arXiv:2301.03199v1 [physics.flu-dyn] 9 Jan 2023

采用非结构高阶方法进行壁面模型大涡模拟的网格自适应

Marcel Blind[a,*], Ali Berk Kahraman[b], Johan Larsson[b], Andrea Beck[a,c]

[a]斯图加特大学空气动力学与气体动力学研究所，*Pfaffenwaldring 21*，斯图加特，*70569*，德国

[b]马里兰大学机械工程系，大学公园市，*20742*，马里兰州，美国

[c]马格德堡奥托·冯·格里克大学流体动力学与热力学研究所，*Universitätsplatz 2*，马格德堡，*39106*，德国

摘要

大涡模拟的精度和计算成本高度依赖于计算网格。在大多数实际应用中，依据先验知识手动构建最优网格并不可行；相比之下，解自适应策略能够稳健且经济高效地生成满足精度要求的网格。我们将 Toosi 和 Larsson [1] 提出的网格自适应算法应用于间断伽辽金谱元法（DGSEM），并展示了该方法在完全非结构网格上的潜力。该方法的核心是利用 DGSEM 中采用的多项式基函数计算估计的建模残差，并对各单元上的估计残差进行平均。我们在多个通道流测试案例以及翼型跨声速流动案例中评估了最终方法；这两类案例均采用了带有悬挂节点的单元之间的 Mortar 界面。结果表明，该方法稳健可靠；与采用人工生成网格相比，在精度相当的情况下，其计算成本最高可降低 50%。

关键词：高阶方法、壁面模型大涡模拟、非协调网格、网格误差指示器

*通讯作者电子邮箱：blind@iag.uni-stuttgart.de（Marcel Blind）

预印本已提交至 *arXiv* *2023*年*1*月*10*日

1. 引言

随着大涡模拟（LES）技术日益受到工程界的关注，该方法面临的未解研究问题也在发生变化。过去，研究重点大多放在亚格子尺度应力模型以及低耗散数值方法的开发上；如今，大涡模拟方法中的其他问题则需要得到更多关注。其中首要的问题是如何设计出优质网格，尤其是针对更复杂的几何形状。网格生成过程仍主要依赖用户经验，近乎一门艺术；用户需要将对数值计算的理解以及流动物理的分辨率要求纳入判断。这甚至会导致不同用户针对同一几何形状生成不同网格，并得到不同结果。创建客观上优质的网格，对于实现高效、节省资源的模拟以及提高解的可靠性至关重要。本研究的最终目标是提供一套工作流程，从一个在生成时不含任何问题特定信息的极粗初始网格出发，生成适用于非结构化高阶方法、针对具体问题定制的网格。

迄今为止，人们已尝试提出多种方法来量化大涡模拟的分辨率。早期的观点基于亚格子耗散与黏性耗散之比，或亚格子黏度与分子黏度之比（例如 [2, 3]），但这些概念仅对壁面湍流的缓冲层有意义，因为大涡模拟应适用于任意雷诺数下的自由剪切流。另一些研究者提出，应通过建模的湍动能与已解析（或总）湍动能之比来衡量大涡模拟中网格是否足够精细（参见 [4, 5]），但研究发现，这一比值与壁面流动中已知的长度尺度行为相关性较差 [1]。近似局部湍流谱的方法对各向同性流动有一定依据，但在更具实际意义的情形下则不适用 [6]。迄今为止，理论依据最充分的方法是 Toosi 和 Larsson 提出的方法 [1]，可将其视为对大涡模拟建模残差的估计，即误差输运方程中的源项 [7]。

本研究旨在将 [1,7] 的残差估计扩展到高阶代码，并测试由此得到的网格自适应方法在高阶求解器中生成高效网格（以较低成本实现高精度）的能力。本文采用间断伽辽金（DG）方法。在 DG 类代码中的实现与有限差分或

有限体积代码（此前已在其中测试过残差估计）有所不同，具体包括低通滤波的实施方式、对混叠误差的敏感性，以及如何对结果进行局部平均，使其适用于网格自适应。我们主要在若干通道流中评估该方法，这些流动中的大涡模拟行为相对已知，因此可以判断所得网格是否最优。最后，我们将该方法应用于翼型周围的跨声速流动，以验证其对更真实、更复杂问题的适用性。

2. 方法

任何网格自适应方法都必须首先估计误差生成过程（即残差，或解误差的源项）的空间分布。随后，方法会生成一个新网格，以尽可能减小残差场。本文主要关注第一步，具体而言，是如何在针对主要由六面体单元构成的网格的间断伽辽金谱元法（DGSEM）代码中计算估计残差场。

*2.1. DGSEM*代码 *FLEXI*

模拟采用间断伽辽金谱元法（DGSEM）框架 FLEXI 运行。该代码由斯图加特大学数值研究组开发 [8]。它是开源软件，可从 http://www.flexi-project.org/ 下载。DGSEM [8, 9, 10] 在每个单元内使用分段光滑函数，但允许函数在单元界面处不连续。不过，只要能够指定单元局部滤波操作，残差估计流程（第 2.2 节）及后续的网格自适应就可以通过最小改动移植到任何其他 DG 或相关格式。因此，下面给出的实现细节旨在阐明这一特定 DG 变体所采用的流程。

计算域 Ω 被划分为互不重叠的单元$C \in \Omega$。每个单元中的解由次数为 P 的多项式基描述。我们在每个三维单元中使用同一多项式基函数作为试探函数，对可压缩纳维–斯托克斯方程进行离散。各方向上的多项式采用节点一维

拉格朗日基函数表示，这些基函数定义在 $P+1$ 勒让德-高斯-洛巴托点上。也可以选择其他节点；此处我们采用这些节点，以便构造对流算子的所谓分裂形式。为了应用常用的积分规则并构建高效格式，我们定义三维六面体参考单元 $[-1,1]^3$。我们将三个一维多项式作张量积，构造三维基函数。我们使用相应的 $P+1$ 勒让德-高斯-洛巴托求积对纳维–斯托克斯方程进行空间积分，以计算投影积分。由此得到非常高效的间断伽辽金谱元法。在单元边界处，我们使用黎曼求解器，例如 [11]。为计入抛物项，我们采用 BR1提升过程 [12] 。根据线法，我们使用具有优化稳定域 [13] 的显式低存储龙格–库塔方法推进所得常微分方程。

为了保证稳定性，我们对可压缩纳维-斯托克斯方程的对流项采用反对称分裂 [14], ，因为隐式滤波大涡模拟通常是欠分辨的。为构造无耗散且动能保持的半离散系统，我们采用 Pirozzoli 提出的反对称分裂通量 [15]。在单元界面处，使用 Roe数值通量求解黎曼问题 [16]。在接下来的模拟中，我们采用 Vreman模型进行显式亚格子尺度建模 [17]。

2.2. 估计大涡模拟残差

考虑一个一般的演化方程 $\partial q/\partial t = R(q)$，在间距为 Δ的网格上进行数值求解，其解可表示为

$$\mathcal{N}_\Delta(q_\Delta) \equiv R_\Delta(q_\Delta) - \frac{\partial q_\Delta}{\partial t} = 0\,, \tag{1}$$

其中， R_Δ 表示 R 是在网格间距为 Δ 时的近似值，而 q_Δ 表示该网格间距下离散问题的解。因此，该方程中的误差为 $q_\Delta - q$，它满足误差方程

$$\frac{\partial \mathcal{N}_\Delta}{\partial q}\,(q_\Delta - q) \approx \underbrace{\mathcal{N}_\Delta(q_\Delta)}_{=0} - \underbrace{\mathcal{N}_\Delta(q)}_{\mathcal{F}}\,,$$

其中， $\mathcal{F}$ 是残差，也就是误差的源项。残差基于精确解 q 定义，而精确解当然是未知的。因此，所有网格自适应方法都涉及某种估算

数值解 q_Δ中残差的过程，例如，利用数值算子的泰勒展开中的主导项，或通过将 q_Δ 插值到加密网格上，直接近似q 。这两种方法都不适用于大涡模拟（LES），因为大涡模拟按定义旨在求解粗粒化的纳维-斯托克斯方程。虽然可以将解q_Δ 插值到更细的网格上，但实际上，由于湍流具有宽频带特性，更细网格上的解应当会形成更小尺度的结构；因此，所得的残差估计将是不正确的。出于同样的原因，大涡模拟解按定义是远离数值收敛渐近区间的粗糙解，这意味着泰勒展开中的许多项都可能很大，因此无法像数值分析中的传统做法那样，仅凭主导项来近似误差行为。

Toosi 和 Larsson [1, 7] 提出，可以在后处理步骤中通过低通测试滤波来估算大涡模拟中的建模残差（即因小尺度湍流分辨率不足或建模不完善所导致的残差，不包括数值误差所致的残差）。具体而言，他们认为，必须在一个假想的、比实际大涡模拟所用分辨率 Δ 更粗的分辨率 Δ 下估算残差。他们的论证如下：假设分辨率为 Δ 时的大涡模拟方程（即代码中求解的大涡模拟方程）可写为式（1）。那么，测试滤波后（或进一步粗粒化后）尺度上的残差为 $\mathcal{N}_{\widehat{\Delta}}(\widehat{q})$，其中 $\widehat{q}$ 是限制到（或经测试滤波至）分辨率 Δ后的精确$\widehat{\ }$解。注意，不能直接用 q 定义残差，因为其中会包含更小尺度，而大涡模拟中可能采用的亚格子模型会导致这些尺度被重复计算。随后，Toosi 和 Larsson [1, 7] 提出，可用$\widehat{q_\Delta}$近似 $\widehat{q}$，并据此将近似建模残差定义为

$$\mathcal{F}_{\widehat{\Delta}} = \mathcal{N}_{\widehat{\Delta}}\left(\widehat{q_\Delta}\right) = R_{\widehat{\Delta}}\left(\widehat{q_\Delta}\right) - \frac{\partial \widehat{q_\Delta}}{\partial t}\,.$$

假设测试滤波器与时间导数可交换，并使用方程（1），则可得

$$\mathcal{F}_{\widehat{\Delta}} = R_{\widehat{\Delta}}\left(\widehat{q_\Delta}\right) - \widehat{R}_\Delta(q_\Delta)\,. \tag{2}$$

