伪分形无标度网络扩展得到的一类单纯复形的组合性质

arXiv:2301.03230v1 [math.CO] 9 Jan 2023

谢子轩[1,2], 王宇成[1,3], 徐婉月[1,3], 李旺朱[1,3], 李伟[4] 和张忠志[1,3,a]复旦大学上海市智能信息处理重点实验室，中国上海200433[2]复旦大学软件学院，中国上海200433[3]复旦大学计算机科学技术学院，中国上海200433[4]复旦大学工程与技术学院，中国上海200433{*20302010061,15307130038,*xuwy,19210240147,fd liwei,zhangzz}@fudan.edu.cn

单纯复形是用于建模复杂社会与生物系统中元素间高阶相互作用的常用工具。本文研究了一类由图积构造的单纯复形的若干组合性质，该类单纯复形是伪分形无标度网络的一种扩展。我们明确确定了其独立数、支配数和色数。此外，我们还推导出若干特殊情形下无环定向数、根连通无环定向数、生成树数以及完美匹配数的闭式表达。

关键词：单纯复形；伪分形；图积；组合问题；支配数；独立数；色数；无环定向；完美匹配；生成树

[a]通讯作者：李伟和张忠志。

1. 引言

复杂网络已成为一种流行且强大的形式化方法，用于描述自然和社会中各种真实世界的复杂交互系统，其节点和边分别代表真实系统中的元素及其相互作用 [1]。在以往的大多数研究中 2，作者只考虑复杂系统中元素之间的成对相互作用，而忽略了其他相互作用，例如多个元素之间的高阶相互作用。近期的一些研究 [3; 4; 5; 6; 7]表明，许多现实系统不仅存在二元相互作用，也存在多个元素同时参与的相互作用。元素之间的此类多方相互作用通常称为高阶相互作用或单纯形相互作用。例如，在科学合作网络中 8，对于一篇作者人数超过两人的论文，作者之间的相互作用并非成对的，而是高阶的。类似的高阶相互作用在神经元尖峰活动 [9; 10]、蛋白质 11 以及其他现实系统中也普遍存在。

由于复杂系统的功能和各种动力学在很大程度上取决于其元素之间的相互作用方式，因此可以预期，高阶相互作用会对具有单纯形结构的复杂系统的集体动力学产生重大影响。过去几年中，关于高阶相互作用对不同动力学过程的深远影响取得了一些重要进展 12，包括渗流 13、公共物品博弈 14、同步 [15; 16]以及疫情传播 [17]。例如，与成对相互作用相比，三方相互作用能够导致许多新颖现象，如 Berezinkii-Kosterlitz-Thouless 渗流转变 13、突发去同步化 15，以及疫情传播的突变相变 [17]。

为了描述各种现实复杂系统中观察到的普遍高阶相互作用，人们基于一些流行的数学工具提出了许多模型 12，例如单纯复形 [18; 19; 7; 20]。维数为 d的单纯形称为 d-单纯形，表示 $d+1$ 个节点之间的一种单一高阶相互作用21，它可以用由 $d+1$个节点构成的完全图来描述。例如，0-单纯形是一个节点，1-单纯形是一个链接，3-单纯形是一个三角形，而4-单纯形是一个四面体。对于一个 d-单纯形 α，其 δ维面 α' 是 α的一个 δ-单纯形，且由 $0 \leqslant \delta < d$ 由 α中节点的一个子集构成，即 $\alpha' \subseteq \alpha$。例如，4-单纯形的面包括四个节点、六个链接和四个三角形。单纯复形是由单纯形组成的集合，这些单纯形沿着各自的面粘合在一起。若单纯复形中的单纯形维数至多为 d，则称其为 d维单纯复形。因此，单纯复形能够以自然的方式描述高阶相互作用。

现有的大多数模型都是随机的，因此精确分析其拓扑和动力学性质是一项颇具挑战性的任务。最近，借助图的边冠积 [22; 23]，研究者提出了一类迭代增长的确定性网络模型 [24; 25]，用以描述高阶相互作用。这类网络称为确定性单纯形网络，因为它们由单纯形构成。该网络族包含伪分形无标度网络 [26] 这一特例，它受到了科学界的广泛关注，研究领域包括分形 [27; 28; 29]、物理学 [30; 31; 32; 33; 34; 35]和控制论[36; 37]。这种确定性构造使得至少可以通过解析方法精确研究相关性质：它们具有 [38] 无标度 [39] 和小世界性质，这些性质在大多数现实世界网络中都能观察到[1]；此外，其归一化拉普拉斯矩阵的所有特征值及其重数都可以精确确定 [24]。

尽管已有研究探讨了确定性单纯形网络的一些结构和代数性质，但其组合性质鲜有研究，或尚未得到充分理解。本文深入研究了确定性单纯形网络中的若干组合问题。我们的主要贡献如下。首先，我们给出了网络的一种替代构造方法，表明这些网络具有自相似性。随后，我们明确确定了支配数、独立数以及色匹配数。最后，对于某些特殊情形，我们给出了无环定向数、根连通无环定向数、生成树数以及完美匹配数的精确公式。我们关于独立数、支配数和生成树数的精确公式推广了 [40; 41; 33] 此前针对伪分形无标度网络得到的结果。

研究上述组-

合问题的主要原因至少有两个方面。首先，这些问题本身具有理论意义 [42; 43; 44; 45]，因为解决它们是一项理论挑战。例如，计算图中所有完美匹配是一个#P 完全问题 [46; 47]。鉴于这类问题的困难性，Lov´asz [48]指出，构造或寻找能够精确求解这些组合问题的特殊图具有重要意义。确定性单纯形网络就属于这类图。另一方面，研究这些组合问题的合理性还在于它们与实际应用密切相关。例如，最小支配集 [49]和最大匹配 [50] 可用于研究网络的结构可控性 51，而最大独立集问题则与图数据挖掘 [52; 53] 密切相关。因此，我们的工作有助于深入理解这些组合问题在应用场景中的高阶结构。

2. 网络构造与性质

文献24提出了这里讨论的单纯形网络族，该网络族基于图的边冠积构造 [22; 23]。设$\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 是两个节点集不相交的图，其中 $\mathcal{G}_1$ 有 n_1 个节点和 m_1 条边。图 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 的边冠积 $\mathcal{G}_1 \circledcirc \mathcal{G}_2$ 是这样得到的：取 $\mathcal{G}_1$ 的一个副本和 $\mathcal{G}_2$的 m_1 个副本，并将 $\mathcal{G}_1$ 的第 i条边的两个端点分别连接到 $\mathcal{G}_2$的第 i个副本中的每个节点，对 $i = 1, 2, \ldots\ldots, m_1$均如此。令 $\mathcal{K}_q$ $(q \geqslant 1)$ 表示 q节点完全图，其中 $\mathcal{K}_1$ 是一个含有孤立节点的图。令 $\mathcal{G}_q(g) = (\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g)), \mathcal{E}(\mathcal{G}_q(g)))$ 表示经过 g 次迭代后所研究的网络，其中$\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g))$ 和 $\mathcal{E}(\mathcal{G}_q(g))$ 分别是节点集和边集。于是，$\mathcal{G}_q(g)$ 在两个参数 q 和 g 的控制下按如下方式构造，其中$q \geqslant 1$ 且 $g \geqslant 0$。

定义1. 对于 $g = 0$, $\mathcal{G}_q(0)$ 是完全图 $\mathcal{K}_{q+2}$。对于 $g \geqslant 0$, $\mathcal{G}_q(g+1)$，通过对 $\mathcal{G}_q(g)$ 执行以下操作得到：对于 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的每一条现有边，创建一个完全图 $\mathcal{K}_q$ 的副本，并将其所有 q节点连接到该边的两个端点。也就是说，$\mathcal{G}_q(g+1) = \mathcal{G}_q(g) \circledcirc \mathcal{K}_q$。

图 1 展示了从 $\mathcal{G}_q(g)$ 获取 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的操作，而图 2 展示了网络在 $q = 1$ 和 $q = 2$ 两种情况下的构建过程。

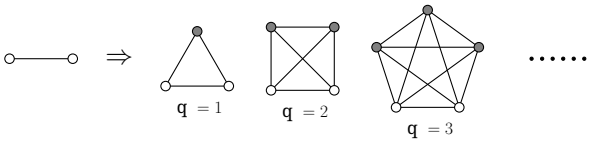

图1. 网络构造方法。对于网络 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的每一条现有边，对箭头右侧执行该操作，即可生成网络 $\mathcal{G}_q(g+1)$。实心圆表示构成完全图的节点$\mathcal{K}_q$，而步骤 $g+1$ 中出现的所有实心圆都与前一步中已存在的边的两个端点开放节点相连 g。

