔洞”的情况。新型环面包围测试的效率随比率而提高。

致谢

作者谨向俄斯特拉发技术大学和西波希米亚大学的同事与学生致谢，感谢他们提出批评意见、建议和见解。作者也感谢匿名审稿人所作的修订并提出的意见。

本研究由捷克共和国教育部项目 No.LH12181、LG13047 资助。

参考文献:

[1] Cychosz,J.M.: 《与椭圆环面相交的光线》，Graphics Gems II（编者: James Arvo），第 251 256, 1991 -
[2] *Academic Press*, Hazewinkel,M.（编者）: 韦达定理, 《数学百科全书》, *Springer*, 2001
[3] Herbison-Evans,D.: 《用于图形学的四次与三次方程求解》，Graphics Gems，第 1-15 页，*Academic Press*, 1995
[4] Lengyel,E.: Mathematics for 3D Game Programming and Co mputer Graphics, *CourseTechnology*，第 147 148, 2012 页– Skala，V.: 齐次
[5] 坐标下直线和线段裁剪的新方法，*The Visual Computer*，ISSN 0178-2789，第21卷，第11期，第905–914页，施普林格出版社，2005[6] Skala，V.: 齐次坐标下的长度、面积和体积计算，*International Journal of Image and Graphics*，第6卷 4678，2006 4，第625 639页，0219。，第[7] 期，第–页，ISSN – Skala，V.: 齐次坐标下的重心坐标计算，*Computers & Graphics*，爱思唯尔，ISSN 0097-8493，第32卷，第 1， 120 127, 2008 期，第–页 Skala，V: 借
[8] 助图形处理器支持在射影空间中的对偶性与交集计算，*WSEAS* 数学汇刊，ISSN 1109-2769，第 9， 6， 407 416, 2010 卷，第期，第–页。
[9] Skala，V.: 工程中的几何、对偶性与鲁棒计算，*WSEAS* 计算机汇刊，第11卷，第9期，ISSN 1109-2742，第275–291页，2012