对于不存在激波或其他多物理效应（热释放、多相等）的亚声速流动，动量方程的建模残差

则变为

$$\mathcal{F}_{i,\widehat{\Delta}} = \frac{\widehat{\partial}}{\partial x_j}\left[\rho u_i u_j + p\delta_{ij} + \tau_{ij}^{\mathrm{mod}}(\rho, u_i, \Delta) - \sigma_{ij}\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\widehat{\rho u_i}\widehat{u_j} + \widehat{p}\delta_{ij} + \tau_{ij}^{\mathrm{mod}}(\widehat{\rho}, \widehat{u}_i, \widehat{\Delta}) - \widehat{\sigma_{ij}}\right], \tag{3}$$

其中，测试滤波后的速度应理解为经过 Favre加权滤波器处理的速度。

上述所有运算均基于瞬时流场定义，因此估算得到的建模残差 $\mathcal{F}_{i,\ \widehat{\Delta}}$ 必然是一个在时空中均呈混沌特征的场。假设目标是获得一个固定网格（即先进行一次完整的大涡模拟，再自适应调整网格，然后进行另一次完整的大涡模拟），则必须对残差场进行时间约化（并可能沿空间均匀方向进行约化）。虽然没有理论依据要求采用某种特定的约化方式，但 Toosi 和 Larsson [1, 7] 建议使用 L2范数。此外，他们认为测试滤波器应采用单向滤波器，每次沿一个方向进行滤波。对于六面体单元，这意味着应计算 3 个不同的残差场（分别沿六面体单元的 3 个方向进行测试滤波），从而分别获得各个方向上的分辨率不足信息，进而实现各向异性网格自适应。

综合以上内容，最终的时间平均建模残差可写为

$$G(\vec{x}, \vec{n}) = \sqrt{\langle \mathcal{F}_i(\vec{x}, \vec{n}) \mathcal{F}_i(\vec{x}, \vec{n}) \rangle}\,, \tag{4}$$

其中，$\vec{x}$ 表示空间位置，$\vec{n}$ 表示单向测试滤波器的方向；尖括号表示对时间、空间均匀方向以及可能还包括局部空间（下文将讨论）进行平均。

我们强调，残差（3）中的亚格子模型贡献必须使用正确的长度尺度来计算：对$\widehat{\ }$测试滤波场进行评估时，必须使用假想的 Δ 分辨率所对应的长度尺度。必须根据测试滤波器的属性估算这一长度尺度。

对于未采用显式亚格子模型的隐式大涡模拟，残差估计中的亚格子模型项直接取零。

2.3. 在 *DGSEM* 代码中计算大涡模拟建模残差

在间断伽辽金谱元法（DGSEM）中实现上述大涡模拟残差估计器时，需要格外谨慎，并注意一些具体的实现细节，本节将对此进行说明。

低通测试滤波算子 $\widehat{\cdot}$ 通过单向模态截断滤波器实现，该滤波器仅移除一个方向上多项式表示的最高模态。在本研究中，我们在每个方向上均使用 5^{th} 阶多项式表示解，从而得到精度为 6^{th} 阶的格式；其中，P 表示多项式阶数。我们通过将 4^{th} 阶和 5^{th} 阶多项式的系数设为零来进行低通滤波。重要的是，此操作仅在一个方向上进行，其他方向上的高阶多项式系数保持不变。间断伽辽金谱元法的一大优点是，一个单元中的滤波与所有其他单元相互独立，因此在非结构网格（由六面体单元构成）上同样适用。

大涡模拟残差 $\mathcal{F}_{\widehat{\Delta}}$ 既可通过通用的式 (2) 计算，也可通过更具流动针对性的式 (3) 计算。前一种方法最方便且易于实现，因为大多数代码（尤其是采用显式时间推进的代码）都包含针对给定解场计算 R_{Δ} 的函数。给定瞬时大涡模拟场 q_{Δ} 后，只需在代码中进行一次函数调用，即可轻松计算 $R_{\Delta}(q_{\Delta})$。随后，对所得场进行三次低通测试滤波，分别对应每个六面体单元的三个自然方向，从而得到式 (2) 第二部分的三种不同实例。

在一个单独的过程中，对 LES 解本身进行测试滤波，以形成 $\widehat{q_{\Delta}}$。在本研究中，我们将测试滤波器应用于守恒变量，这意味着滤波速度采用Favre加权。随后，将经过测试滤波的 LES 解用于计算 $R_{\widehat{\Delta}}(\widehat{q_{\Delta}})$，以完成方程 (2)。这最后一步需要格外谨慎，因为 LES 代码中的函数会（针对给定的网格和多项式阶数）计算 $R_{\Delta}(\widehat{q_{\Delta}})$，而非正确的 $R_{\widehat{\Delta}}(\widehat{q_{\Delta}})$。如果我们只关注 LES建模残差，而非数值误差（如 Toosi 和 Larsson [1, 7] 中的情况），那么唯一需要做的修改，就是确保亚格子模型中的长度尺度能够反映粗粒化状态。本研究采用了这一方案。原则上，在计算 $R_{\widehat{\Delta}}(\widehat{q_{\Delta}})$ 时也可以使用较低的多项式阶数，以便近似计入数值误差，但这留待未来研究。

本研究的模拟采用 Vreman亚格子模型 [17] ，但使用了修改形式，其中长度尺度取为

$$\Delta = \frac{\mathcal{V}^{1/3}}{P+1},$$

其中， $\mathcal{V}$ 为单元体积， P 为多项式阶数，在本研究中取值为 $P = 5$。由于我们使用的单向滤波器保留了最高至 M 阶的模态（在本研究中取值为 $M = 3$ ），测试滤波后的相容长度尺度为

$$\widehat{\Delta} = \left(\frac{P+1}{M+1}\right)^{1/3} \Delta\,.$$

由于 FLEXI 代码中实现的模型采用各向同性长度尺度，这意味着测试滤波尺度下的涡黏度仅为 $[(P+1)/(M+1)]^{2/3} \approx 1.59$ 倍于代码计算的涡黏度。

公式 (4) 中的范数运算可能比较棘手，因为解以多项式形式表示，并定义在适当数量的配置点上；但范数运算中包含的平方算子需要更高阶的多项式，因此也需要更多配置点。我们采用的方法是将原始 P 阶多项式中的 $\mathcal{F}_{\widehat{\Delta}}$ 映射到 $2P$ 阶多项式及其对应的配置点上，然后在该阶数下对多项式求平方。这样，我们就得到了项 $\mathcal{F}_i(\vec{x},\vec{n})\mathcal{F}_i(\vec{x},\vec{n})$ 的精确表示。

计算中还出现了另一个问题，即单元边缘。由于 DG 解在单元边界处不连续，且局部投影往往会在这些边界处产生较大的梯度，因此在欠分辨设置下，单元边界处的局部梯度可能会过冲。这样一来，残差估计器基本上会将单元边界标记为高误差区域；但这实际上是一种数值效应，不属于其目标范围——其目标是找出湍流建模中的高误差区域。为缓解这一问题，并忠实于间断伽辽金方法以网格单元为基础的特性，我们在进行周期方向或时间平均之前，先对整个网格单元内的 $\mathcal{F}_i(\vec{x},\vec{n})\mathcal{F}_i(\vec{x},\vec{n})$ 项进行平均。迄今为止使用的 $\langle\rangle$ 平均算子也包含了这一平均操作。

2.4. 寻找最优网格间距

计算出各个方向上用于测试滤波的残差估计值后，即可通过一个优化问题以及对网格加密时残差变化方式的假设，求得各个方向上的最优单元尺寸。

按照 Toosi 和 Larsson 的做法 [1], ，方向残差 $G(\vec{x},\ \vec{n})$假设按以下方式变化

$$G(\vec{x},\vec{n}) = g(\vec{x},\vec{n})\,\Delta(\vec{x},\vec{n})^{\alpha}\,. \tag{5}$$

在渐近收敛极限下，幂次 α 即为数值方法的精度阶。在大涡模拟中，按定义其远未达到渐近收敛极限，因此幂次 α 与网格截断附近湍流的谱行为有关。由于惯性区湍流的谱斜率会随流动类型和方向而变化，显然，理论上 α 也应以类似方式变化。更重要的是， α 的取值完全取决于湍流物理，而非数值分析。我们不去试图找出“正确”的 α 场，而是遵循 Toosi 和 Larsson 的建议 [18]，假设整个流动区域内的 $\alpha = 2$ 均为常数。这一取值几乎肯定在大多数流动情形下都大于“正确”值；取值偏大可降低最优网格间距的变化幅度，在实践中可能更有利。根据这一残差缩放模型，可通过对当前网格上估计的残差逐个方向代入公式（5）进行计算，得到“残差密度” $g(\vec{x},\ \vec{n})$。

随后，我们定义代价泛函

$$\mathcal{J}[\Delta(\vec{x},\vec{n})] = \iiint_{V} \left[\left(\sum_{m} g(\vec{x},\vec{n}_m)^{\beta} \Delta(\vec{x},\vec{n}_m)^{\beta\alpha} \right)^{1/\beta} + \frac{\lambda}{\prod_{m} \Delta(\vec{x},\vec{n}_m)} \right] dV$$

其中，第一项表示所有方向上的残差之和的β范数（注意，所有因子均为正），第二项表示新网格的计算复杂度（此处定义为单元数量）， λ 为拉格朗日乘子。这个特定变分法问题的解是：对于每个六面体方向 $i = 1$, 2，3，被积函数关于 $\Delta(\vec{x},\ \vec{n}_i)$场的变分均为零。

使用简写符号 $\Delta_i = \Delta(\vec{x},\ \vec{n}_i)$ 和 $g_i = g(\vec{x},\ \vec{n}_i)$，可得

$$\alpha g_i^{\beta} \Delta_{i,\mathrm{opt}}^{\beta\alpha-1} \left(\sum_m g_m^{\beta} \Delta_{m,\mathrm{opt}}^{\beta\alpha} \right)^{1/\beta-1} - \frac{\lambda}{\Delta_{i,\mathrm{opt}} \prod_m \Delta_{m,\mathrm{opt}}} = 0\ ,\quad i = 1,2,3\,,$$

其中，下标“opt”表示这是使代价泛函 $\mathcal{J}$ 最小的 $\Delta(\vec{x},\ \vec{n})$ 场。重新整理可得

$$\left(g_i \Delta_{i,\mathrm{opt}}^{\alpha}\right)^{\beta} = \frac{\lambda/\alpha}{\prod_m \Delta_{m,\mathrm{opt}}} \left(\sum_m g_m^{\beta} \Delta_{m,\mathrm{opt}}^{\beta\alpha} \right)^{1-1/\beta}\ ,\quad i = 1,2,3\,.$$