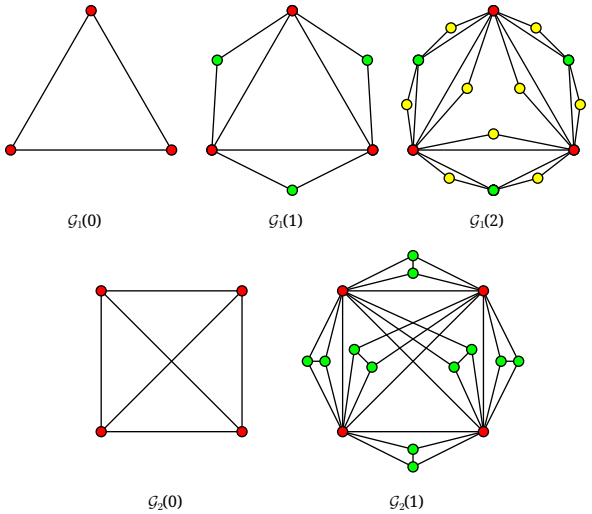

图 2. $q = 1$ 和 2 对应的 $\mathcal{G}_q(g)$ 的前几次迭代。不同迭代中生成的节点以不同颜色标记。

令 $N_{g,q} = |\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g))|$ 和 $M_{g,q} = |\mathcal{E}(\mathcal{G}_q(g))|$分别表示 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的节点数和边数。根据构造，可得 $M_{g,q}$ 和 $N_{g,q}$ 的以下递推关系：

$$M_{g+1,q} = \frac{(q+1)(q+2)}{2} M_{g,q} \tag{1}$$

and

$$N_{g+1,q} = q\, M_{g,q} + N_{g,q}, \tag{2}$$

这与 $N_{0,q} = q + 2$ 和 $M_{0,q} = (q+1)(q+2)/2$一起，导致

$$M_{g,q} = \left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1} \tag{3}$$

and

$$N_{g,q} = \frac{2}{q+3}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1} + \frac{2(q+2)}{q+3}. \tag{4}$$

因此，图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中节点的平均度为$2M_{g,q}/N_{g,q}$，当 g 较大时，该值趋于 $q+3$，这意味着 $\mathcal{G}_q(g)$ 是稀疏的。

对于图 $\mathcal{G}_q(g)$，令 $\mathcal{W}_q(g) = \mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g))\backslash\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g-1))$ 表示在第 g 次迭代时生成的新节点集合。于是，

$$|\mathcal{W}_q(g)| = q\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^g. \tag{5}$$

令 $d_v^{(g,q)}$ 表示在第 g_v 次迭代时创建的图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中节点 v 的度。那么，$d_v^{(g,q)} = (q+1)^{g-g_v+1}$。容易验证，在图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中，对于 $0 < t_v < g$，度为 $(q+1)^{g+1}$ 的节点有 $q+2$ 个，度为 $(q+1)^{g-g_v+1}$ 的节点有 $q\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{t_v}$ 个。

在图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中，度数最高为 $(q+1)^{g+1}$ 的 $q+2$ 个节点称为枢纽节点，它们是在初始交互 $g=0$ 时生成的。令 $h_k(g)$、$k=1$、2、……、$q+2$ 表示图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的 $q+2$ 个枢纽节点，并令 $\mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g))$ 表示这些枢纽节点的集合，即 $\mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g)) = \{h_1(g)\ h_2(g)$ ……、$h_{q+2}(g)\}$。于是，单纯形网络也可以用另一种方式生成，从而凸显其自相似性。

命题2. 给定图 $\mathcal{G}_q(g)$，图 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 可通过合并 $(q+1)(q+2)$ 个 $\mathcal{G}_q(g)$ 的副本得到，~~记为 $\mathcal{G}_q^{(i,j)}(g)$~~ ($1 \le i < j \le q+2$)；其中第 k 个（$k=1$，2，……，$q+2$）枢纽节点记为 $h_k^{(i,j)}(g)$。具体而言，在合并过程中，对于每个 $k=1$，2，……，$q+2$，将 $\mathcal{G}_q(g)$ 对应副本中的枢纽节点 $q+1$ $h_k^{(1,k)}(g)$、$h_k^{(2,k)}(g)$、……、$h_k^{(k-1,k)}(g)$、$h_k^{(k,k+1)}(g)$、……、$h_k^{(k,q+2)}(g)$ 认定为 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的枢纽节点 $h_k(g+1)$。

证明。我们通过对g进行归纳法来证明该命题。对于 $g=0$，证明显然成立。对于 $g>0$，假设结论对 $\mathcal{G}_q(g)$成立，即$\mathcal{G}_q(g)$可由 $\mathcal{G}_q(g-1)$的$(q+1)(q+2)$ 个副本粘合而成，这些副本记作 $\mathcal{G}_q^{(i,j)}(g-1)$，~~其中~~ $1 \le i < j \le q+2$。在粘合过程中，对于每个 $k \in \{1,2,\ldots,q+2\}$，对应的 $\mathcal{G}_q(g-1)$的 $q+1$ 个副本中的 $q+1$ 个枢纽节点 $h_k^{(1,k)}(g-1)$、$h_k^{(2,k)}(g-1)$、……、$h_k^{(k-1,k)}(g-1)$、$h_k^{(k,k+1)}(g-1)$、……、$h_k^{(k,q+2)}(g-1)$，均与 $\mathcal{G}_q(g)$的枢纽节点 $h_k(g)$合并。为便于描述，我们使用

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_q(g) = &\mathbf{J}\big[\mathcal{G}_q^{(1,2)}(g-1), \mathcal{G}_q^{(1,3)}(g-1), \ldots,\\ &\mathcal{G}_q^{(1,q+2)}(g-1), \ldots, \mathcal{G}_q^{(q+1,q-1)}(g-1),\\ &\mathcal{G}_q^{(q+1,q+2)}(g-1); \mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g))\big],\end{aligned}$$

用来表示上述合并过程：将 $\mathcal{G}_q^{(i,j)}(g-1)$ ($1 \le i < j \le q+2$) 合并到 $\mathcal{G}_q(g)$ 中，其中 $\mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g))$ 是 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的 $q+2$ 枢纽节点集，这些节点是从 $\mathcal{G}_q(g-1)$ 的 $(q+1)(q+2)$ 个副本 $\mathcal{G}_q^{(i,j)}(g-1)$ 的枢纽~~节点中识~~别出来的。

接下来我们将证明结论对$\mathcal{G}_q(g+1)$成立。注意，对于任意图 $\mathcal{G}$，若其枢纽节点的度大于 1，则 $\mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}\circledcirc\mathcal{K}_q) = \mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G})$。根据定义1，$\mathcal{G}_q(g+1) = \mathcal{G}_q(g)\circledcirc\mathcal{K}_q$。因此，根据边冠积的定义和归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}_q(g+1) = \mathcal{G}_q(g)\circledcirc\mathcal{K}_q\\ &= \mathbf{J}\big[\mathcal{G}_q^{(1,2)}(g-1), \mathcal{G}_q^{(1,3)}(g-1), \ldots,\\ &\mathcal{G}_q^{(q+1,q+2)}(g-1); \mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g))\big]\circledcirc\mathcal{K}_q\\ &= \mathbf{J}\big[\mathcal{G}_q^{(1,2)}(g-1)\circledcirc\mathcal{K}_q, \mathcal{G}_q^{(1,3)}(g-1)\circledcirc\mathcal{K}_q, \ldots,\\ &\mathcal{G}_q^{(q+1,q+2)}(g-1)\circledcirc\mathcal{K}_q; \mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g))\big]\\ &= \mathbf{J}\big[\mathcal{G}_q^{(1,2)}(g), \mathcal{G}_q^{(1,3)}(g), \ldots, \mathcal{G}_q^{(q+1,q+2)}(g);\\ &\mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g))\big]\\ &= \mathbf{J}\big[\mathcal{G}_q^{(1,2)}(g), \mathcal{G}_q^{(1,3)}(g), \ldots, \mathcal{G}_q^{(q+1,q+2)}(g);\\ &\mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g+1))\big].\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

图3展示了图 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 关于 $q=1$ 和 $q=2$的第二种构造方式。

单纯形网络展现出一些显著特性 [24]，正如大多数真实网络中观察到的那样 [1]。它们具有无标度特性，因为其节点度遵循幂律分布 $P(d) \sim d^{-\gamma_q}$，其中 $\gamma_q = 2 + \frac{\ln(q+2)}{\ln(q+1)} - \frac{\ln 2}{\ln(q+1)}$。它们具有小世界特性，因为其直径随节点数呈对数增长，且其平均聚类系数趋近于一个较大的常数 $\frac{q^2+3q+3}{q^2+3q+5}$。此外，它们具有有限的谱维数$\frac{2[\ln(q^2+3q+3)-\ln 2]}{\ln(q+1)}$。

