arXiv:2301.03219v1 [math.RA] 9 Jan 2023

形式矩阵环：同构问题

P.A. Krylov[1],A.A. Tuganbaev[2]

摘要。 我们研究给定环上的形式矩阵环的同构问题。此时，这类环的主因子矩阵起着重要作用。本研究得到俄罗斯科学基金会资助，项目编号为 23-21-00375（P.A. Krylov）和 22-11-00052（A.A. Tuganbaev）。

关键词： 形式矩阵环，主因子矩阵

MSC 分类：16R99；16D10

1 引言

给定环上的形式（或广义）矩阵环受到众多专家的关注。这是很自然的，因为此类环经常出现在环论中。此外，它们在研究若干类阿廷环和代数时发挥着重要作用（见 [3], [4]）。它们也为一般环论提供了各种各样的例子。形式矩阵环理论的若干方面已在书中介绍 [8]。

有一类有趣的形式矩阵环。对于 2×2矩阵，这类环见于 [6]。对于 $n \times n$ 矩阵，这类环见于 [11]。我们指的是给定环 R 上的形式矩阵环（或者说“取值于 R”）。这意味着一个具体的形式矩阵环在所有位置上都具有相同的环 R 。这类环是普通环 M（n， R）的一种直接推广，即由 $n \times n$ 矩阵构成的普通环。然而，环 R 上的形式矩阵环的性质可能与环 M（n， R）的性质大不相同。在 [8, 第 4], 章中，提出了关于环 R 上的形式矩阵环的一些问题，并在本章开头阐述了三个关于形式矩阵环的问题。在 [8, 第 4.3–4.5], 节中，针对环 R上的某些类型的形式矩阵环解决了这些问题。本文专门研究这三个问题之一，即同构问题 III。该问题在 [1], [2], [5], [12], [13], [14] 中进行了讨论。

本文只考虑具有非零单位元的结合环。若 R 是一个环，则 $M(n, R)$ 是由所有取值于环 R 的 $n \times n$ 阶矩阵构成的普通环

[1]托木斯克国立研究型大学，电子邮箱：krylov@math.tsu.ru。[2]国立研究型大学“莫斯科动力学院”，莫斯科国立罗蒙诺索夫大学；电子邮箱：tuganbaev@gmail.com。

。任意环 S 的素根记为 $P(S)$。

2 给定环上的形式矩阵环

我们简要回顾形式矩阵环的定义。固定一个正整数 $n \geq 2$。设 $R_1, \ldots, R_n$ 为环，且设 M_{ij} 为 R_i-R_j- 双模，并满足 $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \ldots, n$。假设对于任意下标 $i, j, k = 1, \ldots, n$，都有一个 R_i-R_k-双模同态 $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$。我们将 K 记为所有取值于双模 M_{ij} 的 $n \times n$ 矩阵所构成的集合。集合 K 关于标准矩阵加法和乘法构成一个环。矩阵的乘法借助上述双模同态进行。环 K 称为 n 阶形式矩阵环（或广义矩阵环）。环 K 具有如下形式：

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & R_n \end{pmatrix}.$$

设 R 为某个环。若 K 是一个形式矩阵环，且对于所有 i和 j，都有 $M_{ij} = R$，则称 K 为以环 R 为底环的形式矩阵环，或称其为取值于环 R的形式矩阵环。这类环可以直接定义。具体而言，设 $\{s_{ijk} \,|\, i, j, k = 1, \ldots, n\}$ 是环 R的一些中心元，并满足以下关系

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk},\ s_{ijk} \cdot s_{ik\ell} = s_{ij\ell} \cdot s_{jk\ell} \tag{1}$$

对所有下标 i、j、k、$\ell = 1$、.....、n均成立。对于任意取值于 R的 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，我们定义一种新乘法，规定

$$AB = C = (c_{ij}),\ \text{where } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

由此得到一个环，记作 K或 $M(n, R, \Sigma)$，其中Σ 是所有元素 s_{ijk}的集合。集合 Σ 称为因子系，其中的元素称为环 K的因子。若所有 s_{ijk} 都等于 1，则得到普通矩阵环 $M(n, R)$。