这对所有 $i = 1$，2、3 均成立，但右端项对所有 i 都相同；因此，最优残差 $G_{i,\ \mathrm{opt}} = g_{i,\ \mathrm{opt}} \Delta_{i,\ \mathrm{opt}}^{\alpha}$ 在三个方向上均相同。由此可以进一步得到

$$g_{i,\mathrm{opt}} \Delta_{i,\mathrm{opt}}^{\alpha} \underbrace{\prod_m \Delta_{m,\mathrm{opt}}}_{\mathcal{V}_{\mathrm{opt}}} = \Lambda\ ,\quad i = 1,2,3\,, \tag{6}$$

其中，Λ 是重新定义的拉格朗日乘子，$\mathcal{V}_{\mathrm{opt}}$ 是最优单元的体积；该方程表明，单元积分残差应在空间和方向上均匀分布。

然后，通过使用求根过程求出修正拉格朗日乘子 Λ 的值，使计算复杂度（= 单元数量）达到所需值，即可得到最优网格间距。在每一步中，均使用方程（6）求出最优 $\Delta(\vec{x},\ \vec{n})$ 场。该过程最初由 Toosi 和 Larsson [1] 记录，现为完整起见在此给出。

我们注意到，最终结果（方程 (6)）与 β 的取值无关，因此代价泛函中范数的选择无关紧要。

2.5. 整体流程

网格自适应过程完全采用后处理方法，在各次大涡模拟运行之间进行；运行期间不会实时进行自适应。模拟结束后，根据解的多个瞬时快照计算残差场，并在时间上以及可能适用的空间方向上进行平均

。随后，我们根据残差缩放模型计算残差“密度”场 $g(\vec{x},\ \vec{n})$，并利用迭代求根法求解拉格朗日乘子 Λ，以获得满足所需计算复杂度的最优网格间距场 $\Delta(\vec{x},\ \vec{n})$。接下来，我们有多种方法来实际生成自适应网格。一种方法是修改现有网格，最简单的做法是沿单元积分方向残差超过某个阈值的方向拆分各个单元。另一种方法是重新生成网格，使其更贴合最优目标。文献中主要针对单纯形单元采用了后一种方法 [19, 20]。由于本研究需要使用六面体单元网格，我们选择在网格生成过程中进行人工干预：手动构建网格，并尽可能使其贴合最优网格间距场。我们希望在未来的工作中实现这一环节的自动化。

需要指出的是，估算得到的残差并不能说明网格是否足够精细、是否已达到收敛；相反，必须针对具体的感兴趣量（例如平均剖面、阻力或升力系数等）判断是否收敛。用户必须先作出这一判断，然后再决定是否生成自适应网格。

3. 通道流的应用

在本节及下一节中，我们采用简写记法 $\Delta_i = \Delta(\vec{x},\ \vec{n}_i)$，其中 $\vec{n}_i$ 是六面体单元三个自然方向之一的单位向量。

首先，将该算法应用于平面湍流通道流这一典型测试案例。通道流的吸引力在于，它是极少数在一定程度上已知“最优”网格的问题之一；因此，检验网格自适应方法的一种好方式，就是观察它能否得到接近已知“最优”网格的结果。计算域取为 $(10h,\ 2h,\ 3h)$，其中 h 为通道半高。目标雷诺数为 $Re_\tau = 550$ 和 $Re_\tau = 2000$：较低者用于将自适应网格与 Toosi 和 Larsson [1] 的网格进行比较，较高者则用于测试在采用壁面模型以及在自适应网格中使用 Mortar 单元时的网格自适应过程。

3.1. $Re_\tau = 550$下的通道流：原始结果验证

本案例旨在重现 [1], 的原始结果，从而以这种方式证明间断伽辽金方法适用于网格自适应过程。我们从一个均匀网格开始：沿通道半宽方向有 2 个网格单元 h，沿流向有 10 个网格单元，沿展向有 3 个网格单元，每个网格单元均包含一个由 5^{th} 阶多项式构成的基函数。这与 [1] 采用的设置类似（不过稍微“精细”一些）；他们使用的网格间距为 $(0.2h,\ 0.1h,\ 0.2h)$。

每次迭代均按上述方法使用网格自适应算法，新网格的单元数量是前一网格的 4 倍。网格的构造方式使其沿壁面法向平滑拉伸，与近壁区 Δ_2 和中心线 Δ_2相吻合；同时，沿流向 x 和展向 z 采用均匀网格单元，其最小 Δ_1 和 Δ_3分别为建议值。壁面法向的拉伸通过钟形

$$DR(s) = 1 + \left(\frac{\Delta_{2,\min}}{\Delta_{2,\max}} - 2 \right) \cdot \frac{e^{-(s\cdot f)^2} - e^{-f^2}}{1 - e^{-f^2}} \tag{7}$$

单元分布实现，其形式为 $s \in [-1, 1]$。比值 $\Delta_{2,\min}/\Delta_{2,\max}$描述了 y 方向上最小单元与最大单元之间的差异，f 表示缩放因子，而结果 DR 定义了单元局部权重，随后将其归一化，以得到 $s \in [-1, 1]$中的单元尺寸分布。为确保与 Toosi 和 Larsson [1], 兼容，我们在大涡模拟闭合 [17] 中使用 Vreman亚格子尺度模型，模型常数同为 0.03。当自适应迭代之间的平均速度剖面和雷诺应力变化均不超过几个百分点时，网格自适应过程即告终止。

每次自适应迭代后得到的网格间距分布如图1所示，部分量列于表1中。图1中的阶梯状模式对应各个单元；请注意，残差是对每个单元取平均值，因此最优网格间距场也具有这种阶梯状特征。

所得网格间距序列与 Toosi 和 Larsson [1] 使用相同的整体算法和残差估计方法、但采用完全不同的代码（有限差分代码）所得的结果相似。表1表明

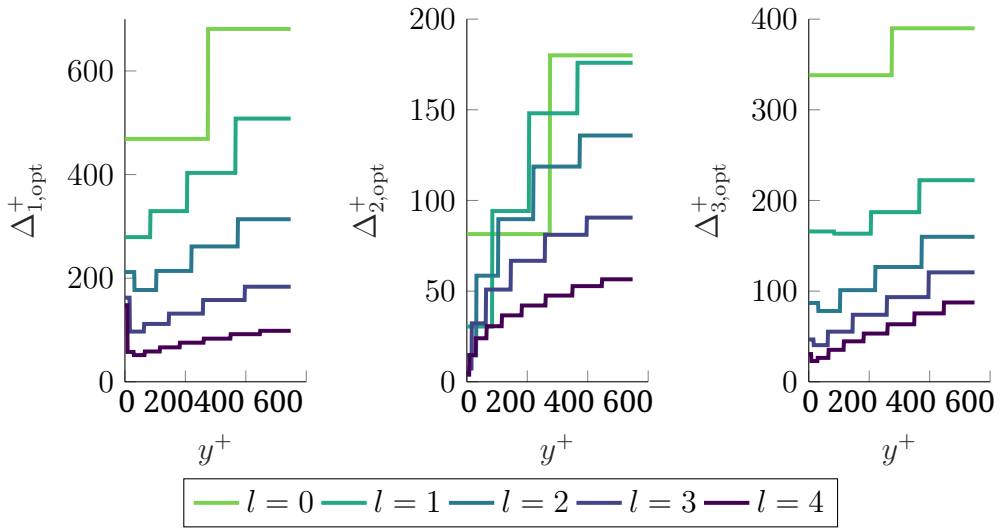


图1：自适应迭代 l 后通道的最优单元尺寸 $Re_\tau = 550$ 。

表1：不同自适应迭代次数l下的 $Re_\tau = 550$ 通道流算例关键属性。

迭代	N_i			$\Delta_i(y=h)/h$			$\Delta_i^+(y=0)/(P+1)$			单元数	#DOF	Re_τ
$l=0$	10	2	3	1.00	0.50	1.00	91.67	45.83	91.67	60	12960	178.50
$l=1$	12	4	5	0.83	0.25	0.60	76.39	13.93	55.00	240	51840	547.80
$l=2$	20	5	10	0.50	0.20	0.30	45.83	5.13	27.50	1000	216000	498.11
$l=3$	31	6	21	0.32	0.17	0.14	29.57	2.57	13.10	3906	843696	511.73
$l=4$	50	9	36	0.20	0.11	0.08	18.33	1.28	7.64	16200	3499200	556.57

经过第 $l = 4$ 次迭代后，我们的分辨率已足够；大涡模拟（LES）界认为 $\Delta(y = 0, \vec{n}_i)^+ \approx$(18，1，8) 是可接受的网格（尽管稍显精细）。计算得到的壁面剪切应力（此处以 Re_τ 表示）收敛至正确值。

图1中一个有趣的现象是，黏性底层沿 x 和 z 方向建议的网格间距比缓冲层中的更大。这实际上是正确的，因为黏性底层中的壁面平行长度尺度比缓冲层中的更大（例如，Jimenez [21]），而残差估计器能够正确反映这一点，令人颇感兴趣。

图2展示了以内尺度单位表示的平均速度剖面，可见其与 Lee 和 Moser[22] 在 $l = 4$ 处的直接数值模拟数据吻合良好，并逐渐收敛。图 3 所示的雷诺应力也表现出良好的收

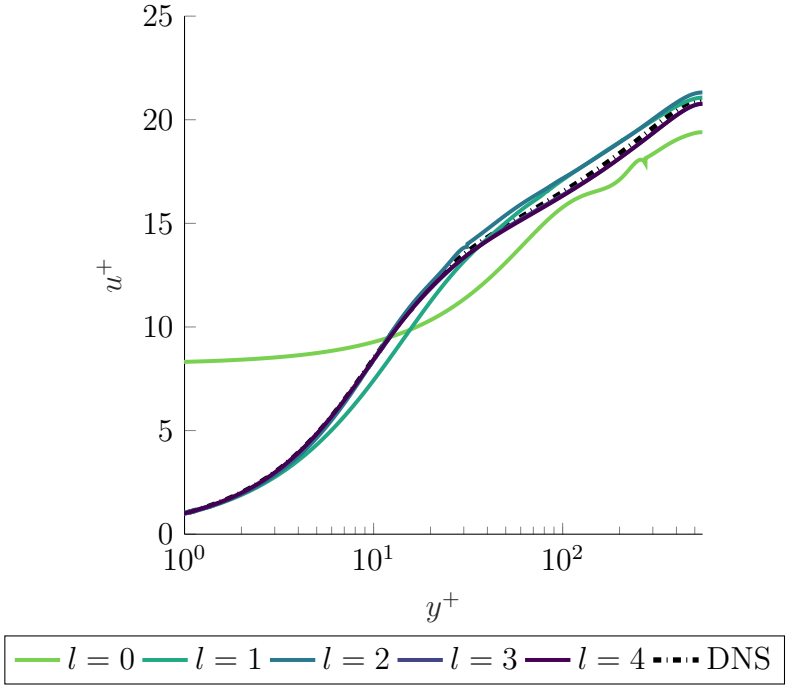


图 2： $Re_\tau = 550$ 通道在不同自适应迭代次数下的平均速度剖面l。

敛性，趋近于直接数值模拟数据。不过，与平均速度剖面不同，雷诺应力在 $l = 3$时就已经收敛。对于第一次迭代$l = 0$，可以看到不连续 Galerkin格式的非定常特征：当 $u'v'$时，单元边界清晰可见。此外，流场的分辨率严重不足；在这些情况下，我们还会观察到间断伽辽金格式在单元边界处典型的过冲现象，以及无法满足弱施加无滑移条件的情况。这两种现象都在预料之中，也是分辨率不足的明显迹象。然而，提高分辨率后，雷诺应力中的这些振荡会减弱，因此解会逐渐收敛至“平滑”的参考直接数值模拟解。该算例的总体结果表明，这种网格自适应算法适用于间断伽辽金框架，使我们能够进一步研究不同的构型和流动。