在介绍了单纯形网络 $\mathcal{G}_q(g)$ 的两种构造方法及其相关性质后，接下来我们将分析研究这些网络的一些组合性质。

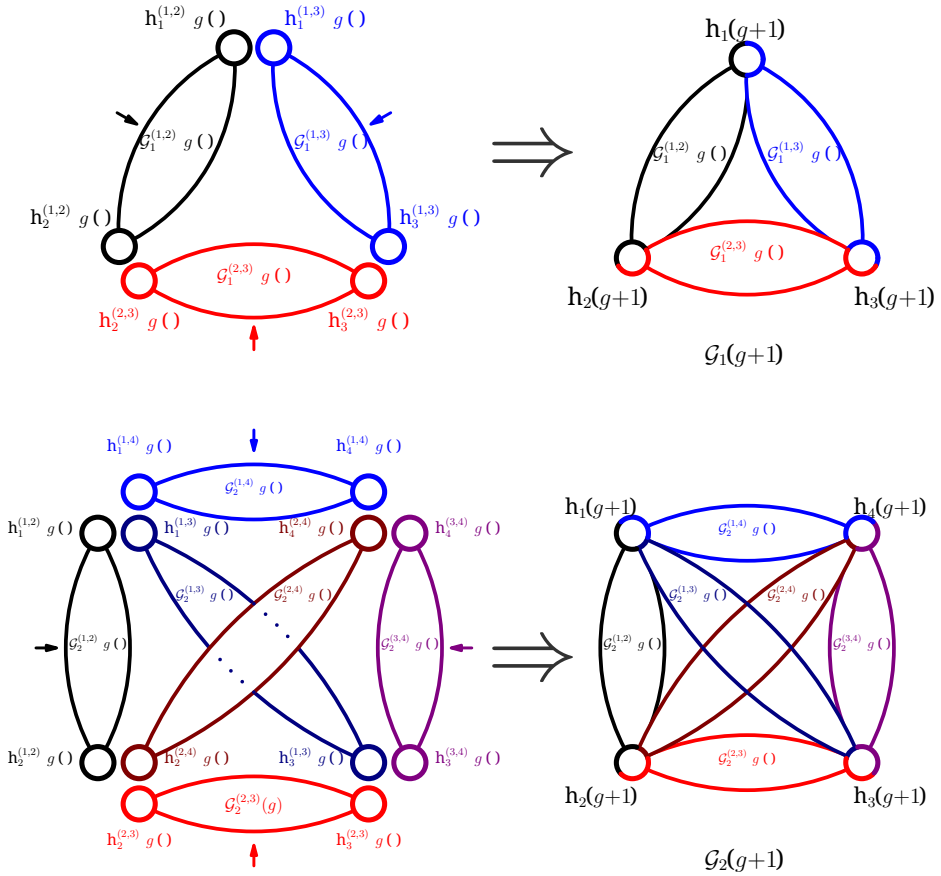

图3. 对于 $q=1$ 和 $q=2$的两种特殊情形，单纯网络的第二种构造方法。对于每个$k\in\{1,2,\ldots,q+2\}$，相应的 $\mathcal{G}_q(g-1)$副本中的 $q+1$ 枢纽节点 $h_k^{(1,k)}(g-1)$、$h_k^{(2,k)}(g-1)$、……、$h_k^{(k-1,k)}(g-1)$、$h_k^{(k,k+1)}(g-1)$、……、$h_k^{(k,q+2)}(g-1)$被识别为 $\mathcal{G}_q(g)$的枢纽节点 $h_k(g)$。

3. 独立数

对于简单连通图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V}(\mathcal{G})\ \mathcal{E}(\mathcal{G}))$，简记为 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$，$\mathcal{G}$ 的独立集是 $\mathcal{V}$ 的一个真子集 $\mathcal{I}$，且 $\mathcal{I}$ 中任意一对节点都不相邻。若一个独立集不是任何其他独立集的子集，则称其为极大独立集。若一个极大独立集具有可能的最大基数或大小，则称其为最大独立集。图 $\mathcal{G}$ 的任意最大独立集的基数称为 $\mathcal{G}$ 的独立数，记为 $\alpha(\mathcal{G})$。现在我们研究图 $\mathcal{G}_q(g)$ 的独立数，记为 $\alpha_q(g)$。

定理 3. 对于所有 $g\geq 0$，$\mathcal{G}_q(g)$ 的独立数为：

$$\alpha_q(g)=\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^g. \tag{6}$$

证明。对于 $g=0$，$\mathcal{G}_q(0)$ 是一个包含 $q+2$ 个节点的完全图。显然，$\alpha_q(0)=1$，这与式（6）一致。

对于 $g\geq 1$，根据定义1，$\mathcal{G}_q(g)$ 是通过将图 $\mathcal{G}_q(g-1)$ 中的每条 $M_{g-1,q}$ 边替换为一个（$q+2$）节点完全图，从 $\mathcal{G}_q(g-1)$ 得到的，该完全图包含该边及其两个端点。令 $\mathcal{K}_{q+2}^{(1)},\mathcal{K}_{q+2}^{(2)},\ldots,\mathcal{K}^{(M_{g-1,q})}$ $_{q+2}$ 分别表示与图 $\mathcal{G}_q(g-1)$ 中的 $M_{g-1,q}$ 条边对应的$M_{g-1,q}$ 完全图。于是，对于 $\mathcal{G}_q(g)$ 的任意独立集 $\mathcal{I}$，在 $\mathcal{K}_{q+2}^{(i)}$，$i=1,2,\ldots,M_{g-1,q}$ 中至多有一个节点。换言之，对于 $i=1,2,\ldots,M_{g-1,q}$，$\left|\mathcal{I}\cap\mathcal{K}_{q+2}^{(i)}\right|\leq 1$。因此，$|\mathcal{I}|\leq M_{g-1,q}=\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^g$，这意味着 $\alpha_q(g)\leq\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^g$。

另一方面，对于在第 g 代创建的每个节点 u，若其属于某个团 $\mathcal{K}_{q+2}^{(i)}$（即 $u\in\mathcal{K}_{q+2}^{(i)}$），$1\leq i\leq M_{g-1,q}$，则它只与这个（$q+2$）-团中的其他 $q+1$ 个节点相连。因此，从每个 $\mathcal{K}_{q+2}^{(i)}$、$i=1$、2、……、$M_{g-1,q}$ 中任意选取一个新创建的节点，即可得到一个独立集

其大小等于 $M_{g-1,q}=\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^g$ 的 $\mathcal{G}_q(g)$，由此得到 $\alpha_q(g)\geq\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^g$。

综合以上论证，可得如下结论。

□

公式（6）将 [41] 中针对 $q=1$的结果推广到了正整数 q。

4. 支配数

对于图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$，$\mathcal{G}$ 的支配集是 $\mathcal{V}$ 的一个子集 $\mathcal{D}$，使得每个不属于 $\mathcal{D}$ 的节点都至少与 $\mathcal{D}$ 中的一个节点相邻。若一个支配集不是任何其他支配集的真子集，则称其为极小支配集。若一个支配集在所有支配集中具有最小基数，则称其为最小支配集。图 $\mathcal{G}$ 的任意最小支配集的基数称为 $\mathcal{G}$ 的支配数，记作 $\gamma(\mathcal{G})$。对于图 $\mathcal{G}$，关系 $\gamma(\mathcal{G})\leq\alpha(\mathcal{G})$ 总是成立 [54; 55]。

令 $\gamma_q(g)$ 表示图 $\mathcal{G}_q(g)$ 的支配数。当 g 较小时，$\gamma_q(g)$ 很容易确定。由于 $\mathcal{G}_q(0)$ 是一个有 $q+2$ 个节点的完全图，$\gamma_q(0)=1$，并且每个节点都可以视为 $\mathcal{G}_q(0)$ 的一个最小支配集。对于 $\mathcal{G}_q(1)$，其支配数由以下引理给出。

引理4。图 $\mathcal{G}_q(1)$ 的支配数为 $\gamma_q(1)=q+1$。枢纽节点集 $\mathcal{V}_h(\mathcal{G}_q(1))$ 的每个包含 $q+1$ 个节点的子集，都是 $\mathcal{G}_q(1)$ 的最小支配集。

证明。根据命题2，$\mathcal{G}_q(1)$ 可通过在枢纽节点 $\mathcal{K}_{q+2}^{(i,j)}$、~~$1\leq i<$~~ $j\leq q+2$ 处连接 $(q+1)(q+2)$ 2 个 $\mathcal{K}_{q+2}$ 的副本生成。现在我们证明，对于 $\mathcal{G}_q(1)$ 的任意支配集 $\mathcal{D}$，都可以构造出一个仅包含 $\mathcal{G}_q(1)$ 中枢纽节点的支配集 $\mathcal{D}'$。

假设 $v\in\mathcal{D}$ 不是枢纽节点。根据构造，v 的邻居全部来自同一个完全图 $\mathcal{K}_{q+2}^{(i,j)}$。我们可以用枢纽节点 $h_i(1)$ 或 $h_j(1)$ 替换 v，从而得到一个支配集 $\mathcal{D}_v$。以类似的方式，我们可以替换 $\mathcal{D}_v$ 中的其他非枢纽节点，从而得到一个支配集 $\mathcal{D}'$。因此，要确定 $\mathcal{G}_q(1)$ 的支配数，只需选择枢纽节点来构成最小支配集。