主要关系式 (1) 蕴含以下关系式：

$$s_{iji} = s_{jij} = s_{ij\ell} \cdot s_{ji\ell} = s_{\ell ij} \cdot s_{\ell ji}. \tag{2}$$

将 (2) 中最后一个关系式改写为三个彼此通过置换下标而得到的关系式很有用：

$$\begin{aligned} s_{iji} &= s_{jij} = s_{ijk} \cdot s_{jik} = s_{kij} \cdot s_{kji}, \\ s_{jkj} &= s_{kjk} = s_{jki} \cdot s_{kji} = s_{ijk} \cdot s_{ikj}, \\ s_{iki} &= s_{kik} = s_{ikj} \cdot s_{kij} = s_{jik} \cdot s_{jki}. \end{aligned} \tag{3}$$

设 τ 是一个次数为 n 的置换。若 $\Sigma = \{s_{ijk}\}$ 是某个因子系，则令 $t_{ijk} = s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}$。于是 $\{t_{ijk}\}$ 也是一个因子系，因为它满足关系 (1)。记作 $\tau\Sigma$。因此，存在一个形式矩阵环 $M(n, R, \tau\Sigma)$。环 $M(n, R, \Sigma)$ 与 $M(n, R, \tau\Sigma)$ 在对应关系 $A \to \tau A$ 下彼此同构，其中 $A = (a_{ij})$ 且 $\tau A = (a_{\tau(i)\tau(j)})$。

对于给定的环 $M(n, R, \Sigma)$，可以与之关联若干个矩阵。对每个 $k = 1$，...，n，令 $S = (s_{iji})$ 和 $S_k = (s_{ikj})$。这些矩阵称为环 $M(n, R, \Sigma)$ 的因子矩阵。矩阵 S 是对称的。按照 [5]，我们称它为主因子矩阵。在 [5] 中，矩阵 (s_{ijk}) 和 (s_{kij}) 也用于 $k = 1$，……，n。显然，矩阵 τS 和 τS_k 是环 $M(n, R, \tau\Sigma)$ 的对应因子矩阵。

有时，可以选择一个置换 τ，使得环 $M(n, R, \tau\Sigma)$ 的主因子矩阵 τS 呈现出一种特定的、更简单且更方便的形式。我们简要介绍三种相应的情形。第一种情形略微推广了 [8, 第 4.3] 节中的讨论；参见引理4.3.1、4.3.2 以及引理 4.3.2 证明之后的段落。

设 Σ 是一个因子系，其中每个因子 s_{ijk} 要么不可逆，要么等于 1。在此假设下，因子 s_{ijk}之间会出现额外的关系。例如，利用关系式 (3)，容易验证下述引理成立。

引理 2.1. 设 i、j、k 是两两不同的下标。那么，元素 s_{iji}、s_{iki} 和 s_{jkj} 仅满足以下三种条件之一。

1) 三个元素都等于 1。2) 这三个元素中有两个不可逆，另一个等于 1。
3) 这三个元素都不可逆。

在集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上，我们通过设定 $i \sim j \Leftrightarrow s_{iji} = 1$，定义二元关系 $\sim$。引理 2.1 推出以下断言。

引理 2.2. 关系 $\sim$ 是等价关系。

我们来写下目前的最终结果。

引理 2.3. 存在一个置换 τ，使得矩阵 τS 可以表示为一种分块形式：由 1 组成的块位于主对角线上，其余位置均为不可逆元。

证明。 设 τ 是一个置换，使得上行按自然顺序排列着数字 $1, \ldots, n$。下行由关系 $\sim$ 的等价类组成，这些等价类按随机顺序排列。每个等价类中的数字也按随机顺序排列。矩阵 τS 具有引理中所述的结构。 □

后来还讨论了另外两种情形。其中一种情形见[7] 和 [9, 引理 12.1、引理 12.2] ，另一种情形见 [5,引理 4.1]。此外，对因子没有施加任何限制。不过，在 [7] 和 [9]中，假设环 R 是交换环。但在此处这并不重要，因为因子都是中心元。