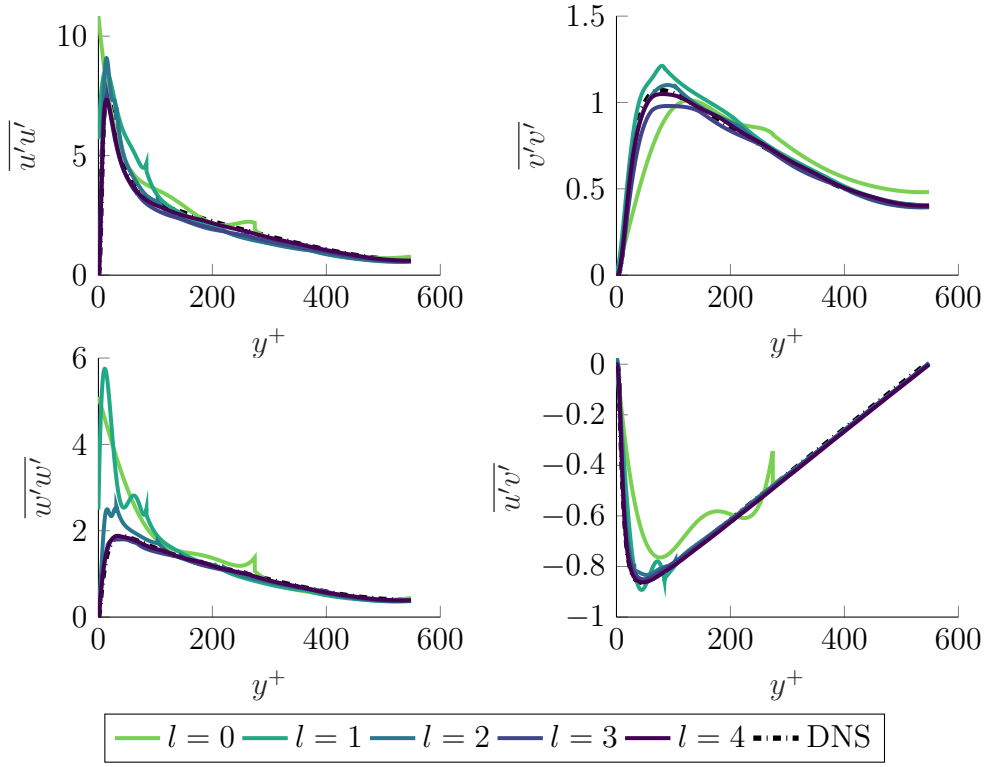


图 3：不同迭代次数 l 下 $Re_\tau = 550$ 通道的雷诺应力。

3.2. $Re_\tau = 2000$ 下的通道流：应用于包含 *Mortar* 单元的网格

接下来，我们测试不连续Galerkin方法结合基于 Mortar 单元的网格自适应处理完整非结构网格的能力。Mortar 单元是指其面与邻单元的面并非一一对应的单元；相反，一个单元的单个面可能对应多个邻单元。图4展示了这类网格的示意图，其中沿着 x （蓝绿色线）和 z （浅绿色线）方向设有网格接口。请注意，这些实际上是以 y 方向为法向量的平面，此处将其画成线条以使示意图更加清晰。对于长度尺度差异极大的流动，与完全结构化网格相比，这些单元的优势在于能够显著节省计算成本。当通道内最佳壁面平行网格间距发生大幅变化时，网格接口的优势便会显现。因此，我们提高雷诺数

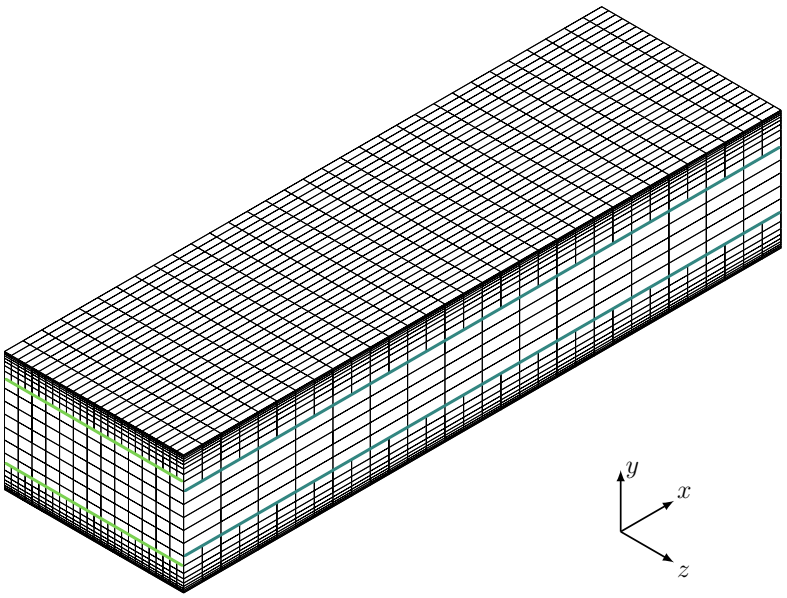


图4：带砂浆网格的一个示例，其中沿不同方向的网格接口以不同颜色标出： x 方向为蓝绿色，z 方向为浅绿色。

至 $Re_\tau = 2000$ ，以获得更大的长度尺度比。

图5展示了网格自适应优化问题 $\Delta_{\text{opt}}(\vec{x},\ \vec{n})$ 在每次自适应迭代后的结果。FLEXI 中的砂浆实现仅支持 2比1接口，因此我们按以下方式确定 Mortar 界面的位置。首先，找出某个方向上所需的最小单元间距（通常非常靠近壁面）。然后保持该单元间距，直到到达最优网格间距至少增大一倍的壁面距离；此时就在该壁面距离处插入一个 2比1砂浆接口，并继续进行。由此得到图6所示的实际网格间距分布。值得注意的是， x方向和 z 方向上的 Mortar 界面可能（事实上也确实）位于不同的壁面距离处。最后，网格沿 y方向的拉伸方式与 $Re_\tau = 550$情形相同。

对于 Re_τ =2000 测试案例，我们采用与前文 $Re_\tau = 550$ 案例相同的计算域尺寸和数值参数。建议的单元尺寸再次展示于图 5，生成的网格则见图 6。图中清楚表明，从 $l = 2$开始，我们可以在 x 和 z 中都使用 Mortar 界面，因为建议的网格间距开始

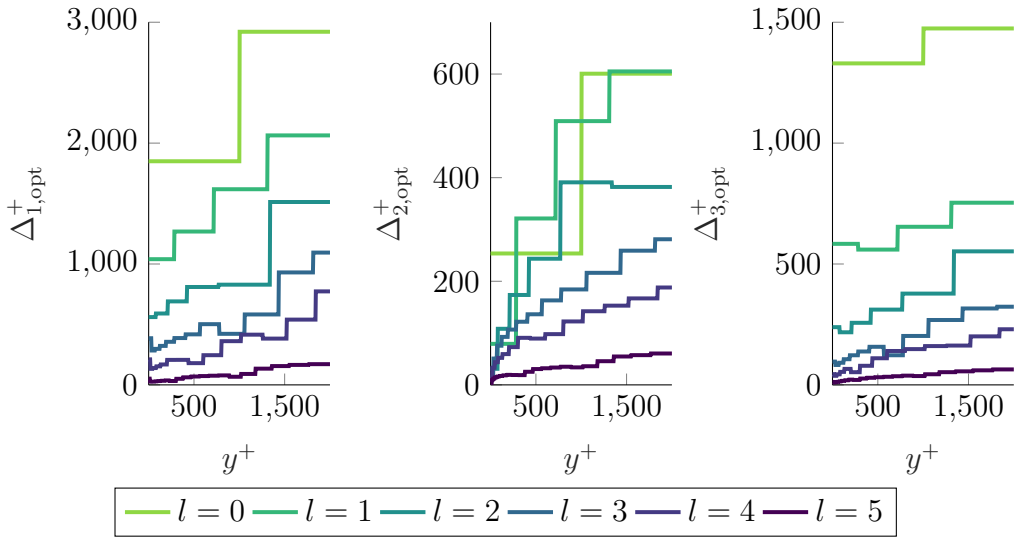


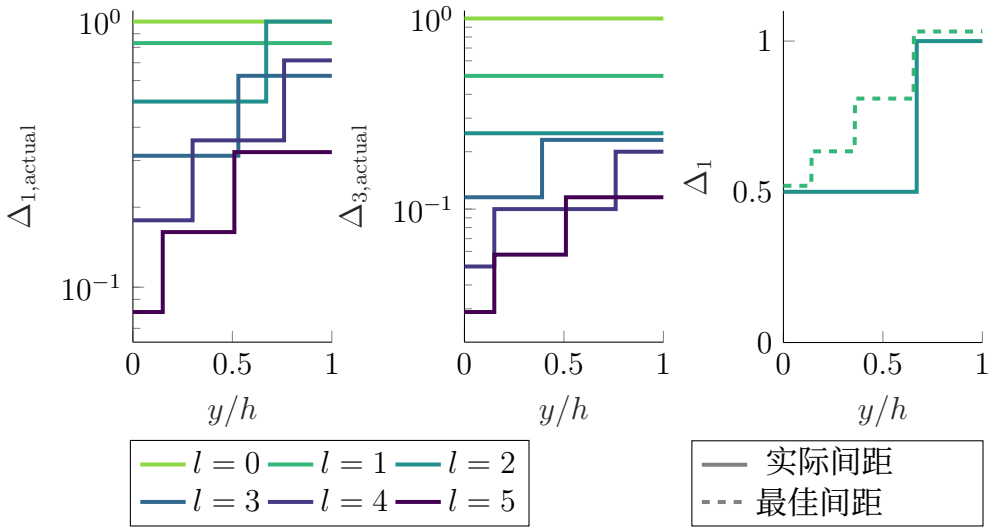
图5：根据 G 得出的 $Re_\tau = 2000$ 通道在不同迭代 l 下的最优网格间距。