我们继续证明，对于任意仅包含枢纽节点的 $\mathcal{G}_q(1)$的最小支配集 $\mathcal{D}$，$|\mathcal{D}|=q+1$。反设 $|\mathcal{D}|<q+1$，这意味着至少存在两个枢纽节点 $h_i(1)$和 $h_j(1)$不属于 $\mathcal{D}$，它们属于完全图 $\mathcal{K}_{q+2}^{(i,j)}$。于是，$\mathcal{K}_{q+2}^{(i,j)}$ 中的非枢纽节点未被支配，这意味着 $\mathcal{D}$ 不是支配集。因此，$|\mathcal{D}|\geq q+1$和$\gamma_q(1)\geq q+1$。另一方面，容易验证，任意 $q+1$ 个枢纽节点都能支配 $\mathcal{G}_q(1)$中的所有节点。因此，$\gamma_q(1)=q+1$。

□

图4展示了 $\mathcal{G}_1(1)$和 $\mathcal{G}_2(1)$的最小支配集。

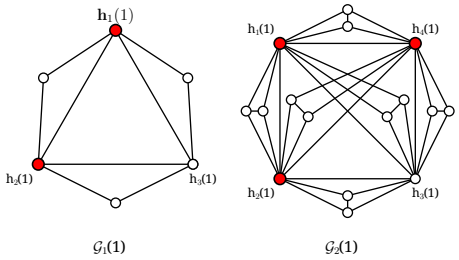

图4. $\mathcal{G}_1(1)$ 和 $\mathcal{G}_2(1)$ 的最小支配集示例。

对于 $\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g))$ 的一个子集 $\mathcal{C}$，如果节点 $v\in\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g))\backslash\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}$ 中至少一个节点相邻，则称 v 被 $\mathcal{C}$ 支配。因此，如果 $\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g))\backslash\mathcal{C}$ 中的所有节点都被 $\mathcal{C}$ 支配，那么 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{G}_q(g)$ 的支配集。

引理5. 对于与带有 $g\geq 1$ 的图 $\mathcal{G}_q(g)$ 相对应的 $\mathcal{V}(\mathcal{G}_q(g))$ 的子集 $\mathcal{C}$，如果 $\mathcal{G}_q(g)$ 的所有非枢纽节点都属于 $\mathcal{C}$ 或被 $\mathcal{C}$ 支配，那么 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{G}_q(g)$ 的支配集。

证明。我们只需证明，$\mathcal{G}_q(g)$ 的所有 $q+2$ 枢纽节点要么被 $\mathcal{C}$ 支配，要么包含在 $\mathcal{C}$中。对于图 $\mathcal{G}_q(g)$ 的任意枢纽节点 $h_i(g)$（$i=1$、2、.....、$q+2$），它与另一个枢纽节点 $h_j(g)$（$i\neq j$）在第 g 代共同构成一个包含 q 个节点的团 $\mathcal{K}_q$，该团与 $h_i(g)$ 及 $h_j(g)$ 一起，在 $\mathcal{G}_q(g)$ 中形成一个（$q+2$）-团。若 $h_i(g)\in\mathcal{C}$，则引理成立。对于 $h_i(g)\notin\mathcal{C}$ 的情形，下面证明 $h_i(g)$ 被 $\mathcal{C}$ 中的某个节点支配。由于 $\mathcal{K}_q$ 中新引入的 q 个节点是 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的非枢纽节点，对于任意节点 $v\in\mathcal{K}_q$，它要么包含在 $\mathcal{C}$ 中，要么被 $\mathcal{C}$ 支配。若 $v\in\mathcal{C}$，则 $h_i(g)$ 被$\mathcal{C}$ 支配。若 v 不在 $\mathcal{C}$ 中，而是被 $h_j(g)$ 或其生成（$q+2$）- 团中的其他非枢纽节点支配，则$h_i(g)$ 被 $\mathcal{C}$ 支配。

□

现在我们可以确定在 $g\geq 1$ 的情况下，图 $\mathcal{G}_q(g)$ 的支配数 $\gamma_q(g)$。

定理 6. 对于所有 $g \geq 1$, $\mathcal{G}_q(g)$ 的支配数为:

$$\gamma_q(g) = \frac{q^2+2q-1}{q+3}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g-1} + \frac{2(q+2)}{q+3}.$$

证明。根据命题2, $\mathcal{G}_q(g+1)$ 可通过将 $\mathcal{G}_q(g)$ 的 2 个副本 $_{q+1}(_{q+2})$ 在~~$q+2$ 枢~~纽节点处连接而生成, 分别记为 $\mathcal{G}_q^{(1)}(g)$、$\mathcal{G}_q^{(2)}(g)$、.....、$\mathcal{G}^{(\frac{(q+1)(q+2)}{2})}{}_q(g)$。设 $\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1))$ 表示 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的一个支配集。对于任意 i =1, 2, . . . , $(_{q+1})(_{q+2})$ 2 , $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$ 的非枢纽节点均~~受到支配~~或属于 $\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(g)$。根据引理5, $\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(g)$ 是 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$ 的一个支配集。因此, $|\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1))|$ 可根据 $|\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(g)|$ 计算如下:

$$|\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1))| = -q|\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g+1))| + \sum_{i=1}^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}} |\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(g)|,$$

其中, 右侧第一项用于补偿在 $\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1))$ 中选取枢纽节点时产生的重复计数。由于 $|\mathcal{V}_{\mathrm{h}}(\mathcal{G}_q(g+1))| = q+2$,

$$|\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1))| \geq \sum_{i=1}^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}} |\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(g)| - q(q+2).$$

特别地, 当 $\mathcal{D}(\mathcal{G}_q(g+1))$ 是 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的最小支配集, 记作 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1))$ 时,

$$\begin{aligned} &|\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1))| \\ &\geq -q(q+2) + \sum_{i=1}^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}} |\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(g)| \\ &\geq -q(q+2) + \frac{(q+1)(q+2)}{2}|\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g))|, \end{aligned} \tag{7}$$

其中, 第二个不等式是因为 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(g)$ 是 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$ 的一个支配集, 其基数大于 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$ 的最小支配集的基数。

注意, 当$\mathcal{G}_q(g+1)$的所有枢纽节点都属于 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1))$, 且 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1))$与每个 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$的交集都构成 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$的最小支配集时, 式 (7) 两边的项彼此相等。换言之, $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1))$是 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$的最小支配集 $\mathcal{D}^{(i)}\min(\mathcal{G}_q(g))$的并, 使得 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g+1))$包含$\mathcal{G}_q(g+1)$的所有枢纽节点。因此, 对于每个 $\mathcal{D}^{(i)}\min(\mathcal{G}_q(g))$, 其中包含的 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$的枢纽节点数量尽可能多。对于 $g=1$, $\mathcal{G}_q(2)$的所有枢纽节点以及每个 $\mathcal{G}_q^{(i)}(1)$中任意其他的 $q-1$枢纽节点构成 $\mathcal{G}_q(2)$的一个最小支配集 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(2))$。根据引理5, $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(2)) \cap \mathcal{G}_q^{(i)}(1)$构成 $\mathcal{G}_q^{(i)}(1)$的一个最小支配集。容易验证, 对于 $g=1$, 式 (7) 两边的项彼此相等。利用 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(2))$, 我们可以通过合并每个 $\mathcal{G}_q^{(i)}(2)$的最小支配集 $\mathcal{D}^{(i)}\min(\mathcal{G}_q(2))$, 并移除 $\mathcal{G}_q(3)$中重复的枢纽节点, 构造出 $\mathcal{G}_q(3)$的一个最小支配集 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(3))$。类似地, 当 $g \geq 4$时, 我们可以迭代地构造 $\mathcal{G}_q(g)$的一个最小支配集 $\mathcal{D}_{\min}(\mathcal{G}_q(g))$, 此时式 (7) 成立等号。于是, 我们有

$$\gamma_q(g+1) = -q(q+2) + \frac{(q+1)(q+2)}{2}\gamma_q(g) \tag{8}$$

对所有 $g \geq 1$ 均成立。利用初始条件 $\gamma_q(1) = q+1$, 解上述方程可得:

$$\gamma_q(g) = \frac{q^2+2q-1}{q+3}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g-1} + \frac{2(q+2)}{q+3}.$$

证明至此完成。 □

定理 6 可归结为针对 $q=1$ 在 [40] 中得到的结果。

5. 色数

图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 的节点着色是指对 $\mathcal{G}$ 的节点进行着色, 使得 $\mathcal{V}$ 中任意两个相邻节点的颜色都不同。图 $\mathcal{G}$ 的色数记为 $\chi(\mathcal{G})$, 它是为 $\mathcal{G}$ 的节点着色所需的最少颜色数。对于图 $\mathcal{G}$, 节点着色与其色多项式 $P(\mathcal{G}, \lambda)$ 密切相关; 色多项式是一个多项式, 用于统计使用 λ 种或更少颜色为 $\mathcal{G}$ 着色的不同方法数。色多项式最早由乔治·戴维·伯克霍夫 [56] 引入。它包含的关于图 $\mathcal{G}$ 可着色性的信息至少与色数一样多。事实上, $\chi(\mathcal{G})$ 是色多项式的最小正整数非根, 也就是说,

$$\chi(\mathcal{G}) = \min\{\lambda : P(\mathcal{G}, \lambda) > 0\}. \tag{9}$$

q 个节点的完全图 $\mathcal{K}_q$ 的色多项式为

$$P(\mathcal{K}_q, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-q+1). \quad (10)$$