与上述情况类似，略去细节，可以说，结果表明，[7] 和 [9] 讨论的是这样一种情形：总存在一个置换 τ，使得矩阵 τS 具有如下分块结构：主对角线上的块由非零因子构成，其余块由零因子构成。

在 [5, 引理 4.1], 中证明了，存在一个置换 τ，使矩阵 τS 主对角线上的相应块由可逆元构成，而所有其余块均由不可逆元构成。引理 2.1 和引理 2.2 的类似结论也成立。

当然，所概述的三种情形可以在某种一般性方法的框架内加以统一。

一类有趣且重要的形式矩阵环是环$M(n, R, \Sigma)$，其因子系由 1 和某个中心元素 s 构成。在[5], 这类系统中， Σ 称为二元系统。我们将相应的环 $M(n, R, \Sigma)$ 记作 $M(n, R, s)$，并约定称其为形式矩阵的（$s1$）环。

文献 [8, 的第 4.3、4.4] 和 [5] 节研究了环 $M(n, R, s)$，其中 $s^2 \neq 1$ 和 $s^2 \neq s$。这类环与交叉矩阵环之间的联系已为人所知；参见 [4]。在 [5, 引理 4.7], 中证明，环 $M(n, R, s)$ 的一个主因子矩阵（其中 $s^2 \neq 1$ 和 $s^2 \neq s$）唯一确定其余所有因子矩阵。这个结果非常有用。

如果令 $s = 0$，我们便得到另一类相当特殊的环。所有因子

这类环的矩阵都是(01)矩阵。论文 [7], [9]和 [10] 包含了关于形式矩阵环自同构群的各种资料。
我们回到任意环 $M(n, R, s)$。如果元素 s 可逆，那么我们有一个同构 $M(n, R, s) \cong M(n, R)$。因此，可以假设元素 s不可逆。于是，由引理 2.3 可知，存在一个置换 τ，使矩阵 τS 可以划分为若干块，其中对角块由 1 填充，其余所有块均由元素 s填充。在这种情况下，我们称矩阵 τS 具有标准形，而矩阵 S 可化为标准形。

注2.4。 当然，标准形在主对角线上各块的置换以及其余块的相应置换下是唯一确定的。

3 形式矩阵环的同构问题

[8, 第 4 节.1] 包含形式矩阵环的同构问题 III :

- 两个因子系何时定义同构的形式矩阵环?

我们针对（$s1$）形式矩阵环研究这个问题。
如果对于任意正整数 n 和 m，只要环 $M(n, R)$ 与 $M(m, R)$ 彼此同构，就有 $m = n$，我们便称环 R 满足（n, m）条件。例如，当环R 是交换环、局部环或左（右）主理想整环时，（n, m）条件成立。

若环 S 的中心幂等元只有 0 和 1，则称其为不可分解的。

定理3.1。 设商环 $R/P(R)$ 不可分解且满足（n, m）条件，并且 $s \in P(R)$。设 K_1 和 K_2 是两个（$s1$）形式矩阵环，其主因子矩阵分别为 S 和 T。以下断言成立。

1. 如果环 K_1 和 K_2 彼此同构，那么矩阵 S 和 T 具有相同的标准形。

2. 如果 $s^2 \neq 1$ 和 $s^2 \neq s$，那么逆命题也成立。
证明。**1.** 根据引理 2.3，我们可以假设矩阵 S and T 以标准形表示。

让我们假设 $K_1 \cong K_2$。那么存在一个环同构

$$\gamma\colon K_1/P(K_1) \to K_2/P(K_2).$$

素根 $P(K_1)$ 和 $P(K_2)$ 的结构是已知的（参见 [8, 推论 4.2。2] 以及该推论之后的段落）。我们还知道矩阵 S 和 T 的分块结构。利用这些信息，我们得到关系式

$$K_1/P(K_1) = P_1 \times \ldots \times P_k \text{ and } K_2/P(K_2) = Q_1 \times \ldots \times Q_\ell,$$

其中，k（分别为 ℓ）是矩阵 S（分别为 T）主对角线上块的数量。此外，所有 P_i 和 Q_j 都是某些阶数的全矩阵环。由于环 $R/P(R)$ 是不可分解的，因此所有环 $P_i/P(P_i)$ 和 $Q_j/P(Q_j)$ 都是不可分解的。