表2：采用 Mortar 网格的 $Re_\tau = 2000$ 通道的单元数量。

迭代	N_1			N_2	N_3			Δ_1/h			$(\Delta_2/h)_{\min}$	Δ_3/h		
$l = 0$		10		2		3			1.00		0.50		1.00	
$l = 1$		12		4		6			0.83		0.25		0.50	
$l = 2$	20		10	4		12		0.50		1.00	0.17		0.25	
$l = 3$	32		16	11.5	26		13	0.31		0.63	0.09	0.12		0.23
$l = 4$	56	28	14	13.5	60	30	15	0.18	0.36	0.71	0.07	0.05	0.10	0.20
$l = 5$	124	62	31	21	104	52	26	0.08	0.16	0.32	0.05	0.03	0.06	0.12

增至该方向最小网格间距的两倍以上。对于 $l = 2$，x 和 z 中的界面位于相同的壁法向距离处。因此，生成的网格 $l = 3$ 将只包含一个 Mortar 界面。在 $l = 3$，这些位置发生偏移，不再重合，如图 4 所示。对于 $l = 4$，我们甚至会得到第二个 Mortar 界面，因此壁面平行方向上壁面单元与通道中心单元之间的最大长度比为四。$l = 3$ 的网格展示于图 4，其中显示了 z 和 x平面内不同的 Mortar 位置。

网格的详细信息，包括分辨率和已保存的单元数量，列于表 2 中。对于 N_i 和 Δ_i/h，我们列出了每次迭代中各个 Mortar 界面的相应数值。表 2 清楚地表明



(a) 通道中流向和展向砂浆单元的实际网格间距，以各自方向上最大的网格单元为基准进行无量纲化。(b) 以 $l = 1$ 为参考，对比 $l = 2$ 网格的实际网格间距与最佳网格间距。

图6：含砂浆单元的通道网格实际网格间距和最佳网格间距概览。

与具有相同无 Mortar 网格间距的结构化网格相比，在模拟中使用网格接口最多可节省约 50% 的单元。不过，这不会影响时间步长，因为时间步长由最小网格单元决定。但对于每个处理器承担相同负载的情况，可以相应减少模拟所需的处理器总数。看起来，迭代次数越多，节省的单元就越多，因为与通道中心的网格相比，壁面附近的网格每次都需要进一步细化。如果仅依据这一指标进行判断，该算例将在 $l = 5$ 时收敛至所需的 $Re_\tau = 2000$；使用网格接口可节省近 50% 的计算成本。

Ta表 3：含砂浆网格的 $Re_\tau = 2000$ 通道的网格间距和单元数量。

迭代	Δ_i^+ $(y=0)/(P+1)$			单元数		nDOF	Re_τ
				总计	已保存		
$l = 0$	333.33	166.67	333.33	60		12960	569.17
$l = 1$	277.78	46.67	166.67	288		62208	373.16
$l = 2$	166.67	12.67	83.33	1320	120	285120	1841.85
$l = 3$	104.17	4.67	38.46	7592	1976	1639872	1723.20
$l = 4$	59.52	2.67	16.67	27195	18165	5874120	1875.99
$l = 5$	26.88	2.00	9.62	142662	128154	30814992	1967.37

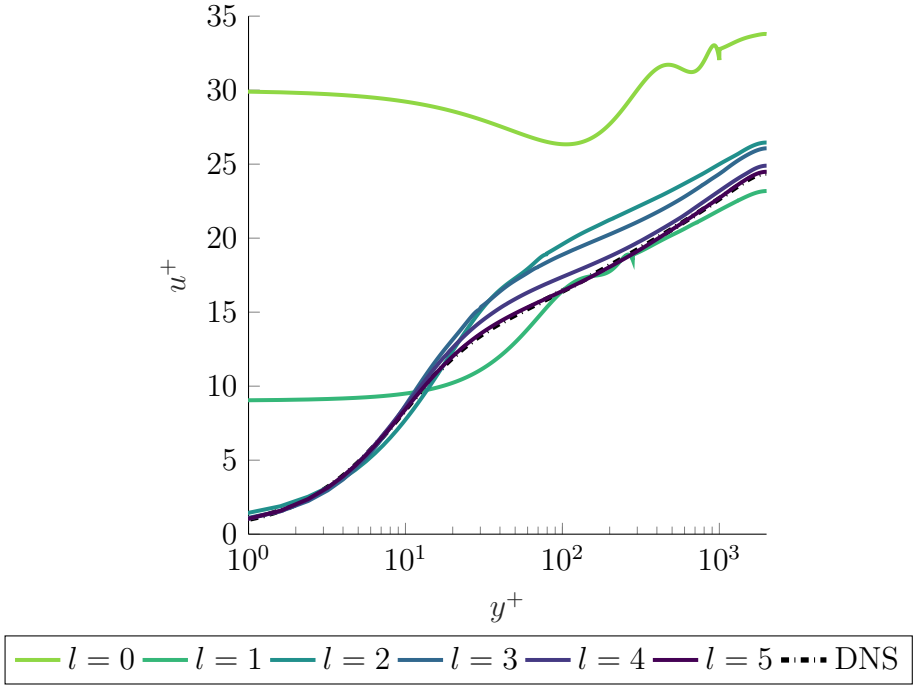


图7： $Re_\tau = 2000$ 通道在每次迭代 l时的平均速度剖面。

为了评估模拟的收敛性和质量，我们再次考察通道的平均速度剖面和雷诺应力剖面。与前一种情况一样，直接数值模拟数据见 Lee 和 Moser [22], 。图7中的平均速度呈现出预期的收敛趋势。与图2中的 $Re_\tau = 550$ 结果相比， $l = 0$的速度剖面向较高摩擦速度方向偏移得更多。这可以解释为： $Re_\tau = 2000$ 通道在采用相同初始网格 $l = 0$时欠分辨得更为严重，因此边界条件的弱实现无法为 τ_w提供良好的估计。在迭代 $l = [2, 3, 4, 5]$ 时，我们看到结果逐渐收敛至参考数据，其中 $l = 5$ 与直接数值模拟的速度剖面准确吻合。

雷诺应力的结果如图 8 所示。同样，对于网格自适应算法的最新迭代，我们的结果与参考解吻合良好。由于与前一种情况相比， Re 更高，因此除了 $l = 0$ 外， $l = 1$ 中前几次迭代出现的大幅振荡现在也更加明显。尽管 $w'w'$ 和 $u'v'$ 收敛良好，

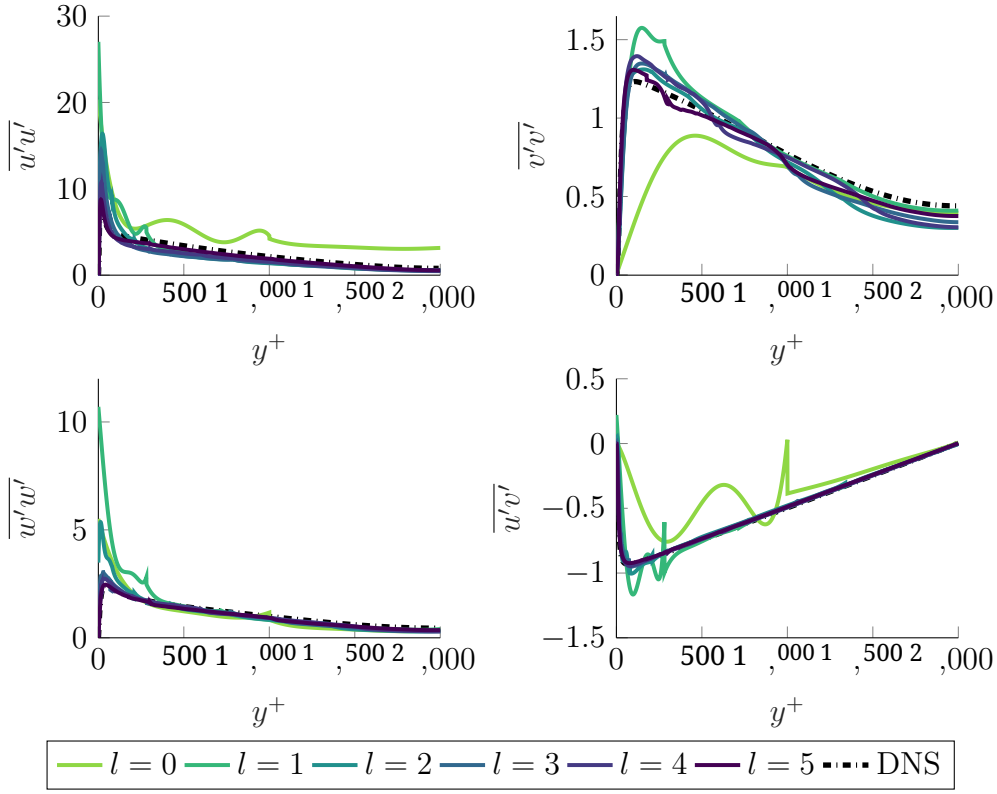


图 8：不同迭代 l下 $Re_\tau = 2000$ 通道的雷诺应力。

$v'v'$ 的结果则相对滞后。这种行为是意料之中的，因为网格接口会直接影响壁面法向，因而会反映在相应的速度脉动中。尽管如此， $v'v'$ 仍显示出向 Lee 和 Moser 的直接数值模拟数据收敛的趋势，在 $l = 5$ 处仅有轻微（但仍然存在）的网格接口痕迹。

3.3. $Re_\tau = 2000$下的通道流，壁面模型大涡模拟应用

为总结通道流应用，我们在$Re_\tau = 2000$ 将同一测试案例作为壁面模型模拟运行。此举旨在证明该算法能够为壁面模型模拟提供合适网格间距的能力。我们再次允许网格中存在 Mortar 单元。此前使用该代码的经验表明，在壁面模型区域中采用较高的 C 会带来好处，因此我们将 Vreman 亚格子尺度应力模型中的 Vreman 常数增大至 $C = 0.11$ 。我们采用 Spalding 壁面律作为代数壁面