对于两个图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G}) \ \mathcal{E}(\mathcal{G}))$ 和 $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}(\mathcal{G}') \ \mathcal{E}(\mathcal{G}'))$，令 $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}'$ 表示它们的并，其节点集为 $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{G}')$，边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup \mathcal{E}(\mathcal{G}')$；令 $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ 表示它们的交，其节点集为 $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{G}')$，边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{G}')$。那么，图 $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}'$ 的色多项式为 [57]

$$P(\mathcal{G} \cup \mathcal{G}', \lambda) = \frac{P(\mathcal{G}, \lambda) \cdot P(\mathcal{G}', \lambda)}{P(\mathcal{G} \cap \mathcal{G}', \lambda)}. \quad (11)$$

引理 7. 对于所有 $g \geq 0$， $\mathcal{G}_q(g)$ 的色多项式为

$$P(\mathcal{G}_q(g), \lambda) = \lambda(\lambda-1)\prod_{i=2}^{q+1}(\lambda-i)^{\frac{2}{q(q+3)}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\frac{2}{q(q+3)}}. \quad (12)$$

证明。 命题2表明， $\mathcal{G}_q(g+1)$ 实际上是由 $\mathcal{G}_q(g)$ 的 $\frac{(q+1)(q+2)}{2}$ 个副本在~~$q+2$ 枢~~纽节点处粘合而成，分别记为 $\mathcal{G}_q^{(1)}(g)$、 $\mathcal{G}_q^{(2)}(g)$、……、 $\mathcal{G}^{(\frac{(q+1)(q+2)}{2})}{}_q(g)$。由于$\mathcal{G}_q(g+1)$ 的枢纽节点彼此相连， $\mathcal{G}_q(g+1)$ 也可以由 $\mathcal{G}_q(g)$ 的 $\frac{(q+1)(q+2)}{2}$ 个副本，在由其 $q+2$ 枢纽节点构成的完全图 ~~$\mathcal{K}_{q+2}$ 的~~ $\frac{(q+1)(q+2)}{2}$ 条边处合并而得。也就是说，

$$\mathcal{G}_q(g+1) = \mathcal{K}_{q+2} \cup \mathcal{G}_q^{(1)}(g) \cup \mathcal{G}_q^{(2)}(g) \cup \ldots \cup \mathcal{G}_q^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}}(g),$$

其中

$$\mathcal{K}_{q+2} \cap \mathcal{G}_q^{(1)}(g) = \mathcal{K}_2$$

and

$$\left(\mathcal{K}_{q+2} \cup \mathcal{G}_q^{(1)}(g) \cup \mathcal{G}_q^{(2)}(g) \ldots \cup \mathcal{G}_q^{(j)}(g)\right) \cap \mathcal{G}_q^{(j+1)}(g) = \mathcal{K}_2,$$

对于所有 $1 \leq j \leq \frac{(q+1)(q+2)}{2}$。因此，通过使用等式 (11) $\frac{(q+1)(q+2)}{2}$ 次，我们建立了 $P(\mathcal{G}_q(g+1) \ \lambda)$ 与 $P(\mathcal{G}_q(g) \ \lambda)$ 之间的递推关系：

$$P(\mathcal{G}_q(g+1), \lambda) = \frac{(P(\mathcal{G}_q(g), \lambda))^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}} \cdot P(\mathcal{K}_{q+2}, \lambda)}{(P(\mathcal{K}_2, \lambda))^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}}}. \quad (13)$$

根据初始条件 $P(\mathcal{G}_q(0) \ \lambda) = P(\mathcal{K}_{q+2}, \lambda)$ 和公式 (10)，求解公式 (13) 可得到公式 (12)。 □

结合公式 (9) 和引理 7，可得到以下定理。

定理 8。 对于所有 $g \geq 0$， $\mathcal{G}_q(g)$ 的色数为 $\chi(\mathcal{G}_q(g)) = q+2$。

6. 无环定向的枚举

对于无向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，其无环定向是指为 $\mathcal{G}$ 中的每条边指定一个方向， $\mathcal{G}$ 使其成为有向无环图 [58]。当存在一个不同于其他节点的根节点，且从 $\mathcal{G}$ 中每个节点都能到达该根节点时， $\mathcal{G}$ 所得有向图中的这种无环定向称为无环根连通定向 [59]。

本节旨在确定图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中无环定向的数量，以及无环根连通定向的数量。为实现这一目标，我们采用 Tutte 多项式 [60]。对于图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G}) \ \mathcal{E}(\mathcal{G}))$，其 Tutte 多项式 $T(\mathcal{G}; x, y)$ 定义如下：

$$T(\mathcal{G}; x, y) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}} (x-1)^{r(\mathcal{G})-r(\mathcal{H})}(y-1)^{n(\mathcal{H})}, \quad (14)$$

其中，求和遍历 $\mathcal{G}$ 的所有生成子图$\mathcal{H}$， $r(\mathcal{G}) = |\mathcal{V}(\mathcal{G})| - k(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 的秩， $n(\mathcal{G}) = |\mathcal{E}(\mathcal{G})| - |\mathcal{V}(\mathcal{G})| + k(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 的零度，而 $k(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}$ 的连通分量数。

图 $\mathcal{G}$ 的 Tutte 多项式在 (x, y) 平面某一点处的取值，与 $\mathcal{G}$ [61] 的许多组合性质相关。已有研究表明， $T(\mathcal{G}; 2, 0)$ 等于 $\mathcal{G}$ [58] 的无环定向数量，而 $T(\mathcal{G}; 1, 0)$ 等价于 $\mathcal{G}$ [59] 的根连通无环定向数量。此外，Tutte 多项式 $T(\mathcal{G}; x, y)$ 还与图 $\mathcal{G}$ 的色多项式 $P(\mathcal{G}, \lambda)$ 有关。具体而言， $P(\mathcal{G}, \lambda)$ 可表示为 $y = 0$ 处的 $T(\mathcal{G}; x, y)$ 的形式

$$P(\mathcal{G}, \lambda) = (-\lambda)^{k(\mathcal{G})}(-1)^{n(\mathcal{G})}T(\mathcal{G}; 1-\lambda, 0). \quad (15)$$

Tutte 多项式与色多项式之间的这种联系，使得能够确定 $\mathcal{G}_q(g)$ 的无环定向数量和根连通无环定向数量。

定理 9. 对于具有 $g \geq 0$ 的图 $\mathcal{G}_q(g)$，其无环定向的数目为

无环定向的数目为

$$N_{\mathrm{ao}}(\mathcal{G}_q(g)) = 2\left[\frac{(q+2)!}{2}\right]^{\frac{2}{q(q+3)}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\frac{2}{q(q+3)}}, \tag{16}$$

根连通无环定向的数量为

$$N_{\mathrm{rao}}(\mathcal{G}_q(g)) = [(q+1)!]^{\frac{2}{q(q+3)}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\frac{2}{q(q+3)}}. \tag{17}$$

证明。引理 7 给出了图 $\mathcal{G}_q(g)$ 的色多项式，结合式（15）中关于 Tutte 多项式与色多项式的关系，可得

$$T(\mathcal{G}_q(g);x,0) = x\prod_{i=1}^{q}(x+i)^{\frac{2}{q(q+3)}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\frac{2}{q(q+3)}}. \tag{18}$$

将 $x=2$ 和 $x=1$ 代入式（18），我们得到图 $\mathcal{G}_q(g)$ 的无环定向数量和根连通无环定向数量，分别如式（16）和式（17）所示。

□

7. 完美匹配的数量

对于图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$，$\mathcal{G}$ 的一个匹配 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个子集，其中 $\mathcal{M}$ 中任意两条边都不共享同一个节点。如果某个节点是匹配中某条边的端点，则称该节点被此匹配覆盖。对于节点数为偶数的图 $\mathcal{G}$，其完美匹配是能够匹配图中所有节点的匹配。已有结果表明，对于节点数为偶数的完全图，其完美匹配数为 $(q-1)!!$ [62]。

对于图 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 和 $\mathcal{G}_q(g)$，根据命题2中给出的第二种构造方法，它们的节点数满足 $N_{g+1,\ q}=(q+1)(q+2)_2\quad N_{g,\ q}-q(q+2)$。因此，当 q 为偶数时，$N_{g,\ q}$ 总是偶数；但当 q 为奇数时，$N_{g,\ q}$ 可能是奇数。于是，当 q 为奇数时，图 $\mathcal{G}_q(g)$ 可能不存在完美匹配。下面我们将证明，当 q 为偶数时，图 $\mathcal{G}_q(g)$ 总是存在完美匹配。