这里我们指出，对于不可分解环的直积之间的同构，存在一个类似于 [9, 引理 9。6]（或 [10, 引理 6。1]）中关于不可分解环直积的自同构的结果。因此，$k = \ell$ 并且存在一个次数为 k 的置换 τ，使得限制 γ 到 P_i 是一个同构 $P_i \to Q_{\tau(i)}$、$i = 1$、.....、k。consequently，矩阵 S 和 T 的标准形相同。

2. 设 $\{s_{ijk}\}$（分别为 $\{t_{ijk}\}$）是环 K_1（分别为 K_2）的所有因子构成的集合。如前所述，形如 s_{iji} 的因子，即主因子矩阵 S 的元素，决定了其余所有因子 s_{ijk}；对于环 K_2 的因子，情况也是如此。因此，$s_{ijk} = t_{ijk}$ 对所有 i、j、k均成立。因此，我们得到关系式 $K_1 = K_2$。□

推论 3.2。商环 K_1/P（K_1）与 K_2/P（K_2）同构，当且仅当矩阵 S 和 T 具有相同的标准形。

注 3.3。在 [5, 定理 4.12], 中，对于左阿廷环 R，证明了一个类似于定理 3.1的结果。

本文引言提到了第 4 节 [8,中的同构问题 III1]。下面的开放问题是该问题的一个特殊情形。

开放问题。设 s 和 t 是环 R 的两个中心元。何时同构 $M(n, R, s) \cong M(n, R, t)$ 成立?

关于其他一些环 $M(n, R, \Sigma)$ 的类似问题在 [8, 第 4 节5]中进行了讨论。

参考文献

[1] A. N. Abyzov 和 D. T. Tapkin。形式矩阵环及其同构 // 《西伯利亚数学杂志》。– 2015。– 第 56 卷，第 6 期。第 955–967 页。[2] A. N. Abyzov 和 D. T. Tapkin。关于若干类形式矩阵环 // 俄罗斯数学。– 2015。– 第 59 卷，第 3 期。– 第 1–12 页。[3] Auslander M., Reiten I., SmaløS.O.《阿廷代数表示论》。– 剑桥大学出版社，剑桥，1995。[4] Baba Y., Oshiro K.《经典阿廷环及相关主题》。– 世界科技出版社，新泽西州–伦敦–新加坡，2009。[5] Chen W., Deng G., Su H. 关于形式矩阵环的因子的二元系统 // 《捷克数学杂志》。– 2020。– 第 70 卷。– 第 693–709 页。[6] Krylov P.A. 广义矩阵环的同构 // 《代数与逻辑》。– 2008。– 第 47 卷，第 4 期。– 第 258–262 页。[7] Krylov P.A., Norbosambuev T.D. 形式矩阵代数的自同构 // 《西伯利亚数学杂志》。– 2018。– 第 59 卷，第 5 期。– 第 1116–1127 页。[8] Krylov P.A., Tuganbaev A.A.《形式矩阵》，施普林格出版社，柏林，2017。[9] Krylov P.A., Tuganbaev A.A. 形式矩阵环的自同构群 // 《数学科学杂志》（施普林格）。– 2021。– 第 258 卷，第 2 期。– 第 222–249 页。[10]Krylov P.A., Tuganbaev A.A. 形式矩阵环的自同构 // arXiv:2204.13332 [math.RA]. – 2022。 https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.13332[11] Tang G., Zhou Y. 一类形式矩阵环 // 《线性代数及其应用》。– 2013。– 第 438 卷，第 12 期。– 第 4672–4688 页。[12] D. T. Tapkin. 形式矩阵环与关联代数的推广（俄文） //《切比雪夫文集》。– 2015。– 第 16 卷，第 3 期。– 第 442–449 页。[13] D. T. Tapkin. 形式矩阵关联环的同构 // 俄罗斯数学。– 2017。– 第 61 卷。– 第 73–79 页。[14] D. T. Tapkin. 具有零迹理想的形式矩阵环的同构 // 《西伯利亚数学杂志》。– 2018。– 第 59 卷，第 3 期。– 第 523–535 页。