模型，并在每个龙格-库塔时间步中使用牛顿法求解。界面高度 h_{wm} 固定为通道半高的 10%h ，并在下图中以红色虚线表示。

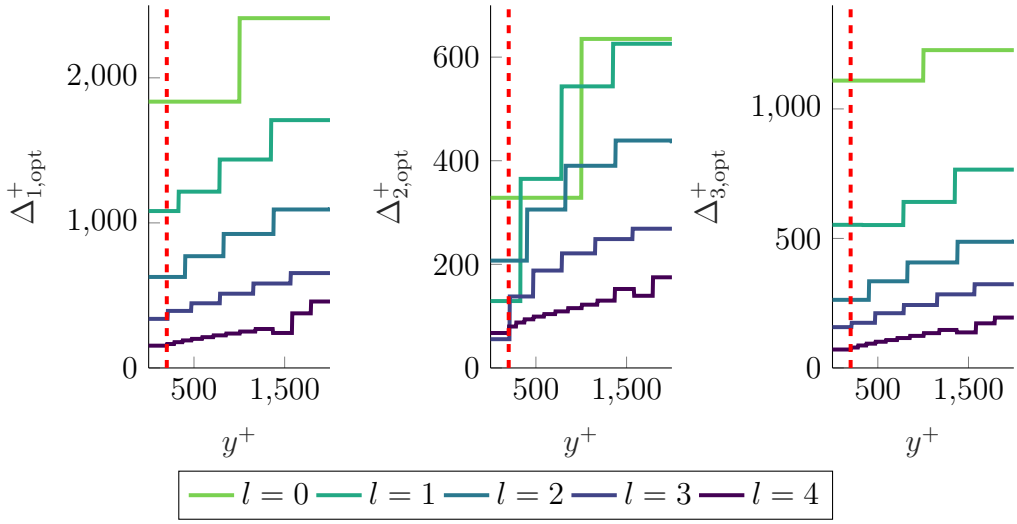


图9：根据 G 得出的壁面建模 $Re_\tau = 2000$ 通道的最优网格间距，适用于不同的迭代次数 l。红色虚线表示 h_{wm}。

首先，我们评估图 9 所示的建议网格间距 $\Delta^+_{\mathrm{i,opt}}$。壁法向的间距仍采用与上一小节含网格接口的壁面解析大涡模拟相同的方法实现。然而，我们已根据壁面建模大涡模拟的方法调整了建议网格间距。单纯的网格自适应发现，相关尺度的分辨率不足在壁面附近最为严重，因此建议在此处进行最大程度的加密。然而，壁面建模的目的在于模拟下方较小但与流动相关的涡旋h_{wm}，因此必须告知网格自适应过程，该区域内的严重分辨率不足是有意为之，而非错误。为此，我们根据 Toosi（私人交流）的建议，对 $\Delta^+_{\mathrm{i,opt}}$ 施加限制。我们不允许 $\Delta^+_{\mathrm{i,opt}}$ 在 h_{wm}以下变得更小，这意味着我们将位于 h_{wm} 与壁面之间的网格单元的$\Delta^+_{\mathrm{i,opt}}$ 值重置为其在 h_{wm}处对应网格单元的值。这适用于所有空间方向的网格间距。图 9 还表明，壁面模型界面并不局限于邻壁网格单元，也可以放置在第二个网格单元中，例如 $l = 4$。对于 $l = 4$ ，我们还在 x 和 z 处引入一个网格接口，该接口在两个维度上的壁法向位置相同。与

表4：不同迭代 l下壁面建模 $Re_\tau = 550$ 通道的模拟属性。

迭代	N_1	N_2	N_3	Δ_1/h	$(\Delta_2/h)_{\min}$	Δ_3/h	$\Delta^+{}_i\,(y=0)/(P+1)$			单元数		#DOF	Re_τ
										总计	已保存		
$l=0$	10	2	3	1.00	0.50	1.00	333.33	166.67	333.33	60		12960	627.91
$l=1$	12	4	5	0.83	0.25	0.60	277.78	54.67	200.00	240		51840	872.29
$l=2$	19	5	11	0.53	0.20	0.27	175.44	21.33	90.91	1045		225720	1241.07
$l=3$	32	6	23	0.31	0.17	0.13	104.17	34.67	43.48	4416		953856	1220.01
$l=4$	62 31	14	38 19	0.16 0.32	0.07	0.08 0.16	53.76	10.00	26.32	31217	1767	6742872	1555.60

壁面解析算例相比，这种情况直到第四次迭代才会出现，因为壁面与通道中心之间的尺度差异要小得多；这是因为壁面建模大涡模拟不解析壁面湍流的小尺度。表 4 列出了壁面处的分辨率及相应的黏性间距。

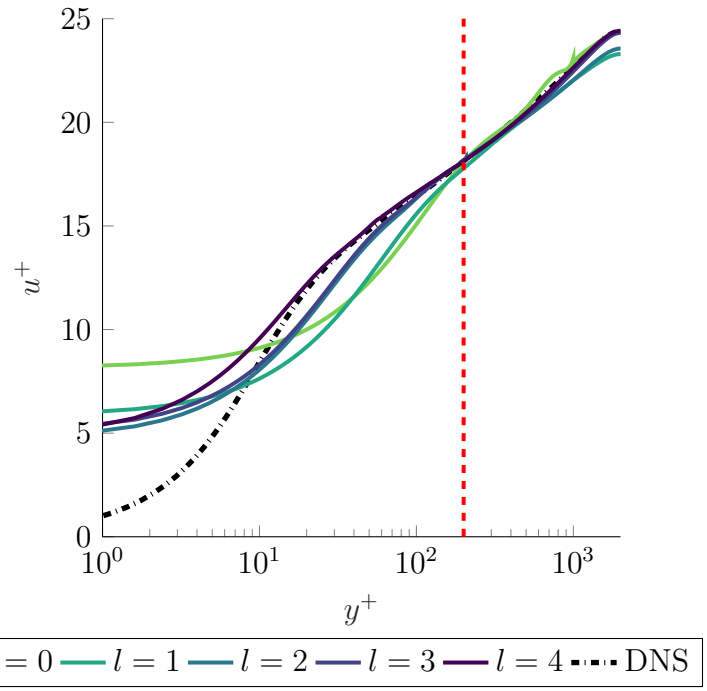


图10：壁面建模 $Re_\tau = 2000$ 通道每次迭代l的平均速度剖面。

为验证结果，我们再次将其与 Lee 和 Moser 的相同直接数值模拟数据进行比较。如图10所示，即使在 $l = 0$ 时，结果已经吻合良好，尤其是在 $h^+_{wm} = 200$处的界面位置。这是因为初始网格比壁面解析大涡模拟的网格更符合壁面模型大涡模拟的要求

要求。还可以清楚地看到结果逐渐收敛至直接数值模拟数据。第 $l = 3$ 次迭代在 h_{wm}以上的整个通道范围内均与直接数值模拟数据吻合，包括通道中心；此前几次迭代在该处略有偏差。

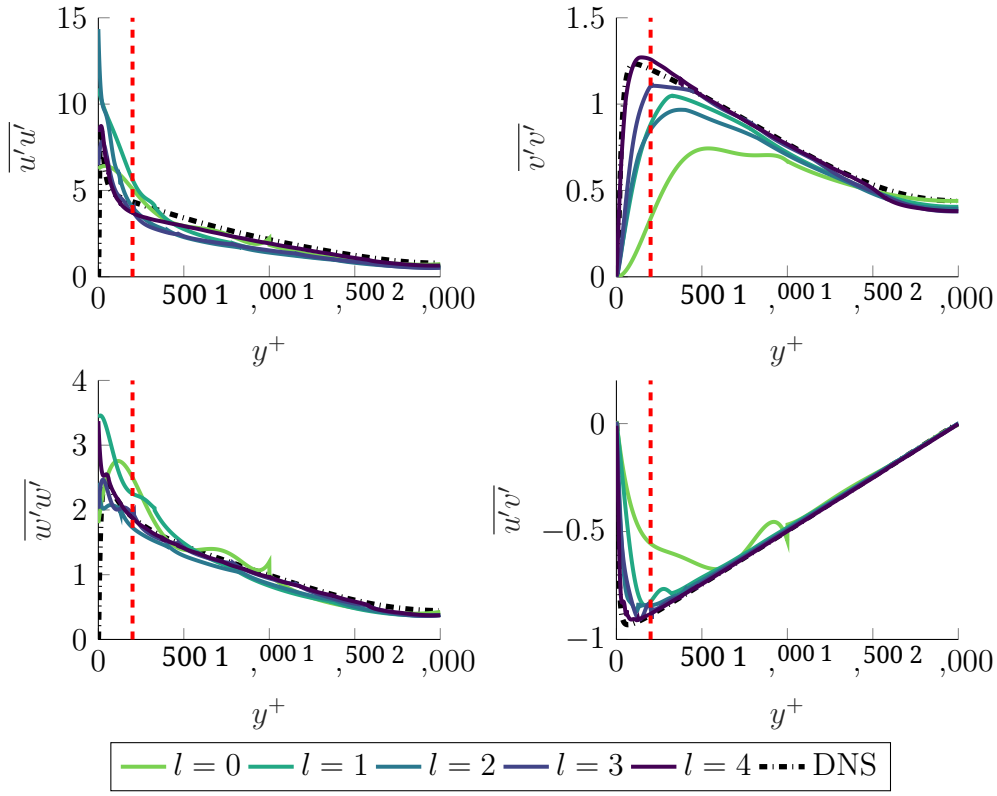


图11：不同迭代 l下壁面建模 $Re_\tau = 2000$ 通道的雷诺应力。

雷诺应力如图11所示。与速度剖面不同，需要经过第四次迭代才能更好地匹配雷诺应力。这是壁面模型大涡模拟方法所致，而非网格自适应所致。即便如此，雷诺应力，尤其是$\overline{u'u'}$，仍未与直接数值模拟数据完全吻合，但对于壁面模型大涡模拟而言已相当令人满意。$\overline{v'v'}$ 也值得关注，我们可以清楚地看到脉动量的收敛趋势；但在通道中心，网格中的砂浆又变得明显起来。其他雷诺应力分量均吻合良好，证明了该算法适用于壁面模型大涡模拟。