定理10。当 q 为偶数且不小于2时，对于所有 $g\geq 0$，$\mathcal{G}_q(g)$中总存在完美匹配。

证明。对 g 使用归纳法。对于 $g=0$，$\mathcal{G}_q(0)$ 是一个有 $q+2$ 个节点的完全图。$\mathcal{G}_q(0)$ 中存在 $(q+1)!!$ 个完美匹配。因此，结论成立

当 $g=0$ 时。假设 $\mathcal{G}_q(g)$ 中存在一个完美匹配。设 $\mathcal{M}_g$ 是 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的一个完美匹配，其中 $g\geq 0$。根据定义1中的构造，$\mathcal{G}_q(g+1)$ 是由 $\mathcal{G}_q(g)$ 得到的：将 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的每条 $M_{g,\ q}$ 边替换为一个含有 $(q+2)$ 个节点的完全图，其中包括该边及其两个端点。令 $\mathcal{K}^{(1)}_{q+2}$、$\mathcal{K}^{(2)}_{q+2}$、……、$\mathcal{K}^{(M_{g,q})}{}_{q+2}$ 表示这些 $M_{g,\ q}$ 完全图。对于这些完全图中的每一个，由于它对应于 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的一条边，且其两个端点已由 $\mathcal{M}_g$ 覆盖，因此可以在该完全图中选取 $q/2$ 条彼此独立的边，以覆盖其余节点。如此便可得到 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的一个完美匹配。

□

接下来，我们确定偶数 q时 $\mathcal{G}_q(g)$中的完美匹配数，记作 $N_{\mathrm{per}}(g,q)$。为此，我们先为图 $\mathcal{G}_q(g)$定义一些中间变量。令 $\Upsilon_0(\mathcal{G}_q(g))$表示 $\mathcal{G}_q(g)$的匹配集合，其中两个枢纽节点 $h_1(g)$和 $h_2(g)$均未匹配，而 $\mathcal{G}_q(g)$中的其他所有节点均已匹配。令 $A_q(g)$表示 $\Upsilon_0(\mathcal{G}_q(g))$的基数。令 $\Upsilon_1(\mathcal{G}_q(g))$表示 $\mathcal{G}_q(g)$的完美匹配集合，并令 $B_q(g)=N_{\mathrm{per}}(g,q)$表示 $\Upsilon_1(\mathcal{G}_q(g))$的基数。注意，在 $\mathcal{G}_q(g)$中，不存在这样的匹配：$h_1(g)$或 $h_2(g)$未匹配，而所有其他节点均被覆盖。

定理 11. 对于偶数 $q\geq 2$ 和 $g\geq 0$，$\mathcal{G}_q(g)$ 中完美匹配的数量为

$$N_{\mathrm{per}}(g,q) = [(q+1)!!]^{\frac{2}{q(q+3)}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\frac{2}{q(q+3)}}\times (q+1)^{-\frac{2(q+2)}{q(q+3)^2}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}+\frac{g+2}{q+3}g+\frac{(q+1)(q+2)^2}{q(q+3)^2}}. \tag{19}$$

证明. 注意到 $B_q(g)=N_{\mathrm{per}}(g,q)$。现在我们推导出 $A_q(g+1)$ 和 $B_q(g+1)$ 的递归关系，并以此进一步确定 $B_q(g)$ 的精确表达式。根据命题2以及 $A_q(g)$ 和 $B_q(g)$ 的定义，可得到 $A_q(g)$ 和 $B_q(g)$ 的以下递推关系：

$$A_q(g+1) = (q-1)!!B_q^{\frac{q}{2}}(g)A_q^{\frac{q^2+2q+2}{2}}(g), \tag{20}$$

$$B_q(g+1) = (q+1)!!B_q^{\frac{q}{2}+1}(g)A_q^{\frac{q(q+2)}{2}}(g). \tag{21}$$

公式（20）解释如下。根据命题2，图 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的任意匹配都可以通过将 $(q+1)\ q+2)\ 2$ 个 $\mathcal{G}_q(g)$ 的副本在 $q+2$ 枢纽顶点处的匹配连接起来构造得到。根据上述分析，对于 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的任意匹配，其匹配的枢纽顶点

$\mathcal{G}_q(g+1)$ 必须成对出现。因此，$\Upsilon_0(\mathcal{G}_q(g+1))$ 中的任意匹配，都可以从 $\Upsilon_0(\mathcal{G}_q(g))$ 和 $\Upsilon_1(\mathcal{G}_q(g))$ 中的匹配递归得到，这对应于 $\mathcal{G}_q(g)$ 的 $(q+1)(q+2)$ 2 个副本，记为 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$、$i=1$、2、……、$(q+1)(q+2)$ 2。此外，公式（20）中的相关量解释如下：$(q-1)!!$ 表示将 q 个已匹配的枢纽顶点配对的方法数，该数等于 $\mathcal{K}_q$ 的完美匹配数；$\frac{q}{2}$ 表示 $h_1(g)$ 或 $h_2(g)$ 中已匹配的枢纽顶点对 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$；而 $\frac{q^2+2q+2}{2}=(q+1)(q+2)$ 2 $-\frac{q}{2}$ 表示 $h_1(g)$ 或 $h_2(g)$ 在 $\mathcal{G}_q^{(i)}(g)$ 中为空缺的情形。类似地，我们可以解释公式（21）。

图5给出了在特定的 $q=2$ 情形下，方程和 (21) (20) 的图示。

将方程 (21) 除以方程 (20)，可得 $B_q(g)$ $A_q(g)$ 的递归关系：

$$\frac{B_q(g+1)}{A_q(g+1)}=(q+1)\frac{B_q(g)}{A_q(g)}. \tag{22}$$

利用初始条件 $B_q(0)$ $A_q(0)$ $=(q+1)!!$ $(q-1)!!=q+1$，求解方程 (22) 得到

$$\frac{B_q(g)}{A_q(g)}=(q+1)^{g+1}, \tag{23}$$

这意味着

$$A_q(g)=\frac{B_q(g)}{(q+1)^{g+1}}. \tag{24}$$

将此表达式代入式（21）可得

$$B_q(g+1)=\frac{(q+1)!!}{(q+1)^{\frac{q(q+2)(g+1)}{2}}}B_q^{\frac{(q+1)(q+2)}{2}}(g). \tag{25}$$

在初始条件 $B_q(0)=(q+1)!!$ 下，求解方程（25）得到方程（19）。 □

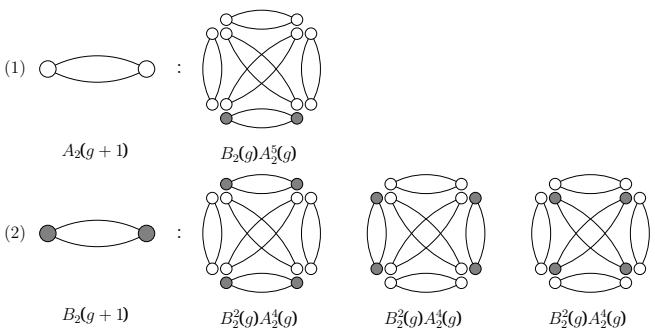

图5. 图示了图 $\mathcal{G}_q(g+1)$中$q=2$时，$\Upsilon_0(\mathcal{G}_q(g+1))$和 $\Upsilon_1(\mathcal{G}_q(g+1))$的匹配递归配置。每个填充的节点表示一个覆盖节点，而每个空白节点表示一个空置节点。

8. 生成树的数量

对于一个有 $|\mathcal{V}|$ 个节点的图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$，$\mathcal{G}$ 的生成树是 $\mathcal{G}$ 的一个连通子图，其节点集为 $\mathcal{V}$，边数为 $|\mathcal{V}|-1$。图 $\mathcal{G}$ 中生成树的数量称为$\mathcal{G}$ 的复杂度，这是一个重要的图不变量 [63]。

引理12. 设 u 和 v 表示完全图 $\mathcal{K}_q$ 中的两个不同节点，该图有 $q\geq 3$个节点。设$N_{u,v}(\mathcal{K}_q)$表示 $\mathcal{K}_q$的生成森林数量，每个生成森林由两棵树组成，且 u 和 v分别属于不同的树。则$N_{u,v}(\mathcal{K}_q)=2q^{q-3}$。

证明。显然，$N_{u,v}(\mathcal{K}_q)$等于图 $\mathcal{K}_q$中满足以下条件的生成树数量：其中 u 和v 彼此相邻。根据凯莱公式 [64]，一个含有 q个节点的完全图的生成树数量为 q^{q-2}。对于从 $\mathcal{K}_q$中随机选取的一棵生成树 $\mathcal{T}$，节点u 的期望度为 $^2(q-1)$ q 。于是，在 $\mathcal{T}$ 中，u 与 v 相邻的概率为 $^2(q-1)$ q $\cdot\frac{1}{q-1}=\frac{2}{q}$。因此，$N_{u,v}(\mathcal{K}_q)=q^{q-2}\cdot\frac{2}{q}=2q^{q-3}$。 □

定理 13. 设 $N_{\mathrm{st}}(g,q)$ 表示图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中生成树的数量，其中 $g\geq 0$和 $q\geq 1$。于是，

$$N_{\mathrm{st}}(g,q)=2^{\frac{2(q+1)}{q(q+3)^2}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\left(\frac{q+1}{q+3}\right)g-\frac{(q+1)^2(q+2)}{q(q+3)^2}}\times (q+2)^{\frac{2(q^2+2q-1)}{q(q+3)^2}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}+\left(\frac{q+1}{q+3}\right)g+\frac{q^3+2q^2-q+2}{q(q+3)^2}}.$$

证明. 根据定义1，$\mathcal{G}_q(g+1)$ 可由 $\mathcal{G}_q(g)$ 得到：将图 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的每条边替换为一个$\mathcal{K}_{q+2}$ 团，该团包含这条边及其两个端点。因此，对于任意生成树 $\mathcal{T}_g$（属于$\mathcal{G}_q(g)$），可以按以下方式构造 $\mathcal{G}_q(g+1)$ 的生成树：将 $\mathcal{T}_g$ 中的每条边替换为 $\mathcal{K}_{q+2}$ 团的一棵生成树，并将 $\mathcal{G}_q(g)$ 中存在但不在 $\mathcal{T}_g$ 中的每条边 (u,v) 替换为 $\mathcal{K}_{q+2}$的一棵生成森林，该森林由两棵树组成，且 u和 v 分别位于不同的树中。于是，利用引理 12，可得

$$\begin{aligned}&N_{\mathrm{st}}(g+1,q)\\&=[(q+2)^q]^{N_{g,q}-1}\,[2(q+2)^{q-1}]^{M_{g,q}-N_{g,q}+1}\,N_{\mathrm{st}}(g,q)\\&=2^{M_{g,q}-N_{g,q}+1}\,(q+2)^{(q-1)M_{g,q}+N_{g,q}-1}\,N_{\mathrm{st}}(g,q),\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $N_{g,\,q}-1$ 是 $\mathcal{G}_q(g)$ 中生成树 $\mathcal{T}_g$ 的边数，而 $M_{g,\,q}-N_{g,\,q}+1$ 是

存在于 $\mathcal{G}_q(g)$ 中但不存在于 $\mathcal{T}_g$ 中的边数，换言之，即 $\mathcal{G}_q(g)$ 中的边数减去 $\mathcal{T}_g$ 中的边数。将式 (4) 和式 (3) 中 $N_{g,\ q}$ 和 $M_{g,\ q}$ 的表达式代入式 (26)，得到

$$\begin{aligned} & N_{\mathrm{st}}(g+1,q) \\ &= N_{\mathrm{st}}(g,q)2^{\frac{q+1}{q+3}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\frac{q+1}{q+3}} \\ &\ !'!' \cdot (q+2)^{\frac{q^2+2q-1}{q+3}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}+\frac{q+1}{q+3}}. \end{aligned} \tag{27}$$

取初始条件 $N_{\mathrm{st}}(0,q) = (q+2)^q$，可得

$$\begin{aligned} & N_{\mathrm{st}}(g,q) \\ =& 2^{\frac{q+1}{q+3}\sum_{i=1}^{g}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{i}-\frac{q+1}{q+3}g} \times (q+2)^q \times \\ & (q+2)^{\frac{q^2+2q-1}{q+3}\sum_{i=1}^{g}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{i}+\frac{q+1}{q+3}g} \\ =& 2^{\frac{2(q+1)}{q(q+3)^2}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}-\left(\frac{q+1}{q+3}\right)g-\frac{(q+1)^2(q+2)}{q(q+3)^2}} \times \\ & (q+2)^{\frac{2(q^2+2q-1)}{q(q+3)^2}\left[\frac{(q+1)(q+2)}{2}\right]^{g+1}+\left(\frac{q+1}{q+3}\right)g+\frac{q^3+2q^2-q+2}{q(q+3)^2}}, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

注意，定理13与文献24中采用不同技术得到的结果一致，并且在 $q=1$ 的特殊情形下化简为结果 [33]。

9. 结论

本文基于一类迭代生成的单纯形网络的特定构造和自相似结构，对其组合性质进行了系统的分析研究。我们推导出了支配数、独立数和色数。此外，我们还得到了生成树数量、偶数 q 时完美匹配数量、无环定向数量以及根连通无环定向数量的精确表达式。

所研究的组合问题是理论计算机科学的基础研究课题，其中许多问题对于一般图而言都是 NP难，甚至是 #P完全。因此，研究能够精确求解这些复杂组合问题的特殊图族具有重要意义。此外，鉴于这些组合问题与网络科学和图数据挖掘领域的各种实际应用密切相关，本研究有助于深入理解这些组合问题在单纯复形中的应用。

最后值得一提的是，所研究的单纯形网络实际上是通过边冠积迭代构造的，这使得生成的图具有自相似性。我们预计，我们针对相关问题所采用的计算方法和流程也适用于通过其他图运算构造的、具有自相似性质的其他图族 [65; 66; 67; 68; 69; 70; 71]。我们也注意到，我们的方法存在一些局限性。例如，它们不适用于具有随机性的递归图 [72; 73]。

致谢

本研究获得上海市科技重大项目（编号：2018SHZDZX01 和 2021SHZDZX0103）、国家自然科学基金（编号：61872093 和 U20B2051）、中国佛山季华实验室（编号：X190011TB190）、之江实验室以及上海脑科学与类脑研究中心的资助。谢子轩还获得复旦大学本科生科研机会计划（FDUROP）项目资助，项目编号为 22099。

参考文献

1. M. E. Newman，《复杂网络的结构与功能》，《SIAM Rev.》45(2)（2003）167–256。2. A.-L. Barab´asi，《网络科学》（剑桥大学出版社，2016）。3. A. R. Benson、D. F. Gleich 和 J. Leskovec，《复杂网络的高阶组织》，《科学》353(6295)（2016）163–166。4. J. Grilli、G. Barab´as、M. J. Michalska-Smith 和 S. Allesina，《高阶相互作用稳定竞争网络模型中的动力学》，《自然》548(7666)（2017）第210页。5. A. R. Benson、R. Abebe、M. T. Schaub、A. Jad-babaie 和 J. Kleinberg，《单纯闭包与高阶链接预测》，美国国家科学院院刊115(48)（2018）E11221–E11230。6. V. Salnikov、D. Cassese 和 R. Lambiotte，《单纯复形与复杂系统》，《欧洲物理学杂志》40(1)（2018）第014001页。7. I. Lacopini、G. Petri、A. Barrat 和 V. Latora，《社会传染的单纯形模型》，《自然·通讯》10(1)（2019）第2485页。8. A. Patania、G. Petri 和 F. Vaccarino，《合作的形态》，《EPJ数据科学》6(1)（2017）第18页。9. C. Giusti、E. Pastalkova、C. Curto 和 V. Itskov，《团拓扑揭示神经相关性的内在几何结构》，美国国家科学院院刊112(44)（2015）13455–13460。