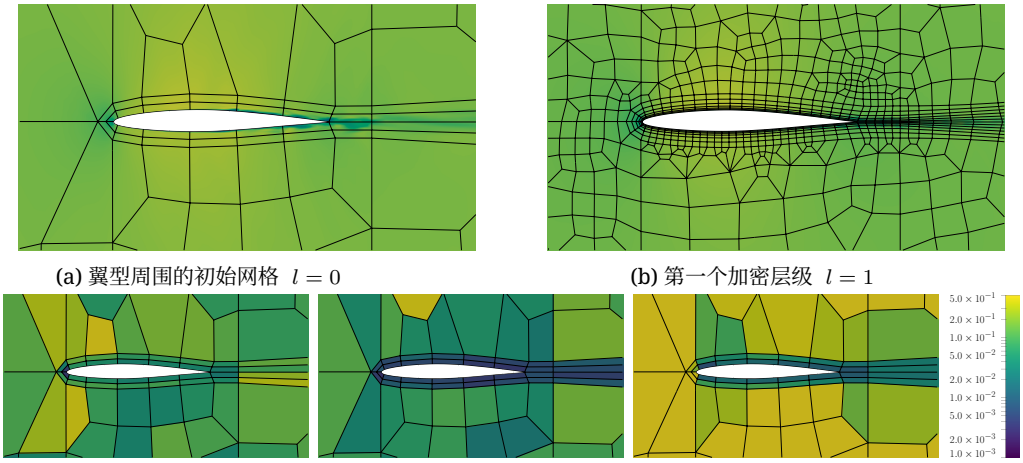
4. 翼型绕流的应用

最后，我们研究攻角为 $\alpha = 0$度时跨声速 NACA 64A-110 翼型周围的流动。该测试案例使我们能够将通道流中引入的所有功能应用于更具实际意义的问题。翼型网格通过沿 z方向拉伸二维几何（xy平面）生成。 xy平面网格使用非结构化二维网格工具生成。经过拉伸后，网格将在 z方向上呈结构化。为充分发挥网格自适应算法的潜力，我们通过在 xy平面内指定具有不同单元数量的区域，使沿 z 方向的 Mortar 单元分布均匀。这样，我们生成了一个完全非结构化、但仅由六面体构成的三维网格。翼型模拟的特征长度 c 设为弦长，并定义为 $c = 1$。 z 方向的展向延伸长度为 $L_z = 0.05c$。

翼型置于风洞中，因此我们在翼型上下方设置 Euler 壁面。无量纲模拟参数为$Ma = 0.72$和 $Re_c = 930\,000$。我们采用壁面模型大涡模拟进行模拟。通过在吸力面和压力面上使用数值触发，在 $x = 0.05c$ 处触发流动，实现可靠的湍流转捩；所采用的方法由 Schlatter 和 Örlu 提出 [23] 。所有迭代过程中，界面高度固定为 $h_{wm} = 0.0134$ ，并在整个表面保持恒定；该高度根据 Kahraman 等人提出的界面高度自适应算法，基于壁面解析大涡模拟参考数据确定 [24] 。

最后，我们将结果与此前进行的壁面解析大涡模拟进行比较。我们从粗网格开始，采用迭代方法，与通道测试案例相同。我们不断迭代，直至压力系数 c_p、壁面摩擦 τ_w 和边界层厚度 δ_{99}均达到匹配。

初始网格 $l = 0$ 构建时力求极其廉价，且不对边界层或其他流动特性进行任何特殊处理。网格唯一的约束是贴合几何形状。因此，在 $l = 0$ 中，流向每个弦长仅有 6 个单元，导致最大 $y^+ \approx 1100$。该初始网格如图12a所示。由于我们采用高阶方法，必须使用曲线单元，这使得即使网格像 $l = 0$中那样粗糙，也能考虑更多几何细节。



(a) 翼型周围的初始网格 $l = 0$

(b) 第一个加密层级 $l = 1$

(c) $\Delta_{\mathrm{i,\ opt}}$ 经过 $l = 0$ 后采用对数标度的定性等值线图。所有图均按相同比例缩放。
从左到右：壁面平行方向 s、壁面法向 n 和展向 z。

图12：初始网格和第一次迭代的速度场与网格对比。

要获得第 $l = 1$ 次迭代的下一个网格，我们评估网格误差指示量密度 $g(\vec{x},\ \vec{n}_i)$，从而得到 $\Delta_{i,\ \mathrm{opt}}$，其定性示意如图12c所示。它呈现出与通道中已观察到的相同行为：我们在壁面法向方向 n上的细化程度最高，其次是展向 z 和切向 s。值得注意的是，在前缘处，展向方向建议的网格间距非常粗。这是意料之中的，也体现了该算法的良好性能，因为此处流动为层流，这意味着沿该方向的特征长度趋于无穷大。湍流尾迹区域也得到了更细致的细化，因为这个粗网格仍能在那里维持一定的湍流。网格 $l = 1$ 也如图12b所示，其中翼型附近的单元显著增多，这完全在意料之中。因此，图12展示了从 $l = 0$ 到 $l = 1$的完整过程。

图13展示了前文定义的相关量的整个发展过程。图中显示，这些量明显呈现收敛趋势，且收敛速率各不相同。压力系数 c_p 收敛最快。壁面摩擦系数 c_f 在经过 $l = 2$ 后才收敛，而对网格分辨率最敏感的边界层厚度则需要四次迭代才能收敛。$l = 2$ 与 $l = 3$ 之间的差异仅在于 x 和 z中的分辨率，相关信息列于表5和

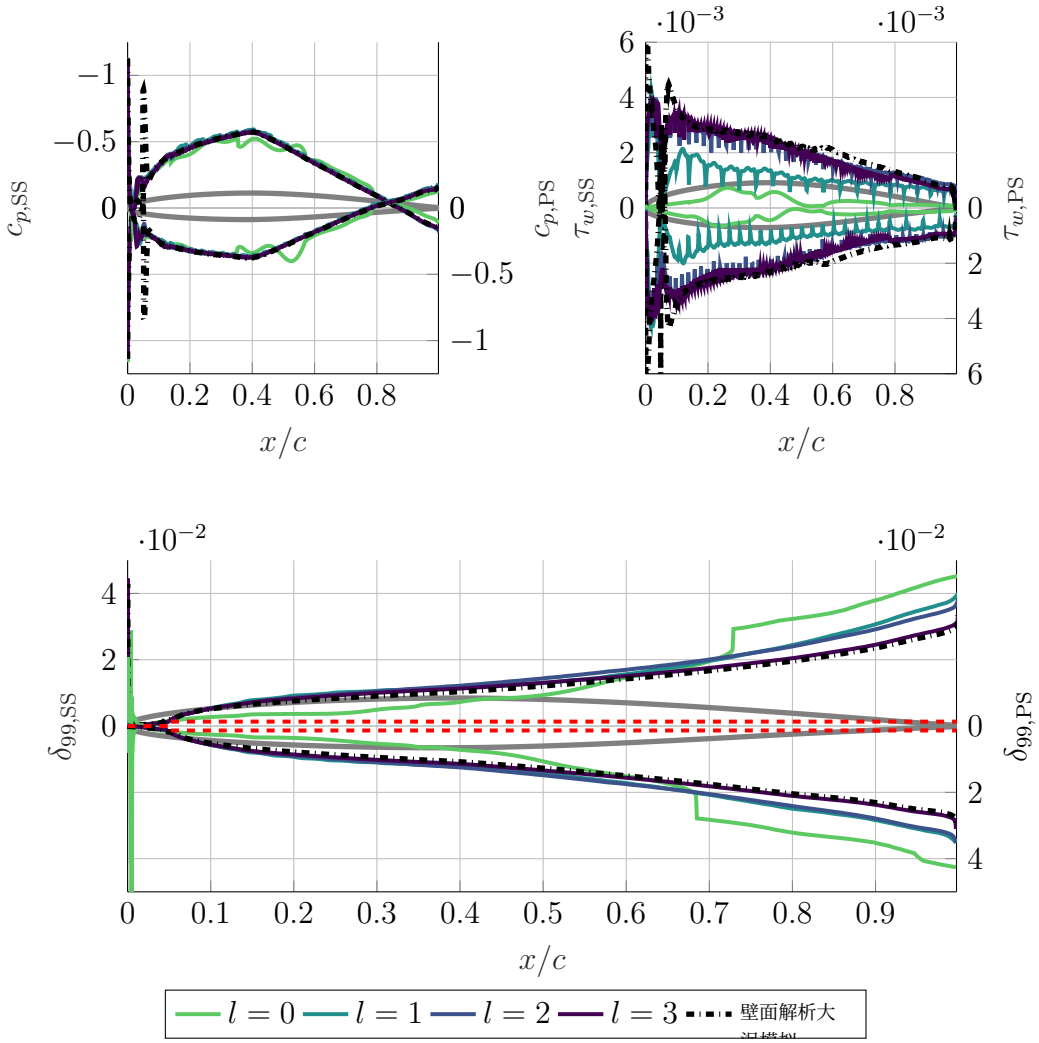


图13：NACA 64A-110翼型压力面（PS）和吸力面（SS）的压力系数 c_p 、壁面摩擦 τ_w 和边界层厚度 δ_{99} 的收敛情况。

表6以及其他网格特性中。尤其是在后缘，算法建议进行网格细化。此处也是 WRLES 参考数据与迭代结果 $l = [0, 1, 2]$ 之间差异最大的地方。图13中的红色虚线表示 x/c上的壁面模型界面高度，约为$\delta_{99,\ \mathrm{mean}}$的10%。

表6还展示了 $l = [1, 2, 3]$ 的Mortar信息，以及翼型边界处最小和最大网格间距。这些值

表 5：不同迭代 l下壁面建模 NACA 64A-110 翼型的网格间距。

迭代	$\Delta^+ \mathrm{ss}(x=0.05c,s)/(P+1)$			Δ_i/c					
				min.	max.	min.	max.	min.	max.
$l=0$	1267.21	219.82	146.54	1.21e-1	2.16e-1	3.75e-2	3.75e-2	2.50e-2	
$l=1$	316.92	52.76	48.85	3.30e-2	5.40e-2	9.00e-3	9.00e-3	8.33e-3	1.67e-2
$l=2$	146.54	5.86	12.21	2.10e-2	3.00e-2	1.00e-3	2.00e-3	2.08e-3	1.67e-2
$l=3$	58.62	5.86	12.21	5.00e-3	1.50e-2	1.00e-3	2.50e-3	1.04e-3	1.67e-2

表6：不同迭代l下壁面建模 NACA 64A-110 翼型的网格单元数量。

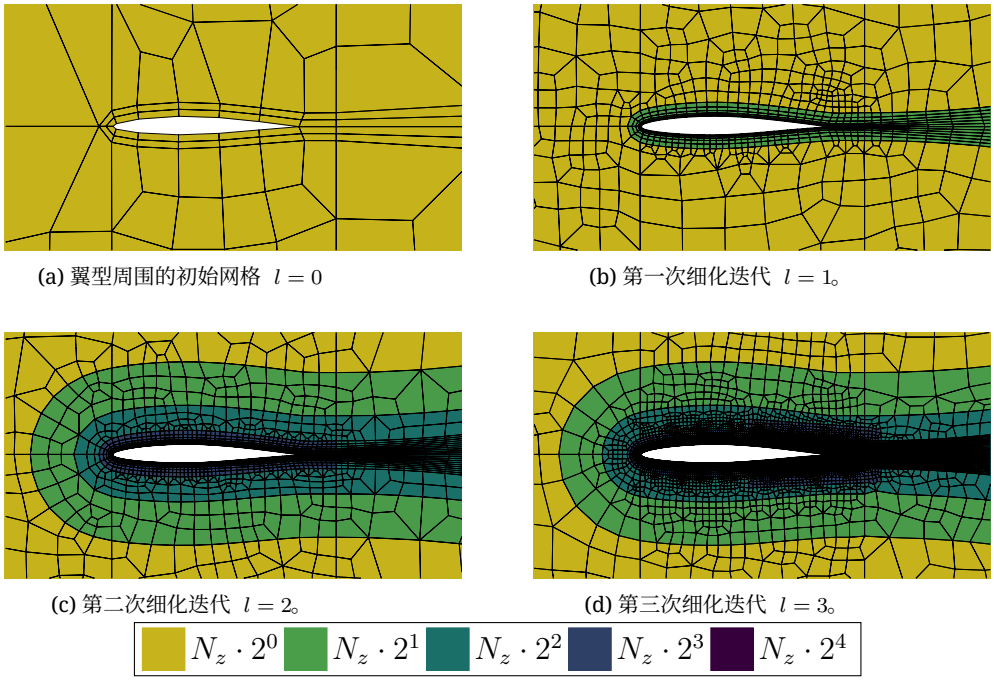
迭代	N_i		单元数		#DOF
	$N_s \cdot N_n$	N_z	总节省量		
$l=0$	395	(2)	790		404480
$l=1$	1472	(3, 6)	5946	2886	3044352
$l=2$	2590	(3,6,12, 24)	36072	26088	18468864
$l=3$	9111	(3,6,12, 24,48)	222426	214902	113882112

可以通过假设存在 2-1 型砂浆界面轻松计算得出。这里证实了表 2 中的观察结果。利用不连续Galerkin框架的非结构能力，可使单元数量减少约 50%，从而直接节省同等比例的计算时间。

图 14 中展示了 z 中的砂浆区域，每个区域表示 z中的不同单元数量。颜色基于展向 N_z上的最少网格单元数量，其中分别为 $N_z(l=0)=2$ 和 $N_z(l=[1,2,3])=3$。这些区域的设计旨在满足指标的目标值，同时高效地处理我们对 2-1 型砂浆界面的限制，尽管该指标在某些位置建议进一步加粗网格，而在其他位置则建议更快速地加密，例如从 $N_z\cdot 2^4$ 到 $N_z\cdot 2^0$。我们在其间插入缓冲层，使网格保持兼容，并实现砂浆区域之间的过渡。尽管如此，节省的单元数量证明了这种方法的合理性。

5. 总结

本文在不连续Galerkin框架下展示了湍流通道和跨声速翼型，并采用基于以下内容的网格自适应算法高阶优化版本所提出的不同网格：



(a) 翼型周围的初始网格 $l = 0$

(b) 第一次细化迭代 $l = 1$。

(c) 第二次细化迭代 $l = 2$。

(d) 第三次细化迭代 $l = 3$。

图14：翼型各次迭代的 z Mortar 区域对比，图中采用非曲线单元。

Toosi 和 Larsson 的研究成果 [1, 7]。边界层采用壁面解析或壁面建模，以展示该算法处理大涡模拟两种主要情况的能力。对于所有测试案例，我们都展示了收敛性，且结果与文献中的结果吻合良好。

对于高阶方法，在欠分辨设置中，由于数值格式的鲁棒性较低，网格自适应指标通常按单元而非按配置点应用时效率最高。获得单元上的指标值后，按照建议的网格间距进行单元分割和重新网格划分十分直接。网格自适应机制应用于 p-细化方法仍有待研究。

模拟运行的另一个重要方面，是在 FLEXI 框架中使用不连续 Galerkin 实现的非结构化能力。通过在单元之间设置 Mortar 界面，实现了三维非结构网格；使用这些单元可节省高达 50% 的计算时间，且精度没有显著损失。

尤其是在翼型算例中，即使经过少量迭代，我们也能清楚地区分展向上的不同 Mortar 区域。因此，我们证明了网格自适应框架能够生成针对具体问题且成本优化的网格，并表现出收敛行为。

因此，网格自适应算法无需事先了解流场信息，即可应用于任意几何形状，并生成针对具体问题量身定制且经过成本优化的网格，而无需依赖用户的经验。

致谢

MB 和 AB 衷心感谢德国研究基金会（DFG）资助本项工作，该工作是在 FOR2895 研究组框架下开展的。他们还感谢高斯超级计算中心协会（www.gauss-centre.eu）资助本项目（GCS-lesdg），并提供 GCS 超级计算机 HAWK（位于斯图加特高性能计算中心，www.hlrs.de）的计算时间。AK 和 JL 获得了美国能源部 PSAAP III 计划（资助号 DE-NA0003993）和美国国家航空航天局变革性工具与技术项目（资助号 80NSSC18M0148）的支持。

参考文献

[1] S. Toosi, J. Larsson，论大涡模拟中的系统化网格选择：通过最小化解敏感性确定最优空间分辨率，《计算机与流体》 (2020) 104488doi:https://doi.org/10.1016/j. compfluid.2020.104488.[2] B. J. Geurts, J. Fröhlich，预测大涡模拟精度限制的框架，《流体物理》14 (2002) L41.[3] I. B. Celik, Z. N. Cehreli, I. Yavuz，大涡模拟分辨率质量指数，《流体工程杂志》127 (2005) 939–958.[4] J. Jimenez, R. D. Moser，大涡模拟：我们现在处于什么阶段，又能期待什么？AIAA期刊 38 (4) (2000) 605–612.[5] S. B. Pope，关于湍流大涡模拟的十个问题，《新物理学杂志》6 (2004) 35.

[6] D. Flad, A. Beck, C.-D. Munz，采用高阶间断伽辽金谱元法进行自适应滤波以模拟欠分辨率湍流，计算物理学杂志 313 (2016) 1–12。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.11.064.[7] S. Toosi, J. Larsson, Germano恒等式误差与大涡模拟控制方程的残差，计算物理学杂志 (2021) 110544doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110544.[8] N. Krais, A. Beck, T. Bolemann, H. Frank, D. Flad, G. Gassner, F. Hindenlang, M. Hoffmann, T. Kuhn, M. Sonntag, C.-D. Munz, FLEXI：用于双曲–抛物型守恒律的高阶间断伽辽金框架，《计算机与应用数学》81 (2021) 186–219，数值偏微分方程问题开源软件的开发与应用。doi:https://doi.org/10.1016/ j.camwa.2020.05.004.[9]F. Hindenlang, G. J. Gassner, C. Altmann, A. Beck, M. Staudenmaier, C.-D. Munz，适用于非定常问题的显式间断伽辽金方法，《计算机与流体》61 (2012) 86–93，“高保真流动模拟”Onera科学日。doi:https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.03.006.[10] D. A. Kopriva，《偏微分方程谱方法的实现：面向科学家与工程师的算法》，Springer Science & Business Media, 2009.[11] E. F. Toro，《流体动力学的黎曼求解器与数值方法》，Springer Berlin Heidelberg, 2009。doi:10.1007/b79761.[12] F. Bassi, S. Rebay，用于数值求解可压缩纳维–斯托克斯方程的高阶精度间断有限元方法，计算物理学杂志 131 (2) (1997) 267–279。doi:https://doi.org/10.1006/jcph.1996.5572.[13] J. Niegemann, R. Diehl, K. Busch，具有优化稳定域的高效低存储Runge–Kutta格式，计算物理学杂志 231 (2) (2012) 364–372。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.09.003.

[14] D. Flad, G. Gassner，关于在大涡模拟中使用动能守恒DG格式，计算物理学杂志 350 (2017) 782–795。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.09.004.[15] S. Pirozzoli，分裂对流导数算子的广义守恒近似，计算物理学杂志 229 (19) (2010) 7180–7190。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.06.006.[16] P. Roe，近似黎曼求解器、参数向量与差分格式，计算物理学杂志 43 (2) (1981) 357–372。doi: https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5.[17]A. W. Vreman，湍流剪切流的涡黏性亚格子尺度模型：代数理论与应用，《流体物理》16 (10) (2004) 3670–3681。doi:https://doi.org/10.1063/1.1785131.[18] S. Toosi, J. Larsson，大涡模拟中的各向异性网格自适应，《计算机与流体》156 (2017) 146–161。doi:https://doi.org/ 10.1016/j.compfluid.2017.07.006.[19] M. A. Park, A. Loseille, J. Krakos, T. R. Michal, J. J. Alonso，非结构网格自适应：现状、潜在影响及面向CFD 2030的建议投资（2016）。doi:10.2514/6.2016-3323.[20] M. A. Park, N. Barral, D. Ibanez, D. S. Kamenetskiy, J. A. Krakos, T. R. Michal, A. Loseille，湍流的非结构网格自适应与求解器技术（2018）。doi:10.2514/6.2018-1103.[21] J. Jimenez，壁面湍流中的级联，流体力学年度评论 44 (2012) 27–45.[22] M. Lee, R. D. Moser，雷诺数高达 $Re_\tau \approx 5200$的湍流通道流直接数值模拟，流体力学杂志 774 (2015) 395–415.[23] P. Schlatter, R. Örlü，中等雷诺数下的湍流边界层：入口段长度与转捩触发效应，流体力学杂志 710 (2012) 5–34。doi:10.1017/jfm.2012.324.[24] A. B. Kahraman, J. Larsson，壁面模型大涡模拟中最佳交换位置的自适应确定，AIAA期刊 (2022) 1–12doi:10.2514/1.J061347。