10. M. W. Reimann、M. Nolte、M. Scolamiero、K. Turner、R. Perin、G. Chindemi、P. D lotko、R. Levi、K. Hess 和 H. Markram，《神经元团被束缚于空腔中，为结构与功能之间提供了缺失的链接》，《计算神经科学前沿》11（2017）第48页。11. S. Wuchty、Z. N. Oltvai 和 A.-L. Barab´asi，《酵母蛋白质相互作用网络中基序组分的进化保守性》，《自然·遗传学》35(2)（2003）第176页。12. F. Battiston、G. Cencetti、I. Iacopini、V. Latora、M. Lucas、A. Patania、J.-G. Young 和 G. Petri，《超越成对相互作用的网络：结构与动力学》，《物理学报告》907（2021）1–68。13. G. Bianconi 和 R. M. Ziff，《双曲单纯复形上的拓扑渗流》，《物理评论E》98(5)（2018）第052308页。14. U. Alvarez-Rodriguez、F. Battiston、G. F. de Ar-ruda、Y. Moreno、M. Perc 和 V. Latora，《社会网络中高阶相互作用的演化动力学》，《自然·人类行为》5（2021）586–595。15. P. S. Skardal 和 A. Arenas，《全局耦合振子单纯形中的突变失同步与广泛多稳态》，《物理评论快报》122(24)（2019）第248301页。16. L. Gambuzza、F. Di Patti、L. Gallo、S. Lepri、M. Ro-mance、R. Criado、M. Frasca、V. Latora 和 S. Boc-caletti，《单纯复形中的同步稳定性》，《自然·通讯》12(1)（2021）1–13。17. J. T. Matamalas、S. G´omez 和 A. Arenas，《单纯复形中疫情传播的突变相变》，《物理评论研究》2(1)（2020）第012049页。18. O. T. Courtney 和 G. Bianconi，《加权生长单纯复形》，《物理评论E》95(6)（2017）第062301页。19. G. Petri 和 A. Barrat，《单纯形活动驱动模型》，《物理评论快报》121(22)（2018）第228301页。20. K. Kovalenko、I. Sendi˜na-Nadal、N. Khalil、A. Dainiak、D. Musatov、A. M. Raigorod-skii、K. Alfaro-Bittner、B. Barzel 和 S. Boccaletti，《生长的无标度单纯形》，《通讯·物理》4(1)（2021）1–9。21. A. Hatcher，《代数拓扑》（剑桥大学出版社，2002）。22. T. W. Haynes 和 L. M. Lawson，《E 图在网络设计中的应用》，《网络》23(5)（1993）473–479。23. T. W. Haynes 和 L. M. Lawson，《E 图的不变量》，《国际计算数学杂志》55(1-2)（1995）19–27。24. Y. Wang、Y. Yi、W. Xu 和 Z. Zhang，《通过图的边积在复杂网络中对高阶相互作用进行建模》，《计算机杂志》65(9)（2022年）2347–2359。25. M. Zhu、W. Xu、Z. Zhang、H. Kan 和 G. Chen，《单纯形网络中的电阻距离》，《计算机杂志》。（即将发表）（2022年）。26. S. N. Dorogovtsev、A. V. Goltsev 和 J. F. F. Mendes，伪分形无标度网络，《物理评论E》65(6)（2002）第066122 页。27. X. Zhou 和 Z. Zhang，伪分形无标度网络与谢尔宾斯基地毯中的边支配数及最小边支配集数量，《分形》29(07)（2021）第 2150209 页。28. C. Xing 和 H. Yuan，带有完美陷阱的伪分形无标度网络上的懒随机游走，《分形》30(1)（2022年）第2250030 页。29. X. Wang、W. Slamu、K. Yu 和 Y. Zhu，伪分形无标度网络中的最大匹配，《分形》30(4)（2022年）第 2250077 页。30. H. D. Rozenfeld、S. Havlin 和 D. Ben-Avraham，分形与超分形递归无标度网络，《新物理学杂志》9(6)（2007）第 175 页。31. Z. Zhang、L. Rong 和 S. Zhou，伪分形无标度网络的一般几何增长模型，《物理学A辑》377(1)（2007）329–339。32. Z. Zhang、Y. Qi、S. Zhou、W. Xie 和 J. Guan，伪分形无标度网络平均首次通过时间的精确解，《物理评论E》79(2)（2009）第021127 页。33. Z. Zhang 、 H. Liu 、 B. Wu 和 S. Zhou，伪分形无标度网络生成树的枚举，《欧洲物理学快报》90(6)（2010）第 68002 页。34. J. Peng、E. Agliari 和 Z. Zhang，伪分形无标度网络首次通过性质的精确计算，《混沌》25(7)（2015）第 073118 页。35. C. T. Diggans、E. M. Bollt 和 D. Ben-Avraham，递归无标度图的生成树，《物理评论E》105(2)（2022年）第 024312 页。36. Y. Yi、Z. Zhang 和 S. Patterson，复杂网络一致性动力学中的无标度环结构具有抗噪声能力，《IEEE控制论汇刊》50(1)（2020）190–200。37. W. Xu、B. Wu、Z. Zhang、Z. Zhang、H. Kan 和 G. Chen，含噪二阶无标度一致性网络的相干性标度，《IEEE控制论汇刊》52(7)（2022年）5923–5934。38. A.-L. Barab´asi 和 R. Albert，随机网络中标度的涌现，《科学》286(5439)（1999）509–512。39. D. J. Watts 和 S. H. Strogatz，“小世界”网络的集体动力学，《自然》393(6684)（1998）440–442。40. L. Shan、H. Li 和 Z. Zhang，伪分形无标度网络与谢尔宾斯基图中的支配数和最小支配集，《理论计算机科学》677（2017）12–30。41. L. Shan、H. Li 和 Z. Zhang，伪分形无标度网络与谢尔宾斯基地毯中的独立数及最大独立集数量，《理论计算机科学》720（2018）47–54。42. R. Yuster，正则图和近正则图中的最大匹配，《Algorithmica》66(1)（2013）87–

92。43. W.-K. Hon、T. Kloks、C.-H. Liu、H.-H. Liu、S.-H. Poon 和 Y.-L. Wang，关于图的范畴积的最大独立集及其最终范畴比，《理论计算机科学》588（2015）81–95。44. M. Gast、M. Hauptmann 和 M. Karpinski，幂律图上支配集问题的不可近似性，《理论计算机科学》562（2015）436–452。45. J.-F. Couturier、R. Letourneur 和 M. Liedloff，若干图类中极小支配集的数量，《理论计算机科学》562（2015）634–642。46. L. Valiant，计算永久式的复杂性，《理论计算机科学》8(2)（1979）189–201。47. L. Valiant，枚举与可靠性问题的复杂性，SIAM《计算杂志》8(3)（1979）410–421。48. L. Lov´asz 和 M. D. Plummer，《匹配理论》，《离散数学年刊》第 29 卷（North Holland，纽约，1986）。49. J. C. Nacher 和 T. Akutsu，标度指数可变的无标度网络支配问题：异质网络并不难以控制，《新物理学杂志》14(7)（2012）第 073005 页。50. Y.-Y. Liu、J.-J. Slotine 和 A.-L. Barab´asi，复杂网络的可控性，《自然》473(7346)（2011）167–173。51. Y. Y. Liu 和 A.-L. Barab´asi，复杂系统的控制原理，《现代物理评论》88(3)（2016）第 035006 页。52. Y. Liu、J. Lu、H. Yang、X. Xiao 和 Z. Wei，迈向大规模图上的最大独立集，《2015年超大型数据库国际会议论文集》8(13)（2015）2122–2133。53. L. Chang、W. Li 和 W. Zhang，通过约简剥离在线性时间内计算近最大独立集，载于《2017年ACM数据管理国际会议论文集（ACM2017）》，第 1181–1196 页。54. J. Harant、A. Pruchnewski 和 M. Voigt，关于图的支配集和独立集，《组合概率与计算》8(6)（1999）547–553。55. W. Wu、H. Du、X. Jia、Y. Li 和 S. C.-H. Huang，单位圆盘图中的最小连通支配集与极大独立集，《理论计算机科学》352(1-3)（2006）1–7。56. G. D. Birkhoff，地图着色方式数量的行列式公式，《数学年刊》14(1/4)（1912）42–46。57. N. Biggs，《代数图论》，第 2 版（剑桥大学出版社，bridge University Press, 1993). 58. R. P. Stanley，图的无环定向，《离散数学》5(2) (1973) 171–178。59. C. Greene 和 T. Zaslavsky，论通过超平面排列、分带多面体、非拉东划分和图的定向对惠特尼数的解释，《美国数学会汇刊》280(1) (1983) 97–126。60. W. T. Tutte，关于色多项式理论的贡献，《加拿大数学杂志》6(1) (1954) 80–91。61. D. Welsh，Tutte 多项式，《随机结构与算法》15(3-4) (1999) 210–228。62. P. W. Diaconis 和 S. P. Holmes，匹配与系统发育树，美国国家科学院院刊 95(25) (1998) 14600–14602。63. H. Li、S. Patterson、Y. Yi 和 Z. Zhang，连通图中生成树数量的最大化，《IEEE 信息论汇刊》66(2) (2020) 1248–1260。64. A. Cayley，树定理，《数学季刊》23 (1889) 376–378。65. J. P. Doye 和 C. P. Massen，作为空间无标度网络模型的自相似圆盘堆积，《物理评论E》71(1) (2005) 第 016128 页。66. Z. Zhang、S. Zhou、T. Zou、L. Chen 和 J. Guan，作为无标度小世界图模型的不相容网络，《欧洲物理学杂志B》60(2) (2007) 259–264。67. E. Agliari 和 R. Burioni，确定性无标度网络上的随机游走：精确结果，《物理评论E》80(3) (2009) 第 031125 页。68. Z. Zhang、J. Guan、B. Ding、L. Chen 和 S. Zhou，作为空间平面网络模型的圆盘堆积接触图，《新物理学杂志》11(8) (2009) 第 083007 页。69. F. Comellas、G. Fertin 和 A. Raspaud，具有小世界无标度性质的递归图，《物理评论E》69(3) (2004) 第 037104 页。70. L. Barriere、F. Comellas、C. Dalf´o 和 M. A. Fiol，图的层次积，《离散应用数学》157 (2009) 36–48。71. Y. Qi、Y. Yi 和 Z. Zhang，小世界层次图的拓扑和谱性质，《计算机杂志》62(5) (2019) 769–784。72. M. Hinczewski 和 A. N. Berker，无标度层次格小世界网络上伊辛模型中的反转 Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 奇异性与高温代数序，《物理评论E》73(6) (2006) 第 066126 页。73. Z. Zhang、S. Zhou、T. Zou、L. Chen 和 J. Guan，度序列相同的无标度网络中键渗流的不同阈值，《物理评论E》79(3) (2009) 第 031110 页。